

WHEN IS A QUASI-DISCRETE MODULE QUASI-PROJECTIVE?

YOSHIHARU SHIBATA (柴田義大)

ISAO KIKUMASA (菊政勲)

YOSUKE KURATOMI (倉富要輔)

ABSTRACT. A module M is said to be *dual square free* if, for any nonzero module N , there are no epimorphisms from M to N^2 . Oppositely, a module M is called *dual square full* if, for any proper submodule X of M , there exist a proper submodule Y of M containing X and an epimorphism from M to $(M/Y)^2$. In this paper, we give a condition for a quasi-discrete module to be quasi-projective, using the concepts “dual square full” and “dual square free”.

Key Words: dual square free, dual square full, quasi-discrete, quasi-projective modules.

2000 *Mathematics Subject Classification:* Primary 16D40; Secondary 16D70.

1. 序論

本報告では、環は単位元をもつものとし、特に断らない限り加群は右加群とする。本研究では、ある種の lifting 加群である準離散加群が“dual square full 加群”と“dual square free 加群”の直和に分解されることを示し、その結果を応用して準離散加群が準射影となるための条件を導く。まず、lifting 加群の定義を述べる。

定義 1. 加群 M が lifting であるとは、 M の任意の部分加群 N に対し、 N に含まれる M の直和因子 X で $N/X \ll M/X$ となるものが存在するときをいう。

lifting 加群は 1976 年に Takeuchi により定義された加群であり、様々な環の特徴づけを与える重要な加群である。例えば、環 R が右 (半) 完全環であることと、 R 上の任意の (有限生成) 射影右加群が lifting 加群であることが同値である。lifting 加群はその重要性から多くの研究者らにより様々な視点で研究されている。しかし、未だに解決されていない基本的問題も多くあり、例えば次のような問題がある。

(*) 右完全環上の lifting 加群は FIEP をみたすか？

ここで FIEP は、加群の直和分解に関して自然に与えられる性質で、次で定義される：

定義 2. 加群 M が FIEP (finite internal exchange property) をみたすとは、 M の任意の有限直和分解 $M = \bigoplus_{i=1}^n M_i$ と、 M の任意の直和因子 X に対し、各 M_i の直和因子 M'_i が存在し $M = X \oplus (\bigoplus_{i=1}^n M'_i)$ をみたすときをいう。

(*) について、半完全環上では否定的である。例えば、次のような FIEP をみたさない lifting 加群の例を構成することができる。

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

例 3 ([8]). p, q を相異なる素数とし, 環 R を $R = \begin{pmatrix} \mathbb{Z}_{(p)} & \mathbb{Q} \\ 0 & \mathbb{Z}_{(q)} \end{pmatrix}$ により定めると, R は半完全環である. さらに R の右イデアル L を $L = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{Z}_{(q)} \\ 0 & \mathbb{Z}_{(q)} \end{pmatrix}$ により定め, 右 R -加群 $M = (R/L)^2$ を考えると, この M は FIEP をみたさない lifting 加群である.

一般に準射影加群 M は, (D3) とよばれる性質“ M の直和因子 A, B で $M = A + B$ をみたすものに関して $A \cap B$ が M の直和因子になる ”をみたす. この性質は, Mares による半完全加群を一般化するために 1983 年に Oshiro により導入された. (D3) をみたす lifting 加群は準離散加群 (準半完全加群) とよばれている. したがって, lifting 加群において「準射影 \Rightarrow 準離散」が成り立つ. しかし, 一般にその逆は成り立たない. 例えば, Prüfer 群 \mathbb{Z}_{p^∞} は準離散 \mathbb{Z} -加群であるが準射影ではない. そこで本報告では, 準離散加群が準射影となるための条件の一つを提示する.

2. DUAL SQUARE FREE 加群

この節では, 本報告におけるキーワードの一つである“ dual square free ”について, 定義や基本的性質を紹介する.

