

THE SPECTRUM OF GROTHENDIECK MONOID

SHUNYA SAITO

ABSTRACT. The Grothendieck monoid of an exact category is a monoid version of the Grothendieck group. We use it to classify Serre subcategories of an exact category and to reconstruct the topology of a noetherian scheme. We first construct bijections between (i) the set of Serre subcategories of an exact category, (ii) the set of faces of its Grothendieck monoid, and (iii) the monoid spectrum of its Grothendieck monoid. By using (ii), we classify Serre subcategories of exact categories related to a finite dimensional algebra and a smooth projective curve. For this, we determine the Grothendieck monoid of the category of coherent sheaves on a smooth projective curve. By using (iii), we introduce a topology on the set of Serre subcategories. As a consequence, we recover the topology of a noetherian scheme from the Grothendieck monoid.

Key Words: Grothendieck monoid; exact categories; reconstruction theorem.

2000 Mathematics Subject Classification: 18E10, 16G10, 14H60.

1962年の論文 [2] において, Gabriel はネーター可換環の加群圏の Serre 部分圏を素スペクトラムを用いて分類した. 以来, 部分圏の分類問題は環の表現論における主要なテーマであり続けている. 同論文 [2] において Gabriel はネーター・スキーム X をその上の準連層の圏 $\mathrm{Qcoh} X$ から復元した. これは幾何学的対象 X とアーベル圏 $\mathrm{Qcoh} X$ が等価であることを意味する. 一連の Gabriel の仕事は幾何学的対象を圏を通して調べる非可換代数幾何学という分野に発展し, 今日では環の表現論と代数幾何学の重要な合流地点となっている. 本稿では [3] に基づいて, **Grothendieck モノイド**と呼ばれる圏の不変量を用いた**完全圏の Serre 部分圏の分類とネーター・スキームの位相の復元**について紹介する.

第1節では, 完全圏の簡単な復習と Grothendieck モノイドの定義を与える. 第2節では, 完全圏の部分圏と Grothendieck モノイドの部分集合の間に対応を作り, それが Serre 部分圏と良い性質を持つ部分モノイドの間に全単射を与えることを紹介する. 第3節では, まず可換モノイドのスペクトラムについて復習し, 接続層の圏の Grothendieck モノイドのスペクトラムを考えることで元のネーター・スキームの位相が復元できることを紹介する.

本稿において圏はすべて本質的に小であるとする. 圏 \mathcal{C} に対して $|\mathcal{C}|$ で \mathcal{C} の対象の同型類の集合を表す. また \mathcal{C} の対象 X の同型類も同じ記号 X で表す. 任意の部分圏は充満部分圏であり同型で閉じているとする. モノイドは単位元を持つ**可換半群**を指し, 加法的記法を用いる. 非負整数の集合 \mathbb{N} は通常の算術的演算によりモノイドと見なす. ネーター環 Λ に対して $\mathrm{mod} \Lambda$ で有限生成 (右) Λ 加群の圏を表す. ネーター・スキーム X に対して $\mathrm{coh} X$ で X 上の接続層の圏を表す.

1. 完全圏と GROTHENDIECK モノイド

この節では、本稿の主な考察対象である完全圏と Grothendieck モノイドを紹介する。完全圏 (exact category) とは、許容完全列 (conflation) と呼ばれる射の列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ が指定された加法圏であって、いくつかの条件を満たすものである。詳しい定義は [4, 第5章] を見よ。完全圏の例は以下のようなものがある：

Example 1.

