ON THE CENTER OF A WREATH PRODUCT OF TRUNCATED POLYNOMIAL ALGEBRAS

MASAHIDE KONISHI

Abstract. Let R be a ring with unity and let n, N be positive integers. Let S_n be the symmetric group. Let r_i be positive integers for $1 \leq i \leq N$. Let A be a truncated polynomial R-algebra $R[x_1, \cdots, x_N]/\langle x_1^{r_1}, \cdots, x_N^{r_N}\rangle$. Let A_n be a wreath product $A \wr S_n$. Then the rank of the center of A_n equals to the number of $\prod r_i$-multipartitions of n.

Key Words: center, wreath product.

2000 *Mathematics Subject Classification*: 16U70, 20E22.

本稿において R は単位元を持つ可換環とする. n および N を 1 以上の整数とする. $1 \leq i \leq N$ に対し、r_i を 1 以上の整数とする.

[1] において、対称群 S_N の wreath 積 $S_N \wr S_n$ の共役類が type という概念を用いて特徴付けられている。すなわち、群環 $R(S_N \wr S_n)$ の中心を記述している。本稿では R-代数 $R[x_1, \cdots, x_N]/\langle x_1^{r_1}, \cdots, x_N^{r_N}\rangle$ の wreath 積に対して type の概念を拡張し、それを用いて中心を記述する。

第 1 節で基本的な用語を定義し、第 2 節で truncated polynomial ring の wreath 積に関する種々の性質を示し、第 3 節で主定理を述べる。証明については適宜省略する。

1. 準備

Definition 1. 集合 $\{1, \ldots, n\}$ から $\{1, \ldots, n\}$ への全単射写像全てからなる集合に、写像の合成を積として与えた群を n 次対称群と呼び、S_n で表す。

S_n の元 σ に対し cycle 分解が考えられる。よく知られている概念であり、本稿では「右向き」に記述することを例で以て示すに留める。

Example 2. $\sigma \in S_3$ を $\sigma(1) = 2$、$\sigma(2) = 3$、$\sigma(3) = 1$ で定める。このとき σ の cycle 分解は長さ 3 の cycle1 つから成り、表記は (1 2 3)、(2 3 1)、(3 1 2) の 3 通り存在する。

$\tau \in S_3$ を $\tau(1) = 2$、$\tau(2) = 1$、$\tau(3) = 3$ で定める。このとき τ の cycle 分解は長さ 2 の cycle1 つ長さ 1 の cycle1 つから成り、表記は (1 2)(3)、(2 1)(3)、(3)(1 2)、(3)(1 2) の 4 通り存在する。

一般に cycle 分解の表記は一意ではないが、後に定義する type は表記に依らない。

また、長さ 1 の cycle は混乱が生じない限り省略する。

cycle 分解とその共役な元の cycle 分解に関する次の性質がある。

Proposition 3. *$\sigma \in S_n$ の cycle 分解の表記が長さ n の cycle$(\gamma_1 \ \ldots \ \gamma_n)$ であると仮定する. このとき, 任意の $\tau \in S_n$ に対し, $\tau\sigma\tau^{-1}$ の cycle 分解の表記として $(\tau(\gamma_1) \ \ldots \ \tau(\gamma_n))$ が得られる.*

σ の cycle 分解が複数の cycles で表記される場合も同様のことが成り立つ。

The detailed version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

Example 4. S_3 の元として $\sigma = (1\ 2\ 3)$ と $\tau = (2\ 3)$ をとると、$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(1)\ \tau(2)\ \tau(3)) = (1\ 3\ 2)$ となる。

S_4 の元として $\sigma = (1\ 2)(3\ 4)$ と $\tau = (2\ 3)$ をとると、$\tau\sigma\tau^{-1} = (\tau(1)\ \tau(2))(\tau(3)\ \tau(4)) = (1\ 3)(2\ 4)$ となる。

本稿では分割および多重分割を以下で定義する。分割は type を定義する際に用い、多重分割は主定理を記述する際に用いる。

Definition 5. 正の整数の単調非増加な列 $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ を分割と呼ぶ. 分割 λ に対し $\displaystyle\sum_{i=1}^{t} \lambda_i$ を $|\lambda|$ と記す. $|\lambda| = n$ であるとき, λ を n の分割と呼ぶ. また, 0 の分割を $\emptyset$ で表す.

