Semibricks in super category O

"Odd Verma's Theorem",
arXiv2502.14274 [math.RT],2025.

廣田竣介（京都大学 理学研究科）

環論表現論シンポジウム@岡山理科大学　2025/9/9

$\mathrm{ch}\,k=0$ $\bar{k}=k$

some known classification of algebras

Vecのモノイド対象

classification of rep.fin. f.d hereditary alg [Gabriel] ADE

classification of f.d. cocommutative Hopf algebras ??

Vecの群対象

通称:有限群代数

classification of
cocommutative Hopf algebra with unique simple
subcoalgebras and f.d space of primitive elements s.t.
f.d.rep are reductive 通称:半単純Lie代数の普遍包絡代数

A～G

classification of basic f.d. Hopf algebras
with commutative dual coradical

interesting

H: basic f.d Hopf algebra $\Rightarrow \mathrm{gr}H^* \simeq R \# kG$

Andruskiewitsch-Schneider conj

R is Nichols algebra

とにかく群的なやつ
と、Lie代数的なやつ
に困難の分割できる。

Nichols algebra?

c : V⊗V $\simeq$ V⊗V with braid relation

$T_c(V) \xrightarrow[\Omega]{\exists !} Sh_c V$ C-Hopf alg hom

$\rightsquigarrow \mathrm{Im}\,\Omega \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ Nichols algebra of c

example [Lusztig]

$U_q^+(\mathfrak{g})$ in the sence of Drinfeld-Jimbo classification of Nichols algebras (of diagonal type)

→ explained by Weyl groupoids
in the sense of Heckenberger-Yamane(2008)

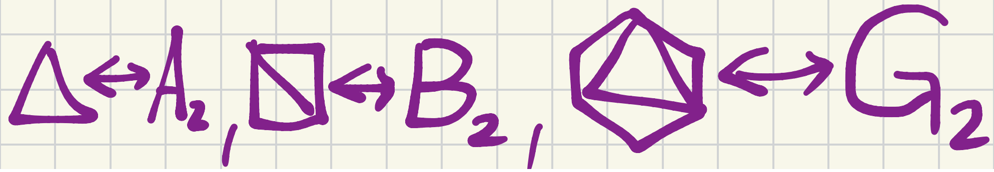
Weyl groupoids? (a.k.a. generalized root systems)

→root system with essentially different choice of bases

examples

classical root system ・・・Weyl groupoids with essentially unique base

Conway-Coxeter's frieze patterns ・・Weyl groupoids of rank 2



root systems/Weyl groups の表現論との関係

was highly interesting

とくに、

category $\mathcal{O}$ over s.s. Lie alg

実質. f.d. alg

quasi hereditary

Koszul self dual

Auslander regular

の好例

Q. Weyl groupoid的表現論 はどんな話がある？

今日のA: → "semi brick探し"

"単純加群でない加群を単純加群とみなし、加群構造を粗く理解"

Q. Weyl groupoid的表現論の好例は？

線型代数. $\mathrm{Vec}, \otimes, \tau: V\otimes W \to W\otimes V$

$v\otimes w \mapsto w\otimes v$

スーパー
超とは, $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}\text{-}\mathrm{Vec}, \otimes, \tau: V\otimes W \to W\otimes V$

