# ON GENERALIZED NAKAYAMA-AZUMAYA'S LEMMA AND THE FINAL REPORT ON WARE'S PROBLEM
# 中山・東屋の補題の一般化および WARE の問題解決の最終報告

MASAHISA SATO (佐藤眞久)

*This paper is dedicated to*
*Professor Goro Azumaya and Professor Hiroyuki Tachikawa*
*as the memory of them, who were greatly contributed to ring theory.*
環論の発展に多大な貢献をされた東屋五郎先生および太刀川弘幸先生を偲んでこの論文を捧げます

Abstract. Let $R$ be an associative ring and $J(R)$ its Jacobson radical. The following Nakayama-Azumaya's Lemma is well known.

**Nakayama-Azumaya's Lemma** *Let $M$ be a finitely generated right $R$-module. If $M$ satisfies $MJ(R) = M$, then $M = 0$.*

This property holds also for a projective module $M$. We show the following Generalized Nakayama-Azumaya's Lemma as the unified theorem of the above two results.

**Generalized Nakayama-Azumaya's Lemma** *Let $M$ be a direct summand of a direct sum of finitely generated right $R$-modules. If $M$ satisfies $MJ(R) = M$, then $M = 0$.*

In the beginning of this article, we give the final report on Ware's problem proposed in [9] by R.Ware, i.e., the following Ware's problem is affirmative.

**Ware's problem** *Assume a projecive module $P$ has a unique maximal submodule, then this submodule is the largest submodule of $P$.*

*Key Words:* Nakayama-Azumaya's Lemma, NAS-modules, Ware's problem, Maximal submodules

2010 *Mathematics Subject Classification*: Primary 08A05Gxx, 16S90; Secondary 16D10, 16N20, 16U99.

## 1. Ware の問題の最終報告

第 51 回環論および表現論シンポジューム (2018 年 9 月 岡山理科大学) において、下記の Ware の問題 [9] が肯定的に解けたことを報告した所、[2] に反例があるとの指摘を受けた。（詳細は [5] に記載）

**Ware の問題** 環 $R$ 上の右射影 $R$ 加群 $P$ が唯一つの極大部分加群 $L$ を持てば、 $L$ は $P$ の最大の部分加群である。よって、$P$ は $R$ の直和因子と同型である。

しかし、この論文 [2] は直接反例を作っているのでなく、quasi-small という条件を考え、quasi-small でない加群の特徴付けを [2] の定理 5.3 で与え、このような加群の存在は [3] にあるので、Ware の問題は否定的であると結論を出していた。

This article is the Japanese explanations of the two papers [1, 5].

この論文 [3] が入手できず、この条件を満たす例を別途構成してみた（[6] Example 5 参照)。この例を検証した所、[2] の結果が成り立たないことが分かった。この結果、シンポジュームでの報告内容 [5] が否定された訳ではないので、証明を記した論文を Proc. AMS に投稿しレフリーの判定を受け論文 [6] が掲載された。これにより、最終的に Ware 問題は肯定的に解決された。

## 2. 一般化された中山・東屋の補題

本稿では以下 $R$ を環、$J(R)$ を $R$ の Jacobson Radical とする。中山・東屋の補題とは良く知られた次の命題である。

**中山・東屋の補題** $M$ を有限生成加群あるいは射影加群とする。
このとき、$M$ が $MJ(R) = M$ を満たせば $M = 0$ である。

前章で述べた Ware の問題の証明で、中山・東屋の補題が射影加群で成立することを使用した。この事実が成立することは [1] 等に記載がある。なお、[6] での証明はこれらとは異なる新しいものである。
この 2 つの結果を統合するものとして、次の一般化された中山・東屋の補題が成立することを示すのが本稿の主目的である。

**一般化された中山・東屋の補題** $M$ を有限生成加群の直和の直和因子とする。このとき、$M$ が $MJ(R) = M$ を満たせば $M = 0$ が成立する。

Ware の問題の [6] での考察では、非零射影加群は極大部分加群を含むことを最初に示し、$P = PJ(R)$ を満たす射影加群は零加群であるという方向で射影加群に対する中山・東屋の補題の別証明を与えた。しかし、射影加群でない場合は、一般に極大部分加群を含まないので、この論法は使えない。射影加群 $P$ が極大部分加群を含まないと仮定して $P = PJ(R)$ を示した後の矛盾を導いている部分の論法も、射影性の仮定をなくし、単に $M = MJ(R)$ を満たす加群 $M$ とした場合は、証明中で用いた Zorn の補題を適用するための極小な短完全列の分離性が言えないので、やはり一般には適用できない。
このようないきさつから、全面的に方針を変え、次の 2 段階の考察を通じて一般化された中山・東屋の補題を証明した。

