CLASSIFYING SEVERAL SUBCATEGORIES OF THE CATEGORY OF MAXIMAL COHEN-MACAULAY MODULES

SHUNYA SAITO

Abstract. In this summary, we introduce the classification of several subcategories of a torsion-free class of the module category over a commutative noetherian ring. More precisely, we classify Serre subcategories and torsion(-free) classes of a torsion-free class in the sense of exact categories. This result extends Gabriel's classification of Serre subcategories of the module category to torsionfree classes. As an immediate consequence, we classify the Serre subcategories and the torsion(-free) classes of the category of maximal Cohen-Macaulay modules over a one-dimensional Cohen-Macaulay ring.

Key Words: torsion-free classes; exact categories; Cohen-Macaulay modules.

2000 *Mathematics Subject Classification*: 13C60, 13D02, 18E10.

部分圏の分類問題は，傾理論やスキームの圏論的復元問題など様々な分野との関連から長い間研究されてきた．特に可換ネーター環の場合には，Gabriel による Serre 部分圏の分類 [2] や，高橋によるトーション・フリー類の分類 [7] を筆頭に，これまで様々な部分圏が分類されてきた．本稿では [4] と [5] に基づいて，これらの部分圏の分類の完全圏への拡張を紹介する．

第 1 節では，アーベル圏の様々な部分圏とその分類に関する先行研究を紹介する．第 2 節では，前節で述べたアーベル圏における部分圏の分類の，トーション・フリー類や極大 Cohen-Macaulay 加群の圏 $\mathsf{cm}\, R$ といった完全圏への拡張を紹介する．

本稿において，任意の部分圏は充満部分圏であり同型で閉じているとする．またネーター環 Λ に対して $\mathsf{mod}\,\Lambda$ で有限生成 (右)Λ 加群の圏を表す．可換環 R に対して，$\operatorname{Spec} R$ で R の素イデアルの集合を表す．また R 上の加群 M に対して，$\operatorname{Supp} M$ で M の台 (support) を表し，$\operatorname{Ass} M$ で M の素因子の集合を表す．

1. アーベル圏の様々な部分圏

この節では，本稿の主な考察対象であるアーベル圏の様々な部分圏とその分類を紹介する．アーベル圏では，短完全列による拡大や，射の核，余核，像を取るなどの操作がある．まずはこれらの操作で閉じるような部分圏を導入する．

Definition 1. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の加法部分圏 $\mathcal{X}$ を考える．

(1) $\mathcal{X}$ が**拡大で閉じる**とは，任意の $\mathcal{A}$ の短完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ に対して $A, C \in \mathcal{X}$ ならば $B \in \mathcal{X}$ となるときに言う．
(2) $\mathcal{X}$ が**部分対象で閉じる**とは，任意の $\mathcal{A}$ の短完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ に対して $B \in \mathcal{X}$ ならば $A \in \mathcal{X}$ となるときに言う．
(3) $\mathcal{X}$ が**商で閉じる**とは，任意の $\mathcal{A}$ の短完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ に対して $B \in \mathcal{X}$ ならば $C \in \mathcal{X}$ となるときに言う．

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

(4) $\mathcal{X}$ が**核で閉じる**とは，任意の $\mathcal{A}$ の射 $f\colon X \to Y$ に対して，$X, Y \in \mathcal{X}$ ならば $\operatorname{Ker} f \in \mathcal{X}$ となるときに言う．
(5) $\mathcal{X}$ が**余核で閉じる**とは，任意の $\mathcal{A}$ の射 $f\colon X \to Y$ に対して，$X, Y \in \mathcal{X}$ ならば $\operatorname{Cok} f \in \mathcal{X}$ となるときに言う．
(6) $\mathcal{X}$ が**像で閉じる**とは，任意の $\mathcal{A}$ の射 $f\colon X \to Y$ に対して，$X, Y \in \mathcal{X}$ ならば $\operatorname{Im} f \in \mathcal{X}$ となるときに言う．

これらの性質を組み合わせることで様々なアーベル圏の部分圏を定義することができる．

Definition 2. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の加法部分圏 $\mathcal{X}$ を考える．

