# On the center of a wreath product of truncated polynomial algebras

小西正秀

September 16, 2024

第 56 回環論および表現論シンポジウム@東京学芸大学

# 目次

# 目次

# 基本の確認

**$n$ 次対称群 $S_n$**

$\{1,\ldots,n\}$ から $\{1,\ldots,n\}$ への全単射すべてのなす集合に，積を写像の合成として与えた群．

cycle 分解における各 cycle の表記は以下の通り「左から右」に行う．

**各 cycle の表記法**

$S_3$ の元 $\sigma$ が $\sigma(1)=2,\ \sigma(2)=3,\ \sigma(3)=1$ としてえられたとき，$\sigma$ の cycle 表記は $(1\ 2\ 3)$ か $(2\ 3\ 1)$ か $(3\ 1\ 2)$．この場合は $\sigma$ の cycle 分解は $1$ つの cycle からなり，その長さは $3$ である．

**注意**

$S_n$ の元 $\sigma$ の cycle 分解の表記は一意ではないが，今回の発表における議論はその表記に依らず行える．cycle 分解の表記において，長さ $1$ の cycle は混乱が生じない限り省略する．

## 共役な元の cycle 表記

$S_n$ の元 $\sigma$ の cycle 分解の表記が $(\gamma_1 \ \ldots \ \gamma_t)$ であるとする．このとき，$S_n$ の任意の元 $\tau$ に対し，$\tau\sigma\tau^{-1}$ の cycle 分解の表記として $(\tau(\gamma_1) \ \ldots \ \tau(\gamma_t))$ が得られる．

上記の命題は $\sigma$ の cycle 分解の表記が複数の cycles となる場合にも同様に成り立つ．

## $n$ の分割

正の整数の単調非増加な列 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ を分割と呼ぶ．分割 $\lambda$ に対し $\displaystyle\sum_{i=1}^{t} \lambda_i$ を $|\lambda|$ と記す．$|\lambda| = n$ であるとき，$\lambda$ を $n$ の分割と呼ぶ．また，$0$ の分割を $\emptyset$ で表す．

$0$ の分割は以下の多重分割を定義する際に必要となる．

## $n$ の多重分割

$t$ 個の分割の列 $\hat{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(t)})$ を $t$-多重分割と呼ぶ. $\displaystyle\sum_{i=1}^{t} |\lambda^{(i)}| = n$ であるとき, $\hat{\lambda}$ を $n$ の $t$-多重分割と呼ぶ.

## 注意

多重分割においては非負整数の列 $(|\lambda^{(1)}|, \ldots, |\lambda^{(t)}|)$ が単調非増加である必要はない.

## 多重分割の例

$2$ の $2$-多重分割は $((2), \emptyset), ((1,1), \emptyset), ((1), (1)), (\emptyset, (2)), (\emptyset, (1,1))$ の $5$ 個ある. $2$ の $3$-多重分割は $9$ 個, $3$ の $2$-多重分割は $10$ 個ある.

### 集合 $I_{m,r}$

$m, r$ を $1$ 以上の整数とする．集合 $\{0, \dots, r-1\}^m$ を $I_{m,r}$ で表す．$I_{m,r}$ の元 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ に対し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \alpha_k$ を $|\alpha|$ と記す．

### $I_{m,r}$ に対する操作

$I_{m,r}$ の元 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ と $1$ 以上 $m-1$ 以下の整数 $p$ に対し，$\alpha_p < r-1$ かつ $\alpha_{p+1} > 0$ のとき，$(\alpha_1, \dots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1, \alpha_{p+1} - 1, \alpha_{p+2}, \dots, \alpha_m)$ もまた $I_{m,r}$ の元である．
$|\alpha| = a(r-1) + b$ $(0 \leq a \leq m, 0 \leq b < r-1)$ とすると，$\alpha$ に上記の操作を繰り返すことで $(r-1, \dots, r-1, b, 0, \dots, 0)$ が得られる．これを $\alpha$ の左詰めと呼ぶ．

証明は帰納法により行われる．

以下, $R$ を単位元を持つ可換環とし, $A$ を有限生成自由 $R$-代数とする. 即ち, $R$-加群としては $A = \bigoplus_{i=1}^{t} Ra_i$ $(i \neq j$ ならば $a_i \neq a_j)$ と表せると仮定する.

## $R$-代数の wreath 積

有限生成自由 $R$-代数の $S_n$ による wreath 積 $A \wr S_n$ を以下のように定義する.