1975 年に Camillo により, 半単純成分における square free 性が導入された. その後, その有用性から一般の加群の性質へと拡張された; 加群 M が square free であるとは, 0 でないすべての加群 N に対して, N^2 が M に埋め込まれないときをいう. square free に関連する顕著な結果として, “ finite exchange property をみたす square free 加群は full exchange property をみたす ”というものがある. これは, 1964 年に Crawley-Jonsson により提起された“ finite exchange property をみたす加群は full exchange property をみたすか ”という未解決問題の部分的解決である.

dual square free 加群は square free の双対として次のように定義される.

定義 4 (cf.[5]). 加群 M が dual square free であるとは, 0 でないすべての加群 N に対して, M から N^2 への全射準同型が存在しないときをいう.

命題 5 ([2, 4]). 加群 M に対して, 次は同値である.

- (a) M は dual square free である.
- (b) M の真部分加群 X, Y で, $M = X + Y$ かつ $M/X \cong M/Y$ をみたすものは存在しない.

dual square free 加群の例をいくつか挙げる.

例 6. (1) \mathbb{Z} -加群 \mathbb{Z} は dual square free である.

(2) p を素数とすると, \mathbb{Z} -加群 $\mathbb{Z}_{p^\infty} \oplus \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は dual square free である.

(3) 任意の環上において, 直既約な lifting 加群はすべて dual square free である.

(4) R を基本半完全環とすると, 右 R -加群 R , 左 R -加群 R はともに dual square free である.

命題 7 (cf.[3, Proposition 2.25]). dual square free 加群の剰余加群, 余剰被覆はまた dual square free である. ただし, 加群 X が加群 M の余剰被覆であるとは, X から M への全射準同型でその核が X の余剰部分加群であるものが存在するときをいう.

一般に, dual square free 加群の部分加群, 移入包絡がまた dual square free になるとは限らない.

3. DUAL SQUARE FULL 加群

この節では、本報告のもう一つのキーワードである“ dual square full ”を紹介する. 加群 M が square full であるとは, M の任意の非零部分加群 X に対し, X の非零部分加群 Y で, Y^2 が M に埋め込まれるようなものが存在するときをいう. dual square full 加群は square full の双対として次で定義される.

定義 8 ([6]). 加群 M が dual square full であるとは, M の任意の真部分加群 X に対し, X を含む M の真部分加群 Y と, M から $(M/Y)^2$ への全射準同型が存在するときをいう.

ここで, dual square full 加群の基本的性質を紹介する. まず準備として, キーとなる次の補題を与える.

補題 9. M, N_1, N_2 を加群とし, $f_i : M \rightarrow N_i$ ($i = 1, 2$) を全射準同型とする. このとき, $M = \text{Ker}f_1 + \text{Ker}f_2$ であることと, 準同型 $\varphi : M \rightarrow N_1 \oplus N_2, m \mapsto (f_1(m), f_2(m))$ が全射であることが同値である.

証明. (\Rightarrow): φ が全射であることのみ示す. 任意に $N_1 \oplus N_2$ の元 (x_1, x_2) をとるとき, 各 f_i が全射であることより, M の元 y_i で $f_i(y_i) = x_i$ をみたすものが存在する ($i = 1, 2$). ここで仮定より, 各 y_i は $\text{Ker}f_j$ の元 k_{ij} を用いて $y_i = k_{i1} + k_{i2}$ と表される ($j = 1, 2$). このとき, $\varphi(k_{12} + k_{21}) = (x_1, x_2)$ をみたす.

(\Leftarrow): M の任意の元 x に対して, φ の全射性から $\varphi(k) = (f_1(x), 0)$ をみたす M の元 k が存在する. このとき, k は $\text{Ker}f_2$ の元であり, $f_1(x) = f_1(k)$ であることより $x - k$ は $\text{Ker}f_1$ の元, すなわち x は $\text{Ker}f_1 + \text{Ker}f_2$ の元である. したがって $M = \text{Ker}f_1 + \text{Ker}f_2$ である. \square

命題 10. 加群 M に対し, 次は同値である.