Definition 6. t 個の分割の列 $\hat{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(t)})$ を t-多重分割と呼ぶ. $\displaystyle\sum_{i=1}^{t} |\lambda^{(i)}| = n$ であるとき, $\hat{\lambda}$ を n の t-多重分割と呼ぶ.

Remark 7. n の t-多重分割 $(\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(t)})$ については、$(|\lambda^{(1)}|, \ldots, |\lambda^{(t)}|)$ が n の分割である必要はない。

Example 8. 2 の 2 多重分割は $((2), \emptyset)$、$((1,1), \emptyset)$、$((1),(1))$、$(\emptyset, (2))$、$(\emptyset, (1,1))$ の 5 通り存在する。

次の集合 $I_{m,r}$ は truncated polynomial ring 側の情報を記述する際に用いられる。

Definition 9. m, r を 1 以上の整数とする. 集合 $\{0, \ldots, r-1\}^m$ を $I_{m,r}$ で表す. $I_{m,r}$ の元 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ に対し, $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \alpha_k$ を $|\alpha|$ と記す.

以下の性質は元が中心であるための条件を判定する際に用いる。証明は帰納法による。

Proposition 10. *$I_{m,r}$ の元 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ と 1 以上 $m-1$ 以下の整数 p に対し, $\alpha_p < r-1$ かつ $\alpha_{p+1} > 0$ のとき, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p-1}, \alpha_p + 1, \alpha_{p+1} - 1, \alpha_{p+2}, \ldots, \alpha_m)$ もまた $I_{m,r}$ の元である. $|\alpha| = a(r-1) + b$ $(0 \le a \le m, 0 \le b < r-1)$ とすると, α に上記の操作を繰り返すことで $(r-1, \ldots, r-1, b, 0, \ldots, 0)$ が得られる. これを α の左詰めと呼ぶ.*

A を有限生成自由 R-代数とする. 即ち, R-加群としては $A = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{t} Ra_i$ ($i \neq j$ ならば $a_i \neq a_j$) と表せると仮定する.

Definition 11. 有限生成自由 R-代数の S_n による wreath 積 $A \wr S_n$ を以下で定義する。

- 集合としては $A^{\otimes n} \otimes RS_n$ である。ただし、テンソル積は R 上でとる。
- $(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \otimes \sigma$ と $(b_1 \otimes \cdots \otimes b_n) \otimes \tau$ の積を $\left(a_1 b_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes a_n b_{\sigma^{-1}(n)}\right) \otimes \sigma\tau$ で定め, R-線形に拡張する.

Proposition 12. *R-加群として $A \wr S_n = \bigoplus R\left((a_{i_1} \otimes \cdots \otimes a_{i_n}) \otimes \sigma\right)$ である. ただし直和は $1 \le i_k \le t$ $(1 \le k \le n)$, $\sigma \in S_n$ を走る.*

ε を S_n の単位元, 1_R を R の単位元 1_A を A の単位元とする. s_i $(1 \le i < n)$ を S_n の元 $(i\ i+1)$ とする.

- A の元 a に対し $A\wr S_n$ の元 $(a\otimes 1_A\otimes\cdots\otimes 1_A)\otimes 1_R\,\varepsilon$ を $\hat{a}$ と書く.
- S_n の元 σ に対し $A\wr S_n$ の元 $(1_A\otimes\cdots\otimes 1_A)\otimes 1_R\ \sigma$ を $\hat{\sigma}$ と書く.

以下では混同が生じなければ 1_R 及び 1_A を共に 1 と略記し, $1_R\ \sigma$ は σ と略記する.

以下の性質から、$A\wr S_n$ 元が中心に属することを確認する際は、特定の元との可換性のみ確認すれば十分である。

Proposition 13. $A=\langle a_1,\cdots,a_u\rangle_R$ とする. このとき, $A\wr S_n=\langle\hat{a_1},\ldots,\hat{a_u},\hat{s_1},\ldots,\hat{s_{n-1}}\rangle_R$ である. ただし, $\langle\rangle_R$ は積及び和による生成を表す.

