

ON SUPPORT τ -TILTING MODULES AND SEMIBRICKS FOR BLOCKS OF GROUP ALGEBRAS

RYOTARO KOSHIO(小塩遼太郎) AND YUTA KOZAKAI(小境雄太)

ABSTRACT. Let G be a finite group, k an algebraically closed field of characteristic $p > 0$ and B a block of the group algebra kG . Support τ -tilting modules and semibricks over B are corresponding to two-term tilting complexes and two-term simple minded collections over B , respectively. Let \tilde{G} be a finite group containing G as a normal subgroup and \tilde{B} a block of $k\tilde{G}$ covering B . In this report, we will introduce methods of constructions of support τ -tilting modules and semibricks over \tilde{B} from the ones over B under the vanishing condition of Schur multipliers of the factor group \tilde{G}/G over k .

1. INTRODUCTION

本稿では、古くより精力的に研究されてきた「有限群のモジュラー表現論」と、近年盛んに研究されている「 τ 傾理論」を組み合わせることによって得られた結果について紹介する。

1.1. **有限群のブロックと導来同値.** 有限群 G の標数 $p > 0$ をもつ体 k 上の線形表現を考えることは、群多元環 $kG := \left\{ \sum_{g \in G} a_g g \mid a_g \in k \right\}$ 上の加群を考えることと等価である。モジュラー表現について考えているため、素数 p は有限群 G の位数を割っていることを想定している。また、議論が煩雑になることを避けるために、体 k は代数閉体とする。群多元環 kG の多元環としての直既約直積分解 $kG = B_0 \times \cdots \times B_l$ をブロック分解といい、その各直既約直積因子 B_i をブロックという。群多元環 kG のブロック分解にともない、加群圏の直積分解 $kG\text{-mod} = B_0\text{-mod} \times \cdots \times B_l\text{-mod}$ が得られる。この意味で、有限群のモジュラー表現論は各々のブロックの表現論に帰着される。有限群のブロックの導来同値に関する研究は、有限群のモジュラー表現論における局所大域原理の定式化といえる「Broué予想」によって動機づけられ、大きく発展してきた。[Ric89]において導入された傾複体 (tilting complex) は、森田理論における射影生成子 (progenerator) と類似した役割を担う複体である。実際に、ブロックの導来同値に関する研究は適切な傾複体を見つけることに帰着される。このことから、ブロック上の傾複体を豊富に構成すること、及びその分類を完遂させることはブロックの導来同値に関する研究に対して有意義である。しかし、傾複体は森田理論における射影生成子よりも圧倒的に多く、適切な傾複体を構成することも容易ではない。

1.2. **二項傾複体と台 τ 傾加群.** ブロック B 上の自明な傾複体として、 B 自身を複体と見たものがとれる。二項傾複体 (two-term tilting complex) は非自明な傾複体のうち、最も扱いやすい形をした傾複体といえる。具体的な群のブロックの導来同値の検証において有効に利用された Okuyama–Rickard 傾複体はすべて二項傾複体である [Oku97]。加えて、[AI12]において導入された傾変異 (tilting mutation) を用いることで、二項傾複体から一般の傾複体を構成できる。このことから、二項傾複体に限定した議論は十分に有用である。

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

[AIR14]において導入され、さまざまな表現論的な対象と対応することが示された台 τ 傾加群 (support τ -tilting module) は τ 傾理論 (τ -tilting theory) において中心的な役割を担う加群である。例えば、台 τ 傾加群が二項傾複体や、半単純加群の一般化である半煉瓦 (semibrick) と対応する。傾複体に対する傾変異と同様に、与えられた台 τ 傾加群から新たな台 τ 傾加群を構成する手法である τ 傾変異 (τ -tilting mutation) が定義される。そして、上述の二項傾複体と台 τ 傾加群の間の対応が、各々の変異に対して整合的であることが[AIR14]において示された。この意味で、台 τ 傾加群は導来圏における対象である二項傾複体を加群圏の中で実現したものであるといえる。

