第 6 回

代数分科会シンポジウム報告集

(ホモロジー代数とその応用)

1964 年 7 月 10 日—14 日

北 大 理 学 部

青 峦 荘

森田氏の定理をめぐって

東　屋　五　郎　(北海道大学)

森田氏は [7] において射影的 (projective) 加群の同型性及び入射的 (injective) 加群の双対性について興味ある一般的理論を展開された．特に射影的加群の場合，Auslander-Goldman [2] における separable algebra の理論の実質的な背景を与えるわけであり，その重要性はまことに注目に値するものである．この同型性理論の骨子となるものは或る型の加群—これを筆者は完全忠実な加群と呼びたい—であるが，本稿においてはかかる加群を更に仔細に考察することによって森田氏の緒結果を精密化し補足することを目標とする．例えば [7] において極小条件の仮定の下で証明された定理が，実はこの条件を除いても成り立つ等のことも知られる．

1. Λ を単位元1を持つ環，$P={}_\Lambda P$ をその (unital な) 左加群とする．f を P から Λ の中への Λ-準同型とすれば P の像 $f(P)$ は明らかに Λ の左イデアルである．また Λ の元 λ に対し $f\lambda$ すなわち $p\to f(p)\lambda$ $(p\in P)$ なる写像もまた Λ-準同型で，これによる P の像は $f(P)\lambda$ である．よって，今すべての $f:{}_\Lambda P\to{}_\Lambda\Lambda$ に対する $f(P)$ の和を考えれば，これは両側イデアルをなすことが知られるが，これを ${}_\Lambda P$ の trace ideal と呼び，$\mathfrak{t}({}_\Lambda P)$ で表わす．そして特に $\mathfrak{t}({}_\Lambda P)=\Lambda$ なるとき ${}_\Lambda P$ を完全忠実 (completely faithful) であるということにする．明らかに，このための必十条件は $\mathfrak{t}({}_\Lambda P)$ が1を含むこと，すなわち適当な有限個の $f_i:{}_\Lambda P\to{}_\Lambda\Lambda\ (i=1,2,\cdots n)$ 及び P の元 a_i $(i=1,2,\cdots n)$ をとって $\sum_{i=1}^{n}f_i(a_i)=1$ であるように出来るということである．さてこのとき P の n 個の直和 P^n を考え，P^n から Λ の中への Λ-準同型 $(p_1, p_2,\cdots, p_n)\to f_1(p_1)+f_2(p_2)+\cdots\cdots+f_n(p_n)$ を考えるに，$(a_1, a_2,\cdots, a_n)$ の像は1だから，この写像は上への準同型である．逆に，P^n から Λ の上への準同型 φ が与えられたとする．P の元 p に対して第 i 成分が p で他の成分がすべて0であるような P^n の元を対応させることにより P から P^n の中への Λ-準同型 g_i が得られるが，g_i と φ との積 $\varphi\circ g_i$ を f_i とおけば f_i は P から Λ の中への準同型で，$\varphi(p_1, p_2,\cdots, p_n)=\varphi(g_1(p_1)+g_2(p_2)+\cdots\cdots+g_n(p_n))=\varphi(g_1(p_1))+\varphi(g_2(p_2))+\cdots\cdots+\varphi(g_n(p_n))=f_1(p_1)+f_2(p_2)+\cdots\cdots+f_n(p_n)$ である．それゆえ φ が Λ の上への写像であることは，$f_1(a_1)+f_2(a_2)+\cdots\cdots+f_n(a_n)=1$ なる元 $a_i\in P$ の存在を示す．かくて，

定理 1. $P={}_\Lambda P$ が完全忠実であるための必十条件は適当な n に対し Λ が P の n 個の直和 P^n の Λ-準同型像になることである．

この定理から特に P が完全忠実ならば (P^n が従って) P が忠実 (faithful) である，すなわち $\lambda P=0$ なる $\lambda\in\Lambda$ は $\lambda=0$ のみということが知られる．逆は勿論一般には成り立たない．しかし，

定理 2. Λ が準フロベニウス環 (quasi-Frobenius ring) ならば忠実 Λ-加群は完全忠実である．

証明．Λ を準フロベニウス環とし，Λ を直既約左イデアルの直和に分解する．その左イデアルの中で互に (作用) 同型でないものの完全な一組を $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2,\cdots, \mathfrak{l}_k$ とする．そして一般に $\mathfrak{l}_\kappa$ に同型な直既約左イデアルの個数すなわち $\mathfrak{l}_\kappa$ の Λ における重複度数を $m(\kappa)$ とすれば，$\Lambda\cong\mathfrak{l}_1^{m(1)}\oplus\mathfrak{l}_2^{m(2)}\oplus\cdots\cdots\oplus\mathfrak{l}_k^{m(k)}$ である．各 $\mathfrak{l}_\kappa$ はただ一つの極小部分左イデアルを含むわけであるが，中山—