(1) $\mathcal{X}$ が **Serre 部分圏**であるとは，拡大と部分対象，商で閉じるときに言う．
(2) $\mathcal{X}$ が**トーション・フリー類**であるとは，拡大と部分対象で閉じるときに言う．
(3) $\mathcal{X}$ が**トーション類**であるとは，拡大と商で閉じるときに言う．
(4) $\mathcal{X}$ が**ワイド部分圏**（あるいは **CKE 閉部分圏**）であるとは，余核と核，拡大で閉じるときに言う．
(5) $\mathcal{X}$ が **IKE 閉部分圏**であるとは，像と核，拡大で閉じるときに言う．
(6) $\mathcal{X}$ が **ICE 閉部分圏**であるとは，像と余核，拡大で閉じるときに言う．
(7) $\mathcal{X}$ が **IE 閉部分圏**であるとは，像と拡大で閉じるときに言う．
(8) $\mathcal{X}$ が **KE 閉部分圏**であるとは，核と拡大で閉じるときに言う．
(9) $\mathcal{X}$ が **CE 閉部分圏**であるとは，余核と拡大で閉じるときに言う．

これらの部分圏の関係は次のように図示できる：

$$\begin{tikzcd}
 & \text{Serre} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
\text{トーション・フリー類} \arrow[d, Rightarrow] & \text{ワイド} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \text{トーション類} \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{IKE 閉} \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & & \text{ICE 閉} \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\
\text{KE 閉} \arrow[dr, Rightarrow] & \text{IE 閉} \arrow[d, Rightarrow] & \text{CE 閉} \arrow[dl, Rightarrow] \\
 & \text{拡大で閉じる} & .
\end{tikzcd}$$

可換ネーター環 R 上の有限生成加群の圏 $\mathsf{mod}\, R$ に関しては，これらの部分圏の多くが分類されてきた．

Theorem 3 ([2]). R を可換ネーター環とする．このとき対応

$$\mathcal{X} \mapsto \operatorname{Supp} \mathcal{X} := \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \operatorname{Supp} X, \quad Z \mapsto \mathsf{mod}_Z\, R := \{ M \in \mathsf{mod}\, R \mid \operatorname{Supp} M \subseteq Z \}$$

は次の集合の間に互いに逆な全単射対応を与える：

- $\mathsf{mod}\, R$ の *Serre* 部分圏の集合．
- $\operatorname{Spec} R$ の特殊化閉部分集合の集合．ここで部分集合 $Z \subseteq \operatorname{Spec} R$ が**特殊化閉** ***(specialization-closed)*** であるとは，任意の $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$ に対して $\mathfrak{p} \in Z$ かつ $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ ならば $\mathfrak{q} \in Z$ となるときに言う．

つまり $\mathsf{mod}\,R$ の *Serre* 部分圏は $\operatorname{Spec} R$ の特殊化閉部分集合で分類される．

Theorem 4 ([7])**.** R を可換ネーター環とする．このとき対応

$$\mathcal{X} \mapsto \operatorname{Ass} \mathcal{X} := \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \operatorname{Ass} X, \quad \Phi \mapsto \mathsf{mod}^{\mathsf{ass}}_{\Phi} R := \{ M \in \mathsf{mod}\,R \mid \operatorname{Ass} M \subseteq \Phi \}$$

は次の集合の間に互いに逆な全単射対応を与える：

- アーベル圏 $\mathsf{mod}\,R$ のトーション・フリー類の集合.
- $\operatorname{Spec} R$ のべき集合.

つまり $\mathsf{mod}\,R$ のトーション・フリー類は $\operatorname{Spec} R$ の部分集合で分類される．

Theorem 5 ([1, 6, 7])**.** R を可換ネーター環とする．

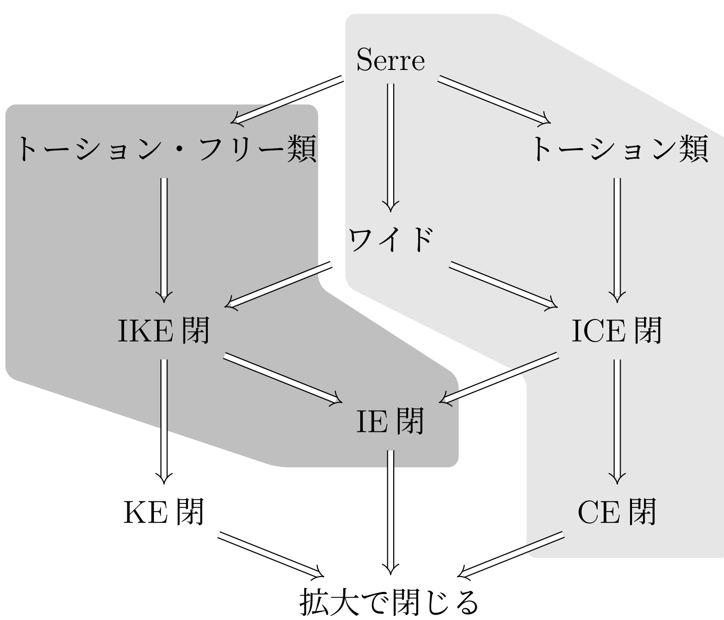
(1) $\mathsf{mod}\,R$ の加法部分圏 $\mathcal{X}$ に対して次は同値である．
- $\mathcal{X}$ は *Serre* 部分圏である．
- $\mathcal{X}$ はトーション類である．
- $\mathcal{X}$ はワイド部分圏である．
- $\mathcal{X}$ は *ICE* 閉部分圏である．
- $\mathcal{X}$ は *CE* 閉部分圏である．

