

TILTING THEORY FOR PERIODIC TRIANGULATED CATEGORIES

SHUNYA SAITO

ABSTRACT. Tilting theory gives a way to relate a triangulated category with the derived category of an algebra, and play a central role in representation theory of algebras. However, it does not work *m-periodic triangulated category*. A triangulated category \mathcal{T} is *m-periodic* if its suspension functor Σ satisfies $\Sigma^m \simeq \text{Id}_{\mathcal{T}}$ as additive functors. Such categories naturally arise in representation theory of self-injective algebras and hypersurface singularities.

In this paper, we introduce a periodic analogue of tilting theory. We will explain *m-periodic tilting theorem*, which asserts that an *m-periodic triangulated category* having an *m-periodic tilting object* is equivalent to the *m-periodic derived category* under some assumptions. As an application, we give an equivalence between the stable module category of a self-injective algebra and the 2-periodic derived category of a hereditary algebra.

Key Words: Triangulated categories, Tilting theory, Differential graded categories.

2000 Mathematics Subject Classification: 16G10, 18G35, 18G80.

多元環の表現論とは、多元環上の加群およびそれらから構成される圏を研究する分野である。多元環の導来圏や自己移入多元環の安定加群圏といった三角圏の研究はその主要な一角を担っている。与えられた三角圏と多元環の導来圏の間に三角同値を構成する**傾理論**はこれらの三角圏を研究する上で重要な役割を果たしてきた (c.f. [12])。傾理論が上手く機能しない圏として**周期三角圏**がある。本稿の目的は、[11]に基づいて周期三角圏における傾理論を導入することである。

第1節では、背景知識として傾理論や周期三角圏について解説し、本研究の動機を述べる。第2節では、導来圏の周期三角圏における類似である周期導来圏を紹介する。第3節では、主結果である周期傾理論といくつかの例を紹介する。第4節では、次数付き微分代数とそれを用いた通常の傾定理の証明を復習した後、主結果の証明の概略を述べる。

本稿では次の記号を用いる。完全体 \mathbb{k} を固定し、 \mathbb{k} 上の有限次元代数を多元環という。多元環 Λ に対して、 $\text{mod}\Lambda$ で有限生成 (右) Λ 加群の圏を表す。圏や関手はすべて \mathbb{k} 上のものを扱う。三角圏のシフト関手を Σ で表す。三角圏 \mathcal{T} の対象 X, Y に対して、 $\text{Ext}_{\mathcal{T}}^i(X, Y) := \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, \Sigma^i Y)$ と表す。説明されない概念に関しては [1], [10] を参照せよ。

1. 背景と動機

本稿の主結果である周期傾理論の背景知識として傾理論と周期三角圏について紹介する。この節で \mathcal{T} は三角圏とする。

1.1. 傾理論. 傾理論とは、与えられた三角圏と多元環の導来圏の間に三角同値を構成する手法である。正確な主張を述べるために幾つか用語を復習しながら傾対象と傾定理を説明する。

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

三角圏の写像錐とシフト、直和因子で閉じた部分圏を **thick** 部分圏という。また対象 $T \in \mathcal{T}$ を含む最小の thick 部分圏が \mathcal{T} に一致するときに T は \mathcal{T} の **thick 生成元** であるという。

Definition 1. $T \in \mathcal{T}$ が次の二条件を満たすとき、**傾対象**という。

- (1) T は \mathcal{T} の thick 生成元である。
- (2) $\text{Ext}_{\mathcal{T}}^i(T, T) = 0$ が任意の $i \neq 0$ に対して成立する。

Example 2. 多元環 Λ 上の有限生成射影加群の有界複体のホモトピー圏 $K^b(\text{proj}\Lambda)$ を Λ の**完全導来圏**と言う。このとき $\Lambda \in \text{proj}\Lambda \subset K^b(\text{proj}\Lambda)$ は傾対象である。 Λ の大域次元が有限のとき、 $K^b(\text{proj}\Lambda)$ と有限生成 Λ 加群の有界複体の導来圏 $D^b(\text{mod}\Lambda)$ は三角同値である。よってこのとき $\Lambda \in D^b(\text{mod}\Lambda)$ も傾対象である。