- (a) M は dual square full である.
- (b) M の任意の真部分加群 X に対し, X を含む M の真部分加群 Y と, M から $(M/Y)^2$ への全射準同型 f で, pf が M から M/Y への自然な全射準同型となるものが存在する. ただし, p は $(M/Y)^2 = M/Y \oplus M/Y$ から第一成分 M/Y への標準的射影とする.
- (c) M の任意の真部分加群 X に対し, M の真部分加群 Y, Z で $X \subseteq Y, M = Y + Z, M/Y \cong M/Z$ をみたすものが存在する.

証明. (c) \Rightarrow (b): 任意に M の真部分加群 X をとるとき, (c) より M の真部分加群 Y, Z で $X \subseteq Y, M = Y + Z, M/Z \cong M/Y$ をみたすものが存在する. ここで, π_Y, π_Z をそれぞれ M から $M/Y, M$ から M/Z への自然な全射準同型とすると, 補題 9 より, 準同型 $f : M \rightarrow (M/Y)^2, m \mapsto (\pi_Y(m), \varepsilon\pi_Z(m))$ は全射となる. したがって (b) が示された.

(b) \Rightarrow (a): 明らか.

(a) \Rightarrow (c): 任意に M の真部分加群 X をとる. このとき (a) より, X を含む M の真部分加群 Y と全射準同型 $f : M \rightarrow (M/Y)^2$ が存在する. さて, $(M/Y)^2$ から第一成分 M/Y , 第二成分 M/Y への標準的射影をそれぞれ p_1, p_2 とおくと, $M/\text{Ker}p_1f \cong M/Y \cong M/\text{Ker}p_2f$ であり, 補題 9 より $M = \text{Ker}p_1f + \text{Ker}p_2f$ である. ここで, $M = Y + \text{Ker}p_1f$ であれば (c) をみたし証明終了. $M \neq Y + \text{Ker}p_1f$ の場合を考える. このとき, 自然な全射準同型

$$M \twoheadrightarrow M/\text{Ker}p_2f \cong M/Y \twoheadrightarrow M/(Y + \text{Ker}p_1f)$$

の核を Z とおけば $\text{Ker}p_2f \subseteq Z$ であるので, $X \subseteq Y + \text{Ker}p_1f, M = (Y + \text{Ker}p_1f) + Z, M/(Y + \text{Ker}p_1f) \cong M/Z$ をみたす. \square

命題 11. 次が成り立つ.

- (1) dual square full 加群は余剰部分加群による剰余加群, 余剰被覆, 有限直和で閉じる.
- (2) 右完全環上では dual square full 加群は直和で閉じる.

一般に, dual square full 加群の直和因子, 移入包絡が dual square full になるとは限らない. また一般の環上では, dual square full 加群が (無限) 直和で閉じるか否かはわかっていない.

この節の最後に dual square full 加群の例をいくつか与える.

例 12. (1) p を素数とし, m, n を自然数とすると, \mathbb{Z} -加群 $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ は dual square full である.

(2) 任意の環上のすべての加群 M に対し, $M^{(I)}, M^I$ は dual square full となる. ただし, I は 2 つ以上の元をもつ集合とする.

(3) K を体とし, 環 R を

$$R = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & d \end{array} \right) \mid a, b, c, d \in K \right\}$$

により定める. このとき, 右 R -加群 (K, K, K) は直既約な dual square full である.

4. 主結果

最後に, 準離散加群が準射影になる条件を与える.

補題 13. M を準離散加群とすると, 次が成り立つ.

- (1) ([7, Theorem 4.15]) M は直既約分解をもつ. さらにそのような分解は直和因子を補うため, 同型を除いて一意に定まる.
- (2) ([7, Theorem 4.24]) M の直和因子 A, B に対し, A の余剰部分加群 X と B の余剰部分加群 Y で $A/X \cong B/Y$ をみたすものが存在するならば $A \cong B$ である.