第一段階： 一般化された中山・東屋の補題が成立しないとすると、**中山-東屋特異加群 (NAS-加群)** と呼ばれる、次の性質を持つ自明でない加群 $M$ が存在することを示す [7]。

(1) $M$ の有限生成部分加群の列 $M_1 \subset M_2 \subset \cdots$ で、
$M = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} M_i$ かつ各自然数 $i$ について $M_i \subset M_{i+1}J(R)$ となる。
（結果的に $M = MJ(R)$ である。）

(2) 各 $(x_i) \in \oplus_{i\in\mathbb{N}} M_i$ に対し $f((x_i)) = \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i$ と準同形 $f:\ \oplus_{i\in\mathbb{N}} M_i \to M$ を定義する。このとき、ある準同形 $g:\ M \to \oplus_{i\in\mathbb{N}} M_i$ で $fg = 1_M$ を満たすものがある。

(3) 各自然数 $i$ について $M_i \cap g(M) = M_i \cap \ker f = 0$ となる。

第二段階： 上記の条件のうち、(1) と (2) を満たす加群 (**WNAS 加群と呼ぶ**) は零加群のみであることを示す [8]。

## 3. NAS 加群

この節では、第一段階で述べたように、一般化された中山・東屋の補題が成立しないとすると非零 NAS 加群が存在することの証明を与える。具体的には、有限生成加群の直和の直和因子である非零加群 $M$ で $MJ(R) = M$ を満たす加群から NAS 加群を構成する

ことが本質的な内容である。なお、この節の内容は日中韓環論国際シンポジューム報告集 [7] に記載されているが、[7] には構成方法の他に例なども載っているので併せて参照願いたい。

3.1. **準備と設定.** 加群 $F$ を有限生成加群 $\{F_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ の直和 $F=\oplus_{\delta\in\Delta}F_\delta$ とする。$F$ の直和分解 $F=M\oplus N$ があり $M=MJ(R)$ であると仮定する。このとき、I. Kaplansky[4] より、$M$ は可算生成加群の直和である。したがって、$M$ の可算生成の直和因子 $M'$ を取ると $M'=M'J(R)$ を満たすので、$M$ 自身が可算生成と仮定して良い。このとき、$M$ は可算個の $F_\delta$ の直和に入り、したがって、その直和因子になる。これにより $\Delta$ も可算集合と仮定して良い。そこで、本稿では $\Delta$ として自然数の集合 $\mathbb{N}$ を用いることにする。

次に、直和因子であることを写像の条件で記述する。$f:F\to M$ を分離全射準同形、$g:M\to F$ を $fg=1_M$ となる単射準同形とする。これに付随して、準同形 $g':F\to N$ および $f':N\to F$ があり、$1_F=gf+f'g',\ g'f'=1_N, ff'=0,\ g'g=0$ となるものがある。

3.2. **条件 (3) を満たす非零加群の構成 (Non-redundant Process).** ここでは、NAS 加群の条件 (3) を満たす非零加群で $MJ(R)=M$ を満たす加群が存在することを調べる。

そこで、$F=M\oplus N$ の商加群について、次の等式を考える。

$$\oplus_{i\in\mathbb{N}}(F_i/\oplus_{i\in\mathbb{N}}((M\cap F_i)\oplus(N\cap F_i)))=M/\oplus_{i\in\mathbb{N}}(M\cap F_i)\oplus N/\oplus_{i\in\mathbb{N}}(N\cap F_i)$$

もし、$M/\oplus_{i\in\mathbb{N}}(M\cap F_i)$ が零なら $M=\oplus_{i\in\mathbb{N}}(M\cap F_i)$ となり、$F=M\oplus N=\oplus_{i\in\mathbb{N}}(M\cap F_i)\oplus N$ であることから、各自然数 $n$ についてモジュラー則を適用して

$$F_n=F\cap F_n=(M\cap F_n)\oplus(((\oplus_{n\neq i}(M\cap F_i))\oplus N)\cap F_n)$$

となる。したがって、$M\cap F_n$ は有限生成で $(M\cap F_n)J(R)=M\cap F_n$ から $M\cap F_n=0$ である。よって、$M=0$ となり矛盾する。

これにより、$F,M,N$ 各々を上記の各商群と置き換えても、前提条件は成り立っているので、置き換えた加群を改めて $F,M,N$ として良い。

3.3. **部分加群の構成（Rearrangement Process）.** ここでは、加群 $\{F_n\}$ を NAS 加群の条件 (1) を満たす $M$ の有限生成部分加群 $\{M_n\}$ に取ることができることを調べる。