2. TRUNCATED POLYNOMIAL ALGEBRAS の WREATH 積

以下, A は truncated polynomial R-algebra $R[x_1,\cdots,x_N]/\langle x_1^{r_1},\cdots,x_N^{r_N}\rangle$ とし, $A\wr S_n$ を A_n で表す.

混同が生じない限り, $\hat{\sigma}$ を単に σ と書く. $1\le i\le N$ に対し $(x_i\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1)\otimes\varepsilon$ を $x_{i,1}$ で表す. $1\le p<n$ に対し $s_px_{i,p}s_p$ を $x_{i,p+1}$ で表す.

$x_{i,p+1}$ はテンソル積の $p+1$ 番目のみが x_i でその他は 1 の元である。

A_n は $x_{i,j}(1\le i\le N, 1\le j<n)$ と $s_k(1\le k<n)$ で生成され、生成元の関係式は次の通りとなる.

- $x_{i,j}^{r_i}=0\ (1\le i\le N,1\le j\le n)$
- $x_{i,j}x_{i',j'}=x_{i',j'}x_{i,j}\ (1\le i,i'\le N,1\le j,j'\le n)$
- $s_k^2=1_{A_n}\ (1\le k<n)$
- $s_ks_{k'}=s_{k'}s_k\ (1\le k,k'<n,|k-k'|>1)$
- $s_ks_{k+1}s_k=s_{k+1}s_ks_{k+1}\ (1\le k<n-1)$
- $x_{i,j}s_k=s_kx_{i,j}\ (1\le i\le N,1\le j\le n,1\le k<n,j\ne k,k+1)$
- $x_{i,k}s_k=s_kx_{i,k+1}\ (1\le i\le N,1\le k<n)$
- $x_{i,k+1}s_k=s_kx_{i,k}\ (1\le i\le N,1\le k<n)$

また、$\sigma x_{i,j}=x_{i,\sigma(j)}\sigma$ である.

Proposition 14. R-加群として $A_n=\bigoplus R\prod x_{i,j}^{d_{i,j}}\sigma$ である. ただし直和は $0\le d_{i,j}<r_i(1\le i\le N,1\le j\le n),\sigma\in S_n$ を走る.

集合 $\left\{\prod_{\substack{1\le i\le N\\1\le j\le n}}x_{i,j}^{d_{i,j}}\sigma\mid 0\le d_{i,j}<r_i,\sigma\in S_n\right\}$ を $\mathcal{B}$ で表す.

A_n の元を $\sum_{b\in\mathcal{B}}c_bb\ (c_b\in R)$ と表し, それが中心の元であると仮定すると c_b がどのような条件を満たすかを議論することで中心を求める. そのために type の概念を導入する。

Definition 15. $b=\prod x_{i,j}^{d_{i,j}}\sigma\in\mathcal{B}$ に対し, σ の cycle 分解 $\gamma_1\cdots\gamma_t$ を取る.

各 cycle $\gamma_i=(\gamma_{i,1}\ \ldots\ \gamma_{i,l(\gamma_i)})$ と $1\le j\le N$ に対し, γ_i の x_j に関する次数を $\sum_{1\le k\le l(\gamma_i)}d_{\gamma_{i,k},j}$ で定め, $\delta_{i,j}$ で表す. γ_i の次数を $(\delta_{i,1},\ldots,\delta_{i,N})$ で定め, $\Delta(\gamma_i)$ で表す.

各 cycle に対し, cycle の長さと次数を組にして得られる multiset $[(l(\gamma_i),\Delta(\gamma_i))]_{1\le i\le t}$ を b の type と呼び, type(b) で表す.

各 cycle の次数は和を取っているので, cycle の表記に依らず well-definded である. b の type は multiset を用いているので, σ の cycle 分解の表記に依らず well-definded である.

定義から直ちに示される $\mathcal{B}$ の元と type に関する性質を述べる。

Proposition 16. $b, b' \in \mathcal{B}, 1 \leq k < n$ とする. このとき, $s_k b = s_k b'$ または $b s_k = b' s_k$ ならば, $b = b'$ である.

