

MATRIX FACTORIZATIONS, ORBIFOLD CURVES AND MIRROR SYMMETRY

ATSUSHI TAKAHASHI (高橋 篤史)

ABSTRACT. Mirror symmetry is now understood as a categorical duality between algebraic geometry and symplectic geometry. One of our motivations is to apply some ideas of mirror symmetry to singularity theory in order to understand various mysterious correspondences among isolated singularities, root systems, Weyl groups, Lie algebras, discrete groups, finite dimensional algebras and so on.

In my talk, I explained the homological mirror symmetry conjecture between orbifold curves and cusp singularities via Orlov type semi-orthogonal decompositions. I also gave a summary of our results on categories of maximally-graded matrixfactorizations, in particular, on the existence of full strongly exceptional collections which gives triangulated equivalences to derived categories of finite dimensional modules over finite dimensional algebras.

1. まえがき

ミラー対称性は複素代数幾何学とシンプレクティック幾何学の双対性と考えることができる。ミラー対称性のアイデアを特異点理論に応用することで、特異点・ルート系・ワイル群・リー環・有限次元代数...といった異なる数学的背景を持つ分野を結び付け、新たな知見を得ることができる。ここでは、14個の例外型特異点に対する Arnold の「奇妙な双対性」を可逆多項式という3変数の重み付き斉次多項式のクラスに拡張し、その代数的・幾何学的背景を明確にする。例えば、Arnold の「奇妙な双対性」を述べるためには Gabrielov 数という概念が必要であるが、Gabrielov 数は14個の例外型特異点に対してのみ「実験的に」与えられたものであり、一般の特異点に対する定義は存在していなかった。このことは、重み付き斉次多項式に対して系統的にカスプ特異点を対応させることで解決されることになる。そして、重み付き射影直線とカスプ特異点のホモロジー的ミラー対称性現象が Arnold の「奇妙な双対性」の真の姿であることがわかるのである。

より正確に述べることにしよう。 $f(x, y, z)$ を原点 $0 \in \mathbb{C}^3$ にのみ孤立特異点を持つ多項式とする。 f の Milnor ファイバーにおける消滅 Lagrangian 部分多様体の distinguish basis は、有向深谷圏と呼ばれる A_∞ -圏 $\text{Fuk}^\rightarrow(f)$ に圏化される。とくに、その導来圏 $D^b\text{Fuk}^\rightarrow(f)$ は、三角圏としては、さまざまな幾何学的変形・選択によらないことが知られている。このようにして、 f に対してシンプレクティック幾何学に対する不変量が得られる。とくに、定義により $D^b\text{Fuk}^\rightarrow(f)$ は full exceptional collection を持つことがわかる。

一方で、 $f(x, y, z)$ が重み付き斉次多項式ならば、極大次数付き行列因子化の圏と呼ばれる三角圏 $\text{HMF}_S^{L_f}(f)$ を構成することができる。ここで、 $S := \mathbb{C}[x, y, z]$ 、 L_f は(後で定義を述べる) f の極大次数である。なお、定義からでは明らかではないが、この圏 $\text{HMF}_S^{L_f}(f)$ は、滑らかで固有な代数多様体の有界導来圏の重み付き斉次特異点に対する類似である。

Calabi–Yau 多様体の位相的ミラー対は、特異点(物理学における Landau–Ginzburg 軌道体理論)のミラー対称性により、系統的に構成された。そこでは、良い性質を持つ重み

付き斉次多項式に対する Berglund–Hübsch 転置が重要であった．そこで，Calabi–Yau 多様体のホモロジー的ミラー対称性のアイデアを特異点に対して適用し，これらを合わせて考察することで，次の予想が自然に期待されることとなる：

Conjecture 1 ([12][13]). $f(x, y, z)$ を可逆多項式とする．

(1) 籠と関係式 (Q, I) で，三角同値

$$(1.1) \quad \mathrm{HMF}_S^{L_f}(f) \simeq D^b(\mathrm{mod}\text{-}\mathbb{C}Q/I) \simeq D^b\mathrm{Fuk}^\rightarrow(f^t)$$

をもたらずものが存在する．

(2) 籠と関係式 (Q', I') で，三角同値

$$(1.2) \quad D^b\mathrm{coh}(\mathcal{C}_{G_f}) \simeq D^b(\mathrm{mod}\text{-}\mathbb{C}Q'/I') \simeq D^b\mathrm{Fuk}^\rightarrow(T_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3})$$

をもたらずものが存在する．とくに，これは三角同値 (1.1) と整合的である．ここで， \mathcal{C}_{G_f} は f の極大可換対称性 G_f に付随した重み付き射影直線， $T_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3}$ は「カスプ特異点」である．

これらの予想に対する多くの証拠が多くの研究者によりすでに発見されている．その中でも最も重要なものは， (Q', I') として後で述べる図形 $T(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ に適切な向き付けと 2 重破線に対する関係式を与えたものがとれるということである．これにより，主定理 (Theorem 36) が証明されることになるのである．

