SIMPLE MODULES IN THE AUSLANDER-REITEN QUIVERS FOR FINITE GROUP ALGEBRAS
有限群代数に対するアウスランダー・ライテン箙における単純加群

SHIGEO KOSHITANI (越谷 重夫　こしたに)

Abstract. For an odd prime number p we look at the positions of simple modules in the components of the stable Auslander-Reiten quiver for the principal block algebras of the group algebra kG such that a finite group G has noncyclic but abelian Sylow p-subgroups, where k is an algebraically closed field of characteristic p. Especially in the case that $p = 3$ we prove that simple modules in the pricipal blocks are always located at the end of the connected components. This is joint work with Caroline Lassueur.

まず初めに、これは Caroline Lassueur との共同結果である [13]。

有限群の（モジュラー）表現論の話ではあるが、この研究集会の主題の一つである有限次元多元環（代数）の表現論の根幹をなす理論の一つである、いわゆる Auslander-Reiten 理論との関係を考察したものである。したがって、この研究集会での話として、十分に適切であると信じているが、如何であろうか？

体 k 上有限群 G の代数（多元環）kG の、両側加群としての（kK-代数としての）直既約因子 B をブロックと呼ぶ。B はもちろん k 上有限次元代数であるが、更に強い性質として対称代数になっている。以下、簡単のために、k は代数的閉体とする。マシュケの定理より、

kG は半単純 $\Leftrightarrow$ 「k の標数はゼロ」あるいは「素数 p で G の位数は p で割りきれない」

なので、以下 G の位数 $|G|$ は p で割り切れるものとする（もちろん G の Sylow p-部分群が非自明と同値)。これのブロック版（一般化）として

B は半単純（したがって単純）代数 $\Leftrightarrow$ B の不足群 (defect group) は自明

がわかる。不足群を定義していなかった。これは推測される通り、Sylow p-部分群の一般化で、いろいろ同値な定義特徴づけがあるが、そのうちの一つは

D は自然な両側 B 代数としての全射 $B \otimes_{kH} B \twoheadrightarrow B$,
$\beta_1 \otimes \beta_2 \mapsto \beta_1\beta_2$ が分裂全射となる G の部分群 H のうちで極小のもの

で定義される。ここには D が p-群　という条件は入っていないがマシュケの定理より自動的に p-群となる。この D は G-共役を除いて一意的に定まる。またまた言い忘れていたが、ここでは、加群とは原則右加群、そして考える加群は有限生成のもののみを扱う。実は上記の不足群の定義から、結果として

全ての直既約 B-加群 X（つまり、X は直既約 kG-加群で、$XB \neq \{0\}$ となるもの）は、ある直既約 kD-加群を kG まで誘導した加群の直和因子になっている

The detailed version of this paper has been submitted for publication elsewhere [13].

がわかる。つまり有り体に言って、B の表現論は kD の表現論に多くの意味で支配されている、と言っても過言ではないと思う。([17] 参照）この概説での表現論の問題（目的）は、($\mathbb{Z}$ での素因数分解の定理に当たる）Krull-Schimdt の定理、が成立するので、($\mathbb{Z}$ での素数に対応する）有限生成直既約加群　を総て解りたい、ということになるかも知れない（これは到底叶わぬ望みだが)。ただ、直既約加群だけではなくて、その間の関係（加群準同型）も込めて圏 mod-B （有限生成右 B-加群とその間の準同型からなるアーベル圏）を考える必要があることは言うまでもない。上の話に戻ると、例えば

定理. （例えば [9, §8.9 Theorem] 参照）

(1) B は有限表現型（非同型直既約加群は有限個）$\Leftrightarrow$ D は巡回群

(2) B は無限表現型でパラメータ付けくらいはできる型 (tame representation type)
$\Leftrightarrow$ $p = 2$ で D は二面体群 (位数 4 の Klein 群を含む)
あるいは一般四元群あるいは準二面体群のいずれか

(3) B は、分類できる当てが全くない無限表現型 (wild representation type)
$\Leftrightarrow$ D は上の二つのどちらでもない

Auslander-Reiten 箙の正確な定義は教科書 [1] にゆずるが、安定 (stable) Auslander-Reiten 箙とは、有向グラフであって、その頂点は（非射影直既約加群)、そしてその間の矢印は、既約写像に対応させるグラフのことである。以下我々は最後まで、上記**定理**の (3) での B のみを考える。つまり、wild representation type の場合のみを考える。すると次のような素晴らしい定理がある。

定理. (Karin Erdmann 1995 [6]) B が wild representation type であれば、B の安定 Auslander-Reiten 箙における連結成分は必ず A_∞ 型である。