Proposition 17. $b, b' \in \mathcal{B}, 1 \leq i \leq N, 1 \leq j \leq n$ とする. このとき, $x_{i,j} b = x_{i,j} b' \neq 0$ または $b x_{i,j} = b' x_{i,j} \neq 0$ ならば, $b = b'$ である.

Proposition 18. $b \in \mathcal{B}, 1 \leq k < n, \sigma \in S_n$ とする. このとき, $\mathrm{type}(b) = \mathrm{type}(s_k b s_k)$ である. また, $\mathrm{type}(b) = \mathrm{type}(\sigma b \sigma^{-1})$ である.

Definition 19. A_n の中心を $Z(A_n)$ 或いは単に Z で表す.

Z の元を $\displaystyle\sum_{b \in \mathcal{B}} c_b b$ の形で表した際、係数 c_b が満たすべき条件を調べて以下を得る。要するに、type が等しい $\mathcal{B}$ の元は係数も等しいことが center であるための必要条件となる。

Lemma 20. $\displaystyle\sum_{b \in \mathcal{B}} c_b b \in Z$ とする. このとき, $b, b' \in \mathcal{B}$ に対し, $\mathrm{type}(b) = \mathrm{type}(b')$ ならば $c_b = c_{b'}$

証明の概略は以下の通りである。

$b = \prod x_{i,j}^{d_{i,j}} \sigma$ と $b' = \prod x_{i,j}^{d'_{i,j}} \sigma'$ に対し, type が等しいという仮定から $\sigma = \tau \sigma' \tau^{-1}$ となる $\tau \in S_n$ が存在する. $b'' = \tau b' \tau^{-1}$ とすると, 中心の元であることと τ との可換性から $c_{b'} = c_{b''}$ なので, $c_b = c_{b''}$ を示せば良い.

以下の例のようにして各 $x_{i,j}$ との可換性を用いて係数が等しい $\mathcal{B}$ の元を辿っていく.

$(1\ 2)x_{1,1}$ に右から $x_{1,2}$ を掛けると $(1\ 2)x_{1,1}x_{1,2}$ であり,

$(1\ 2)x_{1,2}$ に左から $x_{1,2}$ を掛けると $(1\ 2)x_{1,1}x_{1,2}$ なので, $c_{(1\ 2)x_{1,1}} = c_{(1\ 2)x_{1,2}}$ を得る.

これを繰り返すと各 cycle 内での左詰めが行え、b と b'' は共通の左詰めに辿り着くので $c_b = c_{b''}$ が示される。

Definition 21. $\mathrm{Type}(\mathcal{B})$ を $\{\mathrm{type}(b) \mid b \in \mathcal{B}\}$ で定める.

各 $\mathtt{T} \in \mathrm{Type}(\mathcal{B})$ に対し, $\mathcal{B}_{\mathtt{T}}$ を $\{b \in \mathcal{B} \mid \mathrm{Type}(b) = \mathtt{T}\}$ で定める.

$\mathtt{T} \in \mathrm{Type}(\mathcal{B})$ に対し, $\mathtt{T} = [l_i, (\delta_{i,1}, \ldots, \delta_{i,N})]_{1 \leq i \leq t}$ の形で表した際, 各 $1 \leq j \leq N$ 及び各 $1 \leq k \leq t$ に対し

$(l_k - 1)(r_j - 1) \leq \delta_{j,k} \leq l_k(r_j - 1)$

が成り立つとき, $\mathtt{T}$ を central type と呼ぶ.

Central type が為す $\mathrm{Type}(\mathcal{B})$ の部分集合を $\mathrm{TypeC}(\mathcal{B})$ で表す.

$b \in \mathcal{B}$ の元に対し、$\mathrm{type}(b) \in \mathrm{TypeC}(\mathcal{B})$ であることが $c_b \neq 0$ であることの必要条件となる。

Lemma 22. $\displaystyle\sum_{b \in \mathcal{B}} c_b b \in Z$ とする. $\mathtt{T} \in \mathrm{Type}(\mathcal{B}) \backslash \mathrm{TypeC}(\mathcal{B})$ とする.

このとき, $\mathrm{type}(b) = \mathtt{T}$ ならば $c_b = 0$ である.