$v\otimes w \mapsto (-1)^{|v||w|}\, w\otimes v$

もともと物理モチベだが,

今では純代数/圏論的によいものと思う方法多数

f.d Kac-Moody Lie超代数の分類は

Nichols代数のWeyl groupoidによる分類に

埋め込めると考えるのが自然だと考えられる

好例

↓

$\mathfrak{gl}(m|n)$

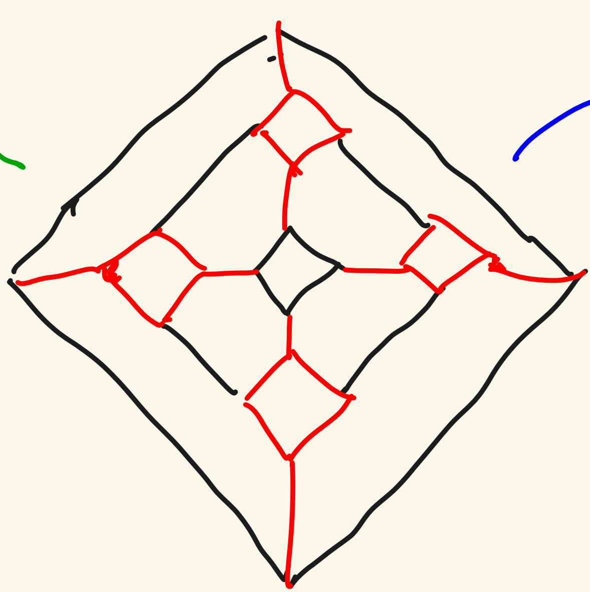
一般線型Lie超代数

$$\mathfrak{gl}(m|n) = \mathrm{End}(V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}) \simeq \begin{array}{c} \\ m \\ n \end{array} \begin{array}{c|c} \overbrace{\quad}^{m} & \overbrace{\quad}^{n} \\ \left(\begin{array}{c|c} \text{even} & \text{odd} \\ \hline \text{odd} & \text{even} \end{array}\right) & \end{array}$$