- 集合としては $A^{\otimes n} \otimes RS_n$ (テンソル積は $R$ 上でとる)
- $(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes \sigma$ と $(b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) \otimes \tau$ の積を $\left(a_1 b_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes a_n b_{\sigma^{-1}(n)}\right) \otimes \sigma\tau$ で定め, $R$-線形に拡張する.

このとき, $R$-加群として $A \wr S_n = \bigoplus R\left((a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_n}) \otimes \sigma\right)$ である. ただし直和は $1 \leq i_k \leq t$ $(1 \leq k \leq n)$, $\sigma \in S_n$ を走る.

$\varepsilon$ を $S_n$ の単位元, $1_R$ を $R$ の単位元 $1_A$ を $A$ の単位元とする. $s_i$ $(1 \leq i < n)$ を $S_n$ の元 $(i\ i+1)$ とする.

- $A$ の元 $a$ に対し $A \wr S_n$ の元 $(a \otimes 1_A \otimes \cdots \otimes 1_A) \otimes 1_R\ \varepsilon$ を $\hat{a}$ と書く.
- $S_n$ の元 $\sigma$ に対し $A \wr S_n$ の元 $(1_A \otimes \cdots \otimes 1_A) \otimes 1_R\ \sigma$ を $\hat{\sigma}$ と書く.

以下では混同が生じなければ $1_R$ 及び $1_A$ を共に $1$ と略記し, $1_R\ \sigma$ は $\sigma$ と略記する.

## wreath 積の積による生成性

$A = \langle a_1, \cdots, a_u \rangle_R$ であるとする. このとき, $A \wr S_n = \langle \hat{a_1}, \ldots, \hat{a_u}, \hat{s_1}, \ldots, \widehat{s_{n-1}} \rangle_R$ である. ただし, $\langle \rangle_R$ は積及び和による生成を表す.

証明の概要: 定義から例えば $\hat{s_1}\hat{a_k}\hat{s_1} = (1 \otimes a_k \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) \otimes \varepsilon$ であり, これを繰り返し用いることで任意の $(a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_n}) \otimes \sigma$ が得られる.

# 目次

$n$ と $N$ を $1$ 以上の整数とする. $r_1, \ldots, r_N$ を $1$ 以上の整数とする. 以下, $A$ は truncated polynomial $R$-algebra $R[x_1, \cdots, x_N]/\langle x_1^{r_1}, \cdots, x_N^{r_N}\rangle$ とし, $A \wr S_n$ を $A_n$ で表す.
混同が生じない限り, $\hat{\sigma}$ を単に $\sigma$ と書くこととする.
$1 \leq i \leq N$ に対し $(x_i \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1) \otimes \varepsilon$ を $x_{i,1}$ で表す.
$1 \leq p < n$ に対し $s_p x_{i,p} s_p$ を $x_{i,p+1}$ で表す.

**注意**

$x_{i,j}$ はテンソル積の $j$ 番目が $x_i$, その他は全て $1$ という元である.

$A_n$ は $x_{i,j}(1 \leq i \leq N, 1 \leq j < n)$ と $s_k(1 \leq k < n)$ で生成される.
このとき, $A_n$ における関係式は次の通りとなる.

- $x_{i,j}^{r_i} = 0 \ (1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq n)$
- $x_{i,j}x_{i',j'} = x_{i',j'}x_{i,j} \ (1 \leq i, i' \leq N, 1 \leq j, j' \leq n)$
- $s_k^2 = 1_{A_n} \ (1 \leq k < n)$
- $s_k s_{k'} = s_{k'} s_k \ (1 \leq k, k' < n, |k - k'| > 1)$
- $s_k s_{k+1} s_k = s_{k+1} s_k s_{k+1} \ (1 \leq k < n-1)$
- $x_{i,j} s_k = s_k x_{i,j} \ (1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq n, 1 \leq k < n, j \neq k, k+1)$
- $x_{i,k} s_k = s_k x_{i,k+1} \ (1 \leq i \leq N, 1 \leq k < n)$
- $x_{i,k+1} s_k = s_k x_{i,k} \ (1 \leq i \leq N, 1 \leq k < n)$

**注意**

$\sigma x_{i,j} = x_{i,\sigma(j)}\sigma$ である.