1.3. **ブロック上の台 τ 傾加群に対する先行研究.** 有限次元多元環の表現論は、究極的にはその多元環上の直既約加群の様子がすべてわかればよい。それがどの程度難しいかを測る概念が多元環の表現型 (representation type) である。表現型は排反な以下の三通りに分けられる [Dro80]。

有限型 (finite type) :

直既約加群の同型類が有限個である。

従順型 (tame type) :

直既約加群の同型類が無限個存在するが、適切なパラメトライズによってすべての直既約加群を記述できる。

野生型 (wild type) :

直既約加群の同型類が無限個存在するのみならず、そのすべてを記述しようという試みは絶望的である。

有限群のブロックの表現型は、そのブロックに割り当てられる不足群 (defect group) によって判定が可能である [BD77, Erd90]。この事実によると、大半のブロックは野生型になってしまうことがわかる。そのため、ブロックを単に多元環として捉えて、その上の台 τ 傾加群について分析することは困難である。一方で、表現型が有限型である場合と従順型である場合のブロック上の台 τ 傾加群については、[Ada16, Aok18, AAC18, AMN20, EJR18]などの多元環の表現論的な視座からの先行研究がある。本稿では、一般には野生型となるブロック上の台 τ 傾加群や半煉瓦の計算を有限群のモジュラー表現論的な手法を用いて先行研究に帰着させる手法について紹介する。

2. 準備

本稿では、有限群のブロックについての考察を目標としているため、一般の有限次元多元環についても成立する τ 傾理論に関する命題を対称多元環に限定して紹介する。一般の対称多元環を B で表わすこととする。加群はすべて有限生成左加群を表わすものとし、加群と準同型からなる複体はすべて余鎖複体 (cochain complex) を表わすものとする。 $B\text{-mod}$ で B 加群全体の成す圏を、 $K^b(B\text{-proj})$ で B 上の射影加群からなる有界な複体の成すホモトピー圏を、 $D^b(B\text{-mod})$ で B 加群からなる有界な複体の成す導来圏を表わすものとする。台 τ 傾加群の定義に使用される Auslander–Reiten 移動を τ で表わす。対称多元環に限定した議論となるため、 B 加群 U に対して $\tau U \cong \Omega\Omega U$ が成り立つ。ただし、 ΩU は U の射影被覆 PU から得られる次の完全系列によって定義される。

$$(2.1) \quad 0 \longrightarrow \Omega U \longrightarrow PU \longrightarrow U \longrightarrow 0.$$

加群もしくは複体 U に対して、 $\text{add } U$ で U の有限直和とそれらの直既約因子全体からなる集合とする。また、加群 U に対して $\text{Fac } U$ で $\text{add } U$ に属する加群からの全射が存在するような加群全体の成す集合とする。

2.1. τ 傾理論. 2つの対称多元環 B と B' に対して、各々の有界導来圏 $D^b(B\text{-mod})$, $D^b(B'\text{-mod})$ が三角圏として同値となると、 B と B' は導来同値であるという。 B と B' が導来同値であることは、適切な条件を満たす傾複体が存在することと同値である。

Definition 1 ([Ric89]). 対称多元環 B 上の射影加群からなる有界複体 T が以下の条件を満たすとき、 T を B 上の傾複体という。

- (1) 0 でない任意の整数 n に対して、 $\text{Hom}_{K^b(B\text{-proj})}(T, T[n]) = 0$ が成り立つ。
- (2) T を含み、直和因子をとる操作で閉じるような $K^b(B\text{-proj})$ の最小の三角部分圏が $K^b(B\text{-proj})$ と一致する。

Theorem 2 ([Ric89]). 以下の2条件は同値である。

- (1) B と B' が導来同値である。
- (2) 多元環としての同型 $\text{End}_{K^b(B\text{-proj})}(T)^{\text{op}} \cong B'$ が成り立つような B 上の傾複体 T が存在する。

与えられた傾複体に対して、その直既約直和因子を1つ取り替えることで新たな傾複体を構成する手法である傾変異 (tilting mutation) は、傾複体を豊富に構成する上で有用である。本稿ではとくに、左既約傾変異のみ使用する。以下にその定義を述べる。