命題 14. M を dual square full な準離散加群とし, $M = \bigoplus_{i \in I} H_i$ を M の直既約分解とする. このとき I の任意の元 k に対し, k と異なる I の元 l で, $H_k \cong H_l$ をみたすものが存在する.

証明. I の任意の元 k を固定すると, M は dual square full であるので, M の真部分加群 $\bigoplus_{i \in I \setminus \{k\}} H_i$ に対し M の真部分加群 X, Y で $\bigoplus_{i \in I \setminus \{k\}} H_i \subseteq X$, $M = X + Y$, $M/X \cong M/Y$ をみたすものが存在する. このとき M の lifting 性から, Y に含まれる M の直和因子 N で, $Y/N \ll M/N$ をみたすものが存在する. また, H_k が直既約 lifting であることから, $X/(\bigoplus_{i \in I \setminus \{k\}} H_i) \ll M/(\bigoplus_{i \in I \setminus \{k\}} H_i) \cong H_k$ であるので, $M = (\bigoplus_{i \in I \setminus \{k\}} H_i) + N$ である. M の準離散性から $(\bigoplus_{i \in I \setminus \{k\}} H_i) \cap N$ は M の直和因子であり, $\bigoplus_{i \in I \setminus \{k\}} H_i = H \oplus ((\bigoplus_{i \in I \setminus \{k\}} H_i) \cap N)$ とかくと, $M = H \oplus N$ となる. ここで, 自然な全射準同型

$$H_k \cong M / \left(\bigoplus_{i \in I \setminus \{k\}} H_i \right) \twoheadrightarrow M/X,$$

$$H \cong M/N \twoheadrightarrow M/Y$$

を考え, それぞれの核を S, T とおくと, $S \ll H_k$, $T \ll H$, $H_k/S \cong M/X \cong M/Y \cong H/T$ であるので補題 13(2) より $H \cong H_k$ を得る. したがって, 補題 13(1) より, $I \setminus \{k\}$ の元 l で, $H_k \cong H_l$ をみたすものが存在する. \square

定理 15. 準離散加群 M は, dual square full 加群 A と dual square free 加群 B の直和で表され, A, B は互いに同型な非零剰余加群をもたないようにとることができる. さらに, この分解は同型を除いて一意的に定まる.

証明. 補題 13(1) より, M は直既約分解をもつ. $M = \bigoplus_{i \in I} H_i$ を M の直既約分解とし, $I_1 = \{i \in I \mid i \text{ と異なる } I \text{ の元 } j \text{ で } H_i \cong H_j \text{ をみたすものが存在する}\}$, $I_2 = I \setminus I_1$ とする. このとき, $A = \bigoplus_{i \in I_1} H_i$, $B = \bigoplus_{i \in I_2} H_i$ とおくと, A は dual square full 加群, B は dual square free 加群であり, A と B は互いに同型な非零剰余加群をもたない. 以下, I_1, I_2 はともに空でないとして上記を示す.

まず, A の任意の真部分加群 X_1 に対し, A の lifting 性から $X_1/X' \ll A/X'$ をみたとす, X_1 に含まれる A の直和因子 X' が存在する. このとき, 補題 13(1) より, 分解 $A = \bigoplus_{i \in I_1} H_i$ は直和因子 X' を補うので, I_1 の空でない部分集合 J_1 で $A = X' \oplus (\bigoplus_{i \in J_1} H_i)$ をみたとすものが存在する. ここで, J_1 の元 k_1 を一つ固定し, $Y_1 = X_1 + (\bigoplus_{i \in J_1 \setminus \{k_1\}} H_i)$ とおくと, Y_1 は X_1 を含む A の真部分加群である. また, I_1 の定め方から $H_{k_1} \cong H_{l_1}$ をみたとす I_1 の元 l_1 で k_1 と異なるものが存在し,

$$A = Y_1 + (\varepsilon(H_{k_1} \cap Y_1) \oplus (\bigoplus_{i \in I_1 \setminus \{l_1\}} H_i)),$$

$$A/Y_1 \cong H_{k_1}/(H_{k_1} \cap Y_1) \cong H_{l_1}/\varepsilon(H_{k_1} \cap Y_1) \cong A/(\varepsilon(H_{k_1} \cap Y_1) \oplus (\bigoplus_{i \in I_1 \setminus \{l_1\}} H_i))$$

をみたとす. よって, 命題 10 より A は dual square full である.