$R$-加群として $A_n = \bigoplus R \prod x_{i,j}^{d_{i,j}} \sigma$ となる．ただし直和は $0 \leq d_{i,j} < r_i (1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq n), \sigma \in S_n$ を走る．

集合 $\left\{ \prod_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq n}} x_{i,j}^{d_{i,j}} \sigma \mid 0 \leq d_{i,j} < r_i, \sigma \in S_n \right\}$ を $\mathcal{B}$ で表す．

$A_n$ の元を $\sum_{b \in \mathcal{B}} c_b b \ (c_b \in R)$ と表した際，それが中心の元であるときに $c_b$ がどのような条件を満たすかを観察する．

G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials において，群の wreath 積 $S_m \wr S_n$ の元に導入される type の概念を拡張する．

## type

$b = \prod x_{i,j}^{d_{i,j}} \sigma \in \mathcal{B}$ に対し, $\sigma$ の cycle 分解 $\gamma_1 \cdots \gamma_t$ を取る.
各 cycle $\gamma_i = (\gamma_{i,1} \ \ \ldots \ \ \gamma_{i,l(\gamma_i)})$ と $1 \leq j \leq N$ に対し, $\gamma_i$ の $x_j$ に関する次数を $\displaystyle\sum_{1 \leq k \leq l(\gamma_i)} d_{\gamma_{i,k},j}$ で定め, $\delta_{i,j}$ で表す.
$\gamma_i$ の次数を $(\delta_{i,1}, \ldots, \delta_{i,N})$ で定め, $\Delta(\gamma_i)$ で表す.
各 cycles に対し, cycle の長さと次数を組にして得られる multiset $[(l(\gamma_i), \Delta(\gamma_i))]_{1 \leq i \leq t}$ を $b$ の **type** と呼び, $\mathrm{type}(b)$ で表す.

## 注意

各 cycle の次数は和を取っているので, cycle の表し方に依らず well-definded である. $b$ の type は multiset を用いているので, $\sigma$ の cycle 分解に依らず well-definded である.

## 積の単射性 $(1)$

$b, b` \in \mathcal{B}, 1 \leq k < n$ とする．このとき，$s_k b = s_k b'$ または $b s_k = b' s_k$ ならば，$b = b'$ である．

## 積の単射性 $(2)$

$b, b` \in \mathcal{B}, 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq n$ とする．このとき，$x_{i,j} b = x_{i,j} b' \neq 0$ または $b x_{i,j} = b' x_{i,j} \neq 0$ ならば，$b = b'$ である．

## type の $S_n$ 不変性

$b \in \mathcal{B}, 1 \leq k < n, \sigma \in S_n$ とする．このとき，$\mathrm{type}(b) = \mathrm{type}(s_k b s_k)$ である．
また，$\mathrm{type}(b) = \mathrm{type}(\sigma b \sigma^{-1})$ である．

概説: $(2\ 3)(1\ 2)x_{1,2}(2\ 3) = (1\ 3)x_{1,3}$ のように，cycle と変数の添え字は同時に変化する．

$A_n$ の中心を $Z(A_n)$ 或いは単に $Z$ で表す.

### type 毎の係数比較

$\displaystyle\sum_{b\in\mathcal{B}} c_b b \in Z$ とする. このとき, $b, b' \in \mathcal{B}$ に対し, $\mathrm{type}(b) = \mathrm{type}(b')$ ならば $c_b = c_{b'}$

概説: $b = \prod x_{i,j}^{d_{i,j}}\sigma$ と $b' = \prod x_{i,j}^{d'_{i,j}}\sigma'$ に対し, type が等しいという仮定から $\sigma = \tau\sigma'\tau^{-1}$ となる $\tau \in S_n$ が存在する. $b'' = \tau b' \tau^{-1}$ とすると, 中心の元であることと $\tau$ との可換性から
$c_{b'} = c_{b''}$ なので, $c_b = c_{b''}$ を示せば良い.
以下の例のようにして各 $x_{i,j}$ との可換性を用いて係数が等しいものを辿る.
$(1\ 2)x_{1,1}$ に右から $x_{1,2}$ を掛けると $(1\ 2)x_{1,1}x_{1,2}$ であり,
$(1\ 2)x_{1,2}$ に左から $x_{1,2}$ を掛けると $(1\ 2)x_{1,1}x_{1,2}$ なので, $c_{(1\ 2)x_{1,1}} = c_{(1\ 2)x_{1,2}}$ を得る.
これを繰り返すと各 cycles 内での左詰めが行える.

$\mathrm{Type}(\mathcal{B})$ を $\{\mathrm{type}(b) \mid b \in \mathcal{B}\}$ で定める.
各 $\mathtt{T} \in \mathrm{Type}(\mathcal{B})$ に対し, $\mathcal{B}_{\mathtt{T}}$ を $\{b \in \mathcal{B} \mid \mathrm{Type}(b) = \mathtt{T}\}$ で定める.