\mathcal{T} が**べき等完備**であるとは、 $e^2 = e$ を満たす任意の射 $e \in \text{Hom}_{\mathcal{T}}(X, X)$ が核を持つときに言う。また三角圏が**代数的**であるとは、ある Frobenius 完全圏の安定圏と三角同値であるときに言う。これらの仮定は多くの三角圏が満たす。たとえば、アーベル圏 \mathcal{A} のホモトピー圏 $K(\mathcal{A})$ や導来圏 $D(\mathcal{A})$ は代数的かつべき等完備である (c.f. [10])。

Theorem 3 (傾定理, [9]). \mathcal{T} はべき等完備かつ代数的であるとする。もし \mathcal{T} が傾対象 T を持つならば三角同値 $\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} K^b(\text{proj}\Lambda)$ が存在する。ここで $\Lambda := \text{End}_{\mathcal{T}}(T)$ である。

Remark 4. Example 2 より、完全導来圏 $K^b(\text{proj}\Lambda)$ と三角同値な三角圏は傾対象を持つ。したがってべき等完備かつ代数的三角圏がある多元環の完全導来圏と三角同値になると傾対象を持つことは同値である。

傾理論の興味深い応用を紹介する。次の例は可換環に付随する代数幾何学と非可換多元環の関係を示すものであり、非可換代数幾何学の一つの出発点である。

Example 5 (Beilinson の定理, [2]). $\text{coh}\mathbb{P}^1$ を \mathbb{k} 上の射影直線 \mathbb{P}^1 上の接続層の圏とし、 $\mathcal{O}(n) \in \text{coh}\mathbb{P}^1$ ($n \in \mathbb{Z}$) を Serre の捩じり層とする。このとき $\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(1) \in D^b(\text{coh}\mathbb{P}^1)$ は傾対象であり、その自己準同型環は Kronecker 箆 $Q : 1 \leftarrow 2$ の道多元環 $\mathbb{k}Q$ と同型である。よって傾定理より三角同値 $D^b(\text{coh}\mathbb{P}^1) \xrightarrow{\sim} D^b(\text{mod}\mathbb{k}Q)$ が存在する。

このように傾定理は三角圏を研究するための強力な道具であるが、次小節で紹介する周期三角圏は傾対象を持たないためこれを用いることができない。

1.2. 周期三角圏. 正整数 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定する。

Definition 6. \mathcal{T} が m 周期であるとは、加法関手の自然同型 $\Sigma^m \simeq \text{Id}_{\mathcal{T}}$ が存在するときに言う。 \mathcal{T} が m 周期となる最小の m を \mathcal{T} の**周期**と呼ぶ。

Example 7. 周期三角圏の例を紹介する。

- (1) Λ を有限表現型自己移入多元環とする。つまり、直既約有限生成 Λ 加群の同型類は有限個であり、有限生成射影 Λ 加群と有限生成入射 Λ 加群は一致する。このとき Λ の安定加群圏 $\underline{\text{mod}}\Lambda$ は周期三角圏である [4]。
- (2) R を超曲面特異点とする。つまり、形式的べき級数環 $\mathbb{k}[[x_0, \dots, x_n]]$ のある非単元 f が存在して $R \simeq \mathbb{k}[[x_0, \dots, x_n]]/(f)$ となる。このとき安定 Cohen-Macaulay 加群圏 $\underline{\text{CM}}(R)$ は 2 周期三角圏である [5]。

定義からただちに0でない m 周期三角圏 \mathcal{T} は傾対象を持たないことが従う。実際、 $0 \neq T \in \mathcal{T}$ とすると

$$0 \neq \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, \Sigma^m T) = \text{Ext}_{\mathcal{T}}^m(T, T)$$

