中山・東屋の補題の一般化

第 54 回環論および表現論シンポジューム
埼玉大学理学部
2022 年 9 月 7 日 (水) 15:30-16:00

佐藤眞久

愛知大学地域政策学部地域政策学センター

Ware の問題の最終報告

本題の前に Ware の問題の最終報告

唯一の極大部分加群を持つ射影加群について
第 51 回環論及び表現論シンポジューム
2018 年 9 月 岡山理科大学

Ware の問題の肯定的解決の報告を行った。

Ware の問題

Ware の問題

環 R 上の右射影 R 加群 P が唯一つの極大部分加群 L を持てば、L は P の最大の極大部分加群であるか？

R.Ware *Endomorphism rings of projective modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **155** (1971), 233-256.

下記に否定的解決の論文があると指摘を受ける

A. Facchini, D. Herbera, I. Sakhajev, *Finitely Generated Flat Modules and a Characterization of Semiperfect Rings*, Comm. in Algebra, Vol.**31** No.9(2003), 4195–214.

A. Facchini, D. Herbera, I. Sakhajev の論証の概要
直接的に反例を示した訳ではなかった。手順は
1. ある同値条件から生成系の性質を調べる
2. 同値条件を満たす例は他の論文から引用

実質的解決はこの論文の寄与と記載されている。

一方、自身の論文に間違いが見つからない
例を記した論文が手に入らない
＝＝＞自身で同値条件を満たす例を構成
構成した例では生成系の性質が成り立っていない。

下記の論文で最終的に肯定的に解決
Projective Modules with Unique Maximal submodules are cyclic, Proc. of Amer. Math. Soc, **148**(9), pp.3673-3684, 2020.

Ware の問題の証明との関係

Ware の問題の証明で、
中山・東屋の補題が射影加群で成立することを使用

中山・東屋の補題 M を有限生成加群あるいは射影加群とする。
このとき、M が $MJ(R) = M$ を満たせば $M = 0$ である。

目的:中山・東屋の補題を次のように一般化

M を有限生成加群の直和の直和因子とする。
このとき、M が $MJ(R) = M$ を満たせば $M = 0$ が成立する

Ware の問題の証明との関係

ポイント：射影加群 $P = PJ(R)$ の場合
$F = \oplus_{i \in \Delta} R$ を自由加群、$f: F \to P$ を分離全射準同形
$\Delta_1 \subset \Delta_2$ を Δ の任意の有限部分集合
$F_t = \oplus_{i \in \Delta - \Delta_t} R, \ (t = 1, 2)$
$\gamma_{21}: F_2 \to F_1$ を自然な入射とする。

次の分離完全列を持つ可換図式がある

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\alpha_2: & 0 & \longleftarrow & \mathrm{Coker} g_2 & \longleftarrow & F_2 & \xleftarrow{g_2} & P & \longleftarrow & 0 \\
{\scriptstyle \beta_{21}} \big\downarrow & & & \big\downarrow {\scriptstyle \gamma_{21}|\mathrm{Coker} g_2} & & \big\downarrow {\scriptstyle \gamma_{21}} & & \big\| & & \\
\alpha_1: & 0 & \longleftarrow & \mathrm{Coker} g_1 & \longleftarrow & F_1 & \xleftarrow{g_1} & P & \longleftarrow & 0
\end{array}
$$

類似の議論(設定)

$P = PJ$ を $M = MJ(R)$ を満たす加群 M、
F を有限生成加群 M_i の直和に置き換え

I. Kaplansky, *Projective modules*, Ann. of Math. **68**, 372–377 (1958).

M は可算生成加群の直和＝＝＞ M は可算生成と仮定してよい
＝＝＞ M は F の可算個の有限生成加群 M_i の直和の直和因子
＝＝＞ $F = \oplus_{i \in \mathbb{N}} M_i$ としてよい

類似の議論

$f : F \to M$ を分離全射準同形
$\mathbb{N}_t = \mathbb{N} - \{1, \cdots, t\}$ に対し、$F_t = \oplus_{i \in \mathbb{N}_t} M_i$, $f_t = f|F_t$ とする。
このとき、$\mathrm{Im} f_t = M$ である。

理由
$M/\mathrm{Im} f_t$ は $M_1 \oplus \cdots \oplus M_t$ の準同形像より有限生成
$M/\mathrm{Im} f_t \cdot J(R) = (MJ(R) + \mathrm{Im} f_t)/\mathrm{Im} f_t = M/\mathrm{Im} f_t$ より
中山・東屋の補題から $M = \mathrm{Im} f_t$