証明の概略は以下の通りである。

仮定から $\delta_{j,k} < (l_k - 1)(r_j - 1)$ となる j と k が存在するので, その cycle と変数に着目して $c_b = 0$ を示す.

以下の類似として示される.

$(1\ 2)$ に右から $x_{1,1}$ を掛けると $(1\ 2)x_{1,1}$ を得るが, 左から $x_{1,1}$ を掛けると $x_{1,1}(1\ 2) = (1\ 2)x_{1,2}$ により必ず $x_{1,2}$ が出てくるため, 左から $x_{1,1}$ を掛けて $(1\ 2)x_{1,1}$ となる元は存在しない, 即ち $c_{(1\ 2)} = 0$ である.

各 $\mathtt{T} \in \mathrm{TypeC}(\mathcal{B})$ と $b \in \mathcal{B}$ に対し、$\mathrm{type}(b) = \mathtt{T}$ ならば $c_b = 1$、$\mathrm{type}(b) \neq \mathtt{T}$ ならば $c_b = 0$ とすれば center の元が得られる。

Lemma 23. $\mathtt{T} \in \mathrm{TypeC}(\mathcal{B})$ とすると, $\displaystyle\sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathtt{T}}} b \in Z$ である.

Central type の定義から, 各 s_k 及び各 $x_{i,1}$ との可換性を確かめる. Central type であることは s_k との可換性については必要ではないが、各 $x_{i,1}$ との可換性については必要かつ十分となる。

Example 24. $n = 2, N = 1, r_1 = 2$ の場合、

$\mathrm{Type}(\mathcal{B}) = \{[(2,0)], [(2,1)], [(2,2)], [(1,0),(1,0)], [(1,1),(1,0)], [(1,1),(1,1)]\}$。

$\mathrm{TypeC}(\mathcal{B}) = \{[(2,1)], [(2,2)], [(1,0),(1,0)], [(1,1),(1,0)], [(1,1),(1,1)]\}$。

$x_{1,j}$ を x_j と略記すると、$(j = 1, 2)$

各 central type に対応する Z の元は, $(1\ 2)x_1 + (1\ 2)x_2$, $(1\ 2)x_1x_2$, 1, $x_1 + x_2$, x_1x_2。

Example 25. $n = 2, N = 1, r_1 = 3$ の場合、

Type は $[(2,0)]$, $[(2,1)]$, $[(2,2)]$, $[(2,3)]$, $[(2,4)]$, $[(1,0),(1,0)]$, $[(1,1),(1,0)]$, $[(1,2),(1,0)]$ $[(1,1),(1,1)]$, $[(1,2),(1,1)]$, $[(1,2),(1,2)]$.

その内 central type は $[(2,2)]$, $[(2,3)]$, $[(2,4)]$, $[(1,0),(1,0)]$, $[(1,1),(1,0)]$, $[(1,2),(1,0)]$, $[(1,1),(1,1)]$, $[(1,2),(1,1)]$, $[(1,2),(1,2)]$ の 9 個.

各 central type に対応する Z の元は,

$(1\ 2)x_1^2 + (1\ 2)x_1x_2 + (1\ 2)x_2^2$, $(1\ 2)x_1^2x_2 + (1\ 2)x_1x_2^2$, $(1\ 2)x_1^2x_2^2$, 1, $x_1 + x_2$, $x_1^2 + x_2^2$, x_1x_2, $x_1^2x_2 + x_1x_2^2$, $x_1^2x_2^2$.

Example 26. $n = 3, N = 1, r_1 = 2$ の場合、

Type は $[(3,0)]$, $[(3,1)]$, $[(3,2)]$, $[(3,3)]$, $[(2,0),(1,0)]$, $[(2,1),(1,0)]$, $[(2,2),(1,0)]$, $[(2,0),(1,1)]$, $[(2,1),(1,1)]$, $[(2,2),(1,1)]$, $[(1,0),(1,0),(1,0)]$, $[(1,1),(1,0),(1,0)]$, $[(1,1),(1,1),(1,0)]$, $[(1,1),(1,1),(1,1)]$.