となる。さらに Remark 4 から \mathcal{T} は多元環の完全導来圏と三角同値にならないことも分かる。本稿の目的は傾理論の周期三角圏における類似を構築することにあった。上の考察から、そのためには導来圏の周期三角圏における類似が必要になる。これが次節で紹介する周期導来圏である。

2. 周期導来圏

正整数 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定し、 \mathbb{Z}_m で位数 m の巡回群を表す。この節では複体の次数を整数 \mathbb{Z} から巡回群 \mathbb{Z}_m に取り換えた周期複体とその導来圏を導入する。

Definition 8. \mathcal{A} をアーベル圏とする。

- (1) \mathcal{A} 上の m 周期複体 $M = (M^i, d_M^i)_{i \in \mathbb{Z}_m}$ とは、対象 $M^i \in \mathcal{A}$ と射 $d_M^i : M^i \rightarrow M^{i+1}$ の族であって $d_M^{i+1} d_M^i = 0$ を満たすものを言う。
- (2) m 周期複体の射 $f = (f^i)_{i \in \mathbb{Z}_m} : M \rightarrow N$ とは、射 $f^i : M^i \rightarrow N^i$ の族であって $f^{i+1} d_M^i = d_N^i f^i$ を満たすものを言う。
- (3) $C_m(\mathcal{A})$ で \mathcal{A} 上の m 周期複体の圏を表す。

ホモトピー同値やコホモロジーなどを通常複体と同様に定義することができ、 \mathcal{A} 上の m 周期複体のホモトピー圏 $K_m(\mathcal{A})$ や \mathcal{A} の m 周期導来圏 $D_m(\mathcal{A})$ が定義される。

Remark 9. m 周期導来圏 $D_m(\mathcal{A})$ は周期三角圏であるが、 m 周期とは限らない。実際、 m が偶数のとき $D_m(\mathcal{A})$ の周期は m であるが、 m が奇数のとき $D_m(\mathcal{A})$ の周期は m または $2m$ である。この現象はシフトする際に複体の微分の符号が変化することに起因する。例えば、1 周期複体 $(M, d : M \rightarrow M)$ のシフトは $(M, -d : M \rightarrow M)$ であり、一般にこの二つが擬同型であるとは限らない。

通常導来圏と周期導来圏の関係を述べる。 \mathcal{A} を大域次元が有限かつ射影的に豊富なアーベル圏とする。つまり任意の対象は有限射影分解を持つとする。有界複体 $M \in D^b(\mathcal{A})$ に対して

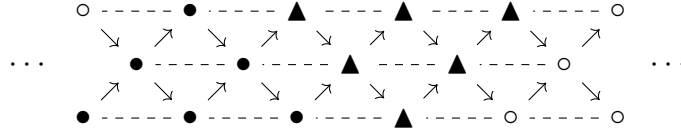
$$\pi(M)^i := \bigoplus_{j \equiv i \pmod{m}} M^j, \quad d_{\pi(M)}^i := \bigoplus_{j \equiv i \pmod{m}} d_M^j$$

と定めることで $\pi(M) \in D_m(\mathcal{A})$ を定める。これにより三角関手 $\pi : D^b(\mathcal{A}) \rightarrow D_m(\mathcal{A})$ が定まる。 π の像は $D^b(\mathcal{A})$ の Σ^m による軌道圏 $D^b(\mathcal{A})/\Sigma^m$ になっている。つまり、任意の $M, N \in D^b(\mathcal{A})$ に対して

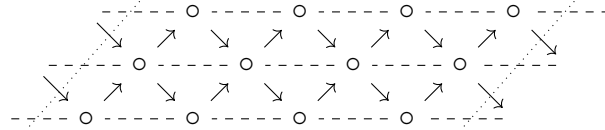
$$\text{Hom}_{D_m(\mathcal{A})}(\pi M, \pi N) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(V, \Sigma^{mi} W)$$

