ON THE PRINCIPAL 3-BLOCKS OF THE CHEVALLEY GROUPS $G_2(q)$

Yoko Usami

Abstract. Assume that q is even and

$$q \equiv 4 \text{ or } 7 \pmod 9.$$

Then the principal 3-block of $G_2(q)$ and the principal 3-block of $G_2(4)$ are Morita equivalent. Here a $\Delta(P)$-projective trivial source $G_2(4) \times G_2(q)$-module and its $\mathcal{O}$-dual induce this Morita equivalence as bimodules, where P is a common Sylow 3-subgroup of $G_2(4)$ and $G_2(q)$ and $\Delta(P) = \{(x, x) \in G_2(4) \times G_2(q) \mid x \in P\}$.

1. 序

1.1. G を有限群とする。$\mathcal{O}$ を完備離散付値環とし、K は標数が 0 であるその商体、k は標数が $p > 0$ であるその剰余体とし、またどちらも十分大きいとする。k および K が G の全ての部分群に対して十分大きいとき、$(K, \mathcal{O}, k)$ は G の全ての部分群に対して splitting p-modular system という。群環 $\mathcal{O}G$ を直既約両側イデアル分解したとき出てくるそれぞれの直既約両側イデアルを p -ブロックと呼ぶ 。(群環 kG で考えることもある。) 直既約 $\mathcal{O}G$-module はどれかの p-ブロックの module とみなせてそのブロックに属すといわれる。任意の KG -module は $\mathcal{O}$-free $\mathcal{O}G$-module から係数環拡張で得られる。trivial $\mathcal{O}G$-module の属す p-ブロックは主 (p-) ブロックと呼ばれる。また p-ブロックには、defect group と呼ばれる p-群 D が定まり、特に主 p-ブロックのときは、D はもとの群の Sylow-p 部分群となる。

定義 1.2. ふたつの有限群 G と H が p-local structure を同じくするというのは次の条件が成り立つときにいう。

(i) G と H は Sylow-p 部分群 P を共有する。

(ii) Q_1 と Q_2 は P の部分群で $f : Q_1 \to Q_2$ は同型写像とする。すると すべての Q_1 の元 x に対して $f(x) = x^g$ を満たす G の元 g が存在するときかつそのときに限ってすべての Q_1 の元 x に対して $f(x) = x^h$ を満たす H の元 h が存在する。

1.3. ここでは　p-ブロックの module の圏どうしの同値つまり森田同値に関して類別をすることを考える。この問題設定は次の２つの予想と関連して発生している。Puig 予想はもともと source algebra と定義されるものによる同値類別について述べたもので Puig 同値と呼ばれるが、それは Donovan 予想を拡張したものととらえられる。また森田同値を与える bimodule がある良い性質のものであれば、Puig 同値となることも Puig、Scott によって知られている。(Remark 7.5 [3], Theorem 1.6 [1])

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

Donovan 予想 1.4. (1980 [2]) 与えられた素数 p と defect group D に対して、k 上の群環の D を defect group として持つ p-ブロックの森田同値類は有限個しかないのではないか？

Puig 予想 (の変形版) 1.5. (1999 [3]) Donovan 予想の中の森田同値をより強い Puig 同値に置き換えたもの。

1.6. Lie 型の単純群は、有限体 $GF(q)$ 上に定義され q を動かすことで、無限列となり、位数は q の多項式として表される。p がこの多項式の同じ因子（例えば、$q-1$ など）を割る素数で、p 　の同じべきであれば、p-local structure は q に依存せず似たものになっていることが多い。それらの主 p-ブロックどうしは森田同値になりそうなのである。q の値に依存しないと証明できれば、Donovan 予想の部分的裏付けが得られたことになる。またここで森田同値が言えれば、一つの無限列での表現の考察を小さい q の小さい群の場合に帰着できて都合がよい。一方 Hiss, Kessar は $GU_n(q)$ などの族で q を固定し次元 n を動かして unipotent ブロックの森田同値類別 (実は Puig 同値類別) を試みている。[4]