類似の議論とならない箇所

そこで射影加群の場合と同様に、
自然な入射と射影を $\gamma_t : F_{t+1} \to F_t$, ${\gamma'}_t : F_t \to F_{t+1}$ として
以下の可換図式が得られる

$$\begin{tikzcd}
\alpha_{t+1}: \arrow[d, "\beta_t"'] & 0 \arrow[r] & \ker f_{t+1} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_t|\ker f_t"] & F_{t+1} \arrow[r, "f_{t+1}"] \arrow[d, "\gamma_t"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
\alpha_t: & 0 \arrow[r] & \ker f_t \arrow[r] & F_t \arrow[r, "f_t"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$g_t : M \to F_t$ で $f_t g_t = 1_M$ とする。
$g_{t+1} : M \to F_{t+1}$ を ${\gamma'}_t g_t$ としても、
$f_{t+1}g_{t+1} \neq 1_M$ で、g_{t+1} は分離を与える写像でない
射影加群の場合のように、
$f_{t+1}g_{t+1} = 1_M$ となる写像 g_{t+1} が存在すれば、同様の証明が可能

方針転換

$f_{t+1}g_{t+1} = 1_M$ となる写像 g_{t+1} が存在する筈として構成を試行錯誤＝＝＝＞難しい !!　未完に終わる

方針転換: 2 段階で証明を行った。
1. *On Generalized Nakayama-Azumaya Lemma and NAS-Modules*, Ring theory 2019(Proc. of the 8th China-Japan-Korea International Conference), pp.188–202, World Scientific Publishing (2021).
(講演は Ware 問題、論文は中山・東屋の補題の一般化と異なるものになっている)
一般化された中山・東屋の補題が成立する必要十分条件を
NAS 加群と呼ばれるある種の自明でない加群の存在で与えた。

2. *On Generalized Nakayama-Azumaya's Lemma*, Comm. in Algebra, Vol.**50** No.5(2022), 2037–2044.
自明でない NAS 加群が存在しないことを証明

NAS 加群

一般化された中山・東屋の補題が成立しないとすると、
次の性質を持つ自明でない加群 M が存在する。
この加群 M を中山-東屋特異加群 (NAS-加群) と呼ぶ。

(1) M の有限生成部分加群の列 $M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ で、
$M = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i$ かつ各自然数 i について $M_i \subset M_{i+1}J(R)$ となる。
（結果的に $M = MJ(R)$ である。）

(2) 各 $(x_i) \in \sum_{i\in\mathbb{N}} \oplus M_i$ に対し $f((x_i)) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i$ と準同形
$f: \sum_{i\in\mathbb{N}} \oplus M_i \to M$ を定義する。このとき、ある準同形
$g: M \to \sum_{i\in\mathbb{N}} \oplus M_i$ で $fg = 1_M$ を満たすものがある。

(3) 各自然数 i について $M_i \cap g(M) = M_i \cap \ker f = 0$ となる。

当初の目的 存在或いは矛盾を示す為上記の性質を引き出した。
しかし、(1),(2) の性質を持つ自明でない加群（WNAS 加群と呼ぶ）
があれば、NAS 加群を構成できることが後に示された。

部分加群の構成（Rearrangement Process）

有限生成加群 F_i の直和を $F = \oplus_{i \in \mathbb{N}} F_i$
$f : F \to M$ および $g : M \to F$ を各々分離全射および単射準同形で $gf = 1_M$ とする。

F_i を次のように置き換える。

1. $gf(F_1) \cong f(F_1)$ 有限生成加群
2. $M = MJ(R)$ より、$f(F_1) \subset M_2' J(R)$ となる M の有限生成部分加群 M_2' がある。
3. $g(M_2') \subset \oplus_{1 \leq i \leq t_2} F_i$ となる $t_2 > 1$ がある。
4. $\oplus_{2 \leq i \leq t_2} F_i$ を F_2 と置き換え。
5. $gf(F_2) \cong f(F_2)$ は有限生成加群
6. 同様の操作を繰り返し、F_i を置き換える。

部分加群の構成（Non-redundant Process）

$F = M \oplus N$ として、次の置き換えを行う。

$$
\begin{aligned}
&M ==> M/\oplus_{i\in\mathbb{N}}(M\cap F_i)\\
&N ==> N/\oplus_{i\in\mathbb{N}}(N\cap F_i)\\
&F_i ==> F_i/\oplus_{i\in\mathbb{N}}((M\cap F_i)\oplus(N\cap F_i)),\ i\in\mathbb{N}\\
&F ==> \oplus_{i\in\mathbb{N}}(F_i/\oplus_{i\in\mathbb{N}}((M\cap F_i)\oplus(N\cap F_i)))
\end{aligned}
$$