ここで A_∞ とは、いわゆる ディンキン図形での最初の A 型で（つまり直線）で片側だけに端があるもののこと、である（ちなみに A 型で線分ではない本当の直線、両方向に永遠に続くものは A_∞^∞ 型と呼ばれる)。つまり、A_∞ で端がある分けだから、当然ながら、「端の頂点に乗っている『直既約加群』は（端に位置する、ということは特別なのだから）どんな特徴があるのか？」という疑問が生じることは、全く自然である。それの特別な場合として、次の問題が自然に発生した（もちろんその前に、実例を結構沢山調べた後だと思うが)

問題. B は上の Erdmann の定理と同じ仮定を充たすとする。このとき、どんな単純（既約）B 加群も、それが属している連結成分 $\Theta := \Theta(S)$ の「端」に位置する、ということは正しいだろうか？

これが肯定的に解けている場合を挙げてみる（雰囲気を掴むことを第一にしたので、解けている最良の場合すべてを挙げているわけではない)。

定理. 次の場合には、上記**問題**は肯定に解けている。

(1) G が非自明正規 p-部分群を持つ。河田 [10]

(2) G は p-可解群。河田 [10]

(3) $p = 2$ で、G の Sylow 2-部分群は可換で B が主ブロック (自明な加群 k_G を含む kG のブロックのこと)。河田-Michler-宇野 [11]

(4) $G = [G, G]$ (交換子群)、$G = G(q)$ はリー型有限群で q が p のべきで、B は主ブロック　（本当はもう弱い仮定で良いが)。河田-Michler-宇野　[12]

(5) G が対称群、交代群の場合。 Bessenrodt-宇野 [2]

という訳で、上記**問題** はいつでも肯定的に解けるのでは？と期待したくなるかも知れないが実は、20 年以上前に反例が見つかっている。ただし、これは、上記**問題** を考えて計算された訳では全くなくて、p-分解行列を具体的な有限単純群およびその被覆に対して計算されたものである (有名な数式処理ソフト GAP を使って)。その結果、分解行列の成分（分解数）が小さいと直既約射影加群 PIM の構造が解ってしまい、その結果、反例になっていたことがかなり後になって再認識された、というのが実態である。ここで大事なことを言い忘れていた。

注意 上記**問題**の設定で、S を B に属する単純加群とする。このとき、
単純加群 S は連結成分 Θ の端に位置する
$\Leftrightarrow$ S の射影被覆 $P(S)$ のハート $\mathcal{H}(P(S)) := P(S)\cdot J(kG)/S$ は直既約である

が一般論からすぐわかる。

反例. Gerhard Hiss (1994, 1997) $p = 3$, $G := 2.\mathsf{Ru}$ （散在型有限単純群 Rudvalis 群の二重被覆)、このとき、kG の非主ブロック B で不足群 D が Sylow 3-部分群になっているものがある実際 D は位数 27、exponent 3 の extra-special 群であって、「非可換群」であることに注意)。この B の幾つかの単純加群のうち、次元が 10528, 28 のもの $S := 10528$, $T := 28$ があり、PIM $P(T)$ の構造は

$$P(T) \;=\; \boxed{\begin{matrix} T \\ S \\ T \end{matrix}}$$

したがって、

$$P(S) \;=\; \boxed{\begin{matrix} S \\ T \oplus V \\ S \end{matrix}} \quad \text{ここで } V \text{ は直既約加群、したがってゼロ加群ではない}$$

がわかり、つまり、

$$\mathcal{H}(P(S)) = T \oplus V$$

となり、 これは直既約ではないので、上記**注意** より、S は $\Theta(S)$ の端には位置していない、ことがわかる（実際 S は、端から 2 番目に位置している。下図では下端から 3 番目の様に見えるが、　安定 (stable) Auslander-Reiten 箙　ということで、$P(T)$ の部分は無視しないけないので、下端から 2 番目、ということになっている。

$$\begin{tikzcd}
 & S \arrow[dr, hook] & \\
\boxed{\begin{matrix} S \\ T \end{matrix}} \arrow[ur] \arrow[dr, hook] & & \boxed{\begin{matrix} T \\ S \end{matrix}} \\
 & P(T) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

さて、ここで今回の結果を求めるのに大変に役立った「河田の定理」を次に述べる。

定理 (河田の定理 [10]**).** B は上記の通り kG のブロックとする（本当は、直既約な対称代数で十分）。そして、単純 B-加群 S が連結成分 $\Theta := \Theta(S)$ の端から n 番目に位置していて、$n \geqq 2$ であると仮定する。このとき、更に別の単純 B-加群 $S_2, \cdots, S_n$ で次を充たすものが存在する。

(1) $S, S_2, \cdots, S_n$ はすべて非同型。
(2) $S_2, \cdots, S_n$ たちの射影被覆　$P(S_2), \cdots P(S_n)$ は、すべて単列 (uniserial) で、以下のような構造を持つ。

$$P(S_2) = \boxed{\begin{matrix} S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_n \\ S \\ S_2 \end{matrix}}, \cdots, P(S_n) = \boxed{\begin{matrix} S_n \\ S \\ S_2 \\ \vdots \\ S_{n-1} \\ S_n \end{matrix}},$$