つまり，上記の部分圏は $\operatorname{Spec} R$ の特殊化閉部分集合で分類される．

(2) $\mathsf{mod}\,R$ の加法部分圏 $\mathcal{X}$ に対して次は同値である．
- $\mathcal{X}$ はトーション・フリー類である．
- $\mathcal{X}$ は *IKE* 閉部分圏である．
- $\mathcal{X}$ は *IE* 閉部分圏である．

つまり，上記の部分圏は $\operatorname{Spec} R$ の部分集合で分類される．

つまり $\mathsf{mod}\,R$ の部分圏のクラスは次のように分けられる：



これが可換ネーター環 R 上の加群圏 $\mathsf{mod}\,R$ の部分圏の分類に関する先行研究である．次節では，これらの分類のトーション・フリー類への拡張を紹介する．これらの部分圏の分類のネーター代数やスキームへの拡張に関してはそれぞれ [3] と [4] を見よ．

2. 完全圏の部分圏の分類

前節までは，加群圏 $\mathsf{mod}\, R$ などのアーベル圏の部分圏について論じていたのに対して，この節では，極大 Cohen-Macaulay 加群の圏 $\mathsf{cm}\, R$ などの完全圏（＝アーベル圏の拡大で閉じた部分圏）の部分圏について論じたい．そのためにまず次の概念を導入する．

Definition 6. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の拡大で閉じた部分圏 $\mathcal{X}$ を考える．このとき $\mathcal{X}$ の**許容短完全列**とは，$\mathcal{A}$ の短完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ であって $A, B, C \in \mathcal{X}$ となるものである．

許容短完全列を考えることで，$\mathcal{X}$ の中でアーベル圏のようなホモロジー代数的議論を行うことができるようになる．とくにアーベル圏の短完全列を $\mathcal{X}$ の許容短完全列に置き換えることで，$\mathcal{X}$ の Serre 部分圏やトーション（・フリー）類を考えることが出来る．

Definition 7. アーベル圏 $\mathcal{A}$ の拡大で閉じた部分圏 $\mathcal{X}$ と $\mathcal{X}$ の加法部分圏 $\mathcal{S}$ を考える．

(1) $\mathcal{S}$ が**拡大で閉じる**とは，任意の $\mathcal{X}$ の許容短完全列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ に対して $X, Z \in \mathcal{S}$ ならば $Y \in \mathcal{S}$ となるときに言う．
(2) $\mathcal{S}$ が**許容部分対象で閉じる**とは，任意の $\mathcal{X}$ の許容短完全列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ に対して $Y \in \mathcal{S}$ ならば $X \in \mathcal{S}$ となるときに言う．
(3) $\mathcal{X}$ が**許容商で閉じる**とは，任意の $\mathcal{X}$ の許容短完全列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ に対して $Y \in \mathcal{S}$ ならば $Z \in \mathcal{S}$ となるときに言う．
(4) $\mathcal{S}$ が $\mathcal{X}$ の **Serre 部分圏**であるとは，拡大と許容部分対象，許容商で閉じるときに言う．
(5) $\mathcal{S}$ が $\mathcal{X}$ の**トーション・フリー類**であるとは，拡大と許容部分対象で閉じるときに言う．
(6) $\mathcal{S}$ が $\mathcal{X}$ の**トーション類**であるとは，拡大と許容商で閉じるときに言う．

この節で紹介する主結果は，可換ネーター環 R 上の加群圏 $\mathsf{mod}\, R$ のトーション・フリー類の部分圏の分類である．まず定理 4 より $\mathsf{mod}\, R$ のトーション・フリー類は，$\operatorname{Spec} R$ の部分集合 Φ を用いて次のような形で記述されたことを思い出そう：

$$\mathsf{mod}_{\Phi}^{\mathsf{ass}}\, R := \{M \in \mathsf{mod}\, R \mid \operatorname{Ass} M \subseteq \Phi\}.$$

実は完全圏 $\mathsf{mod}_{\Phi}^{\mathsf{ass}}\, R$ の Serre 部分圏やトーション・フリー類は Φ のある部分集合を用いて記述することができる．