また, $B = X_2 + Y_2$, $B/X_2 \cong B/Y_2$ をみたとす B の部分加群 X_2, Y_2 をとると, B の lifting 性から $X_2/X'' \ll B/X''$, $Y_2/Y'' \ll B/Y''$ をみたとす, X_2 に含まれる B の直和因子 X'' と Y_2 に含まれる B の直和因子 Y'' が存在する. このとき $B = X'' + Y''$ なので, B が準離散であることより, $X'' \cap Y''$ は B の直和因子である. $X'' = (X'' \cap Y'') \oplus \bar{X}$, $Y'' = (X'' \cap Y'') \oplus \bar{Y}$ とかくと, $B = \bar{X} \oplus Y'' = X'' \oplus \bar{Y}$ であり, $X_2 \cap \bar{Y} \ll \bar{Y}$, $\bar{X} \cap Y_2 \ll \bar{X}$ となる. ここで, 自然な全射準同型

$$\bar{X} \cong B/Y'' \rightarrow B/Y_2,$$

$$\bar{Y} \cong B/X'' \rightarrow B/X_2$$

を考え, それぞれの核を S, T とおくと, $S \ll \bar{X}$, $T \ll \bar{Y}$ である. さらに $\bar{X}/S \cong B/Y_2 \cong B/X_2 \cong \bar{Y}/T$ であることから, 補題 13(2) より $\bar{X} \cong \bar{Y}$ を得る. さて, I_2 の部分集合 J_2 を用いて $\bar{X} \cong \bigoplus_{i \in J_2} H_i$ と表したとき, J_2 が空でないとし J_2 の元 k_2 を一つ固定すると, \bar{Y} は H_{k_2} と同型な直和因子をもつが, これは I_2 の取り方に反する. したがって J_2 は空であるので, $\bar{X} = 0$, すなわち $X'' = Y'' = B$ となり, $X_2 = Y_2 = B$ を得る. ゆえに, 命題 5 より B は dual square free である.

次に, この分解が同型な非零剰余加群をもたないことを示す. $A/X \cong B/Y$ とする. このとき, A, B の lifting 性から, $X/A' \ll A/A'$, $Y/B' \ll B/B'$ をみたとすような, X に含まれる A の直和因子 A' と Y に含まれる B の直和因子 B' が存在する. ここで, $A = A' \oplus A''$, $B = B' \oplus B''$ とかき, 自然な全射準同型

$$A'' \cong A/A' \rightarrow A/X,$$

$$B'' \cong B/B' \rightarrow B/Y$$

を考えると, 上記と同様の議論により $A'' \cong B''$ を得る. そして, $B'' \neq 0$ と仮定すると I_2 の定め方に反するため $B'' = 0$, すなわち $Y = B$ を得る.