が成立する。 \mathcal{A} が遺伝的、つまり任意の対象が長さ 1 の射影分解を持つとき、 π は本質的全射である。よってこのとき $D_m(\mathcal{A})$ は $D^b(\mathcal{A})$ の Σ^m による軌道圏である。

Example 10. A_3 型箎 $1 \leftarrow 2 \leftarrow 3$ とその道多元環 Λ を考える。このとき $\text{mod } \Lambda$ は遺伝的であり、その有界導来圏 $D^b(\text{mod } \Lambda)$ は次のような Auslander-Reiten 箎で表される。



ここで●は $\text{mod } \Lambda \subset D^b(\text{mod } \Lambda)$ の対象, ▲は $\Sigma \text{mod } \Lambda \subset D^b(\text{mod } \Lambda)$ の対象を表している. 2周期導来圏 $D_2(\text{mod } \Lambda)$ は $D^b(\text{mod } \Lambda)$ の Σ^2 による軌道圏であるので, その Auslander-Reiten 籠は次のようになる.



ただしドット線は同一視を表す.

Remark 11. 周期導来圏の歴史について述べる. Q を有限非輪状籠とし, $\mathbb{k}Q$ をその道多元環とする. [8] において $D_2(\text{mod } \mathbb{k}Q) = D^b(\text{mod } \mathbb{k}Q)/\Sigma^2$ は Q の **ルート圏** と呼ばれている. 名前の由来は $D_2(\text{mod } \mathbb{k}Q)$ の直既約対象と Q から定まるルート系のルート全体の間全単射が存在することから来ている. この全単射は Gabriel の定理 (c.f. [1]) による $\text{mod } \mathbb{k}Q$ の直既約対象と正ルートの間の全単射を自然に拡張したものである. この性質からルート圏は Lie 理論の圏化の文脈で研究されてきた. 実際, Bridgeland は [3] において $D_2(\text{mod } \mathbb{F}_q Q)$ の Ringel-Hall 代数を用いて量子群 $U_{\sqrt{q}}(\mathfrak{g}_Q)$ 全体を構成した. これらの研究を動機として周期導来圏は様々な人に研究されてきた [6], [7], [13].

3. 周期傾理論

[11] に基づいて周期傾理論とその例を紹介する. 正整数 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定し, \mathcal{T} を m 周期三角圏とする. 傾対象の周期類似として次を導入する.

Definition 12 ([11]). $T \in \mathcal{T}$ が次の二条件を満たすとき, m **周期傾対象** という.

- (1) T は \mathcal{T} の thick 生成元である.
- (2) $\text{Ext}^i(T, T) = 0$ が任意の $i \notin m\mathbb{Z}$ に対して成立する.

Theorem 3 の周期類似として次の定理が成立する.

Theorem 13 (周期傾定理, [11]). \mathcal{T} はべき等完備かつ代数的であるとする. もし \mathcal{T} が m 周期傾対象 T を持ち, その自己準同型環 $\Lambda := \text{End}_{\mathcal{T}}(T)$ の大域次元が m 以下であるならば, 三角同値 $\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} D_m(\text{mod } \Lambda)$ が存在する.

証明の概略は次節にて述べる. ここでは例や新しく加わった条件「 Λ の大域次元が m 以下」について議論する.

Example 14. Q を図 1 のような 4 頂点からなる巡回籠とし, Λ を長さ 4 の道が生成する両側イデアルによる道多元環 $\mathbb{k}Q$ の商として定める.

$$Q: \begin{array}{ccc} & 4 & \rightarrow & 3 \\ & \uparrow & & \downarrow \\ & 1 & \leftarrow & 2 \end{array}$$