2. 可逆多項式

$f(x_1, \dots, x_n)$ を重み付き斉次多項式とする．つまり，正の整数 w_1, \dots, w_n および d で， $\lambda \in \mathbb{C}^*$ に対して $f(\lambda^{w_1}x_1, \dots, \lambda^{w_n}x_n) = \lambda^d f(x_1, \dots, x_n)$ が成り立つものとする．このとき， $(w_1, \dots, w_n; d)$ をウェイト系という． $\mathrm{gcd}(w_1, \dots, w_n, d) = 1$ ならば，ウェイト系は既約であるという．ここでは，既約でないウェイト系も取り扱う．

Definition 2. 次の条件をみたす重み付き斉次多項式 $f(x_1, \dots, x_n)$ を可逆多項式でという：

(1) 変数の数 ($= n$) が $f(x_1, \dots, x_n)$ に現れる単項式の数に一致する，つまり， $a_i \in \mathbb{C}^*$ および非負整数 E_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$) に対して，

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i \prod_{j=1}^n x_j^{E_{ij}}$$

となる．

(2) ウェイト系 $(w_1, \dots, w_n; d)$ は， $f(x_1, \dots, x_n)$ によって ($\mathrm{gcd}(w_1, \dots, w_n; d)$ をのぞき) ただひとつおりに決定される．つまり，行列 $E := (E_{ij})$ は有理数体 \mathbb{Q} 上可逆である．

(3) $f(x_1, \dots, x_n)$ および

$$f^t(x_1, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n a_i \prod_{j=1}^n x_j^{E_{ji}},$$

として定義される $f(x_1, \dots, x_n)$ の Berglund–Hübsch 転置 $f^t(x_1, \dots, x_n)$ が原点 $0 \in \mathbb{C}^n$ に孤立特異点を持つ．言い換えれば， f, f^t の Jacobi 環 $Jac(f), Jac(f^t)$

$$Jac(f) := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] \left/ \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \right.$$

$$\text{Jac}(f^t) := \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] / \left(\frac{\partial f^t}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f^t}{\partial x_n} \right)$$

は, とともに複素数体 \mathbb{C} 上の有限次元代数となり, $\dim_{\mathbb{C}} \text{Jac}(f), \dim_{\mathbb{C}} \text{Jac}(f^t) \geq 1$ である.

これらの性質をもつ多項式は, ミラー対称性研究の初期から長期間にわたり熱心に研究されてきた. その代表例は, 多項式とその多項式の対称性からなる組のミラー対を考えることによる, 位相的ミラー対をなす Calabi–Yau 多様体の大量構成である. なお, 可逆多項式という名前は Kreuzer [9] によって導入された.

Definition 3. $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i \prod_{j=1}^n x_j^{E_{ij}}$ を可逆多項式とする. 方程式

$$E \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = \det(E) \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \quad d := \det(E).$$

の解として与えられるウェイト系 $(w_1, \dots, w_n; d)$ を f の標準ウェイト系といい, W_f であらわす.

Remark 4. クラメル公式から, 標準ウェイト系にあらわれる数 w_1, \dots, w_n は正の整数であることがすぐにわかる.

Definition 5. $f(x_1, \dots, x_n)$ を可逆多項式, $W_f = (w_1, \dots, w_n; d)$ をその標準ウェイト系とする. このとき

$$c_f := \gcd(w_1, \dots, w_n, d)$$

と定義する.

Definition 6. $f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i \prod_{j=1}^n x_j^{E_{ij}}$ を可逆多項式とする. 各変数 $x_i, i = 1, \dots, n$ に対する文字 \vec{x}_i および多項式 f に対する文字 \vec{f} によって生成される自由アーベル群 $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\vec{x}_i \oplus \mathbb{Z}\vec{f}$ を考える. このとき, 可逆多項式 f の極大次数 L_f を, 商

$$L_f := \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}\vec{x}_i \oplus \mathbb{Z}\vec{f} / I_f$$

によって定義する. ここで, I_f は元

$$\vec{f} - \sum_{j=1}^n E_{ij} \vec{x}_j, \quad i = 1, \dots, n$$

により生成される部分群である.

Remark 7. L_f は階数 1 のアーベル群である. ただし, 必ずしも自由アーベル群ではない.

Definition 8. $f(x_1, \dots, x_n)$ を可逆多項式, L_f をその極大次数とする. f の極大可換対称性 G_f を,

$$G_f := \text{Spec}(\mathbb{C}L_f)$$

で定義されるアーベル群とする. ここで, $\mathbb{C}L_f$ で L_f の群環をあらわす. 言い換えれば,

$$G_f = \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{C}^*)^n \mid \prod_{j=1}^n \lambda_j^{E_{1j}} = \dots = \prod_{j=1}^n \lambda_j^{E_{nj}} \right\}$$

である .