- (1) アーベル圏 \mathcal{A} は許容完全列として短完全列を指定することで完全圏となる。
- (2) 加法圏 \mathcal{C} は許容完全列として分裂短完全列

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}} A \oplus B \xrightarrow{\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}} B \rightarrow 0$$

を指定することで完全圏となる。とくに半単純でないアーベル圏には相異なる二つの完全圏構造が存在する。

- (3) アーベル圏 \mathcal{A} の部分圏 \mathcal{E} が拡大で閉じる (closed under extensions) とは、任意の \mathcal{A} の短完全列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ に対して、 $A, C \in \mathcal{E}$ ならば $B \in \mathcal{E}$ となる時に言う。 \mathcal{A} の短完全列で全ての項が \mathcal{E} に入るものを許容完全列として指定することで \mathcal{E} は完全圏になる。
- (4) R をネーター可換整域とする。このとき、捩じれ自由加群 (torsionfree module) のなす $\text{mod } R$ の部分圏 $\text{tf } R$ は拡大で閉じた部分圏である。よって (3) より完全圏になる。短完全列

$$0 \rightarrow R \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}} R^{\oplus 2} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}} R \rightarrow 0$$

は $\text{tf } R$ の許容完全列だが、ゼロでない非単元 $x \in R$ に対して短完全列

$$(1.1) \quad 0 \rightarrow R \xrightarrow{-x} R \rightarrow R/xR \rightarrow 0$$

は $\text{tf } R$ の許容完全列ではない。

次にアーベル圏の Grothendieck 群について復習しよう。アーベル圏 \mathcal{A} の Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{A})$ は、 \mathcal{A} の対象の同型類で生成される自由アーベル群を Euler 関係式で割ったアーベル群として定義される：

$$K_0(\mathcal{A}) := \bigoplus_{X \in |\mathcal{A}|} \mathbb{Z}X / \langle A - B + C \mid 0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0 \text{ は短完全列} \rangle.$$

対象 $X \in \mathcal{A}$ の $K_0(\mathcal{A})$ における剰余類を $[X]$ で表す。構成から明らかに任意の短完全列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ に対して $K_0(\mathcal{A})$ における等式 $[B] = [A] + [C]$ が成立する。以下で述べる様に Grothendieck 群はこのような性質を満たすアーベル群の中で最も普遍的なものである。

Definition 2. アーベル圏 \mathcal{A} 上のアーベル群 G に値を持つ加法的関数 (additive function) とは、写像 $f: |\mathcal{A}| \rightarrow G$ であって次が成立するものを言う：

- 等式 $f(0) = 0$ が成立する。つまりゼロ対象は G の単位元に対応する。
- 任意の短完全列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ に対して等式 $f(B) = f(A) + f(C)$ が成立する。

Proposition 3. アーベル圏 \mathcal{A} に対して次が成立する。

- (1) 自然な写像 $[-]: |\mathcal{A}| \rightarrow K_0(\mathcal{A})$ は加法的関数である。

- (2) 任意の \mathcal{A} 上のアーベル群 G に値を持つ加法的関数 f は常に自然な加法的関数 $[-]: |\mathcal{A}| \rightarrow K_0(\mathcal{A})$ を一意に経由する:

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{A}| & \xrightarrow{f} & G \\ [-] \downarrow & \nearrow \exists! & \\ K_0(\mathcal{A}) & & \end{array} .$$

この普遍性をもとに完全圏の Grothendieck モノイドを次のように定義する.

Definition 4. \mathcal{E} を完全圏とする.

- (1) \mathcal{E} 上のモノイド M に値を持つ加法的関数とは、写像 $f: |\mathcal{E}| \rightarrow M$ であって次が成立するものを言う:
- 等式 $f(0) = 0$ が成立する. つまりゼロ対象は M の単位元に対応する.
 - 任意の許容完全列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ に対して等式 $f(B) = f(A) + f(C)$ が成立する.
- (2) \mathcal{E} の **Grothendieck モノイド** $M(\mathcal{E}) = (M(\mathcal{E}), \pi)$ とは、モノイド $M(\mathcal{E})$ と加法的関数 $\pi: |\mathcal{E}| \rightarrow M(\mathcal{E})$ の組であって次を満たすものである:
- 任意の \mathcal{E} 上のモノイド M に値を持つ加法的関数 f は常に $\pi: |\mathcal{E}| \rightarrow K_0(\mathcal{E})$ を一意に経由する:

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{E}| & \xrightarrow{f} & M \\ \pi \downarrow & \nearrow \exists! & \\ M(\mathcal{E}) & & \end{array} .$$

このとき、任意の対象 $X \in \mathcal{E}$ に対して $[X] := \pi(X)$ と表す.