1.7. q を動かすことにして有限体 $GF(q)$ 上の Chevalley 群 $G_2(q)$ で 3-local structure を共有するような無限個の群の族を考えその主 3-ブロック達の類似性を研究することにする。いま、$M(3)$ を位数 27 exponent 3 の extra special group と呼ばれるものとする。q が　mod 9 で 2,4,5 または 7 に合同のときは、$G_2(q)$ 達は $M(3)$ と同型な共通の Sylow 3-部分群 P を持ち P の正規化群は $M(3)$ に位数 16 の semidihedral group SD_{16} が忠実に作用した形の半直積と同型になっていて、同じ 3-local structure を持っている。さて主定理は以下の定理 1.8 である。実際、良い性質の bimodule での森田同値なので Puig 同値である。以下定理 1.8 およびその証明のところでは $p=3$ ということになる。

Theorem 1.8. *Assume that q is even and*

$$q \equiv 4 \ \text{ or } \ 7 \pmod 9.$$

Then the principal 3-block of $G_2(q)$ and the principal 3-block of $G_2(4)$ are Morita equivalent. Here a $\Delta(P)$-projective trivial source $G_2(4)\times G_2(q)$-module and its $\mathcal{O}$-dual induce this Morita equivalence as bimodules, where P is a common Sylow 3-subgroup of $G_2(4)$ and $G_2(q)$ and $\Delta(P)=\{(x,x)\in G_2(4)\times G_2(q)\mid x\in P\}$.

Cor. 1.9. 定理 1.8 の条件下では Hiss の論文 [5] Table 1 における分解行列中の未知パラメーター γ は 1 とわかる。

2. 定理 1.8 証明方針

2.1. 以下 q は Theorem 1.8 の条件を満たしているとする。以下 $G_2(q)$ を $G(q)$ と略記する。さらに $B(G(q))$ は $G(q)$ の主 3-ブロックとする。まず $B(G(q))$ と $B(G(4))$ の stable equivalence of Morita type (Definition 2.2 を見よ。) を先に証明してから、simple modules の行き先を考察し、以下の Linckelmann の定理 (Theorem 2.3) を使って最終的に森田同値であることを証明する。

Definition 2.2. ([6]) Let A and B be $\mathcal{O}$-algebras, $M\,(={}_BM_A)$ a (B,A)-bimodule, and $N\,(={}_AN_B)$ an (A,B)-bimodule. We say that M and N induce a *stable equivalence of Morita type* between A and B, if

(i) M is projective as a left B-module and as a right A-module,
(ii) N is projective as a left A-module and as a right B-module,

(iii) $M \underset{A}{\otimes} N = B \oplus X$ for a projective (B, B)-bimodule X and $N \underset{B}{\otimes} M = A \oplus Y$ for a projective (A, A)-bimodule Y.

For k-algebras we define a stable equivalence of Morita type similarly.

Theorem 2.3. (Linckelmann [6]) *Let G and H be two finite groups and b and b' central idempotents of $\mathcal{O}G$ and $\mathcal{O}H$ respectively. Set*

$$A = \mathcal{O}Gb\,,\ B = \mathcal{O}Hb'\,,\ \overline{A} = k \otimes_{\mathcal{O}} A \text{ and } \overline{B} = k \otimes_{\mathcal{O}} B.$$

Let M be a (B, A)-bimodule which is projective as both a left and a right module, such that the functor $M \otimes_A -$ induces a stable equivalence of Morita type between A and B. Then the following hold.

(i) *Up to isomorphism, M has a unique indecomposable non-projective direct summand M' as a (B, A)-bimodule and $k \otimes_{\mathcal{O}} M'$ is, up to isomorphism, the unique indecomposable non-projective direct summand of $k \otimes_{\mathcal{O}} M$ as a $(\overline{B}, \overline{A})$-bimodule.*

(ii) *If M is indecomposable as a (B, A)-bimodule, then for any simple A-module S, the B-module $M \otimes_A S$ is indecomposable and non-projective as a $\overline{B}$-module.*

(iii) *If for any simple A-module S, the B-module $M \otimes_A S$ is simple, then the functor $M \otimes_A -$ induces a Morita equivalence.*