補題

この置き換えで $F = \oplus_{i\in\mathbb{N}}F_i = M \oplus N$ の条件は保たれる。

部分加群の構成（Correspondence Process）

補題

$F = M \oplus N$ として、$\oplus_{t \in T} F_t = M \oplus N'$ となる最小部分集合 $T \subset \mathbb{N}$ が存在する。

そこで、 F を $\oplus_{t \in T} F_t$ で置き替える。

NAS 加群の構成

補題

$F = \oplus_{i\in\mathbb{N}} F_i = M \oplus N$ を 3 つの置き換えをおこなった直和とする。
このとき、任意の $(x, y) \in F_i$, $(x \in M, y \in N)$ に対し、
$(x, y') \in F_{i+1}$ となる $y' \in N$ がただ一つ存在する。
また $f(F_i) = M_i$ とすると、$F_i \cong M_i$ となる。

上の同型を通して、$F = \oplus_{i\in\mathbb{N}} M_i$ とすれば
NAS 加群を与える M の部分加群の列 $M_1 \subset M_2 \subset \cdots$
および
写像 $f: F \to M;\ (f((x_i)) = \sum x_i)$
ができる。

WNAS 加群

中山-東屋特異加群の (3) の条件を外した加群を
中山-東屋弱特異加群 (WNAS-加群) と呼ぶ。

(1) M の有限生成部分加群の列 $M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ で、
$M = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i$ かつ各自然数 i について $M_i \subset M_{i+1}J(R)$ となる。
（結果的に $M = MJ(R)$ である。）

(2) 各 $(x_i) \in \sum_{i\in\mathbb{N}} \oplus M_i$ に対し $f((x_i)) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i$ と準同形
$f : \sum_{i\in\mathbb{N}} \oplus M_i \to M$ を定義する。このとき、ある準同形
$g : M \to \sum_{i\in\mathbb{N}} \oplus M_i$ で $fg = 1_M$ を満たすものがある。

目的：自明でない WNAS 加群は存在しないことを示す。

設定 1

$F = \sum_{i\in\mathbb{N}} \oplus M_i = M \oplus N$ とおく。
　ここで、各 M_i は有限生成で $M = MJ(R)$ を満たす
$f: F \to M$ と $g: M \to F$ は
　$f((x_i)) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i,\ fg = 1_M$ を満たす準同形

さらに、第 1 段階から各 i について、次のように仮定してよい。
　$gf(M_i) \subset M_1 \oplus \cdots M_i \oplus M_{i+1},\ M \cap M_i = N \cap M_i = 0$

直和から、ある準同形 $g' : F \to N$ および $f' : N \to F$ があり、
　$1_F = gf + f'g',\ g'f' = 1_N,\ ff' = 0,\ g'g = 0$ を満たす。

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f'} F \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

$$0 \longleftarrow N \xleftarrow{g'} F \xleftarrow{g} M \longleftarrow 0$$

設定 2

次の設定をする。

$M_0 = 0,\ F[1] = M_0 \oplus F$
$\alpha_i :\ M_i \to M_i/M_{i-1},\ (i \in \mathbb{N})$ ：自然な全射準同形
$\alpha = (\alpha_i) :\ F \to F/F[1] = M_1 \oplus M_2/M_1 \oplus \cdots$
$p_i :\ F \to M_i,\ (i \in \mathbb{N})$ ：第 i 成分への射影

$p_{i+1}g|M_i :\ M_i \to F \to M_{i+1} \subset M$ を考える
$g(M_{i-1}) \subset M_1 \oplus \cdots \oplus M_i ==> p_{i+1}g(M_{i-1}) = 0$ である
$p_{i+1}g|M_i$ は $\overline{f}_i\ : M_i/M_{i-1} \to M$ を導く。
$==> p_{i+1}g|M_i = \overline{f}_i\alpha_i$ となる。

そこで、$\overline{f} : F/F[1] \to M$ を $\overline{f}(\alpha(x)) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \overline{f}_i(\alpha_i p_i(x))$,
h を $h = \overline{f}\alpha g :\ M \to F \to F/F[1] \to \mathrm{Im}(\overline{f})$ と決める。