FIGURE 1. 4 頂点巡回箭 Q

このとき $\text{mod } \Lambda$ の Auslander-Reiten 箭は次のようになる。

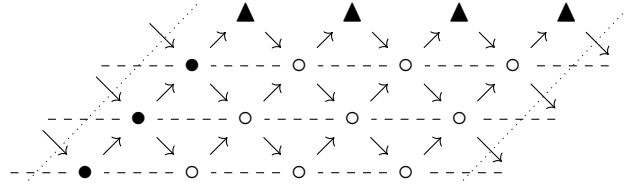


FIGURE 2. $\text{mod } \Lambda$ の Auslander-Reiten 箭

ここでドット線は同一視を表し, ▲ は射影かつ入射 Λ 加群を表す. Λ は自己移入多元環であり, $\text{mod } \Lambda$ は Frobenius 完全圏となるので, その安定圏 $\underline{\text{mod}} \Lambda$ の Auslander-Reiten 箭は図 2 から ▲ を取り除いたものになる. syzygy を計算することにより $\underline{\text{mod}} \Lambda$ は 2 周期三角圏となることが分かる. $T := \bigoplus_{\bullet \text{ in 図 2}} \bullet$ は $\underline{\text{mod}} \Lambda$ の 2 周期傾対象であり, その自己準同型環は A_3 型箭の道多元環 $\mathbb{k}A_3$ と同型である.

$$(\mathbb{k}A_3 \text{ の大域次元}) = 1 \leq 2 = (\underline{\text{mod}} \Lambda \text{ の周期})$$

より Theorem 13 の仮定を満たすので, 三角同値 $\underline{\text{mod}} \Lambda \xrightarrow{\sim} D_2(\mathbb{k}A_3)$ が存在する.

Example 15. 1 次元 A_3 型単純特異点 $R = \mathbb{C}[[x, y]]/(x^2 - y^4)$ を考える. Example 7 で述べたように安定 Cohen-Macaulay 加群圏 $\underline{\text{CM}}(R)$ は 2 周期三角圏となる. このとき $\underline{\text{CM}}(R)$ の Auslander-Reiten 箭は次の様になり, ここから R を除いたものが $\underline{\text{CM}}(R)$ の Auslander-Reiten 箭である.

$$R \rightleftarrows M \begin{array}{c} \nearrow N_+ \\ \searrow N_- \end{array}$$

N_{\pm} は $\underline{\text{CM}}(R)$ の 2 周期傾対象であるが, その自己準同型環は $\mathbb{C}[t]/(t^2)$ に同型であり大域次元は無限である. よって Theorem 13 を適用することはできない. 実際, $\underline{\text{CM}}(R)$ と $D_2(\mathbb{C}[t]/(t^2))$ は三角同値でない. なぜなら $\underline{\text{CM}}(R)$ の直既約対象の同型類は 3 個であるが $D_2(\mathbb{C}[t]/(t^2))$ には少なくとも $\mathbb{C}[t]/(t^2), (t)/(t^2)$ とそのシフトの 4 個の直既約対象があるからである. 以上より Theorem 13 における「 Λ の大域次元が m 以下」という仮定は外せないものである.

4. 証明の概略

この節では周期傾定理 13 の証明の概略を紹介する．まず初めに主な道具である微分次数付き微分代数について復習する．未定義の概念などについては [9] を参照せよ．

Definition 16.

- (1) **微分次数付き微分代数** $A = (A, d, m)$ とは, \mathbb{k} 上の複体 (A, d) と結合的かつ単位的な積 $m : A \otimes_{\mathbb{k}} A \rightarrow A$ の組であって次数付き Leibniz 則 $d(a \cdot b) = d(a) \cdot b + (-1)^{\deg(a)} a \cdot d(b)$ を満たすものである．
- (2) **微分次数付き微分代数の射** $f : A \rightarrow B$ とは, 複体間のチェイン写像 $f : A \rightarrow B$ であって $f(a \cdot b) = f(a) \cdot f(b)$ を満たすものである．

以下, 次数付き微分 (differential graded) 代数を DG 代数と書く．DG 代数 A に対してその導来圏 $D(A)$ を定義することができる．これは三角圏である． A を含む $D(A)$ の最小の thick 部分圏を $\text{perf}(A)$ で表し, A の**完全導来圏**という．