その内 central type は $[(3,2)]$, $[(3,3)]$, $[(2,1),(1,0)]$, $[(2,2),(1,0)]$, $[(2,1),(1,1)]$, $[(2,2),(1,1)]$, $[(1,0),(1,0),(1,0)]$, $[(1,1),(1,0),(1,0)]$, $[(1,1),(1,1),(1,0)]$, $[(1,1),(1,1),(1,1)]$ の 10 個.

各 central type に対応する Z の元は,

$((1\ 2\ 3)+(1\ 3\ 2))(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$, $((1\ 2\ 3)+(1\ 3\ 2))x_1x_2x_3$, $(1\ 2)(x_1+x_2)+(1\ 3)(x_1+x_3)+(2\ 3)(x_2+x_3)$, $(1\ 2)x_1x_2+(1\ 3)x_1x_3+(2\ 3)x_2x_3$, $(1\ 2)(x_1+x_2)x_3+(1\ 3)(x_1+x_3)x_2+(2\ 3)(x_2+x_3)x_1$, $((1\ 2)+(1\ 3)+(2\ 3))x_1x_2x_3$, $1, x_1+x_2+x_3, x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3, x_1x_2x_3$.

3. 主結果

Theorem 27. $Z(A_n) = \displaystyle\bigoplus_{\mathtt{T} \in \mathrm{TypeC}(\mathcal{B})} R(\sum_{b \in \mathcal{B}_{\mathtt{T}}} b)$ である。また、$|\mathrm{TypeC}(\mathcal{B})|$ は n の $\prod r_i$-多重分割の個数と等しい.

前半は第 2 節で示した Lemma より成り立つ。

後半については central type の定義において,

$(l_k-1)(r_j-1) \leq \delta_{j,k} \leq l_k(r_j-1)$
を満たす $\delta_{j,k}$ は k に依らず r_j 個あることを用いて $\prod r_i$-多重分割に帰着する.

Example 28. $n=2, N=1, r_1=2$ の場合,
central type$[(2,1)]$, $[(2,2)]$, $[(1,0),(1,0)]$, $[(1,1),(1,0)]$, $[(1,1),(1,1)]$ はそれぞれ,
2 の 2-多重分割 $((2),\emptyset)$, $(\emptyset,(2))$, $((1,1),\emptyset)$, $((1),(1))$, $(\emptyset,(1,1))$ と対応する.

Example 29. $n=2, N=1, r_1=3$ の場合,
central type$[(2,2)]$, $[(2,3)]$, $[(2,4)]$, $[(1,0),(1,0)]$, $[(1,1),(1,0)]$, $[(1,2),(1,0)]$, $[(1,1),(1,1)]$, $[(1,2),(1,1)]$, $[(1,2),(1,2)]$ はそれぞれ,
2 の 3-多重分割 $((2),\emptyset,\emptyset)$, $(\emptyset,(2),\emptyset)$, $(\emptyset,\emptyset,(2))$, $((1,1),\emptyset,\emptyset)$, $((1),(1),\emptyset)$, $((1),\emptyset,(1))$, $(\emptyset,(1,1),\emptyset)$, $(\emptyset,(1),(1))$, $(\emptyset,\emptyset,(1,1))$ と対応する.

Example 30. $n=3, N=1, r_1=2$ の場合,
central type$[(3,2)]$, $[(3,3)]$, $[(2,1),(1,0)]$, $[(2,2),(1,0)]$, $[(2,1),(1,1)]$, $[(2,2),(1,1)]$, $[(1,0),(1,0),(1,0)]$, $[(1,1),(1,0),(1,0)]$, $[(1,1),(1,1),(1,0)]$, $[(1,1),(1,1),(1,1)]$ はそれぞれ,
3 の 2-多重分割 $((3),\emptyset)$, $(\emptyset,(3))$, $((2,1),\emptyset)$, $((1),(2))$, $((2),(1))$, $(\emptyset,(2,1))$, $((1,1,1),\emptyset)$, $((1,1),(1))$, $((1),(1,1))$, $(\emptyset,(1,1,1))$ と対応する.

References

[1] G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, Oxford Univ. Press, second edition, 1995

Email address: masahide.konishi0915@gmail.com