各 $F_n$ は有限生成より $F_n=\sum_{s=1}^{i_n}a_{ns}R\ (a_{ns}\in F_n)$ とし、$x_{ns}=f(a_{ns})\in M, y_{ns}=g'(a_{ns})\in N$ とおくと、$a_{ns}=g(x_{ns})+f'(y_{ns})$ である。さらに、$p_{ns}=g(x_{ns})$ とおくと、$f(a_{ns})=f(p_{ns})=x_{ns}$ である。そこで、$a_{ns}$ は $M\oplus N$ の元として $a_{ns}=\binom{x_{ns}}{y_{ns}}$ とかける。また、$G_n=\{p_{ns}\,|\,s=1,2,\cdots,i_n\}$ とすると、$\bigcup_{n\in\mathbb{N}}G_n$ は $g(M)$ の生成元である。ここでは、$F=M\oplus N$ の直和の元としての $M$ の元は $x_{ns}$、$F$ の元としての $M$ の元を $p_{ns}$ と区別して使う。

$MJ(R)=M$ より、$p_{ns}\in g(M)=g(M)J(R)\subset FJ(R)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\oplus F_nJ(R)$ から、

$$p_{ns}=\sum_{j=1}^{t_{ns}}\sum_{k=1}^{i_{(ns)_j}}a_{(ns)_jk}r_{(ns)_jk},\ (r_{(ns)_jk}\in J(R))$$

と表される。この式に $f$ を施すと、

$$x_{ns}=f(p_{ns})=\sum_{j=1}^{t_{ns}}\sum_{k=1}^{i_{(ns)_j}}f(a_{(ns)_jk})r_{(ns)_jk}=\sum_{j=1}^{t_{ns}}\sum_{k=1}^{i_{(ns)_j}}x_{(ns)_jk}r_{(ns)_jk}$$

となる。さらに $g$ を施すと $p_{ns}=\sum_{j=1}^{t_{ns}}\sum_{k=1}^{i_{(ns)_j}}p_{(ns)_jk}r_{(ns)_jk}$ となる。特に、$n=s=1$ と取り $(1,1)_1=1$ と番号を入れ替えると $p_{1,1}=\sum_{j=1}^{t_{1,1}}\sum_{k=1}^{i_{(1,1)_j}}p_{(1,1)_jk}r_{(1,1)_jk}$ となる。

$r_{(1,1)_11}=r_{1,1}=0$ なら、$G_1$ から $p_{1,1}$ を取り去ることができる。

$r_{(1,1)_1 1} = r_{1,1} \neq 0$ なら、$p_{1,1}(1 - r_{1,1}) = \sum_{k=2}^{i_1} p_{1k} r_{1k} + \sum_{j=2}^{t_{1,1}} \sum_{k=1}^{i_{(1,1)_j}} p_{(1,1)_j k} r_{(1,1)_j k}$ となり、$r_{1,1} \in J(R)$ であるので $1 - r_{1,1}$ は可逆元である。このことから、$G_1$ から $p_{1,1}$ を取り去ることができる。

$G_1$ の元に順次この議論を繰り返し、ある自然数 $s$ で $G_1 \subset \sum_{n=2}^{s} \sum_{k=1}^{i_n} p_{nk} R$ となる。さらに、ある自然数 $s'$ で $\sum_{n=1}^{s} \sum_{k=1}^{i_n} p_{nk} R \subset \oplus_{1 \leq n \leq s'} F_n$ となる。
ここで、$m \leq s$ となる $m$ について、$f'(y_{mk}) = a_{mk} - g(x_{mk}) \in \oplus_{1 \leq n \leq s'} F_n$ であるので、$\{f'(y_{nk}) \mid n = 1, \cdots s,\ k = 1, \cdots, i_n\} \subset \oplus_{1 \leq n \leq s'} F_n$ に注意すると、改めて $\oplus_{2 \leq n \leq s'} F_n$ を $F_2$ と置き換えて良い。

この議論を繰り返し、帰納的に $G_n \subset F_{n+1}$ となるように $F_{n+1}$ を置き換える。さらに、これにプロセス 3.2 を適用しておく。

**3.4. NAS 加群の構成.** 上記のことから、$\binom{x}{y} \in F_i$ となる $x \in M, y \in N$ に対し、$\binom{x}{y'} \in F_{i+1}$ となる $y' \in N$ があることがわかる。この $y'$ はただ一つ決まることに注意する。なぜなら、$\binom{x}{y''} \in F_{i+1}$ があれば、両者の差を取り $\binom{0}{y'-y''} \in F_{i+1}$、すなわち、$y' - y'' \in N \cap F_{i+1}$ より、プロセス 3.2 から $y' - y'' = 0$ である。同様に、$x \in M$ 対し、$\binom{x}{y} \in F_i$ なら、この $y \in N$ もただ一つ決まるので、これを $y_x^{(i)}$ とおく。これから、$x, x' \in M, r \in R$ に対し、

$$(1)\ y_x^{(i)} r = y_{xr}^{(i)}, \quad (2)\ y_x^{(i)} + y_{x'}^{(i)} = y_{x+x'}^{(i)}$$