Definition 3. 対称多元環 B 上の傾複体 T が直既約直和因子 X によって以下のように表されているとする。

$$(2.2) \quad T \cong X \oplus Y$$

このとき、有界ホモトピー圏 $K^b(B\text{-proj})$ における完全三角

$$(2.3) \quad X \xrightarrow{f} Y' \longrightarrow Z \longrightarrow X[1]$$

であって、 f が左極小な左 $\text{add } Y$ 近似となるようなものをとる。このとき、 $T' := Z \oplus Y$ は再び B 上の傾複体となる。この手順によって得られた B 上の新たな傾複体 T' を T の X に関する左既約傾変異という。

対称多元環 B 上の傾複体 T が -1 次と 0 次の項を除いてすべて 0 であるとき、 T を二項傾複体という。二項傾複体は非自明な傾複体のうち最も扱いやすい形であるのみならず、以下に述べられる台 τ 傾加群と変異も込めて対応する。このことから、導来圏の対象である二項傾複体の議論を加群圏の対象である台 τ 傾加群の議論に落とし込むことが可能となる。

Definition 4 ([AIR14]). B 上の加群 U が以下の条件を満たすとき、 U を台 τ 傾加群という。

- $\text{Hom}_B(U, \tau U) = 0$ が成り立つ。
- U の直既約直和因子の同型類の個数が U の組成因子として現れる単純加群の同型類の個数と一致する。

Example 5. 対称多元環 B に対して、自明な台 τ 傾加群として、正則加群 ${}_B B$ と零加群 0 が取れる。もし、 B が単純多元環や局所多元環などの単純加群を 1 種類しかもたない多元環であるときは、台 τ 傾加群は自明なものしか存在しないことがわかる。

Definition 6 ([AIR14]). 対称多元環 B 上の台 τ 傾加群 U がその直既約直和因子 X によって

$$(2.4) \quad U \cong X \oplus Y$$

と表されているとする。加えて、 $X \notin \text{Fac } Y$ が成り立っているとき、加群圏 $B\text{-mod}$ における完全系列

$$(2.5) \quad X \xrightarrow{f} Y' \longrightarrow Z \longrightarrow 0$$

であって f が左極小な左 $\text{add } Y$ 近似となるようにとる。このとき、 $Z \oplus Y$ は再び台 τ 傾加群となる。この手順によって得られた B 上の新たな台 τ 傾加群を U の X による左 τ 傾変異という。

二項傾複体と台 τ 傾加群の関係性を述べるために必要となる集合を定義する。2つの傾複体 T, T' に対して、 $\text{add } T = \text{add } T'$ が成り立つときに $T \sim T'$ と表わすと、この関係は同値関係となる。この同値関係で同値となっている T と T' は各々の自己準同型環が森田同値になっていることに注意する。同値関係 \sim で B 上の二項傾複体全体の成す集合を割って得られる集合を $2\text{-tilt } B$ と表わす¹。この同値関係による類別の完全代表系として基本的 (basic)² な二項傾複体がとれる。また、2つの台 τ 傾加群 U, U' に対して、 $\text{add } U = \text{add } U'$ が成り立つときに $U \approx U'$ と表わすと、この関係は同値関係となる。この同値関係 \approx で B 上の台 τ 傾加群を割って得られる集合を $s\tau\text{-tilt } B$ と表わす。同様に、この同値関係による類別の完全代表系として基本的な台 τ 傾加群が取れる。

Theorem 7 ([AIR14]). 集合 $2\text{-tilt } B$ から $s\tau\text{-tilt } B$ への写像

$$(2.6) \quad 2\text{-tilt } B \longrightarrow s\tau\text{-tilt } B$$

が $2\text{-tilt} \ni T \mapsto H^0(T) \in s\tau\text{-tilt } B$ によって定義される³。さらにこの写像は全単射であり、左既約傾変異の関係にある 2つの二項傾複体を、それぞれ左 τ 傾変異の関係にある台 τ 傾加群へと写す。