最後に, この分解が同型を除いて一意的であることを示す. M が, 同型な非零剰余加群をもたないような dual square full 加群 C と dual square free 加群 D を用いて $M = C \oplus D$ と表されたとする. $C = \bigoplus_{i \in I_3} L_i$, $D = \bigoplus_{i \in I_4} L_i$ と直既約分解したとき, 準離散加群の直既約分解の一意性から $I = I_3 \cup I_4$ としてよい. ここで, 命題 14 より I_3 の任意の元 k_3 に対し, $I_3 \setminus \{k_3\}$ の元 l_3 が存在し $L_{k_3} \cong L_{l_3}$ をみたす. 一方, D は dual square free であるので, I_4 の任意の相異なる 2 元 k_4, l_4 に対し, $L_{k_4} \not\cong L_{l_4}$ である. さらに, C, D は互いに同型な非零剰余加群をもたないので, I_3 の任意の元 i_3 と I_4 の任意の元 i_4 に対し, $L_{i_3} \not\cong L_{i_4}$ である. ゆえに, $I_3 = \{i \in I \mid i \text{ と異なる } I \text{ の元 } j \text{ で } L_i \cong L_j \text{ をみたすものが存在する}\}$, $I_4 = I \setminus I_3$ であるので, 準離散加群の直既約分解の一意性から $A \cong C$, $B \cong D$ を得る. \square

定理 16. M を準離散加群とし, $M = A \oplus B$ を定理 15 の分解とする. このとき, A は準射影加群である. また, B が準射影加群であることと M が準射影加群であることが同値である.

証明. はじめに A が準射影加群であることを示す. $A = \bigoplus_{i \in I_1} H_i$ を A の直既約分解とする. I_1 の任意の元 k を任意にとると, 命題 14 より $I_1 \setminus \{k\}$ の元 l で $H_k \cong H_l$ をみたすものが存在する. このとき, $H_k \oplus H_l$ は準離散であるので, [7, Lemma 4.23] より, H_k は H_l -射影, すなわち H_k -射影である. よって I_1 の任意の元 i に対し H_i は準射影であるので, [7, Theorem 5.2] より A は準射影である.

また, [7, Lemma 4.23] より A は B -射影, B は A -射影であり, 上記より A は A -射影である. したがって [7, Corollary 4.37] より, B が準射影であることと $M = A \oplus B$ が準射影であることは同値である. \square

定理 15 の証明の手法と [1, Theorem 3.4] を用いることで, 次が得られる.

系 17. 右完全環上の lifting 加群は, dual square full 加群 A と dual square free 加群 B の直和で表され, A, B は互いに同型な非零剰余加群をもたないようにとることができる.

REFERENCES

- [1] C. Chang and Y. Kuratomi, *Lifting modules over right perfect rings*, Comm. Algebra **35(10)** (2007), 3103–3109.
- [2] N. Ding, Y. Ibrahim, M. Yousif and Y. Zhou, *D_4 -modules*, J. Algebra **16(5)** (2017), 1750166-1–1750166-25.
- [3] Y. Ibrahim and M. Yousif, *Dual-square-free modules*, Comm. Algebra **47(7)** (2019), 2954–2966.
- [4] D. Keskin Tütüncü, I. Kikumasa, Y. Kuratomi and Y. Shibata, *On dual of square free modules*, Comm. Algebra **46(8)** (2018), 3365–3376.
- [5] I. Kikumasa and Y. Kuratomi, *On H -supplemented modules over a right perfect ring*, Comm. Algebra **46(5)** (2018), 2063–2072.
- [6] I. Kikumasa, Y. Kuratomi and Y. Shibata, *On dual square full modules*, preprint.
- [7] S. H. Mohamed and B. J. Müller, *Continuous and Discrete Modules*, Cambridge, UK: Cambridge University Press (1990).
- [8] Y. Shibata, *An example of a lifting module which doesn't have the finite internal exchange property*, preprint.

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCES AND TECHNOLOGY FOR INNOVATION
YAMAGUCHI UNIVERSITY
YAMAGUCHI, YAMAGUCHI 753-8512 JAPAN
E-mail address: b003wb@yamaguchi-u.ac.jp

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
YAMAGUCHI UNIVERSITY
YAMAGUCHI, YAMAGUCHI 753-8512 JAPAN
E-mail address: kikumasa@yamaguchi-u.ac.jp

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, FACULTY OF SCIENCE
YAMAGUCHI UNIVERSITY
YAMAGUCHI, YAMAGUCHI 753-8512 JAPAN
E-mail address: kuratomi@yamaguchi-u.ac.jp