が成立する。よって、$f_i = f|F_i : F_i \to M,\ f_i\binom{x}{y} = x,\ M_i = \mathrm{Im} f_i$ とすると $f_i : F_i \to M_i$ は同型写像を与えることがわかる。実際、$\epsilon_i = f_i^{-1} : M_i \to F_i$ は $\epsilon_i(x) = \binom{x}{y_x^{(i)}}$ で与えられる。このことから、$F_i$ と $M_i$ を同一視する。

また、$N$ についても $g_i{}' = g'|F_i : F_i \to N,\ N_i = \mathrm{Im}\, g_i{}'$ とする。このとき、上記 (1), (2) から $\alpha_i : M_i \to N_i,\ \alpha_i(x) = y_x^{(i)}$ は準同形を与えることがわかる。

先の対応 $F_i \to F_{i+1} : \binom{x}{y_x^{(i)}} \mapsto \binom{x}{y_x^{(i+1)}}$ は単射準同形 $\beta_i : M_i \to M_{i+1},\ \beta_i(x) = x$ および $\gamma_i : N_i \to N_{i+1},\ \gamma_i(y_x^{(i)}) = y_x^{(i+1)}$ を与えるので、これにより $M_i \subset M_{i+1},\ N_i \subset N_{i+1}$ と考える。また、構成から $G_i \subset F_{i+1} J(R)$ であったので、$M_i \subset M_{i+1} J(R)$ である。また、$\bigcup_{j \in \mathbb{N}} M_j = M$ も構成方法から成立している。

## 4. WNAS 加群

この節では第二段階として WNAS 加群は零加群のみであることを示す。これにより、一般化された中山・東屋の補題が成立することがわかる。

**4.1. 第二段階の設定.** $F = \oplus_{i \in \mathbb{N}} M_i = M \oplus N$ について、各 $M_i$ は $M$ の有限生成部分加群で、$M_i \subset M_{i+1} J(R)$ かつ $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i = M$ を満たすとする。必然的に $M = MJ(R)$ である。また、第一段階で用いた次の準同形の記号を用いる。
$f :\ F \to M$ と $g :\ M \to F$ は $f((x_i)) = \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i,\ fg = 1_M$ で定義された準同形、
$g' : F \to N$ と $f' : N \to F$ は $F$ が $M$ と $N$ の直和であることを示す準同形、
すなわち、$1_F = gf + f'g',\ g'f' = 1_N,\ ff' = 0,\ g'g = 0$ を満たし、次の完全列を与える。

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{f'} F \xrightarrow{f} M \longrightarrow 0.$$

$$0 \longleftarrow N \xleftarrow{g'} F \xleftarrow{g} M \longleftarrow 0.$$

さらに、第一段階の議論から各 $i$ について、次のように仮定してよい。

$$g(M_i) \subset M_1 \oplus \cdots \oplus M_i \oplus M_{i+1},\ M \cap M_i = N \cap M_i = 0.$$

これを元に次のような設定をする。

$M_0=0$ として $F[1]=M_0\oplus F$ とおく。各自然数 $i$ について、$\alpha_i:\ M_i\to M_i/M_{i-1}$ を自然な全射準同形とし、これを直和への準同形 $\alpha=(\alpha_i):\ F\to F/F[1]=M_1\oplus M_2/M_1\oplus\cdots$ に拡張する。また、$p_i:\ F\to M_i$ を第 $i$ 成分への射影とする。

$p_{i+1}g|M_i:\ M_i\to F\to M_{i+1}\subset M$ を考える。$g(M_{i-1})\subset M_1\oplus\cdots\oplus M_i$ であることに注意すると、$p_{i+1}g(M_{i-1})=0$ である。よって、$p_{i+1}g|M_i$ は $\overline{f}_i\ :M_i/M_{i-1}\to M$ を導き、$p_{i+1}g|M_i=\overline{f}_i\alpha_i$ となる。そこで、$\overline{f}:\ F/F[1]\to M$ を $\overline{f}(\alpha(x))=\sum_{i\in\mathbb{N}}\overline{f}_i(\alpha_i p_i(x))$、$h$ を $h=\overline{f}\alpha g:\ M\to F\to F/F[1]\to \mathrm{Im}(\overline{f})$ と決める。