可逆多項式 f は G_f の変数への自然な作用により斉次である . つまり , $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in G_f$, $\lambda := \prod_{j=1}^n \lambda_j^{E_{1j}} = \dots = \prod_{j=1}^n \lambda_j^{E_{nj}}$ に対して ,

$$f(\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_n)$$

が成り立つ .

3. 行列因子化の圏とその性質

f を可逆多項式とする . 多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ を S であらわし , 環 R_f を $R_f := S/(f)$ で定義する . 有限生成 L_f -次数付き R_f -加群の圏を $\text{gr}^{L_f}\text{-}R_f$ で , 射影的加群のなす $\text{gr}^{L_f}\text{-}R_f$ の部分圏を $\text{proj}^{L_f}\text{-}R_f$ であらわす .

Definition 9. 三角圏

$$(3.1) \quad D_{Sg}^{L_f}(R_f) := D^b(\text{gr}^{L_f}\text{-}R_f)/K^b(\text{proj}^{L_f}\text{-}R_f)$$

を , 極大次数付き特異点の圏という .

Remark 10. 環 R_f が正則であるならば , 圏同値 $D^b(\text{gr}^{L_f}\text{-}R_f) \simeq K^b(\text{proj}^{L_f}\text{-}R_f)$ が得られるので , 商 $D_{Sg}^{L_f}(R_f)$ は特異点 $\{f = 0\}$ の複雑さを測っていると思える . f .

Remark 11. 特異点に台を持つ単純加群

$$\mathbb{C}(\vec{l}) := (R_f/\mathfrak{m})(\vec{l}) \in D_{Sg}^{L_f}(R_f), \quad \vec{l} \in L_f,$$

は , あとで重要な役割を果たすこととなる .

三角圏 $D_{Sg}^{L_f}(R_f)$ の定義は簡単で分かりやすいものであるが , 実際にこの圏における射の空間を計算するのは非常に難しい . また , この圏はミラー対称性の観点からも自然であるとは言い難いので , 別の同値な三角圏に置き換えることを考える .

Definition 12. $M \in \text{gr}^{L_f}\text{-}R_f$ が

$$\text{Ext}_{R_f}^i(R_f/\mathfrak{m}, M) = 0, \quad i < \dim R_f,$$

をみたすとき , M が極大次数付き Cohen-Macaulay R_f -加群であるという .

R_f は極大次数付き Gorenstein 環である , つまり , (\vec{l}) を $\vec{l} \in L_f$ による shift とするとき ,

$$(3.2) \quad K_{R_f} \simeq R_f(-\vec{e}_f), \quad \vec{e}_f := \sum_{i=1}^n \vec{x}_i - \vec{f},$$

が成立する . ゆえに , 次の結果が得られる :

Lemma 13 (Auslander). 極大次数付き Cohen-Macaulay R_f -加群の圏 $\text{CM}^{L_f}(R_f) \subset \text{gr}^{L_f}\text{-}R_f$ は Frobenius 圏である . つまり , 十分豊富な射影的対象および入射的対象を持ち , 射影的対象と入射的対象が一致するような , 完全圏の構造を持つ . \square

Definition 14. 圏 $\underline{\text{CM}}^{L_f}(R_f)$ を次のように定義する：

$$\text{Ob}(\underline{\text{CM}}^{L_f}(R_f)) = \text{Ob}(\text{CM}^{L_f}(R_f)),$$

$$\underline{\text{CM}}^{L_f}(R_f)(M, N) := \text{Hom}_{\text{gr}^{L_f}\text{-}R_f}(M, N)/\mathcal{P}(M, N).$$

ここで, $g \in \mathcal{P}(M, N)$ ということ, 射影的对象 P および射 $g' : M \rightarrow P, g'' : P \rightarrow N$ で $g = g'' \circ g'$ となるものが存在すること, として定める.

圏 $\underline{\text{CM}}^{L_f}(R_f)$ を $\text{CM}^{L_f}(R_f)$ の安定圏という.

このとき, 一般論からつぎのことがわかる：

Proposition 15 (Happel[7]). 圏 $\underline{\text{CM}}^{L_f}(R_f)$ は三角圏の構造を持つ. □

また, f が孤立特異点であることを用いると, 次の有限性条件が得られる：

Proposition 16. $\underline{\text{CM}}^{L_f}(R_f)$ は有限である, つまり

$$\sum_i \dim_k \underline{\text{CM}}^{L_f}(R_{f_w})(M, T^i N) < \infty,$$

が成立する. さらに, 任意の対象は直既約対象の有限直和と同型となる. □

三角圏 $\underline{\text{CM}}^{L_f}(R_f)$ は特別に良い自己同値関数を持つ：

Proposition 17 (Auslander-Reiten[2]). $\underline{\text{CM}}^{L_f}(R_f)$ 上の関手 $S = T^{n-2} \circ (-\tilde{e}_f)$ は Serre 関数を与える. つまり, 双関手的な同型

$$\underline{\text{CM}}^{L_f}(R_{f_w})(M, N) \simeq \text{Hom}_k(\underline{\text{CM}}^{L_f}(R_{f_w})(N, SM), k)$$