Grothendieck モノイドは任意の完全圏に対して実際に存在する [1, Proposition 3.3]. 写像 $\pi: |\mathcal{E}| \rightarrow M(\mathcal{E})$ が加法的であることからモノイド $M(\mathcal{E})$ において次の等式が常に成立する.

- $[0] = 0$. つまりゼロ対象は単位元に対応する.
- 任意の短完全列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ に対して $[B] = [A] + [C]$.
- 任意の二つの対象 $A, B \in \mathcal{E}$ に対して $[A \oplus B] = [A] + [B]$.

最後の等式は、完全圏の公理より分裂短完全列 $0 \rightarrow A \rightarrow A \oplus B \rightarrow B \rightarrow 0$ が常に許容完全列であることから従う. Grothendieck モノイドの基本的な計算例は次のようなものがある.

Example 5.

- (1) Λ を体上の有限次元代数とする. このとき次元ベクトルはモノイドの同型

$$\underline{\dim}: M(\text{mod } \Lambda) \xrightarrow{\cong} \mathbb{N}^{\oplus n}$$

を与える. ここで n は単純 Λ 加群の同型類の個数である.

- (2) より一般に完全圏 \mathcal{E} が Jordan-Hölder 性を満たすとき、次のモノイドの同型がある:

$$M(\text{mod } \Lambda) \xrightarrow{\cong} \mathbb{N}^{\oplus \text{sim } \mathcal{E}} .$$

ここで $\text{sim } \mathcal{E}$ は完全圏 \mathcal{E} の許容単純対象の同型類の集合である. 詳細は [1] を参照せよ.

最後に Grothendieck 群と Grothendieck モノイドの関係を述べる.

Remark 6. アーベル圏の場合と同様にして完全圏 \mathcal{E} の Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{E})$ を定義することができる.

- (1) 一般にモノイド M からアーベル群 $\text{gp}M$ を構成する **群完備化 (group completion)** という操作がある. これにより関手的群同型 $\text{gp} \circ M(\mathcal{E}) \cong K_0(\mathcal{E})$ が得られる.
- (2) Grothendieck モノイド $M(\mathcal{E})$ と Grothendieck 群の正部分

$$K_0^+(\mathcal{E}) := \{[X] \in K_0(\mathcal{E}) \mid X \in \mathcal{E}\}$$

は一般に一致しない. 実際, R をネーター可換整域とすれば (1.1) より

$$[R/xR] = [R] - [R] = 0$$

が $K_0(\text{mod } R)$ において成立する. 一方, 完全圏の Grothendieck モノイドの一般論からゼロでない対象は $M(\text{mod } R)$ においてゼロでない元を定める [1, Proposition 3.5].

2. GROTHENDIECK モノイドを用いた部分圏の分類

この節では, 完全圏のある種の部分圏が Grothendieck モノイドの部分集合を用いて分類できることを紹介する. 以下 \mathcal{E} は完全圏とする. Grothendieck モノイド $M(\mathcal{E})$ の部分集合と \mathcal{E} の部分圏に対して次の対応を考える.

- 任意の \mathcal{E} の部分圏 \mathcal{D} に対して, $M(\mathcal{E})$ の部分集合 $M_{\mathcal{D}}$ を次で定める:

$$M_{\mathcal{D}} := \{[X] \in M(\mathcal{E}) \mid X \in \mathcal{D}\}.$$

- 任意の $M(\mathcal{E})$ の部分集合 N に対して, \mathcal{E} の部分圏 \mathcal{D}_N を次で定める:

$$\mathcal{D}_N := \{X \in \mathcal{E} \mid [X] \in N\}.$$

上記の対応が全単射となるような部分圏のクラスを以下で導入する.