Example 17. Λ を多元環とする．

- (1) Λ は次数が 0 に集中した DG 代数と考えられる．このとき DG 代数としての導来圏 $D(\Lambda)$ と通常の導来圏 $D(\text{Mod}\Lambda)$ は一致する．また DG 代数としての完全導来圏 $\text{perf}(\Lambda)$ と通常の完全導来圏 $K^b(\text{proj}\Lambda)$ も一致する [12]．
- (2) $\Lambda[t^{\pm 1}]$ を Λ 上の Laurent 多項式環とする． $\deg(t) = m$ とすることで $\Lambda[t^{\pm 1}]$ は微分が 0 の DG 代数と考えられる． Λ の大域次元を有限とすると $D(\Lambda[t^{\pm 1}]) \simeq D_m(\text{Mod}\Lambda)$ であり, $\text{perf}(\Lambda[t^{\pm 1}]) \simeq D_m(\text{mod}\Lambda)$ である [11]．

DG 代数を考えるメリットは次の三角圏における森田の定理にある．

Theorem 18 ([9]). \mathcal{T} をべき等完備かつ代数的とする．もし \mathcal{T} が *thick* 生成元 $T \in \mathcal{T}$ を持てば, ある DG 代数 A が存在して次を満たす．

- (1) 三角同値 $\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \text{perf}(A) \subset D(A)$ が存在する．
- (2) 次数付き代数の同型 $H^*(A) := \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H^i(A) \simeq \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Ext}_{\mathcal{T}}^i(T, T)$ が存在する．

周期傾定理 13 は Theorem 18 から導かれる．証明のアイデアを明瞭にするためまず Theorem 18 から傾定理 3 が導かれることを説明する．

傾定理 3 の証明. $T \in \mathcal{T}$ を傾対象とする．傾対象は定義から *thick* 生成元なので Theorem 18 からある DG 代数 A と三角同値 $\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \text{perf}(A)$ が存在して $H^*(A) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Ext}_{\mathcal{T}}^i(T, T) = \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T) = \Lambda$ となる． A の $i \geq 0$ における切断 $\tau_{\geq 0}A$ を考える：

$$\tau_{\geq 0}A := (\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \text{Ker}d^0 \rightarrow A^1 \rightarrow A^2 \rightarrow \cdots).$$

$\tau_{\geq 0}A$ は A の部分 DG 代数であり包含写像 $\iota : \tau_{\geq 0}A \rightarrow A$ は擬同型である．つまり任意の i に対して ι がコホモロジーに誘導する射 $H^i(\tau_{\geq 0}A) \rightarrow H^i(A)$ は同型である．また自然な擬同型 $\tau_{\geq 0}A \rightarrow H^0(A) = \Lambda$ が存在する．よって DG 代数の擬同型の列

$$A \leftarrow \tau_{\geq 0}A \rightarrow \Lambda$$

を得る．DG 代数の間の擬同型はその完全導来圏の間の三角同値を誘導するので三角同値の列

$$\mathcal{T} \simeq \text{perf}(A) \simeq \text{perf}(\tau_{\geq 0}A) \simeq \text{perf}(\Lambda) = K^b(\text{proj}\Lambda)$$

を得る． □

上の証明のポイントは A と $H^*(A) = \Lambda$ が DG 代数として擬同型であったところにある。これにより A の導来圏 $D(A)$ をそのコホモロジー環 $H^*(A)$ から計算することができる。これを動機として次のような概念がある。

Definition 19.