$\mathfrak{gl}(m|n)$のroot系,その基,鏡映は偶奇忘却で$\mathfrak{gl}(m+n)$のそれと同じ。

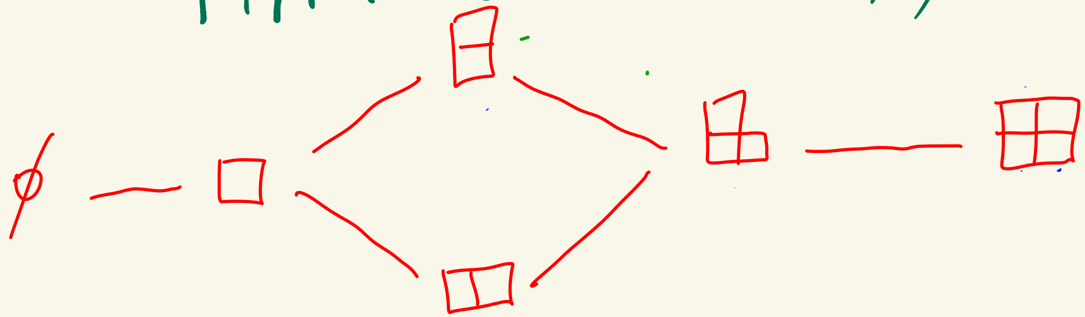
$\mathfrak{gl}(2|2)$ example

- even reflections
- odd reflections



Caylay graph of $\mathfrak{S}_{2+2}$

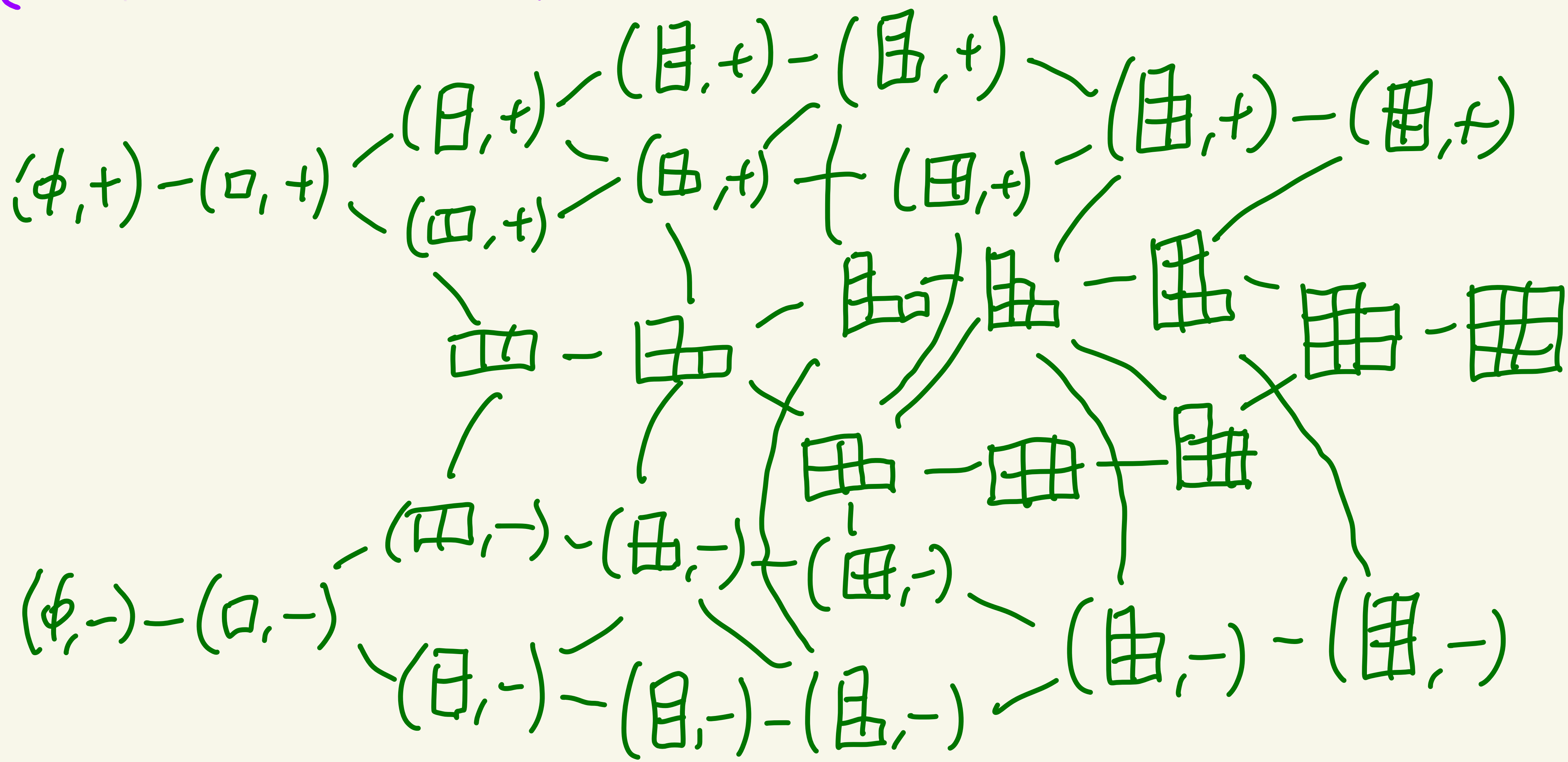
fin Young lattice $L(2,2)$



Nichols代数の話ほど奇鏡映にモチベを与えるものは今のところないと思う

例 $\mathfrak{osp}(2m|2n)$ の奇鏡映 graph はこんな感じ

(きっと偉いものだと思うが、このような graph は見たことありますか?)



Verma加群 $M^{\mathfrak{b}}(\lambda) := \mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}}^{\mathfrak{g}} k_{\lambda}$

"$\mathfrak{b}$-最高ウェイトベクトルを見る加群"

$M^{\mathfrak{b}}(\lambda)$やその商はbrick (i.e. $\mathrm{End} \simeq k$)

$M^{\mathfrak{b}}(\lambda)$の

$\mathcal{O} := \mathrm{Filt}_{wt}\{\mathrm{top}\, M^{\mathfrak{b}}(\lambda) \mid \lambda\}$は length, enough proj, blockのsimple無限個