Definition 7. \mathcal{E} の部分圏 \mathcal{D} が **c-同値で閉じる (closed under c-equivalence)** あるいは **c-閉部分圏 (c-closed subcategory)** であるとは, 任意の許容短完全列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ に対して $B \in \mathcal{D}$ と $A \oplus C \in \mathcal{D}$ が同値であるときに言う.

c-閉部分圏の意味について補足しよう.

Remark 8. 任意の許容短完全列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ に対して $M(\mathcal{E})$ における次の等式が成立する:

$$[B] = [A] + [C] = [A \oplus C]$$

よって c-閉部分圏とは, Grothendieck モノイドの中で同じ元を定める対象を区別しない部分圏だと思える. 実際, \mathcal{E} の部分圏 \mathcal{D} に対して次は同値である:

- (1) \mathcal{D} は c-閉部分圏である.
- (2) 任意の対象 $X, Y \in \mathcal{E}$ に対して, $M(\mathcal{E})$ において $[X] = [Y]$ であり $X \in \mathcal{D}$ ならば $Y \in \mathcal{D}$ である.

次の命題は, c-閉部分圏は Grothendieck モノイドの部分集合全体で分類されることを意味する.

Proposition 9. 対応 $\mathcal{D} \mapsto M_{\mathcal{D}}$ と $N \mapsto \mathcal{D}_N$ は次の集合の間の全単射を与える.

- (1) \mathcal{E} の c-閉部分圏全体の集合.

(2) $M(\mathcal{E})$ の部分集合全体の集合.

完全圏 \mathcal{E} の部分圏 \mathcal{D} が **Serre 部分圏** であるとは, 任意の許容完全列 $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ について $B \in \mathcal{D}$ と $A, C \in \mathcal{D}$ が同値であるときに言う. Serre 部分圏はアーベル圏の商圏との関係から古くより研究されてきた. Serre 部分圏と今回導入された c -閉部分圏の関係は次で与えられる.

Proposition 10. 完全圏の部分圏が Serre であることと直和, 直和因子, c -同値で閉じることは同値である.

この命題からとくに Serre 部分圏は c -閉部分圏である. よって命題 9 の全単射は Serre 部分圏全体の集合に制限され, 次の全単射を与える.

Proposition 11. 対応 $\mathcal{D} \mapsto M_{\mathcal{D}}$ と $N \mapsto \mathcal{D}_N$ は次の集合の間の全単射を与える.

- (1) \mathcal{E} の Serre 部分圏全体の集合 $\text{Serre}(\mathcal{E})$.
- (2) $M(\mathcal{E})$ の面全体の集合 $\text{Face}(M(\mathcal{E}))$.

ここでモノイド M の面 (face) とは, M の部分モノイド F であって, 任意の $x, y \in M$ に対して $x + y \in F$ と $x, y \in F$ が同値であるものを言う.

Grothendieck モノイドが決定されているとき, その面を全て求めることは Serre 部分圏を全て求めることに比べてかなり容易である. よって完全圏の Serre 部分圏を分類するための次の戦略を提案したい:

- (1) Grothendieck モノイド $M(\mathcal{E})$ と抽象モノイド M を関連付ける.
- (2) この抽象モノイド M の面をすべて決定する.
- (3) (1) と (2) を用いて \mathcal{E} の Serre 部分圏をすべて決定する.

この戦略に従って, 非特異射影曲線に付随するいくつかの完全圏の Grothendieck モノイドを計算し, その Serre 部分圏を分類した. とくに次の結果を得た:

Corollary 12. 非特異射影曲線 C 上のベクトル束のなす完全圏 $\text{vect}C$ は 0 と全体以外の非自明な Serre 部分圏を持たない.