台 τ 傾加群は二項傾複体と対応するのみならず、半煉瓦 (semibrick) とも対応することが [Asa18] において示された。半煉瓦及び煉瓦 (brick) は、単純加群に対する「Schur の補題」に着目した、半単純加群 (semisimple module) 及び単純加群 (simple module) の一般化である。

Definition 8. S を B 加群とする。

- S が煉瓦であるとは $\text{End}_B(S) \cong k$ 成り立つことをいう。
- S が半煉瓦であるとは、 S が以下の条件を満たす煉瓦 S_i の有限直和となっていることをいう。

$$(2.7) \quad \text{Hom}_B(S_i, S_j) = 0 \quad (S_i \not\cong S_j).$$

¹Theorem 2 において同じ役割を果たす二項傾複体を同一視するためにこのような同値関係を導入した。

²すべての直既約直和因子が重複度 1 で現れるということである。

³ $H^0(T)$ で傾複体 T の 0 次のコホモロジーのことを表わす。

半煉瓦 S と S' に対して、 $\text{add } S = \text{add } S'$ が成り立つときに $S \approx S'$ と表わすと、この関係は同値関係となる。この同値関係で B 上の半煉瓦全体のなす集合を割って得られる集合を $\text{sbrick } B$ と表わす。

Theorem 9 ([Asa18]). B 上の台 τ 傾加群 U に対して、 U を自身の自己準同型多元環 $\text{End}_B(U)$ 上の加群とみなしたときの Jacobson 根基を R_U と表わす。写像

$$(2.8) \quad \text{s}\tau\text{-tilt } B \longrightarrow \text{sbrick } B$$

を $\text{s}\tau\text{-tilt } B \ni U \mapsto U/R_U \in \text{sbrick } B$ と定義できる。写像 (2.8) は単射である⁴。

2.2. 有限群のモジュラー表現論. 体 k を標数 $p > 0$ をもつ代数閉体とする。群 G を正規部分群として含む有限群 \tilde{G} を考える。 kG 加群の圏から $k\tilde{G}$ 加群の圏への誘導関手

$$(2.9) \quad k\tilde{G} \otimes_{kG} \bullet : kG\text{-mod} \longrightarrow k\tilde{G}\text{-mod}$$

を $\text{Ind}_{\tilde{G}}^{\tilde{G}}$ と表わす。 $k\tilde{G}$ 加群の圏から kG 加群の圏への制限関手

$$(2.10) \quad k\tilde{G}\text{-mod} \longrightarrow kG\text{-mod}$$

を $\text{Res}_{\tilde{G}}^{\tilde{G}}$ と表わす。 kG 加群 M と $\tilde{g} \in \tilde{G}$ に対して、集合 $\tilde{g}U := \{\tilde{g}u \mid u \in U\}$ には自然に k 線型空間としての構造が入るが、この k 線型空間に対して有限群 G の作用を

$$(2.11) \quad g\tilde{g}u := \tilde{g}(\tilde{g}^{-1}g\tilde{g}u) \quad (g \in G)$$

と定めることで kG 加群としての構造が入る。剰余群 \tilde{G}/G に対して、 $[\tilde{G}/G]$ で \tilde{G}/G の完全代表系の成す集合とする。以下に述べる主張は、有限群の表現論において重要な役割をもつ「Mackey の分解公式」の特別な場合について述べたものである。

Theorem 10 (正規部分群に対する Mackey の分解公式). \tilde{G} を有限群、 G を \tilde{G} の正規部分群とする。 kG 加群 U に対して、以下の同型が成り立つ。

$$(2.12) \quad \text{Res}_{\tilde{G}}^{\tilde{G}} \text{Ind}_{\tilde{G}}^{\tilde{G}} U \cong \bigoplus_{x \in [\tilde{G}/G]} xU.$$