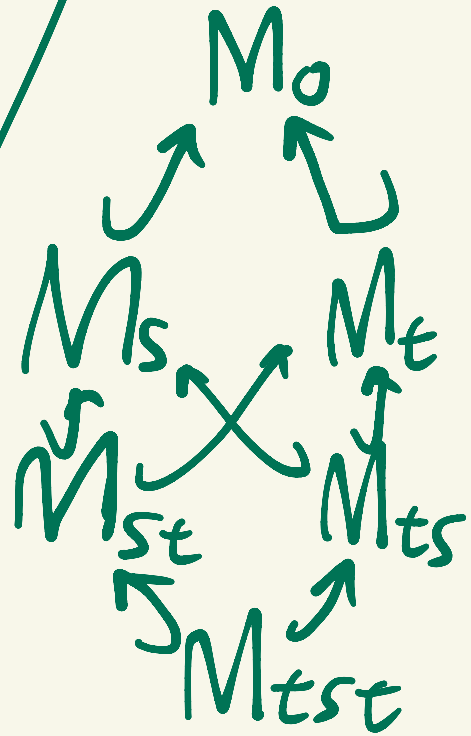
↑加群圏としては$\mathfrak{b}_{\bar{0}}$に依る。

highest weight構造は$\mathfrak{b}$に依る

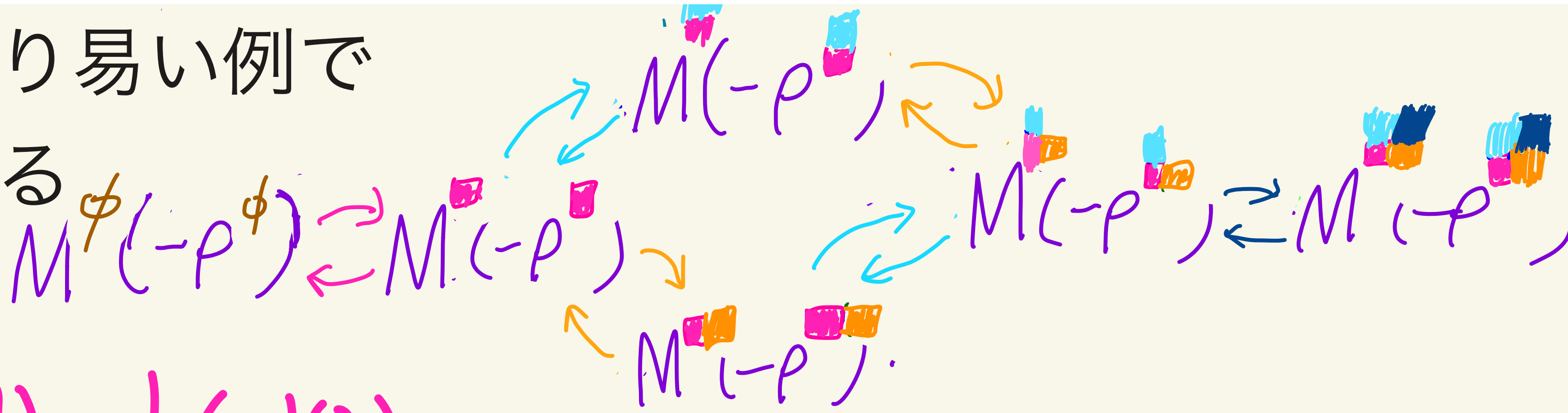
たくさんVermaが在る!

右図の奇verからsemibrick作る ↓

偶Vermaの定理 for $\mathfrak{gl}(3)$



以下、最も分かり易い例で
主結果を説明する



$\dim \mathrm{Hom}(M^b(-\rho^b), M^b(-\rho^b)) = 1$

このような絵は
超界では基本的と考えられる。

問 ノンゼロ homの合成はいつノンゼロか?

"奇Vermaの定理"[H], Nichols代数(of diag. type)で成立

グラフ上のwalk W は自然に hom(の合成)と同一視
すると以下は同値

(1) W は nonzero hom (2) W: rainbow (3) W: shortest

$$M^{\phi} = \mathrm{Im}\,M^{\phi} \supset \mathrm{Im}\,M^{\ydiagram{1}} \begin{array}{l} \supset \mathrm{Im}\,M^{\ydiagram{1,1}} \supset \\ \supset \mathrm{Im}\,M^{\ydiagram{2}} \supset \end{array} \mathrm{Im}\,M^{\ydiagram{2,1}} \supset \mathrm{Im}\,M^{\ydiagram{2,2}}.$$