## Central type

$\mathtt{T} \in \mathrm{Type}(\mathcal{B})$ に対し, $\mathtt{T} = [l_i, (\delta_{i,1}, \ldots, \delta_{i,N})]_{1 \leq i \leq t}$ の形で表した際, 各 $1 \leq j \leq N$ 及び各 $1 \leq k \leq t$ に対し以下が成り立つとき, $\mathtt{T}$ を central type と呼ぶ.
$(l_k - 1)(r_j - 1) \leq \delta_{j,k} \leq l_k(r_j - 1)$

## 注意

各 cycle$\gamma_k$ の $x_j$ に関する次数の最大値が $l_k(r_j - 1)$ であり, それとの差が $r_j - 1$ 以下である範囲に収まっていることが定義の肝である.

Central type が為す $\mathrm{Type}(\mathcal{B})$ の部分集合を $\mathrm{TypeC}(\mathcal{B})$ で表す.

## 係数 $0$ の部分

$\sum_{b\in\mathcal{B}} c_b b \in Z$ とする. $\mathtt{T} \in \mathrm{Type}(\mathcal{B})\backslash\mathrm{TypeC}(\mathcal{B})$ とする.
このとき, $\mathrm{type}(b) = \mathtt{T}$ ならば $c_b = 0$ である.

概説: 仮定から $\delta_{j,k} < (l_k - 1)(r_j - 1)$ となる $j$ と $k$ が存在するので, その cycle と変数に着目して $c_b = 0$ を示す.
以下の類似として示される.
$(1\ 2)$ に右から $x_{1,1}$ を掛けると $(1\ 2)x_{1,1}$ を得るが,
左から $x_{1,1}$ を掛けると $x_{1,1}(1\ 2) = (1\ 2)x_{1,2}$ により必ず $x_{1,2}$ が出てくるため,
左から $x_{1,1}$ を掛けて $(1\ 2)x_{1,1}$ となる元は存在しない, 即ち $c_{(1\ 2)} = 0$ である.

## Central type と $Z$

$\mathrm{T} \in \mathrm{TypeC}(\mathcal{B})$ とすると, $\sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathrm{T}}} b \in Z$ である.

概説: central type の定義から, 各 $s_k$ 及び各 $x_{i,1}$ との可換性を確かめる.

### $n = 2, N = 1, r_1 = 2$ の場合

$\mathrm{Type}(\mathcal{B}) = \{[(2,0)], [(2,1)], [(2,2)], [(1,0),(1,0)], [(1,1),(1,0)], [(1,1),(1,1)]\}$
$\mathrm{TypeC}(\mathcal{B}) = \{[(2,1)], [(2,2)], [(1,0),(1,0)], [(1,1),(1,0)], [(1,1),(1,1)]\}$
$x_{1,j}$ を $x_j$ と略記する $(j = 1, 2)$
$Z = \{(1\ 2)x_1 + (1\ 2)x_2, (1\ 2)x_1x_2, 1, x_1 + x_2, x_1x_2\}$

## $n=2, N=1, r_1=3$ の場合

Type は $[(2,0)]$ , $[(2,1)]$ , $[(2,2)]$ , $[(2,3)]$ , $[(2,4)]$ ,
$[(1,0),(1,0)]$ , $[(1,1),(1,0)]$ , $[(1,2),(1,0)]$ $[(1,1),(1,1)]$ , $[(1,2),(1,1)]$ , $[(1,2),(1,2)]$.
その内 central type は $[(2,2)]$ , $[(2,3)]$ , $[(2,4)]$ ,
$[(1,0),(1,0)]$ , $[(1,1),(1,0)]$ , $[(1,2),(1,0)]$ $[(1,1),(1,1)]$ , $[(1,2),(1,1)]$ , $[(1,2),(1,2)]$ の 9 個.
各 central type に対応する $Z$ の元は,
$(1\ 2)x_1^2 + (1\ 2)x_1x_2 + (1\ 2)x_2^2$,
$(1\ 2)x_1^2x_2 + (1\ 2)x_1x_2^2$,
$(1\ 2)x_1^2x_2^2$,
$1$,
$x_1 + x_2$,
$x_1^2 + x_2^2$,
$x_1x_2$,
$x_1^2x_2 + x_1x_2^2$,
$x_1^2x_2^2$.