が存在する. □

R_f は超曲面環であり, 極大次数付き環として局所環であるので, 任意の $M \in \underline{\text{CM}}^{L_f}(R_f)$ に対して, $\text{gr}^{L_f}\text{-}S$ における自由分解

$$0 \rightarrow F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \rightarrow M \rightarrow 0$$

が取れることに注意する. 一方で, f を M に掛け算するという操作は 0 を掛けることに他ならないので, ホモトピー $f_0 : F_0 \rightarrow F_1$ で

$$f_1 f_0 = f \cdot \text{id}_{F_0}, \quad f_0 f_1 = f \cdot \text{id}_{F_1}$$

となるものが存在する. このことに基づいて, Eisenbud は行列因子化 (matrix factorization) の概念を導入した.

Definition 18 (Eisenbud[4]). F_0, F_1 を極大次数付き自由加群, $f_0 : F_0 \rightarrow F_1, f_1 : F_1 \rightarrow F_0$ を $f_1 f_0 = f \cdot \text{id}_{F_0}, f_0 f_1 = f \cdot \text{id}_{F_1}$ が成立するような S -準同型とする. このとき, 組 (F_0, F_1, f_0, f_1) を f の極大次数付き行列因子化といい,

$$\overline{F} := \left(F_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{f_0} \\ \xleftarrow{f_1} \end{array} F_1 \right)$$

であらわす.

Example 19. 分解

$$f = x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n.$$

が成立するような $f_i \in \mathfrak{m}$, $i = 1, \dots, n$ が取れる．対応する行列因子化は，後で述べる圏同値により， $D_{Sg}^{L_f}(R_f)$ の対象 $\mathbb{C}(\vec{l})$ に写される．

Lemma 20. f の行列因子化の圏 $\text{MF}_S^{L_f}(f)$ は Frobenius 圏の構造を持つ．とくに，その安定圏

$$\text{HMF}_S^{L_f}(f) := \underline{\text{MF}}_S^{L_f}(f)$$

は三角圏の構造を持つ． □

Lemma 21. 圏 $\text{HMF}_S^{L_f}(f)$ においては， $T^2 = (\vec{f})$ が成立する．ここで， T は三角圏の平行移動関手である．とくに， $\text{HMF}_S^{L_f}(f)$ は次元 $(n-2) - 2\frac{\epsilon_f}{h_f}$ の分数的 Calabi–Yau 圏となる．ただし， $\epsilon_f := \deg(\vec{e}_f)$ and $h_f := \deg(\vec{f})$ とする． □

行列因子化 $\bar{F} = \left(F_0 \begin{array}{c} \xrightarrow{f_0} \\ \xleftarrow{f_1} \end{array} F_1 \right)$ に対して $\text{Coker}(f_1)$ を取ることにより， $\text{CM}^{L_f}(R_f)$ の対象が得られる．これは先に述べたものの逆構成である．とくに，これは次の有名な三角同値をもたらす．

Theorem 22 (c.f., Buchweitz, Orlov[10]). 三角同値

$$\text{HMF}_S^{L_f}(f) \simeq \underline{\text{CM}}^{L_f}(R_f) \simeq D_{Sg}^{L_f}(R_f)$$

が存在する． □

Orlov 型の半直交分解定理を述べるために，商スタック

$$\mathcal{X}_{L_f} := [\text{Spec}(R_f) \setminus \{0\} / \text{Spec}(\mathbb{C} \cdot L_f)]$$

を導入しておく．このとき， $D^b \text{coh}(\mathcal{X}_{L_f}) \simeq D^b(\text{gr}^{L_f}\text{-}R_f) / D^b(\text{tor}^{L_f}\text{-}R_f)$ が成立している．

Proposition 23 (c.f., Orlov[10]). 次の三角同値が成立する：

(1) $\epsilon_f > 0$ ならば，

$$D^b \text{coh}(\mathcal{X}_{L_f}) \simeq \left\langle D_{Sg}^{L_f}(R_f), \mathcal{A}(0), \dots, \mathcal{A}(\epsilon_f - 1) \right\rangle$$

である．ここで， $\mathcal{A}(i) := \left\langle \mathcal{O}_{\mathcal{X}_{L_f}}(\vec{l}) \right\rangle_{\deg(\vec{l})=i}$ とする．

(2) $\epsilon_f = 0$ ならば， $D^b \text{coh}(\mathcal{X}_{L_f}) \simeq D_{Sg}^{L_f}(R_f)$ である．

(3) $\epsilon_f < 0$ ならば，

$$D_{Sg}^{L_f}(R_f) \simeq \left\langle D^b \text{coh}(\mathcal{X}_{L_f}), \mathcal{K}(0), \dots, \mathcal{K}(-\epsilon_f + 1) \right\rangle$$

である．ここで， $\mathcal{K}(i) := \left\langle \mathbb{C}(\vec{l}) \right\rangle_{\deg(\vec{l})=i}$ とする． □