生成元の挙動

次のように生成元を設定する。

$M_i = a_{i1}R + \cdots + a_{it_i}R, \ (i \in \mathbb{N})$

ただし、$a_{ij} \notin M_{i-1}$, 従って $\alpha_i(a_{ij}) \neq \alpha_i(0)$

次に

$$g(a_{ij}) = (y_1^{(ij)}, \cdots, y_i^{(ij)}, y_{i+1}^{(ij)}, 0, \cdots) \in F = \oplus_{i \in \mathbb{N}} M_i$$

とおく。また、$y_s^{(ij)} \in M_s$ に注意して

$$g(y_s^{(ij)}) = (z_{s1}^{(ij)}, \cdots, z_{s\ s+1}^{(ij)}, 0, \cdots) \in F$$

とおくと次の式が成り立つ。

1. $h(a_{ij}) = (\overline{f}(\alpha(g(a_{ij}))) = \sum_{k=1}^{i} z_{k,k+1}^{(ij)}$
2. 任意の元 $0 \neq x \in M$ に対し、i を $x \in M_i$ となる最小の自然数、$g(x) = (y_1^{(x)}, \cdots, y_i^{(x)}, y_{i+1}^{(x)}, 0, \cdots) \in F = \oplus_{i \in \mathbb{N}} M_i$ とすると
   $h(x) = \overline{f}(\alpha(g(x))) = \sum_{k=1}^{i} p_{k+1} g(y_k^{(x)})$
   すなわち $g(y_k^{(x)}), (1 \leq k \leq i)$ の $k+1$-成分の総和である。

証明の準備

記号の再掲 $1_F = gf + f'g',\ g'f' = 1_N, ff' = 0,\ g'g = 0$

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f'} F \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0$$

$$0 \longleftarrow N \xleftarrow{g'} F \xleftarrow{g} M \longleftarrow 0$$

$\overline{f}(\alpha(x)) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \overline{f}_i(\alpha_i p_i(x)),\ \alpha_i : M_i \to M_i/M_{i-1}, \overline{f}_i : M_i/M_{i-1} \to M$
$h = \overline{f}\alpha g :\ M \to F \to F/F[1] \to \mathrm{Im}(\overline{f}),\ \alpha = (\alpha_i)_{i\in\mathbb{N}} : F \to F/F[1]$

証明の準備の為の補題

1. 次の集合は加群 $f'(N)$ の生成元である。
$$\{g(a_{ij}) - (0_1, \cdots, 0_{i-1}, a_{ij}, 0, \cdots) \mid i \in \mathbb{N}, 1 \le j \le t_i\}$$
2. 次の関係式が成り立つ。
$\overline{f}\alpha f' = 0,\ hf = \overline{f}\alpha,\ \mathrm{Im}(h) = \mathrm{Im}(\overline{f})$
特に h は全射である。

一般化された中山・東屋の補題の証明の概要

補題は次の短完全列の可換図式を意味する。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F[1] & \xrightarrow{\beta_1} & F & \xrightarrow{\alpha} & F/F[1] & \longrightarrow & 0 \\ & & & & {\scriptstyle f}\downarrow & & {\scriptstyle \overline{f}}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker h & \xrightarrow{\beta_2} & M & \xrightarrow{h} & \mathrm{Im}(\overline{f}) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

ただし、β_1, β_2 は自然な単射準同形。

$\beta_2(f|F[1]) = f\beta_1$ と $f|F[1](F[1]) = M$ から $\ker h = M$

よって、$\mathrm{Im}(\overline{f}) = 0$ である。

これより $\overline{f}(a_{ij}) = y_{i+1}^{(ij)} = 0$ となり $g(x) \in M_1 \oplus \cdots \oplus M_i$ が従う。

よって、$g(a_{ij}) = g(y_1^{(ij)}) + \cdots + g(y_{i-1}^{(ij)}) + g(y_i^{(ij)})$ と

$g(y_1^{(ij)}) + \cdots + g(y_{i-1}^{(ij)}) \in M_1 \oplus \cdots \oplus M_{i-1}$ から

$$(*) \quad y_i^{(ij)} = p_i(g(a_{(ij)})) = p_i(g(y_i^{(ij)})) = z_{ii}^{(ij)}.$$