群多元環 kG のブロック B は多元環としての直既約直積因子であった。このため、ブロック B は群多元環 kG の両側イデアルとなる。有限群 G の部分群 D に対して、 B の積から定まる両側 B 準同型

$$(2.13) \quad \begin{aligned} B \otimes_{kD} B &\xrightarrow{m_D} B \\ b_1 \otimes b_2 &\longmapsto b_1 b_2 \end{aligned}$$

が定まる。 m_D が分裂全射であるような位数最小の G の部分群 D を B の不足群 (defect group) という。不足群はブロックの表現論的な性質を統制する。例えば、以下の性質が成り立つ。

Proposition 11. 上記の記法のもとで、以下の性質が成り立つ。

- (1) 不足群 D は p 部分群である。
- (2) 不足群は G 共役を除いて一意的に定まる。

⁴左有限な半煉瓦全体からえられる $\text{sbrick } B$ の部分集合を (2.8) の終域とすることで全単射にすることが可能である。本稿では左有限性についての議論を省略する。

- (3) 不足群 D が自明な群であることと、ブロック B が単純多元環であることは同値である。
- (4) 不足群 D が非自明な巡回群であることと、 B が Brauer tree 多元環⁵であることは同値である。
- (5) 体 k の標数が 2 であり、 D がクラインの四元群、二面体群、一般二面体群、一般四元数群のいずれかであることと、ブロック B が無限表現型の Brauer graph 多元環⁶となることは同値である。
- (6) 不足群 D が (3), (4), (5) ではないことと、 B が野生型であることは同値である。

本研究の目標は、群多元環 kG やそのブロック B 上の τ 傾理論と、群多元環 $k\tilde{G}$ やそのブロック \tilde{B} 上の τ 傾理論を比較する手法について考察することである。ブロック B と \tilde{B} の各々の単位元の $k\tilde{G}$ における積 $1_B 1_{\tilde{B}}$ が零元でないとき、ブロック \tilde{B} はブロック B を被覆するという。被覆の関係にあるブロックそれぞれの加群圏の間には誘導関手と制限関手に関する良い性質をもつ。ブロック B の $\tilde{g} \in \tilde{G}$ による共役 $\tilde{g}B\tilde{g}^{-1}$ も再び群多元環 kG のブロックとなることに注意する。ブロック B に対して、 \tilde{G} の部分群 $I_{\tilde{G}}(B) := \left\{ x \in \tilde{G} \mid xBx^{-1} = B \right\}$ を \tilde{G} における B の惰性群をといる。被覆の関係にあるブロックの間の表現論を比較する上で、以下の性質は有用である。

Proposition 12. 上記の記法のもとで、以下の性質が成り立つ。

- (1) $k\tilde{G}$ のブロック \tilde{B} に被覆される kG のブロックはすべてブロック B と \tilde{G} 共役である。
- (2) kG のブロック B を被覆する $kI_{\tilde{G}}(B)$ のブロック全体の成す集合とブロック B を被覆する $k\tilde{G}$ のブロック全体の成す集合の間には、Brauer 対応から導かれる全単射が存在する。
- (3) (2) においてブロック \tilde{B} と対応する $kI_{\tilde{G}}(B)$ のブロックを β とすると、 β と \tilde{B} は森田同値であり、各々の加群圏の間の圏同値が誘導関手 $\text{Ind}_{I_{\tilde{G}}(B)}^{\tilde{G}}$ から導かれる。
- (4) 剰余群 \tilde{G}/G が p 群であるとき、ブロック B を被覆する $k\tilde{G}$ のブロックはただ一つである。
- (5) kG のブロック B の不足群 D が $C_{\tilde{G}}(D) \leq G$ を満たすとき、ブロック B を被覆する $k\tilde{G}$ のブロックはただ一つである。
- (6) kG のブロック B と B を被覆する $k\tilde{G}$ のブロック \tilde{B} の各々の不足群 D と \tilde{D} を $D \leq \tilde{D}$ となるようにとれる。