$$H := \left\{ \underset{B^{\phi}}{\underset{\parallel}{\mathrm{Im}\,M^{\phi}/\mathrm{Im}\,M^{\ydiagram{1}}}},\ \underset{B^{\ydiagram{1}}}{\underset{\parallel}{\mathrm{Im}\,M^{\ydiagram{1}}/\left(\mathrm{Im}\,M^{\ydiagram{1,1}}+\mathrm{Im}\,M^{\ydiagram{2}}\right)}},\ \underset{B^{\ydiagram{1,1}}}{\underset{\parallel}{\mathrm{Im}\,M^{\ydiagram{1,1}}/\mathrm{Im}\,M^{\ydiagram{2,1}}}},\ \underset{B^{\ydiagram{2}}}{\underset{\parallel}{\mathrm{Im}\,M^{\ydiagram{2}}/\mathrm{Im}\,M^{\ydiagram{2,1}}}},\ \underset{B^{\ydiagram{2,1}}}{\underset{\parallel}{\mathrm{Im}\,M^{\ydiagram{2,1}}/\mathrm{Im}\,M^{\ydiagram{2,2}}}},\ \underset{B^{\ydiagram{2,2}}}{\underset{\parallel}{\mathrm{Im}\,M^{\ydiagram{2,2}}}} \right\}.$$

$\dim \mathrm{Hom}(B^{b}, B^{b'}) = \delta_{b,b'}$ Schur's Lemma みたす.

Hはsemibrick.とくにBたちはbrick.

Ringelによる"Schur's Lemmaの逆"により、

$\mathrm{Filt}_{0}\,H$ はアーベル圏. Ext^1閉.

森田理論によると、$\mathrm{Filt}_{\mathcal{O}}H$ を知るには、

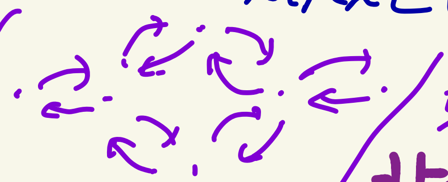
$\mathrm{Filt}_{\mathcal{O}}H$ の projective object とその間の hom が分かればよい.

あまりきれいでない計算により $M^b(-\rho^b) \in \mathrm{Filt}$

B^b の proj cover in $\mathrm{Filt}_{\mathcal{O}}H$ は $M^b(-\rho^b)$

(∵) $0 \to B^b \to E \to M^b \to 0$

ふへんせい

$\mathrm{Filt}_{\mathcal{O}}H \underset{森田}{\simeq} \mathrm{mod}\,\mathrm{End} \bigoplus_b M^b(-\rho^b) \underset{今\mathrm{Verma}}{\simeq} \mathrm{mod}\Big($  $/$ 端点等 非最短 $\Big)$

$M^b(-\rho^b)$ の構造の"困難の分割"

系 $\operatorname{Soc} M^{\mathfrak{b}}(-\rho^{\mathfrak{b}}) = \bigoplus \operatorname{Soc} B^{\mathfrak{b}'}$

$\mathfrak{b}'$: $\mathfrak{b}$から極遠.

“田要素の分割”

$\operatorname{Soc} B^{\mathfrak{b}}$はヒジメイ.

例.

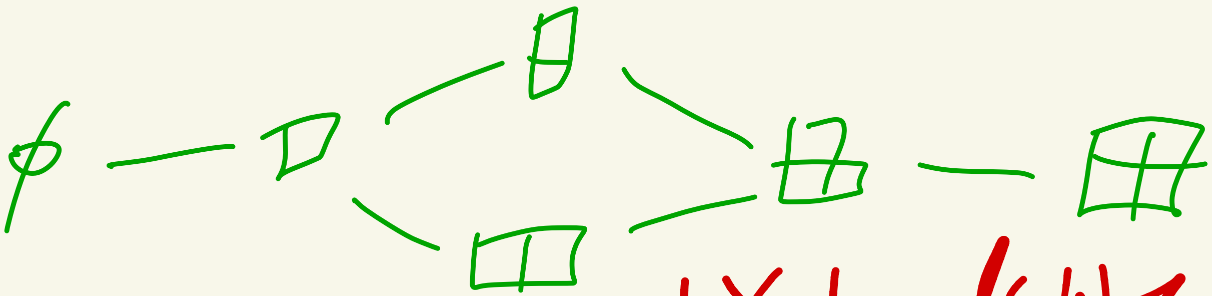
$\operatorname{Soc} M^{\phi}(-\rho^{\phi}) \cong \operatorname{Soc} B^{\text{田}}$