**4.2. 生成元の挙動.** この節では $F,M,N,M_i\ (i\in\mathbb{N})$ の生成元の関係を調べる。

最初に次の補題を挙げておく。これは $M_i\subset M_{i+1}J(R)$ より中山・東屋の補題を用いて容易にわかる。

**補題 1** $M_i/M_{i-1}=\alpha_i(y_{i1})R+\cdots+\alpha_i(y_{it_i})R$ とすると $M_i=y_{i1}R+\cdots+y_{it_i}R$ となる。

そこで、$M_i=a_{i1}R+\cdots+a_{it_i}R,\ (i\in\mathbb{N})$ かつ $\alpha_i(a_{ij})\neq\alpha_i(0)$ となる生成元 $\{a_{i1},\cdots,a_{it_i}\}$ が取れる。また、$g(a_{ij})$ の $F$ での成分表示を次のように定義する。

$$g(a_{ij})=(y_1^{(ij)},\cdots,y_i^{(ij)},y_{i+1}^{(ij)},0,\cdots)\in F=\textstyle\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}M_i. \qquad \text{(A)}$$

これらについて、次のような関係式がある。

**補題 2** 次のことが成立する。ただし、$i\in\mathbb{N},1\leq j\leq t_i$ である。

(1) $a_{ij}=y_1^{(ij)}+\cdots+y_i^{(ij)}+y_{i+1}^{(ij)}$.

(2) $g(a_{ij})=g(y_1^{(ij)})+\cdots+g(y_i^{(ij)})+g(y_{i+1}^{(ij)})$.

(3) $\alpha_i(y_i^{(ij)})=\alpha_i(a_{ij})-\alpha_i(y_{i+1}^{(ij)})$.

(4) $x\in M_i$ とし、$x=a_{i1}r_1+\cdots+a_{it_i}r_{t_i}\ (r_1,\cdots,r_{t_i}\in R)$ を $F=\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}M_i$ の生成元で表した関係式とする。各 $1\leq k\leq i+1$ について $p_kg(x)=y_k^{(i1)}r_1+\cdots+y_k^{(it_i)}r_{t_i}$.

(5) $y_{i+1}^{(ij)}\in M_i$.

**証明** (1) は $fg=1_M$ より従い、(2) はこの式に $g$ を施したものである。

(3) $y_1^{(ij)},\cdots,y_{i-1}^{(ij)}\in M_{i-1}$ より、$\alpha_i(y_1^{(ij)}),\cdots,\alpha_i(y_{i-1}^{(ij)})$ は全て $\alpha_i(0)$ と一致するので

$$\begin{aligned}\alpha_i(y_i^{(ij)})&=\alpha_i(y_1^{(ij)})+\cdots+\alpha_i(y_{i-1}^{(ij)})+\alpha_i(y_i^{(ij)})\\&=\alpha_i(y_1^{(ij)}+\cdots+y_{i-1}^{(ij)}+y_i^{(ij)}+y_{i+1}^{(ij)})-\alpha_i(y_{i+1}^{(ij)})=\alpha_i(a_{(ij)})-\alpha_i(y_{i+1}^{(ij)})\end{aligned}$$

となるので (3) が成立する。

(4) $x$ の関係式に $p_kg$ を施すと

$$p_kg(x)=p_k(g(a_{i1}))r_1+\cdots+p_k(g(a_{it_i}))r_{t_i}=y_k^{(i1)}r_1+\cdots+y_k^{(it_i)}r_{t_i}$$

であるので (4) が成立する。

(5) 上記 (1) より $y_{i+1}^{(ij)}=a_{ij}-(y_1^{(ij)}+\cdots+y_i^{(ij)})$ である。

一方、$a_{ij}\in M_i$ かつ $y_k^{(ij)}\in M_k\subset M_i\ (1\leq k\leq i)$ なので (5) が成立する。 □

上記の式 (A) において、$y_s^{(ij)}\in M_s$ であるので、$g(y_s^{(ij)})$ の $F$ での成分表示を

$$g(y_s^{(ij)})=(z_{s1}^{(ij)},\cdots,z_{s\,s+1}^{(ij)},0,\cdots)$$

とおく。補題 2 (5) より $y_{i+1}^{(ij)}\in M_i$ なので、最終項については $z_{i+1\,i+2}^{(ij)}=0$ であることを注意しておく。

次の補題は、準同形 $\overline{f}\alpha g$ に関して、具体的に関係式を記したものである。

補題３　次のことが成立する。

(1) $\overline{f}(\alpha(g(a_{ij}))) = \sum_{k=1}^{i} z_{k\,k+1}^{(ij)}$ である。

(2) $0 \neq x \in M$ に対し、$x \in M_i$ を満たす最小の自然数を $i$ とし、$x$ を $M_i$ の生成元を用いて $x = a_{i1}r_1 + \cdots + a_{it_i}r_{t_i}$ $(r_1, \cdots, r_{t_i} \in R)$ と表す。このとき、
$\overline{f}(\alpha(g(x)) = \sum_{j=1}^{t_i}(\sum_{k=1}^{i} z_{k\,k+1}^{(ij)})r_j$ である。