3. 先行研究

ブロック B は不足群 D が Proposition 11. (3), (4), (5) のいずれかの条件を満たしているとき、ブロック B は多元環の表現論の観点から見てもある程度扱いやすい多元環となっている。実際に、Brauer tree 多元環、Brauer graph 多元環に対する τ 傾理論には複数の先行研究がある。加えて、講演者らによって、誘導関手を用いることで B の τ 傾理論から、 B を被覆するブロック \tilde{B} 上の τ 傾理論について考察することを可能とする結果が得られている [KK21]。

⁵Brauer tree 多元環はその表現型が有限型となる。

⁶無限表現型の Brauer graph 多元環は従順型となる

3.1. **Brauer tree 多元環上の台 τ 傾加群.** Brauer tree 多元環は、重複度とよばれる自然数が割り当てられた例外頂点を1つもつような、平面に埋め込まれた tree である Brauer tree によって定義される多元環である。Brauer tree 多元環は有限群のブロックとして自然に現れるのみならず、Brauer tree を用いた有限幾何学的な考察が可能な有限表現型の多元環である。

- Star 型の Brauer tree 多元環に対して、その上の台 τ 傾加群とその変異を有限幾何学的な手法から計算するアルゴリズムが確立されている [Ada16]。
- Line 型の Brauer tree 多元環に対して、その上の台 τ 傾加群とその変異を A 型の道代数の議論に帰着する手法が確立されている [Aok18]。
- 一般の形の Brauer tree 多元環に対して、その上の台 τ 傾加群の個数は、Brauer tree の辺の数 e を用いた二項係数 $\binom{2e}{e}$ となることが示されている [AMN20]。

3.2. **有限群のブロックとして現れる無限表現型の Brauer graph 多元環上の台 τ 傾加群.** Proposition 11 によると、有限群のブロックが無限表現型の Brauer graph 多元環となることは稀である。加えて、[Erd90] によると、有限群のブロックとして現れる無限表現型の Brauer graph 多元環の型は少ない。[EJR18] にて示された多元環のイデアル剰余による還元定理を用いることで、有限群のブロックとして現れるすべての型の Brauer graph 多元環上の台 τ 傾加群とその τ 傾変異が計算された。

3.3. **τ 傾加群と誘導関手.** [EJR18] にて示された多元環のイデアル剰余による還元定理の系として、以下の命題が示された。

Proposition 13 ([EJR18]). 有限群 G から定まる群多元環 kG のブロックを B とし、有限 p 群 P をとる。このとき、 $\tilde{B} := B \otimes_k kP$ は群多元環 $kG \otimes_k kP \cong k[G \times P]$ のブロックであり、 $s\tau$ -tilt B と $s\tau$ -tilt \tilde{B} の間には τ 傾変異を保つ全単射が存在する。

我々は、Proposition 13 における群 G と p 群の直積であるという状況を特別な場合として含み、なおかつ有限群の表現論的な視座からの考察が行えるような状況を考えることで、以下の定理を証明した。

Theorem 14 ([KK21]). 群 G を正規部分群として含む有限群 \tilde{G} をとる。 \tilde{G} における G の指数 $|\tilde{G} : G|$ が p 冪であるとき、巡回的不足群をもつ群多元環 kG のブロック B と、 B を被覆する $k\tilde{G}$ のブロック \tilde{B} に対して、 τ 傾変異と整合的であるような全単射

$$(3.1) \quad s\tau\text{-tilt } B \longrightarrow s\tau\text{-tilt } \tilde{B}$$

が誘導関手 $\text{Ind}_G^{\tilde{G}}$ から導かれる。

4. 主結果

Theorem 14 の証明は B の不足群が巡回的である点と指数 $|\tilde{G} : G|$ が p 冪であるという点に大きく依存していた。以下に述べる主結果はこれらの条件を緩和しつつ、半煉瓦の対応も与えるような精密化となっている。主結果を述べる前に、煉瓦、半煉瓦の作用の拡張について解説する。