2.4. ここでは実は $B(G(q))$ と $B(G(4))$ をいきなり比較するのでなく、$G(q)$ の構造の特殊性を利用する。つまり $G(q)$ は $\mathrm{SL}(3, q)$ と同型な部分群を持ちさらにその指数 2 の拡大 ($N(q)$ と略記する。) をまさに P の中心 $Z(P)$ の正規化群として持つことを利用する。ここで主 3-ブロック達 $B(N(q))$, $B(N(4))$ は森田 (Puig) 同値であることは主 3-ブロック達 $B(\mathrm{PSL}(3, q))$ と $B(\mathrm{PSL}(3, 4))$ が森田 (Puig) 同値であるという功刀の定理 (定理 2.5) から導いておく。そしてもっぱら $B(G(q))$ と $B(N(q))$ の stable eqivalence of Morita type を与える良い性質をもつ bimodule M_q を探すことにする。(そのとき以下 Broué 定理 (Theorem 2.7) を利用する。) そうすれば、$B(G(q))$ と $B(N(q))$ 、$B(N(q))$ と $B(N(4))$、$B(N(4))$ と $B(G(4))$ の stable equivalence of Morita type をそれぞれ与える bimodules を合成して $B(G(q))$ と $B(G(4))$ の stable equivalence of Morita type を引き出せる。Broué の定理を述べる前に必要な Brauer morphism と呼ばれるものを Definition 2.6 で導入しておく。

Theorem 2.5. (Kunugi [7]) *Let G be the projective special linear group $\mathrm{PSL}(3, q)$ for a power q of a prime such that $q \equiv 4$ or $7 \pmod 9$ (so that a Sylow 3-subgroup Q of G is elementary abelian of order 9). Let $(K, \mathcal{O}, k)$ be a splitting 3-modular system for all subgroups of G. Then the principal 3-block A of $\mathcal{O}G$ is Morita equivalent to the principal 3-block A_0 of $\mathcal{O}[\mathrm{PSL}(3, 4)]$. This equivalence is defined by an (A_0, A)-bimodule M which is a $\Delta(Q)$-projective 3-permtation $\mathcal{O}[\mathrm{PSL}(3, 4) \times G]$-module.*

Definition 2.6. ([8,9]) For an $\mathcal{O}G$-module V and a p-subgroup P of G, we set

$$\mathrm{Br}_P(V) = V^P / (\sum_Q Tr_Q^P(V^Q) + \mathcal{P}V^P) \tag{2.1}$$

where V^P denotes the set of fixed points of V under P and Q runs over all proper subgroups of P and

$$\mathrm{Tr}_Q^P(v) = \sum_{x \in P/Q} xv \tag{2.2}$$

for a subgroup Q of P and $v \in V^Q$. ($\mathcal{P}$ is the maximal ideal of $\mathcal{O}$.)

Theorem 2.7. (Broué [9]) *Let G be a finite group with a Sylow p-subgroup P and H a subgroup of G containing $N_G(P)$. Assume that G and H have the same fusion on p-subgroups contained in P (that is, the same p-local structure). Let b and b' be central primitive idempotents of $\mathcal{O}G$ and $\mathcal{O}H$ respectively for the principal blocks*

$$A = \mathcal{O}Gb \text{ and } B = \mathcal{O}Hb'$$

(having a common defect group P.) For a subgroup R of P, set

$$\overline{b}_R = \mathrm{Br}_R(b) \text{ and } \overline{b'}_R = \mathrm{Br}_R(b').$$

Let M be a (B, A)-bimodule and N be an (A, B)-bimodule. For each subgroup R of P set

$$\overline{M}_R = \mathrm{Br}_{\Delta(R)}(M) \text{ and } \overline{N}_R = \mathrm{Br}_{\Delta(R)}(N).$$

Assume that

(i) *M is a direct summand of the restriction of A from $G \times G$ to $H \times G$.*
(ii) *For each non-trivial subgroup R of P, $\overline{M}_R$ and $\overline{N}_R$ induce a Morita equivalence between $kC_G(R)\overline{b}_R$ and $kC_H(R)\overline{b'}_R$.*

Then M and N induce a stable equivalence of Morita type between A and B.