Theorem 8 ([4])**.** R を可換ネーター環とし，Φ を $\operatorname{Spec} R$ の部分集合とする．このとき対応

$$\mathcal{X} \mapsto \operatorname{Ass} \mathcal{X} := \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \operatorname{Ass} X, \quad \Psi \mapsto \mathsf{mod}_{\Psi}^{\mathsf{ass}}\, R$$

は次の集合の間に互いに逆な全単射対応を与える：

- $\mathsf{mod}_{\Phi}^{\mathsf{ass}}\, R$ の *Serre* 部分圏の集合．
- Φ の特殊化閉部分集合の集合．ここで部分集合 $\Psi \subseteq \Phi$ が**特殊化閉** ***(specialization-closed)*** であるとは，任意の $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \Phi$ に対して $\mathfrak{p} \in \Psi$ かつ $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$ ならば $\mathfrak{q} \in \Psi$ となるときに言う．

つまり完全圏 $\mathsf{mod}_{\Phi}^{\mathsf{ass}}\, R$ の *Serre* 部分圏は Φ の特殊化閉部分集合で分類される．

この定理において $\Phi = \operatorname{Spec} R$ とすれば，定理 3 が復元される．この意味でこの定理は，定理 3 の完全圏への拡張だと思える．

Theorem 9 ([5])**.** Rを可換ネーター環とし，Φを$\operatorname{Spec} R$の部分集合とする．このとき$\mathsf{mod}^{\mathsf{ass}}_{\Phi} R$の中で*Serre*部分圏とトーション類は一致する．とくに完全圏$\mathsf{mod}^{\mathsf{ass}}_{\Phi} R$のトーション類は$\Phi$の特殊化閉部分集合で分類される．

Theorem 10 ([5])**.** Rを1次元可換ネーター環とし，Φを$\operatorname{Spec} R$の部分集合とする．このとき対応

$$\mathcal{X} \mapsto \operatorname{Ass} \mathcal{X} := \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \operatorname{Ass} X, \quad \Psi \mapsto \mathsf{mod}^{\mathsf{ass}}_{\Psi} R$$

は次の集合の間に互いに逆な全単射対応を与える：

- $\mathsf{mod}^{\mathsf{ass}}_{\Phi} R$のトーション・フリー類の集合.
- Φのべき集合.

つまり完全圏$\mathsf{mod}^{\mathsf{ass}}_{\Phi} R$のトーション・フリー類は$\Phi$の部分集合で分類される.

この定理において$\Phi = \operatorname{Spec} R$とすれば，1次元の場合の定理4が復元される．この意味でこの定理は，定理4の完全圏への拡張だと思える．次元が2以上の可換ネーター環に関しては，この定理の反例が存在する．

1次元Cohen-Macaulay環に対しては，極大Cohen-Macaulay加群の圏$\mathsf{cm}\, R$は$\mathsf{mod}\, R$のトーション・フリー類となり，$\mathsf{cm}\, R = \mathsf{mod}^{\mathsf{ass}}_{\operatorname{Min} R} R$となる．ここで$\operatorname{Min} R$は$R$の極小素イデアルの集合である．よってここまでの定理を合わせることで次を得る．

Corollary 11. Rを1次元*Cohen-Macaulay*環とする．このとき完全圏$\mathsf{cm}\, R$の中で*Serre*部分圏，トーション類およびトーション・フリー類は一致する．またこれらの部分圏は$\operatorname{Min} R$の部分集合で分類される．

References

[1] H. Enomoto, *IE-closed subcategories of commutative rings are torsion-free classes*, preprint (2023), arXiv:2304.03260v2.

[2] P. Gabriel, *Des catégories abéliennes*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323–448.

[3] O. Iyama, Y. Kimura, *Classifying subcategories of modules over Noetherian algebras*, preprint (2021), arXiv:2106.00469v5.

[4] S. Saito, *Classifying torsionfree classes of the category of coherent sheaves and their Serre subcategories*, preprint (2023), arXiv:2304.06918v2.

[5] T. Kobayashi, S. Saito, *When are KE-closed subcategories torsionfree classes?*, preprint (2023), arXiv:2309.01044.

[6] D. Stanley, B. Wang, *Classifying subcategories of finitely generated modules over a Noetherian ring*, J. Pure Appl. Algebra **215** (2011), no. 11, 2684–2693.

[7] R. Takahashi, *Classifying subcategories of modules over a commutative Noetherian ring*, J. Lond. Math. Soc. (2) **78** (2008), no. 3, 767–782.

Graduate School of Mathematics
Nagoya University
Chikusa-ku, Nagoya. 464-8602, Japan
Email address: m19018i@math.nagoya-u.ac.jp