4.1. **半煉瓦と作用の拡張.** kG 加群 U に対して、 $k\tilde{G}$ 加群 \tilde{U} が U の作用の拡張であるとは、 $\text{Res}_G^{\tilde{G}} \tilde{U} \cong U$ が成り立つことをいう。有限群の表現論において、「正規部分群上の既約加群がどのように上の群にもち上がるのか」について、今日では Clifford 理論として知られる研究の帰結としてさまざまな結果が知られていた [Dad70]。単純加群の一般化である煉瓦についても類似した結果が得られるのではないかと考察し、以下の結果を得た。

Proposition 15. \tilde{G} を有限群とし、 G を \tilde{G} の正規部分群とする。さらに、自明係数 k^\times 上の剰余群 \tilde{G}/G に対する 2 次の群のコホモロジー $H^2(\tilde{G}/G, k^\times)$ が消滅しているとする。このとき、 kG 上の煉瓦 S が \tilde{G} 不変である (すなわち、任意の $\tilde{g} \in \tilde{G}$ に対して、 kG 加群としての同型 $\tilde{g}S \cong S$ が成り立つ) ならば、煉瓦 S は $k\tilde{G}$ 上の煉瓦に拡張可能である。加えて、 S の拡張の同型類の個数は群多元環 $k[\tilde{G}/G]$ 上の 1 次元単純加群の同型類の個数に一致する。

4.2. **主結果とその系.** 以下が本稿における主結果である。

Theorem 16. 群 G を正規部分群として含む有限群 \tilde{G} をとる。 kG のブロック B と B を被覆する $k\tilde{G}$ のブロック \tilde{B} に対して、以下の条件を仮定する。

- B 上の任意の煉瓦が $I_{\tilde{G}}(B)$ 不変である。
- 群のコホモロジー $H^2(I_{\tilde{G}}(B)/G, k^\times)$ が消滅している。
- 群多元環 $k[I_{\tilde{G}}(B)/G]$ が基本的多元環となる

このとき、 τ 傾変異と整合的であるような単射

$$(4.1) \quad \text{s}\tau\text{-tilt } B \longrightarrow \text{s}\tau\text{-tilt } \tilde{B}$$

が B 加群を誘導したのち、 \tilde{B} 成分をとるという関手 $\tilde{B}\text{Ind}_G^{\tilde{G}}$ から明示的に得られる。加えて、 B 上の半煉瓦の各直和因子を成す煉瓦の作用の拡張をすべて直和し、その \tilde{B} 成分をとる操作によって

$$(4.2) \quad \text{sbrick } B \longrightarrow \text{sbrick } \tilde{B}$$

が導かれ、以下の図式を可換とする。

$$(4.3) \quad \begin{array}{ccc} \text{s}\tau\text{-tilt } \tilde{B} & \xrightarrow{(2.8) \text{ for } \tilde{B}} & \text{sbrick } \tilde{B} \\ (4.1) \uparrow & & \uparrow (4.2) \\ \text{s}\tau\text{-tilt } B & \xrightarrow{(2.8) \text{ for } B} & \text{sbrick } B \end{array}$$

主結果における仮定である煉瓦の $I_{\tilde{G}}(B)$ 不変性は、ブロック B が巡回不足群をもち、すべての単純 B 加群が $I_{\tilde{G}}(B)$ 不変である状況であれば成立する。2 次の群のコホモロジー $H^2(\tilde{G}/G, k^\times)$ が消滅するための十分条件として、 \tilde{G}/G が p 群である場合や巡回群である場合が知られている。そのため、Theorem 16 は Theorem 14 をより精密にした以下の結果を導くのみならず、より一般的な状況でも適応可能である。Theorem 14 の精密化として、Proposition 12. (4). を用いることで以下の系を得る。

Corollary 17. \tilde{G} を有限群、 G を \tilde{G} の正規部分群とする。 \tilde{B} を $k\tilde{G}$ のブロックとし、 B を \tilde{B} に被覆される kG のブロックとする。ブロック B が巡回不足群を持つとき、以下の