$\operatorname{Soc} M^{\square}(-\rho^{\square}) \cong \operatorname{Soc} B^{\phi} \oplus \operatorname{Soc} B^{\text{田}}$

$\operatorname{Soc} M^{\text{日}}(-\rho^{\text{日}}) \simeq \operatorname{Soc} B^{\phi} \oplus \operatorname{Soc} B^{\text{田}} \oplus \operatorname{Soc} B^{\text{田}}$.

※ 古典的Lie代数では,

$\operatorname{Soc} M^{\mathfrak{b}}(\lambda)$: simple,



以上, $\mathfrak{gl}(m|1)$でも成立 他は予想!!!

一般のλ、 λにいぞんする色でとなり合う基 b, b'について、

$$M^b(\lambda-\rho^b) \simeq M^{b'}(\lambda-\rho^{b'})$$

⇝ 商グラフが自然!

例

色で割っても、
rainbow ⇔ shortest
は保たれる!!

⇝ 奇Vermaの定理は商グラフで成立。

予想も同様

zigzag alg Z_n $\quad \cdot \rightleftarrows \cdot \rightleftarrows \cdot \cdots \cdot \rightleftarrows \cdot \;\Big/\; \overset{a}{\cdot} \to \cdot \to \overset{b}{\cdot} \quad a \neq b$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \rightleftarrows \cdot = \cdot \rightleftarrows$

Thm [Huerfano-Khovanov]

$$\mathrm{ad} \underset{U_q(\mathfrak{sl}_{n+1})}{\cong} K_0(\text{mod } Z_n \oplus \text{semisimple})$$

Thm [Brundan 02]

$$\Lambda^m V_\infty \otimes \Lambda^n V_\infty^* \underset{U_q(\mathfrak{sl}_\infty)}{\cong} K_0(\mathcal{F}^{\Delta}_{\mathfrak{gl}(m|n)})$$

とくに? 主block of $\mathcal{O}_{\mathfrak{gl}(1|1)} \simeq \text{mod } Z_\infty$

古典的category $\mathcal{O}$ は$\mathfrak{sl}_2$に少なからず支配されてた

Q. super $\mathcal{O}$ で $\mathfrak{gl}(1|1)$ に支配された現象は??

Thm[H]

$M^{\mathfrak{b}}(\lambda)$:奇 $\mathfrak{b}$-simple root α について, "$\mathfrak{gl}(1|1)$的たヒジメイ", $\mathfrak{b} \xrightarrow{\alpha} \mathfrak{b}'$

$$\Rightarrow \begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, "\psi_{-2}"] & M^{\mathfrak{b}}(\lambda-\alpha) \arrow[r, "\psi_{-1}"] \arrow[d, shift right] & M^{\mathfrak{b}}(\lambda) \arrow[r, "\psi_0"] \arrow[d, shift right] & M^{\mathfrak{b}}(\lambda+\alpha) \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, shift right] & \cdots \\ \cdots & M^{\mathfrak{b}'}(\lambda-2\alpha) \arrow[l] \arrow[u, shift right] & M^{\mathfrak{b}'}(\lambda-\alpha) \arrow[l] \arrow[u, shift right] & M^{\mathfrak{b}'}(\lambda) \arrow[l] \arrow[u, shift right] & \cdots \arrow[l] \end{tikzcd}$$

$V := \{\mathrm{Im}\,\psi_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ は (infinite!) semibrick.

$\mathrm{Filt}_{\mathcal{O}} V \underset{森田}{\simeq} \mathrm{mod}\,\mathrm{End} \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathrm{Ind}_{\mathfrak{b}\cap\mathfrak{b}'} k_{\lambda+i\alpha} \simeq \mathrm{mod}\,\mathbb{Z}_\infty \simeq$ 主block of $\mathfrak{gl}(1|1)$

semibrickの概念なしに定式化難しいか