3. GROTHENDIECK モノイドのスペクトラムと位相の復元

この節では, まずモノイドのスペクトラムについて復習する. その後, 前節で考察した Serre 部分圏との関係を述べる. 最後に Grothendieck モノイドのスペクトラムに入る位相を用いて, ネーター・スキームの位相を接続層の圏の Grothendieck モノイドから復元する話を紹介する.

まずモノイドにおける素イデアルの概念を導入する.

Definition 13. M をモノイドとする.

- (1) M の部分集合 I が**イデアル** であるとは, 任意の $x \in I$ と $a \in M$ に対して $x + a \in I$ となるときに言う.
- (2) 真のイデアル $\mathfrak{p} \subsetneq M$ が**素イデアル** であるとは, 任意の $x, y \in M$ に対して, $x + y \in \mathfrak{p}$ のとき $x \in \mathfrak{p}$ または $y \in \mathfrak{p}$ が成立するときに言う.
- (3) M の素イデアル全体の集合を $\text{MSpec } M$ で表し, M の**モノイド・スペクトラム** と言う.

今定義した素イデアルと前節で考察した面の関係は次のようになっている.

Proposition 14. モノイド M に対して次が成立する.

- (1) 任意の M の素イデアル \mathfrak{p} に対して $\mathfrak{p}^c := M \setminus \mathfrak{p}$ は M の面である.
- (2) 任意の M の面 F に対して $F^c := M \setminus F$ は M の素イデアルである.
- (3) (1) と (2) の対応は $\text{Face}(M)$ と $\text{MSpec } M$ の間の全単射を与える.

とくに完全圏 \mathcal{E} の Grothendieck モノイドにこの命題を適用することで次の全単射を得る:

$$(3.1) \quad \text{Serre}(\mathcal{E}) \xrightarrow[\text{命題 11}]{\cong} \text{FaceM}(\mathcal{E}) \xrightarrow[\text{命題 14}]{\cong} \text{MSpec } M(\mathcal{E}).$$

ところでモノイド・スペクトラム $\text{MSpec } M$ は次の部分集合を閉集合とすることで位相空間になる:

$$V(S) := \{\mathfrak{p} \in \text{MSpec } M \mid \mathfrak{p} \supseteq S\}, \quad S \text{ は } M \text{ の部分集合.}$$

全単射 (3.1) によって $\text{MSpec } M(\mathcal{E})$ の位相を誘導することで $\text{Serre}(\mathcal{E})$ は位相空間となる. ネーター・スキーム X に対して次の写像を考える:

$$j: X \rightarrow \text{Serre}(\text{coh } X), \quad x \mapsto \text{coh}^x X := \{\mathcal{F} \in \text{coh } X \mid \mathcal{F}_x = 0\}.$$

写像 j は (上で定めた $\text{Serre}(\text{coh } X)$ の位相に関して) 位相空間として埋め込みになっている. 実は j の埋め込みの像は $\text{Serre}(\text{coh } X)$ の位相構造から復元することが出来る. これにより位相空間として X は Grothendieck モノイド $M(\text{coh } X)$ から復元できることが結論付けられる. とくに次が成立する.

Proposition 15. ネーター・スキーム X と Y に関する次の条件を考える.

- (1) スキームとしての同型 $X \cong Y$ がある.
- (2) モノイドとしての同型 $M(\text{coh } X) \cong M(\text{coh } Y)$ がある.
- (3) 位相空間としての同型 $X \cong Y$ がある.

このとき (1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3) が成立する.

REFERENCES

- [1] H. Enomoto, *The Jordan-Hölder property and Grothendieck monoids of exact categories*, Adv. Math, **396** (2022).
- [2] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323–448.
- [3] S. Saito, *The spectrum of Grothendieck monoid: classifying Serre subcategories and reconstruction theorem*, arXiv:2206.15271.
- [4] 中岡宏行, **圏論の技法**, (2015), 日本評論社.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS
 NAGOYA UNIVERSITY
 CHIKUSA-KU, NAGOYA. 464-8602, JAPAN
 Email address: m19018i@math.nagoya-u.ac.jp