(3) 上記 $x$ について、$g(x) = (y_1^{(x)}, \cdots, y_i^{(x)}, y_{i+1}^{(x)}, 0, \cdots)$ を $F = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} M_i$ での成分表示とする。このとき、
$\overline{f}(\alpha(g(x)))$ は、$1 \leq k \leq i$ に対する $g(y_k^{(x)})$ の第 $k+1$ 成分の総和である。

証明　(1)　$\alpha(g(a_{ij})) = (\alpha_1(y_1^{(ij)}), \cdots, \alpha_i(y_i^{(ij)}), \alpha_{i+1}(y_{i+1}^{(ij)}), 0, \cdots) \in F/F[1]$ であったので、$\overline{f}(\alpha(g(a_{ij}))) = \overline{f}_1(\alpha_1(y_1^{(ij)})) + \cdots + \overline{f}_i(\alpha_i(y_i^{(ij)})) + \overline{f}_{i+1}(\alpha_{i+1}(y_{i+1}^{(ij)}))$ となる。
また、定義から $\overline{f}_k(\alpha_k(y_k^{(ij)})) = z_{k\,k+1}^{(ij)}$ $(1 \leq k \leq i+1)$ であり、特に $k = i+1$ のときは $z_{i\,i+1}^{(ij)} = 0$ より (1) が成立する。

(2)　$\overline{f}(\alpha(g(x)) = \sum_{j=1}^{t_i} \overline{f}(\alpha(g(a_{ij})))r_j$ に (1) の式を代入して得られる。

(3)　$x \in M_i$ を生成元を用いて $x = a_{i1}r_1 + \cdots + a_{it_i}r_{t_i}$ $(r_1, \cdots, r_{t_i} \in R)$ と表し $g$ を施した式 $g(x) = g(a_{i1})r_1 + \cdots + g(a_{it_i})r_{t_i}$ を考える。$g(a_{ij}) = (y_1^{(ij)}, \cdots, y_i^{(ij)}, y_{i+1}^{(ij)}, 0, \cdots)$ なので、$y_k^{(x)} = p_k(g(x)) = \sum_{j=1}^{t_i} y_k^{(ij)} r_k$ となる。したがって、$g(y_k^{(x)}) = \sum_{j=1}^{t_i} g(y_k^{(ij)})r_k$ であることから、$g(y_k^{(x)})$ の第 $k+1$ 成分は $p_{k+1}(g(y_k^{(x)})) = \sum_{j=1}^{t_i} p_{k+1}(g(y_k^{(ij)}))r_k = \sum_{j=1}^{t_i} z_{k\,k+1}^{(ij)} r_k$ となる。このことから、 $g(y_1^{(x)}), \cdots, g(y_i^{(x)})$ の第 $k+1$ 成分の総和は $\sum_{k=1}^{i}\sum_{j=1}^{t_i} z_{k\,k+1}^{(ij)} r_k$ で、和の順序を入れ替え $\sum_{j=1}^{t_i}(\sum_{k=1}^{i} z_{k\,k+1}^{(ij)})r_j$ となる。したがって、 (2) の式から、これは $\overline{f}(\alpha(g(x))$ と一致し (3) が成立する。 □

## 5. 一般化された中山・東屋の補題の証明

この章では WNAS 加群は零加群であることを証明する。これにより、第３章の結果から一般化された中山・東屋の補題が成立することがわかる。

**5.1. 加群 N の生成元と写像 $\overline{f}\alpha g$.** まず、$f'(N) \cong N$ の $F$ での生成元を調べる。

補題４　集合 $\{g(a_{ij}) - (0_1, \cdots, 0_{i-1}, a_{ij}, 0, \cdots) \mid i \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq t_i\}$ は加群 $f'(N)$ の生成元をなす。

証明　ほぼ一般論であるが証明を与えておく。
$N = \ker f = g'(F)$ より、$f'(N) = f'g'(F)$ である。任意の元 $x = (x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots) \in F$ に対し、$x = f'g'(x) + gf(x) = f'g'(x) + \sum_{i=1}^{n} g(x_i)$ となるので、

$$f'g'(x) = \sum_{i=1}^{n}((0_1, \cdots, 0_{i-1}, x_i, 0, \cdots) - g(x_i))$$

である。$x_i$ は $a_{i1}, \cdots, a_{it_i}$ で生成されるので、目的の集合が $f'(N)$ の生成元になる。 □

補題５　次のことが成立する。

(1) $\overline{f}\alpha f' = 0.$

(2) $hf = \overline{f}\alpha.$

(3) $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Im}(\overline{f})$ である。したがって、$h\colon M \to \mathrm{Im}(\overline{f})$ は全射準同形である。