図式が可換となる。

$$(4.4) \quad \begin{array}{ccc} \text{s}\tau\text{-tilt } \tilde{B} & \xrightarrow{(2.8) \text{ for } \tilde{B}} & \text{sbrick } \tilde{B} \\ (3.1) \uparrow & & \uparrow (4.2) \\ \text{s}\tau\text{-tilt } B & \xrightarrow{(2.8) \text{ for } B} & \text{sbrick } B \end{array}$$

Corollary 17 と同じ仮定のもと、すべてのブロックに対する考察を統合することで群環上の台 τ 傾加群と半煉瓦に対する以下の系も得られる。

Corollary 18. 巡回的シロー p 部分群をもつ群 G を正規部分群として含む有限群 \tilde{G} に対して、 $|\tilde{G} : G|$ が p 冪ならば、以下の図式が可換となる。

$$(4.5) \quad \begin{array}{ccc} \text{s}\tau\text{-tilt } k\tilde{G} & \xrightarrow{(2.8) \text{ for } k\tilde{G}} & \text{sbrick } k\tilde{G} \\ (3.1) \uparrow & & \uparrow (4.2) \\ \text{s}\tau\text{-tilt } kG & \xrightarrow{(2.8) \text{ for } kG} & \text{sbrick } B \end{array}$$

REFERENCES

- [AAC18] T. Adachi, T. Aihara, and A. Chan, *Classification of two-term tilting complexes over Brauer graph algebras*, Math. Z. **290** (2018), no. 1-2, 1–36.
- [Ada16] T. Adachi, *The classification of τ -tilting modules over Nakayama algebras*, J. Algebra **452** (2016), 227–262.
- [AI12] T. Aihara and O. Iyama, *Silting mutation in triangulated categories*, J. Lond. Math. Soc. (2) **85** (2012), no. 3, 633–668.
- [AIR14] T. Adachi, O. Iyama, and I. Reiten, *τ -tilting theory*, Compos. Math. **150** (2014), no. 3, 415–452.
- [AMN20] H. Asashiba, Y. Mizuno, and K. Nakashima, *Simplicial complexes and tilting theory for Brauer tree algebras*, J. Algebra **551** (2020), 119–153.
- [Aok18] T. Aoki, *Classifying torsion classes for algebras with radical square zero via sign decomposition*, arXiv preprint arXiv:1803.03795v2 (2018).
- [Asa18] S. Asai, *Semibricks*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2020** (2018), no. 16, 4993–5054.
- [BD77] V. M. Bondarenko and J. A. Drozd, *The representation type of finite groups*, Zap. Naučn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **71** (1977), 24–41, 282, Modules and representations.
- [Dad70] E. C. Dade, *Isomorphisms of Clifford extensions*, Ann. of Math. (2) **92** (1970), 375–433.
- [Dro80] J. A. Drozd, *Tame and wild matrix problems*, Representation Theory II (Berlin, Heidelberg) (V. Dlab and P. Gabriel, eds.), Springer Berlin Heidelberg, 1980, pp. 242–258.
- [EJR18] F. Eisele, G. Janssens, and T. Raedschelders, *A reduction theorem for τ -rigid modules*, Math. Z. **290** (2018), no. 3-4, 1377–1413.
- [Erd90] K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1428, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [KK21] R. Koshio and Y. Kozakai, *On support τ -tilting modules over blocks covering cyclic blocks*, J. Algebra **580** (2021), 84–103.
- [Oku97] T. Okuyama, *Some examples of derived equivalent blocks of finite groups*, preprint (1997).
- [Ric89] J. Rickard, *Morita theory for derived categories*, J. London Math. Soc. (2) **39** (1989), no. 3, 436–456.

(Ryotaro KOSHIO)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS
TOKYO UNIVERSITY OF SCIENCE
1-3 KAGURAZAKA, SHINJUKU-KU, TOKYO 162-8601, JAPAN
Email address: 1120702@ed.tus.ac.jp

(Yuta KOZAKAI)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
TOKYO UNIVERSITY OF SCIENCE
1-3 KAGURAZAKA, SHINJUKU-KU, TOKYO 162-8601, JAPAN
Email address: kozakai@rs.tus.ac.jp