## $n=3, N=1, r_1=2$ の場合

Type は $[(3,0)], [(3,1)], [(3,2)], [(3,3)],$
$[(2,0),(1,0)], [(2,1),(1,0)], [(2,2),(1,0)], [(2,0),(1,1)], [(2,1),(1,1)], [(2,2),(1,1)],$
$[(1,0),(1,0),(1,0)], [(1,1),(1,0),(1,0)], [(1,1),(1,1),(1,0)], [(1,1),(1,1),(1,1)]$.
その内 central type は $[(3,2)], [(3,3)],$
$[(2,1),(1,0)], [(2,2),(1,0)], [(2,1),(1,1)], [(2,2),(1,1)],$
$[(1,0),(1,0),(1,0)], [(1,1),(1,0),(1,0)], [(1,1),(1,1),(1,0)], [(1,1),(1,1),(1,1)]$ の 10 個.
各 central type に対応する $Z$ の元は,
$((1\ 2\ 3)+(1\ 3\ 2))(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3), ((1\ 2\ 3)+(1\ 3\ 2))x_1x_2x_3,$
$(1\ 2)(x_1+x_2)+(1\ 3)(x_1+x_3)+(2\ 3)(x_2+x_3), (1\ 2)x_1x_2+(1\ 3)x_1x_3+(2\ 3)x_2x_3,$
$(1\ 2)(x_1+x_2)x_3+(1\ 3)(x_1+x_3)x_2+(2\ 3)(x_2+x_3)x_1, ((1\ 2)+(1\ 3)+(2\ 3))x_1x_2x_3,$
$1, x_1+x_2+x_3, x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3, x_1x_2x_3$.

# 目次

### $Z(A_n)$ 及び多重分割との対応 [K]

$$Z(A_n) = \bigoplus_{\mathrm{T}\in\mathrm{TypeC}(\mathcal{B})} R(\sum_{b\in\mathcal{B}_{\mathrm{T}}} b)$$

$|\mathrm{TypeC}(\mathcal{B})|$ は $n$ の $\prod r_i$-多重分割の個数と等しい.

概略: 前半については今までの内容を纏めることで得られる.
後半については central type の定義において,
$(l_k - 1)(r_j - 1) \leq \delta_{j,k} \leq l_k(r_j - 1)$
を満たす $\delta_{j,k}$ は $k$ に依らず $r_j$ 個あることを用いて $\prod r_i$-多重分割に帰着する.

### Central type と多重分割との対応

$n = 2, N = 1, r_1 = 2$ の場合,
central type$[(2,1)]$, $[(2,2)]$, $[(1,0),(1,0)]$, $[(1,1),(1,0)]$, $[(1,1),(1,1)]$ はそれぞれ,
$2$ の $2$-多重分割 $((2),\emptyset), (\emptyset,(2)), ((1,1),\emptyset), ((1),(1)), (\emptyset,(1,1))$ と対応する.

## Central type と多重分割との対応 (続き)

$n=2, N=1, r_1=3$ の場合,
central type は $[(2,2)], [(2,3)], [(2,4)]$,
$[(1,0),(1,0)], [(1,1),(1,0)], [(1,2),(1,0)]$ $[(1,1),(1,1)], [(1,2),(1,1)], [(1,2),(1,2)]$ はそれぞれ,
2 の 3-多重分割 $((2),\emptyset,\emptyset), (\emptyset,(2),\emptyset), (\emptyset,\emptyset,(2))$,
$((1,1),\emptyset,\emptyset), ((1),(1),\emptyset), ((1),\emptyset,(1)), (\emptyset,(1,1),\emptyset), (\emptyset,(1),(1)), (\emptyset,\emptyset,(1,1))$ と対応する.
$n=3, N=1, r_1=2$ の場合,
central type は $[(3,2)], [(3,3)]$, $[(2,1),(1,0)], [(2,2),(1,0)], [(2,1),(1,1)], [(2,2),(1,1)]$,
$[(1,0),(1,0),(1,0)], [(1,1),(1,0),(1,0)], [(1,1),(1,1),(1,0)], [(1,1),(1,1),(1,1)]$ はそれぞれ,
3 の 2-多重分割 $((3),\emptyset), (\emptyset,(3))$, $((2,1),\emptyset), ((1),(2)), ((2),(1)), (\emptyset,(2,1))$,
$((1,1,1),\emptyset), ((1,1),(1)), ((1),(1,1)), (\emptyset,(1,1,1))$ と対応する.

# 参考文献


- G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford Univ. Press, second edition, 1995

ご清聴ありがとうございました.