また、次の（本質的には E.C. Dade の結果であるが）補題も主定理を証明するのに役に立つ。

補題 (E.C. Dade [3])**.** N を G の正規部分群で G/N が位数が p と素である可解群であると、仮定する。また、B, b をそれぞれ kG, kN のブロックで、$1_B = 1_b$ を充たしているとする。ここで 1_B は B の（環としての）単位元、いわゆるブロック巾等元のことである。以上の設定の下で、もしも b に対して**問題**が肯定的な解を持てば、B に対しても、**問題**が肯定的な解を持つ。

さて、いよいよ我々の主定理を述べる。

主定理 (Lassueur-越谷 [13]**).**

(1) p を奇素数とする。更に、Sylow p-部分群が非巡回群であってかつ可換であるようなすべての非可換有限単純群に対して**問題**は肯定的解を持つとする。すると、Sylow p-部分群が非巡回群であってかつ可換であるようなすべての有限群に対しても、**問題**は肯定的解を持つ.。
(2) 特に、$p = 3$, G の Sylow 3-部分群は非巡回かつ可換だと仮定する。そして B は主ブロック (自明な加群を含むブロック）だとする。すると、B に対して、**問題**は肯定的に解ける。

証明については詳しく述べないが、上記 (1) に関しては、有限単純群の分類定理を使った命題、定理である [4], [7] を使う。また 上記 (2) も Paul Fong のリスト ([14] を参照）を用いる。そして帰着定理である**補題** が有効に働く。

謝辞 プログラム責任者 眞田克典先生、および会場関連で御世話になった佐藤真久先生 始め山梨大学の関係者の方々に深く感謝の意を表します。

References

[1] M. Auslander, I. Reiten and S. Smalø, *Representation Theory of Artin Algebras* (Cambridge Univ. Press, 1995).
[2] C. Bessenrodt and K. Uno, *Character relations and simple modules in the Auslander-Reiten graph of the symmetric and alternating groups and their covering groups*, Algebr. Represent. Theory **4** (2001), 445–468.
[3] E.C. Dade, *Block extensions*, Illinois J. Math. **17** (1973), 198–272.
[4] O. Düvel, *On Donovan's conjecture*, J. Algebra **272** (2004), 1–26.
[5] K. Erdmann, *Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras.*, Lec. Notes in Math. **1428** (Springer, 1990).
[6] K. Erdmann, *On Auslander-Reiten components for group algebras*, J. Pure Appl. Algebra **104** (1995), no. 2, 149–160.
[7] P. Fong and M.E. Harris, *On perfect isometries and isotypies in finite groups*, Invent. Math. **114** (1993), 139–191.
[8] A. Hida and S. Koshitani, *Morita equivalent blocks in non-normal subgroups and p-radical blocks in finite groups*, J. London Math. Soc. (2) **59** (1999), 541–556.
[9] J.E. Humphreys, *Modular representations of finite groups of Lie type*, London Math. Soc. Lec. Note Series **326** (Cambridge University Press, 2006).
[10] S. Kawata, *On Auslander-Reiten components and simple modules for finite group algebras*, Osaka J. Math. **34** (1997), 681–688.
[11] S. Kawata, G. O. Michler and K. Uno, *On simple modules in the Auslander-Reiten components of finite groups*, Math. Z. **234** (2000), 375–398.
[12] S. Kawata, G. O. Michler and K. Uno, *On Auslander-Reiten components and simple modules for finite groups of Lie type*, Osaka J. Math. **38** (2001), 21–26.
[13] S. Koshitani and C. Lassueur, *Simple modules in the Auslander-Reiten quiver of principal blocks with abelian defect groups*, Nagoya Math. J. (掲載決定).
[14] S. Koshitani and Y. Yoshii, *Eigenvalues of Cartan matrices of principal 3-blocks of finite groups with abelian Sylow 3-subgroups*, J. Algebra **324** (2010), 1985–1993.
[15] B. Külshammer, *Morita equivalent blocks in Clifford theory of finite groups*, Astérisque **181–182** (1990), 181–182.
[16] C. Lassueur, *Relative projectivity and relative endo-trivial modules*, J. Algebra. **337** (2011), 285–317.
[17] H. Nagao and Y. Tsushima, *Representations of Finite Groups* (Academic Press, 1988).
[18] T. Okuyama and K. Uno, *On the vertices of modules in the Auslander-Reiten quiver. II*, Math. Z. **217** (1994), 121–141.

Center for Frontier Science （先進科学センター）
Chiba University （千葉大学）
Chiba 263-8522 JAPAN （263-8522 千葉市稲毛区弥生町）
E-mail address: koshitan@math.s.chiba-u.ac.jp