となる。

関係式 (*) の意味

関係式 (*) は次の 2 つのことを示している。

1. $\alpha_i(a_{ij} - y_i^{(ij)}) = 0$、すなわち、
$M_i/M_{i-1} = \alpha_i(y_i^{(i1)})R + \cdots + \alpha_i(y_i^{(it_i)})R$ for all $i \in \mathbb{N}$ で
$\{\alpha_i(y_i^{(i1)}), \cdots, \alpha_i(y_i^{(it_i)})\}$ は M_i/M_{i-1} の生成元
2. $y_i^{(ij)} = p_i(g(y_i^{(ij)}))$

最初の内容と先の補題から

$\{y_i^{(i1)}, \cdots, y_i^{(it_i)}\}$ は M_i の生成元である。

そこで、生成元 $\{a_{ij}\}$ を $\{y_i^{(ij)}\}$ と置き換える。
2 番目のの内容から、$p_i(g(a_{ij})) = a_{ij}$ と仮定してよい。

置き換えた生成元

$a_{i-1,1} \in M_{i-1} \subset M_i$ より、
$a_{i-1,1}$ は M_i の生成元を用いて表されるので、

$$a_{i-1,1} = a_{i1}r_1 + \cdots + a_{it_i}r_{t_i} \ (r_1, \cdots, r_{t_i} \in R)$$

とおく。

$a_{i-1,1} \in M_{i-1}$ より、$g(a_{i-1,1}) \in M_1 \oplus \cdots \oplus M_{i-1}$ であったので、

$$p_i(g(a_{i-1,1})) = 0$$

一方、

$$\begin{aligned} p_i(g(a_{i-1,1})) &= p_i(g(a_{i1}))r_1 + \cdots + p_i(g(a_{it_i}))r_{t_i} \\ &= a_{i1}r_1 + \cdots + a_{it_i}r_{t_i} = a_{i-1,1} \end{aligned}$$

従って、$a_{i-1,1} = 0$ となり矛盾する。

直接的な結果

直接的な系

1. 自明でない加群 M の有限生成部分加群 $M_i (i \in \mathbb{N})$ が各 i について $M_i \subset M_{i+1}J(R)$ を満たし $M = \cup_{i\in\mathbb{N}} M_i$ とする。このとき、$(f((x_i)) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i,\ ((x_i) \in \oplus_{i\in\mathbb{N}} M_i)$ で定義される自然な全射準同形 $f : \oplus_{i\in\mathbb{N}} M_i \to M$ は分離写像でない。
2. 射影加群 P が $PJ(R) = P$ なら $P = 0$ である。
(I. Kaplansky(1958), F.W. Anderson, K.R. Fuller(1992))

極大部分加群の存在に関する応用

極大加群の存在に関して次のことがわかる。

定理

1. F を有限生成加群 $\{M_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ の直和とし、
   M を F の自明でない部分加群で $M \not\subset \mathrm{rad}\ F$ とする。
   このとき、 M は極大部分加群を含む。
2. 自由加群 F の自明でない部分加群を M とする。
   $M \not\subset FJ(R)$ なら M は極大部分加群を含む。
   特に 零でない射影加群は極大部分加群を含む。
3. M を有限生成加群の直和の零でない直和因子で
   $MJ(R) = \mathrm{rad}\ M$ とすると、M は極大部分加群を含む。
   特に、$M_\delta J(R) = \mathrm{rad}\ M_\delta$ を満たす有限生成加群 M_δ の直和
   $F = \oplus_{\delta\in\Delta} M_\delta$ の任意の直和因子は極大部分加群を含む。

簡潔な別証明

一般化された中山・東屋の補題の証明は、
内容の簡潔さに比して長すぎる
＝＝＞短い別証明を見つけて欲しい

References

[1] F.W. Anderson, K.R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, GTM **13**, Springer-Verlag (1992).
[2] A. Facchini, D. Herbera, I. Sakhajev, *Finitely Generated Flat Modules and a Characterization of Semiperfect Rings*, Comm. in Algebra, Vol.**31** No.9(2003), 4195–4214.
[3] I. Kaplansky, *Projective modules*, Ann. of Math. **68**, 372–377 (1958).
[4] M. SATO, *On Projective Modules with Unique Maximal submodules* , Proc. of the 51st Symposium on Ring Theory and Representation Theory, pp.135-145, 2019.
[5] ———, *Projective Modules with Unique Maximal submodules are cyclic*, Proc. of Amer. Math. Soc, **148**(9), pp.3673-3684, 2020.
[6] ———, *On Generalized Nakayama-Azumaya Lemma and NAS-Modules*, Ring theory 2019(Proc. of the 8th China-Japan-Korea International Conference), pp.188–202, World

ご静聴有り難うございます。