証明　(1)　$f'(N)$ は $\{g(a_{ij}) - (0_1, \cdots, 0_{i-1}, a_{ij}, 0, \cdots)\}$ で生成されているので、
$\overline{f}\alpha(g(a_{ij}) - (0_1, \cdots, 0_{i-1}, a_{ij}, 0, \cdots)) = 0$ を示せばよい。
補題 3(1) より $\overline{f}\alpha(g(a_{ij})) = \sum_{k=1}^{i} z_{k\,k+1}^{(ij)}$ である。

一方、$\overline{f}\alpha((0_1,\cdots,0_{i-1},a_{ij},0,\cdots))=\overline{f}_i\alpha_i(a_{ij})=y_{i+1}^{(ij)}$ であり、
$g(y_{i+1}^{(ij)})=(z_{i+1\,1}^{(ij)},\cdots,z_{i+1\,i+2}^{(ij)},0,\cdots)$ から $y_{i+1}^{(ij)}=fg(y_{i+1}^{(ij)})=\sum_{s=1}^{i+1}z_{i+1\,s}^{(ij)}=\sum_{s=1}^{i}z_{i+1\,s}^{(ij)}$ となり、(1) が成立する。

(2) (1) より $hf=\overline{f}\alpha gf=\overline{f}\alpha gf+(\overline{f}\alpha f')g'=\overline{f}\alpha(gf+f'g')=\overline{f}\alpha 1_F=\overline{f}\alpha$ となり (2) が成立する。

(3) $F=f'(N)\oplus g(M)$ が直和であることと、(1) より $\overline{f}\alpha(f'(N))=0$ であることから $\overline{f}\alpha(F)=\overline{f}\alpha(g(M))$ である。$\overline{f}\alpha\colon F\to F/F[1]\to\mathrm{Im}(\overline{f})$ が全射準同形より $h=\overline{f}\alpha g$ も全射準同形となる。 □

5.2. **WNAS 加群は零加群.** 最終目的である次の定理を示す。

**定理６** 非零な WNAS 加群は存在しない。特に、非零な NAS 加群は存在しない。

**証明** 非零な WNAS 加群 $M$ が存在するとする。自然な単射準同形を $\beta_1\colon F[1]\to F$ および $\beta_2\colon \ker h\to M$ とすると、補題５より短完全列よりなる次の可換な図式をうる。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F[1] & \xrightarrow{\beta_1} & F & \xrightarrow{\alpha} & F/F[1] & \longrightarrow & 0\\
 & & & & {\scriptstyle f}\big\downarrow & & {\scriptstyle \overline{f}}\big\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \ker h & \xrightarrow{\beta_2} & M & \xrightarrow{h} & \mathrm{Im}(\overline{f}) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

したがって、$\beta_2(f|F[1])=f\beta_1$ である。一方、$f|F[1](F[1])=M$ より $\ker h=M$、すなわち $\mathrm{Im}(\overline{f})=0$ となるので、各自然数 $i$ について、$\overline{f}(a_{ij})=y_{i+1}^{(ij)}=0$ である。これにより各 $x\in M_i$ で $g(x)\in M_1\oplus\cdots\oplus M_i$ となる。$g(a_{ij})=g(y_1^{(ij)})+\cdots+g(y_{i-1}^{(ij)})+g(y_i^{(ij)})$ および $g(y_1^{(ij)})+\cdots+g(y_{i-1}^{(ij)})\in M_1\oplus\cdots\oplus M_{i-1}$ から

$$y_i^{(ij)}=p_i(g(a_{(ij)}))=p_i(g(y_i^{(ij)}))=z_{ii}^{(ij)}\qquad(B)$$

をうる。よって、$\alpha_i(a_{ij}-y_i^{(ij)})=0$ で、全ての自然数 $i$ で $M_i/M_{i-1}=\alpha_i(y_i^{(i1)})R+\cdots+\alpha_i(y_i^{(it_i)})R$ となる。これから、補題１より $M_i$ は $\{y_i^{(i1)},\cdots,y_i^{(it_i)}\}$ によって生成されることがわかる。そこで、改めて生成元 $\{a_{ij}\}$ として $\{y_i^{(ij)}\}$ を取ることにする。このとき、上記の関係式 (B) より $p_i(g(a_{ij}))=a_{ij}$ が成立する。