3. $B(G(q))$ と $B(N(q))$ の STABLE EQUIVALENCE OF MORITA TYPE を与える BIMODULE

3.1. 一般に H が G の部分群のとき $\mathcal{O}G$ は　左 $\mathcal{O}H$-加群かつ右 $\mathcal{O}G$-加群とみてテンソルすることで $\mathcal{O}G$-加群を H に制限したり $\mathcal{O}H$-加群を G へ持ち上げたりする働きをする。$\mathcal{O}G$ の両側に $\mathcal{O}H$、$\mathcal{O}G$ のそれぞれ主ブロックべき等元をつけると、主ブロックに属するものを、H へ制限して主ブロックに属するもののみ残すとか、G へ持ち上げてやはり主-ブロックに属するもののみ残す働きをすることになる。ここで $G(q)$ とその部分群 $N(q)$ の間でその主 3-ブロックべき等元 e と f を使って $f\mathcal{O}G(q)e$ を考察する。R を P の 1 でない任意の部分群として、$\Delta(R)$ に関する Brauer morphism を施してどう分解しているか調べると Broué の定理（Theorem 3.2 [8]) によって $f\mathcal{O}G(q)e$ 自身がどんな vertex の直既約因子達の直和に分解するかということに対する情報が得られる。(ちなみにこれは vertex ΔP の直既約因子 M_q を持っていて、それがのぞみの bimodule となる。）$f\mathcal{O}Ge$ は $\Delta(R)$ に対する Brauer morphism を施すと $\overline{f}_R kC_{G(q)}(R)\overline{e}_R$ となる。ここで $\overline{e}_R, \overline{f}_R$ はそれぞれ $kC_{G(q)}(R)$, $kC_{N(q)}(R)$ の主 3-ブロックのブロックべき等元である。いろいろの R で試して、$f\mathcal{O}G(q)e$ は　nonprojective 因子として M_q ともうひとつ vertex の小さい因子を持つことがわかる。

3.2. $f\mathcal{O}G(q)e$ はどういう制限や持ち上げをしているか、片方で、いろいろの permutation module を作りつつ、制限したり持ち上げたりしながら、その中で M_q 自身は何を何に写しているか調べる。(このとき vertex $\Delta(R)$ の permutation module が vertex R' の permutation module をどんな vertex の直既約加群達の直和にするかは Mackey 分解で様子を知ることができる。また $G(q)$ と $N(q)$ の間ではいくつか複数の 3-subgroup に関して Green 対応のある状況であることも有効に使える。)

4. SIMPLE MODULES の行き先

4.1. ここで 3.2 に続けてさらに 2.4 で説明したように合成して作る bimodule が何を何に写すか調べる。このときこれが exact sequence を exact sequence に写すことを有効に利用する。だからまず trivial module のように簡単な simple module や簡単な構造の permutation module の行き先を決めておいて、その組成因子の行き先を決めるといったやり方を繰り返すことができる。

References

1. A.Marcus, On equivalences between blocks of group algebras: reduction to the simple components, J. Algebra 184(1996), 372-396.
2. J.L.Alperin, Local representation theory, in Proc. Sympos. Pure Math., vol.37 pp.369-375, Amer. Math. Soc., Providence, 1980.
3. L.Puig, On the Local Structure of Morita and Rickard Equivalences between Brauer Blocks, Birkhäuser, Basel, 1999.
4. G.Hiss and R.Kessar, Scopes reduction and Morita equivalence classes of blocks in finite classical groups, J. Algebra 230(2000), 378-423.
5. G.Hiss and J.Shamash, 3-blocks and 3-modular characters of $G_2(q)$, J. Algebra 131(1990), 371-387
6. M.Linckelmann, Stable equivalences of Morita type for self-injective algebras and p-groups, Math. Z. 223(1996), 87-100.
7. N.Kunugi, Morita equivalent 3-blocks of the 3-dimensional projective special linear groups, Proc. London Math. Soc. (3) 80(2000), 575-589.
8. M.Broué, On Scott modules and p-permutation modules, Proc. Amer. Math. Soc. 93(1985), 401-408.
9. M.Broué, Equivalences of blocks of group algebras, Finite dimensional algebras and related topics (ed. V.Dlab and L.Scott), Proceedings, ICRA, Ottawa, 1992 (Kluwer, Amsterdam, 1994), 1-26.

Department of Mathematics
Ochanomizu University
2-1-1,Otsuka,Bunkyo-ku,Tokyo 112 JAPAN
E-mail address: usami@cc.ocha.ac.jp