- (1) DG 代数 A が**形式的**であるとは、 A と $H^*(A)$ が擬同型であるときにいう。
- (2) 次数付き代数 B が**本質的に形式的**であるとは、 $H^*(A) \simeq B$ となる任意の DG 代数 A が形式的であるときに言う。

上の証明において A は形式的であり、 Λ は本質的に形式的である。次が周期傾定理 13 の鍵となる補題である。

Lemma 20 ([11]). $\Lambda[t^{\pm 1}]$ を多元環 Λ 上の Laurent 多項式環とし、 $\deg(t) = m$ とすることで $\Lambda[t^{\pm 1}]$ を微分が 0 の DG 代数と考える。 $\text{gl.dim} \Lambda \leq m$ ならば $\Lambda[t^{\pm 1}]$ は本質的に形式的である。

周期傾定理 13 の証明. $T \in \mathcal{T}$ を周期傾対象とする。 Theorem 18 からある DG 代数 A と三角同値 $\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \text{perf}(A)$ が存在して

$$H^*(A) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \text{Ext}_{\mathcal{T}}^i(T, T) = \bigoplus_{i \in m\mathbb{Z}} \text{Ext}_{\mathcal{T}}^i(T, T) = \bigoplus_{i \in m\mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{T}}(T, T) = \bigoplus_{i \in m\mathbb{Z}} \Lambda = \Lambda[t^{\pm 1}]$$

となる。ここで二つ目の等号は m 周期傾対象の定義から従い、三つ目の等号は m 周期三角圏の定義から従う。また $\deg(t) = m$ である。 Lemma 20 より、 A と $H^*(A) = \Lambda[t^{\pm 1}]$ は DG 代数として擬同型なので $\text{perf}(A) \simeq \text{perf}(\Lambda[t^{\pm 1}])$ となる。また Example 17 より $\text{perf}(\Lambda[t^{\pm 1}]) \simeq D_m(\Lambda)$ である。以上を合わせて三角同値

$$\mathcal{T} \xrightarrow{\sim} \text{perf}(A) \simeq \text{perf}(\Lambda[t^{\pm 1}]) \simeq D_m(\Lambda)$$

を得る。 □

REFERENCES

- [1] I. Assem, D. Simson, A. Skowronski, *Elements of the representation theory of associative algebras. Vol. 1.* London Mathematical Society Student Texts, **65**, Cambridge University Press, (2006).
- [2] A. A. Beilinson, *Coherent sheaves on \mathbb{P}^n and problems in linear algebra*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **12** (1978), no. 3, 68–69.
- [3] T. Bridgeland, *Quantum groups via Hall algebras of complexes*, Ann. Math., **177** (2013), 739–759.
- [4] A. S. Dugas, *Periodic resolutions and self-injective algebras of finite type*, J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), no. 6, 990–1000.
- [5] D. Eisenbud, *Homological algebra on a complete intersection, with an application to group representations*, Trans. Amer. Math. Soc. **260** (1980), no. 1, 35–64.
- [6] C. Fu, *On root categories of finite-dimensional algebras*, J. Alg., **370** (2012), 233–265.
- [7] M. Gorsky, *Semi-derived Hall algebras and tilting invariance of Bridgeland–Hall algebras*, preprint, arXiv:1303.5879.
- [8] D. Happel, *On the derived category of a finite-dimensional algebra*, Comment. Math. Helv. **62** (1987), no. 3, 339–389.
- [9] B. Keller, *Deriving DG categories*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **27** (1994), no. 1, 63–102.
- [10] 中岡宏行, **圏論の技法**, (2015), 日本評論社.
- [11] S. Saito, *Tilting objects in periodic triangulated categories*, preprint, arXiv:2011.14096.
- [12] L.A. Hügel, D. Happel, H. Krause ed., *Handbook of Tilting Theory*, London Math. Soc. Lect. Note Ser., **332** (2007), Cambridge University Press.

- [13] X. Zhao, *A note on the equivalence of m -periodic derived categories*, Sc. China Math., **57** (2014), no. 11, 2329–2334.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS
NAGOYA UNIVERSITY
CHIKUSA-KU, NAGOYA. 464-8602, JAPAN
Email address: m19018i@math.nagoya-u.ac.jp