この半直交分解に対するシンプレクティック幾何学側の対応物を考えたい．とくに，そのためには商スタック \mathcal{X}_{L_f} およびそのミラー双対の理解が不可欠となる．

4. DOLGACHEV 数

これからは三変数の可逆多項式に制限して話を進める．ここでは，次の可逆多項式の分類結果が重要な役割を果たす．

Proposition 24 ([1]). $f(x, y, z)$ を可逆多項式とする．このとき，各変数を適当にスケール変換することにより， f は Table 1 における 5 つのタイプのいずれかの形となる． \square

Type	Class	f	f^t
I	I	$x^{p_1} + y^{p_2} + z^{p_3}$ $(p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 2})$	$x^{p_1} + y^{p_2} + z^{p_3}$ $(p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 2})$
II	II	$x^{p_1} + y^{p_2} + yz^{\frac{p_3}{p_2}}$ $(p_1, p_2, \frac{p_3}{p_2} \in \mathbb{Z}_{\geq 2})$	$x^{p_1} + y^{p_2}z + z^{\frac{p_3}{p_2}}$ $(p_1, p_2, \frac{p_3}{p_2} \in \mathbb{Z}_{\geq 2})$
III	IV	$x^{p_1} + zy^{q_2+1} + yz^{q_3+1}$ $(p_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 2}, q_2, q_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$	$x^{p_1} + zy^{q_2+1} + yz^{q_3+1}$ $(p_1 \in \mathbb{Z}_{\geq 2}, q_2, q_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$
IV	V	$x^{p_1} + xy^{\frac{p_2}{p_1}} + yz^{\frac{p_3}{p_2}}$ $(p_1, \frac{p_3}{p_2} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}, \frac{p_2}{p_1} \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$	$x^{p_1}y + y^{\frac{p_2}{p_1}}z + z^{\frac{p_3}{p_2}}$ $(p_1, \frac{p_3}{p_2} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}, \frac{p_2}{p_1} \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$
V	VII	$x^{q_1}y + y^{q_2}z + z^{q_3}x$ $(q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$	$zx^{q_1} + xy^{q_2} + yz^{q_3}$ $(q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{Z}_{\geq 1})$

TABLE 1. 3 変数の可逆多項式

これから，Table 1 における「Type」という分類表記を用いる．これは [11] における分類に基づいており，[1] においては「Class」という表記で分類されている．

可逆多項式 $f(x, y, z)$ に対して，商スタック

$$(4.1) \quad \mathcal{C}_{G_f} := [f^{-1}(0) \setminus \{0\} / G_f]$$

を考えることができる．これは先に述べた \mathcal{X}_{L_f} と同じものである． f は原点 $0 \in \mathbb{C}^3$ にもみ孤立特異点をもち， G_f は 1 次元複素トーラス \mathbb{C}^* を位数 c_f の有限アーベル群で拡大したものであるため，商スタック \mathcal{C}_{G_f} は Deligne–Mumford スタックであり，とくに有限個の固定点を持つ滑らかな射影的曲線であることがわかる．さらに，次のことがわかる：

Theorem 25 ([5]). $f(x, y, z)$ を可逆多項式とする．このとき，商スタック \mathcal{C}_{G_f} は高々 3 点の固定点を持つ射影直線 \mathbb{P}^1 である．各固定点における固定化群の位数は表 2 における $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ で与えられる．ただし，固定点の数は $\alpha_i \geq 2$ となる i の数である． \square

Definition 26. Theorem 25 における数 $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ を組 (f, G_f) に対する Dolgachev 数といい， A_{G_f} であらわす．

なお，Theorem 25，Orlov 型半直交分解定理 Theorem 23 と Geigle–Lenzing[6] による重み付き射影直線の導来圏の構造定理により，次のことがわかる：

Corollary 27 ([12][13]). 極大次数付き行列因子化の圏 $\text{HMF}_S^{L_f}(f)$ は full exceptional collection をもつ． \square

さらに強く，次のことが成立する：

Type	$f(x, y, z)$	$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$
I	$x^{p_1} + y^{p_2} + z^{p_3}$	(p_1, p_2, p_3)
II	$x^{p_1} + y^{p_2} + yz^{\frac{p_3}{p_2}}$	$(p_1, \frac{p_3}{p_2}, (p_2 - 1)p_1)$
III	$x^{p_1} + zy^{q_2+1} + yz^{q_3+1}$	(p_1, p_1q_2, p_1q_3)
IV	$x^{p_1} + xy^{\frac{p_2}{p_1}} + yz^{\frac{p_3}{p_2}}$	$(\frac{p_3}{p_2}, (p_1 - 1)\frac{p_3}{p_2}, p_2 - p_1 + 1)$
V	$x^{q_1}y + y^{q_2}z + z^{q_3}x$	$(q_2q_3 - q_3 + 1, q_3q_1 - q_1 + 1, q_1q_2 - q_2 + 1)$