いま、$a_{i-1\,1}$ を $M_i$ の生成元で表した式 $a_{i-1\,1}=a_{i1}r_1+\cdots+a_{it_i}r_{t_i}$ $(r_1,\cdots,r_{t_i}\in R)$ に準同形 $p_ig$ を施すと、$p_ig(a_{i-1\,1})=p_i(g(a_{i1}))r_1+\cdots+p_i(g(a_{it_i}))r_{t_i}=a_{i1}r_1+\cdots+a_{it_i}r_{t_i}=a_{i-1\,1}$ となる。一方、$a_{i-1\,1}\in M_{i-1}$ であることから $p_i(g(a_{i-1\,1}))=0$ より、$a_{i-1\,1}=0$ となり矛盾が生じる。 □

最後に主結果とその直接の帰結を述べておく。

**定理７（一般化された中山・東屋の補題）** $M$ を有限生成加群の直和の直和因子とする。このとき、$M$ が $MJ(R)=M$ を満たせば $M=0$ が成立する。

**系８** 非零加群 $M$ の部分加群 $M_i(i\in\mathbb{N})$ が各 $i$ で $M_i\subset M_{i+1}J(R)$ を満たし、かつ、$M=\bigcup_{i\in\mathbb{N}}M_i$ とする。このとき、$(x_i)\in\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}M_i$ に対し、$f((x_i))=\sum_{i\in\mathbb{N}}x_i$ で与えられる自然な準同形 $f\colon\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}M_i\to M$ は分離しない。

## 6. 極大部分加群の存在に関する応用

ここでは一般化された中山・東屋の補題から得られる極大部分加群の存在に関する結果を挙げておく。証明は [7] を参照されたい。

**定理９**　加群 $F$ を有限生成加群 $\{M_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ の直和 とし、$M$ を $F$ の自明でない部分加群で $M \not\subset \mathrm{rad}\, F$ とする。このとき、 $M$ は極大部分加群を含む。

**系１０**　自由加群 $F$ の自明でない部分加群を $M$ とする。$M \not\subset FJ(R)$ なら $M$ は極大部分加群を含む。特に零でない射影加群は極大部分加群を含む。

上記で条件 $M \not\subset FJ(R)$ は必須である。詳細は [7] Example 2.1 を参照願いたい。

**定理１１**　$M$ を有限生成加群の直和の零でない直和因子で $MJ(R) = \mathrm{rad}\, M$ とすると、$M$ は極大部分加群を含む。特に、$M_\delta J(R) = \mathrm{rad}\, M_\delta$ を満たす有限生成加群 $M_\delta$ の直和 $F = \oplus_{\delta\in\Delta} M_\delta$ の任意の直和因子は極大部分加群を含む。

## 7. 一般化された中山・東屋の補題の証明の短縮化

一般化された中山・東屋の補題の主張は明確で分かりやすい。しかし、それに比して、ここで与えた証明は長く複雑である。そこで、短く明快な証明が見出されることを期待したい。

## References


[1] F.W. Anderson, K.R. Fuller, *Rings and Categories of Modules*, GTM **13**, Springer-Verlag (1992).

[2] A. Facchini, D. Herbera, I. Sakhajev, *Finitely Generated Flat Modules and a Characterization of Semiperfect Rings*, Comm. in Algebra, Vol.**31** No.9(2003), 4195–4214.

[3] V.N. Gerasimov, I.I. Sakhaev, *A Counterexample to two Hypotheses on Projective and Flat Modules*, (Russian). Sibirsk Math. Zh. 25(6), 31-35. English Translation: Sibirsk Math. J. **24** , 855–859, 1984.

[4] I. Kaplansky, *Projective modules*, Ann. of Math. **68**, 372–377 (1958).

[5] M. SATO, *On Projective Modules with Unique Maximal submodules* , Proc. of the 51st Symposium on Ring Theory and Representation Theory, pp.135-145, 2019.

[6] ———, *Projective Modules with Unique Maximal submodules are cyclic*, Proc. of Amer. Math. Soc, **148**(9), pp.3673-3684, 2020.

[7] ———, *On Generalized Nakayama-Azumaya Lemma and NAS-Modules*, Ring theory 2019( Proc. of the 8th China-Japan-Korea International Conference) , pp.188–202, World Scientific Publishing (2021).

[8] ———, *On Generalized Nakayama-Azumaya's Lemma*, Comm. in Algebra, Vol.**50** No.5, 2037–2044, 2022.

[9] R. Ware, *Endomorphism rings of projective modules*, Trans. Amer. Math. Soc. **155** , 233-256, 1971.



愛知大学地域政策学部
地域政策学研究センター
〒 441-8522 愛知県豊橋市町畑町 1-1
*E-mail address*: msato@yamanashi.ac.jp