TABLE 2. 組 (f, G_f) に対する Dolgachev 数

Theorem 28 ([8][13]). 極大次数付き行列因子化の圏 $\text{HMF}_S^{L_f}(f)$ は full strongly exceptional collection をもつ . つまり , 有限圏 Q および経路代数 $\mathbb{C}Q$ の許容的イデアル I で , 三角同値 $D_{Sg}^{L_f}(R_f) \simeq D^b(\text{mod-}\mathbb{C}Q/I)$ が成立するものが存在する . とくに , 有限次元代数 $\mathbb{C}Q/I$ の大局次元が 3 以下になるような full strongly exceptional collection を選ぶことができる . \square

この定理は , 他の同種の結果と同様に , 次のように示される :

- (1) 「良い」行列因子化を必要な数だけ見つける .
- (2) これらの行列因子化が strongly exceptional collection をなすことを示す .
- (3) 次の Category Generating Lemma を用いて , その strongly exceptional collection が full であることを示す .

Theorem 29 (Category Generating Lemma). $\text{HMF}_S^{L_f}(f)$ の充満部分三角圏 \mathcal{T}' が exceptional collection (E_1, \dots, E_n) によって生成されていて , さらに以下の性質をみたすとする :

- (1) \mathcal{T}' は $(\vec{l}), \vec{l} \in L_f$ によって閉じている .
- (2) 対象 $E \in \mathcal{T}'$ で , $D_{Sg}^{L_f}(R_f)$ において , $\mathbb{C}(\vec{0})$ と同型となるものが存在する .

このとき , $\mathcal{T}' \simeq \text{HMF}_S^{L_f}(f)$ が成立する .

証明の概略を述べておこう . まず , \mathcal{T}' が right admissible であることに注意する :

Lemma 30. $X \in \text{HMF}_S^{L_f}(f)$ に対して , 完全三角形

$$N \rightarrow X \rightarrow M \rightarrow TN$$

で , $N \in \mathcal{T}'$ および $\text{Hom}(N, M) = 0$ が成立するものが存在する . \square

ここで ,

$$\begin{aligned} & \text{HMF}_S^{L_f}(f)(E(\vec{l}), T^i M) = 0 \quad \forall \vec{l} \in L_f, \quad \forall i \in \mathcal{Z} \\ \iff & \text{Ext}_{R_f}^i(R_f/\mathfrak{m}, M) = 0 \quad (i \neq d) \\ \iff & M \in \text{CM}^{L_f}(R_f) \text{ is Gorenstein} \\ \iff & M \in \text{CM}^{L_f}(R_f) \text{ is free} \\ \iff & M \simeq 0 \text{ in } \underline{\text{CM}}^{L_f}(R_f) \end{aligned}$$

となることから , $\mathcal{T}' \simeq \text{HMF}_S^{L_f}(f)$ であることがわかる .

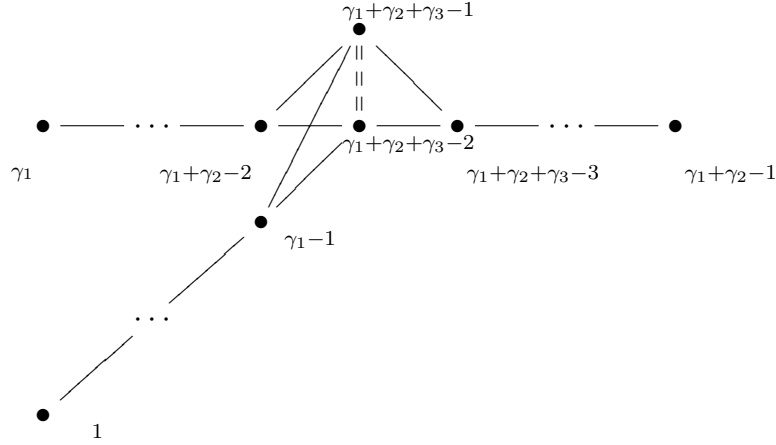


FIGURE 1. Coxeter–Dynkin 図形 $T(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$

5. GABRIELOV 数

前節では可逆多項式から代数的不変量としての正の整数の組を構成した．この節では，幾何学的不変量を取り出すことが目標である．

Definition 31. 整数 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ に対して，多項式

$$x^{\gamma_1} + y^{\gamma_2} + z^{\gamma_3} - txyz, \quad t \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

を $T_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3}$ -型の多項式という．

正の整数の組 (a, b, c) に対して，

$$\Delta(a, b, c) := abc - bc - ac - ab$$

とおく． $\Delta(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) > 0$ ならば， $T_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3}$ -型の多項式はカスプ特異点を定める．ただし，ここでは $\Delta(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) > 0$ に制限せず，一般的な条件のもとで考える．

$T_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3}$ -型の多項式の Coxeter–Dynkin 図式を $T(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ であらわす (図 1)．ここで $T(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ は， $\Delta(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \geq 0$ のときは，零点集合 $T_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} = 0$ を $(\mathbb{C}^3, 0)$ の中で考えたときの， $\Delta(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) < 0$ のときは零点集合 $T_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3} = 0$ を \mathbb{C}^3 の中で大域的に考えたときの，Milnor ファイバーにおける消滅サイクルの交叉行列を組み合わせたものである．つまり，交叉行列 $I = (I_{ij})$ は，各頂点 \bullet_i に対して $I_{ii} = -2$ ，2 頂点 \bullet_i および \bullet_j が線分で結ばれていないとき $I_{ij} = 0$ ，さらに

$$I_{ij} = 1 \Leftrightarrow \bullet_i \text{ --- } \bullet_j, \quad I_{ij} = -2 \Leftrightarrow \bullet_i = \bullet_j$$

として与えられる．

Theorem 32 ([5]). $f(x, y, z)$ を可逆多項式とする．Table 3 に基づき， f に正の整数 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ を対応させる．

- (i) $\Delta(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) < 0$ ならば，原点 $0 \in \mathbb{C}^3$ における適当な多項式座標変換により，多項式 $f(x, y, z) - xyz$ は $T_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3}$ -型の多項式の単項式変形

$$x^{\gamma_1} + y^{\gamma_2} + z^{\gamma_3} - xyz + \sum_{i=1}^{\gamma_1-1} a_i x^i + \sum_{j=1}^{\gamma_2-1} b_j y^j + \sum_{k=1}^{\gamma_3-1} c_k z^k + c, \quad a_i, b_j, c_k, c \in \mathbb{C}$$

となる .

- (ii) $\Delta(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = 0$ ならば , 原点 $0 \in \mathbb{C}^3$ における適当な正則座標変換により , 多項式 $f(x, y, z) - txyz$ はある $a \in \mathbb{C}^*$ に対して $T_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3}$ -型の多項式となる .
- (iii) $\Delta(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) > 0$ ならば , 原点 $0 \in \mathbb{C}^3$ における適当な正則座標変換により , 多項式 $f(x, y, z) - xyz$ は $T_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3}$ -型の多項式となる .

Type	$f(x, y, z)$	$(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$
I	$x^{p_1} + y^{p_2} + z^{p_3}$	(p_1, p_2, p_3)
II	$x^{p_1} + y^{p_2} + yz^{\frac{p_3}{p_2}}$	$(p_1, p_2, (\frac{p_3}{p_2} - 1)p_1)$
III	$x^{p_1} + zy^{q_2+1} + yz^{q_3+1}$	(p_1, p_1q_2, p_1q_3)
IV	$x^{p_1} + xy^{\frac{p_2}{p_1}} + yz^{\frac{p_3}{p_2}}$	$(p_1, (\frac{p_3}{p_2} - 1)p_1, \frac{p_3}{p_1} - \frac{p_3}{p_2} + 1)$
V	$x^{q_1}y + y^{q_2}z + z^{q_3}x$	$(q_2q_3 - q_2 + 1, q_3q_1 - q_3 + 1, q_1q_2 - q_1 + 1)$

TABLE 3. f に対する Gabrielov 数

□

Definition 33. Theorem 32 における正の整数の組 $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ を f の Gabrielov 数といひ Γ_f であらわす .

Corollary 34. $f(x, y, z)$ を可逆多項式 , $\Gamma_f = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ をその Gabrielov 数とする .

- (i) $\Delta(\Gamma_f) < 0$ ならば , f の Milnor ファイバー $f(x, y, z) = 1$ は $T_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3}$ -型の多項式の Milnor ファイバーに変形できる .
- (ii) $\Delta(\Gamma_f) > 0$ ならば , 特異点 $f(x, y, z)$ は $T_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3}$ -型のカスプ特異点に変形できる .

特異点 f が特異点 g に変形できるとき , g の Coxeter–Dynkin 図形に頂点と辺を付け加えて f の Coxeter–Dynkin 図形にできる . したがって次のことがわかる :

Corollary 35. $f(x, y, z)$ を可逆多項式 , $\Gamma_f = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ をその Gabrielov 数とする .

- (i) $\Delta(\Gamma_f) < 0$ ならば , f の Coxeter–Dynkin 図形は $T(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ に含まれる . とくに , f の Coxeter–Dynkin 図形は ADE 型である .
- (ii) $\Delta(\Gamma_f) = 0$ ならば , f の Coxeter–Dynkin 図形は $T(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ に一致する .
- (iii) $\Delta(\Gamma_f) > 0$ ならば , $T(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ は f の Coxeter–Dynkin 図形の一部である .

より強く , Corollary 34 は深谷圏 $D^b\text{Fuk}^\rightarrow(f)$ および $D^b\text{Fuk}^\rightarrow(T_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3})$ の間の半直交分解定理を与える . とくに , この半直交分解は特異点の圏 $D_{S_g}^{L_f}(R_f)$ に対する半直交分解定理 (c.f., [10]) のミラー対称性対応物である .

6. 奇妙な双対性

これまでの準備により , 主定理を述べるができる . とくに , Arnold の奇妙な双対性 (strange duality) はもはや「奇妙」でなく , ミラー対称性として自然に理解されるものであることがわかる .

Theorem 36 ([5]). $f(x, y, z)$ を可逆多項式とする . このとき

$$(6.1) \quad A_{G_f} = \Gamma_{f^t}, \quad A_{G_{f^t}} = \Gamma_f$$

が成り立つ．つまり，組 (f, G_f) に対する Dolgachev 数 A_{G_f} は f の Berglund–Hübsch 転置 f^t の Gabrielov 数 Γ_{f^t} に一致し，組 (f^t, G_{f^t}) に対する Dolgachev 数 $A_{G_{f^t}}$ は f の Gabrielov 数 Γ_f に一致する． \square

Type	$A_{G_f} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \Gamma_{f^t}$	$\Gamma_f = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = A_{G_{f^t}}$
I	(p_1, p_2, p_3)	(p_1, p_2, p_3)
II	$(p_1, \frac{p_3}{p_2}, (p_2 - 1)p_1)$	$(p_1, p_2, (\frac{p_3}{p_2} - 1)p_1)$
III	$(p_1, p_1 q_2, p_1 q_3)$	$(p_1, p_1 q_2, p_1 q_3)$
IV	$(\frac{p_3}{p_2}, (p_1 - 1)\frac{p_3}{p_2}, p_2 - p_1 + 1)$	$(p_1, (\frac{p_3}{p_2} - 1)p_1, \frac{p_3}{p_1} - \frac{p_3}{p_2} + 1)$
V	$(q_2 q_3 - q_3 + 1, q_3 q_1 - q_1 + 1, q_1 q_2 - q_2 + 1)$	$(q_2 q_3 - q_2 + 1, q_3 q_1 - q_3 + 1, q_1 q_2 - q_1 + 1)$

TABLE 4. 奇妙な双対性

なお，冒頭に述べた Conjecture 1 に対して，次の結果も得られている．

Theorem 37. $f(x, y, z)$ を可逆多項式， $\Gamma_f = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ をその Gabrielov 数とする． $\sum_{i=1}^3 (1/\gamma_i) > 1$ ならば，三角同値

$$(6.2) \quad D^b(\mathrm{coh}\mathbb{P}_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3}^1) \simeq D^b(\mathrm{mod}\text{-}\mathbb{C}\Delta_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3}) \simeq D^b\mathrm{Fuk}^\rightarrow(T_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3})$$

が成立する．ここで， $\mathbb{P}_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3}^1 := \mathbb{C}_{G_{f^t}}$ は Dolgachev 数 $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ を持つ重み付き射影直線， $\Delta_{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3}$ は $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ -型の拡大 Dynkin 籠とする．

REFERENCES

- [1] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, and A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps*, Volume I, Birkhäuser, Boston Basel Berlin 1985.
- [2] M. Auslander and I. Reiten, *Cohen-Macaulay modules for graded Cohen-Macaulay rings and their completions*, Commutative algebra (Berkeley, CA, 1987), 21–31, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 15, Springer, New York, 1989.
- [3] P. Berglund and T. Hübsch, *A generalized construction of mirror manifolds*, Nuclear Physics B **393** (1993), 377–391.
- [4] D. Eisenbud, *Homological algebra on a complete intersection, with an application to group representations*, Trans. AMS., 260 (1980) 35–64.
- [5] W. Ebeling and A. Takahashi, *Strange duality of weighted homogeneous polynomials*, Composito Math, accepted.
- [6] W. Geigle and H. Lenzing, *A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite-dimensional algebras*, Singularities, representation of algebras, and vector bundles (Lambrecht, 1985), pp. 265–297, Lecture Notes in Math., **1273**, Springer, Berlin, 1987.
- [7] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 119. Cambridge University Press, Cambridge, 1988. x+208 pp.
- [8] Y. Hirano and A. Takahashi, *Finite dimensional algebras associated to invertible polynomials in three variables*, in preparation.
- [9] M. Kreuzer, *The mirror map for invertible LG models*, Phys. Lett. B **328** (1994), no. 3–4, 312–318.
- [10] D. Orlov, *Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singularities*, Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. II, pp. 503–531, Progr. Math., **270**, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2009

- [11] K. Saito, *Duality for regular systems of weights*, Asian. J. Math. **2** no.4 (1998), 983–1047.
- [12] A. Takahashi, *Weighted projective lines associated to regular systems of weights of dual type*, Adv. Stud. Pure Math. **59** (2010), 371–388.
- [13] A. Takahashi, *HMS for isolated hypersurface singularities*, talk at the “Workshop on Homological Mirror Symmetry and Related Topics” January 19-24, 2009, University of Miami, the PDF file available from <http://www-math.mit.edu/~auroux/frg/miami09-notes/> .

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE
OSAKA UNIVERSITY
TOYONAKA, OSAKA 530-0043 JAPAN
E-mail address: takahashi@math.sci.osaka-u.ac.jp