東屋 [9, 定理 (65.5)] により忠実左 Λ-加群 P は $\mathfrak{l}_1\oplus\mathfrak{l}_2\oplus\cdots\cdots\oplus\mathfrak{l}_k$ に同型な Λ-直和因子を含む．それゆえ，たとえば $n=\max(m(1), m(2),\cdots, m(k))$ とおけば P^n は $\mathfrak{l}_1^n\oplus\mathfrak{l}_2^n\oplus\cdots\oplus\mathfrak{l}_k^n$ に同型な Λ-直和因子を含むが，他方 $\mathfrak{l}_1^{m(1)}\oplus\mathfrak{l}_2^{m(2)}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{l}_k^{m(k)}$ は $\mathfrak{l}_1^n\oplus\mathfrak{l}_2^n\oplus\cdots\oplus\mathfrak{l}_k^n$ の Λ-直和因子である．かくて P^n は Λ に同型な Λ-直和因子をふくみ，したがって，Λ を Λ-準同型像として持つことが知られた．

すべての既約 Λ-左加群が ${}_\Lambda P$ の準同型像であるとき P は (Λ-) 上半正則 (upper regular) であるということにする．Λ の既約左加群はすべて Λ の適当な極大左イデアルによる剰余加群に同型だから，${}_\Lambda\Lambda$ 自身上半正則である．

定理 3. 完全忠実な加群は上半正則である．

証明．${}_\Lambda P$ を完全忠実とする．$\mathfrak{l}$ を Λ の極大左イデアルとすれば，$f(P)\not\subseteq\mathfrak{l}$ なるごとき $f:{}_\Lambda P\to{}_\Lambda\Lambda$ がある．このとき $f(P)+\mathfrak{l}=\Lambda$ であるが，これは $p\to f(p)+\mathfrak{l}$ なる写像が ${}_\Lambda P$ から (既約 Λ-左加群) $\Lambda/\mathfrak{l}$ の上への準同型を与えることを示す．かくて P は上半正則である．

この定理の逆も一般には成り立たない．しかし，

定理 4. 射影的加群が上半正則ならば完全忠実である．

証明．${}_\Lambda P$ を射影的且つ上半正則とし，仮に $\mathfrak{t}({}_\Lambda P)\neq\Lambda$ とする．しかるとき $\mathfrak{t}({}_\Lambda P)$ を含む極大左イデアル $\mathfrak{l}$ をとる．${}_\Lambda P$ は上半正則ゆえ $\Lambda/\mathfrak{l}$ の上への Λ-準同型 g が存在する．今 Λ から $\Lambda/\mathfrak{l}$ の上への自然準同型を φ とすれば ${}_\Lambda P$ が射影的だから $\varphi\circ f=g$ であるような $f:{}_\Lambda P\to{}_\Lambda\Lambda$ が存在するが，これは $\varphi(f(P))=g(P)=\Lambda/\mathfrak{l}$ したがって $f(p)\not\subseteq\mathfrak{l}$ なることを示すが，$f(P)\subseteq\mathfrak{t}({}_\Lambda P)$ だからこれは矛盾である．かくて $\mathfrak{t}({}_\Lambda P)=\Lambda$ すなわち ${}_\Lambda P$ は完全忠実である．

さて次に Λ が可換な場合を考えよう：

定理 5. Λ が可換環ならば，Λ の上の有限生成且つ忠実な加群は上半正則である．

証明．${}_\Lambda P$ を有限個の元 $u_1, u_2,\cdots u_n$ から生成される忠実 Λ-加群とする．$\mathfrak{m}$ を Λ の極大イデアルとする．仮に $\mathfrak{m}P=P$ とすれば，$\mathfrak{m}u_1+\mathfrak{m}u_2+\cdots+\mathfrak{m}u_n=P$ となる．よって各 i に対し，$u_i=\alpha_{i1}u_1+\alpha_{i2}u_2+\cdots+\alpha_{in}u_n$ すなわち $\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}-\alpha_{ij})u_j=0$ なる $\alpha_{ij}\in\mathfrak{m}$ が存在する．Λ は可換だから，これらの連立一次方程式から $\det(\delta_{ij}-\alpha_{ij})\cdot u_j=0$ $(j=1, 2,\cdots, n)$，したがって $\det(\delta_{ij}-\alpha_{ij})P=0$ が得られるが，${}_\Lambda P$ は忠実だから $\det(\delta_{ij}-\alpha_{ij})=0$ である．しかるに他方，$\det(\delta_{ij}-\alpha_{ij})\equiv\det\delta_{ij}=1 \pmod{\mathfrak{m}}$ である．よって，$1\equiv0 \pmod{\mathfrak{m}}$ すなわち $1\in\mathfrak{m}$ となって矛盾である．かくて $\mathfrak{m}P\neq P$ である．$P/\mathfrak{m}P$ は体 $\Lambda/\mathfrak{m}$ の上の0でない加群とみられるから，$\Lambda/\mathfrak{m}$ は $P/\mathfrak{m}P$ のしたがって P の Λ-準同型像になる．かくて ${}_\Lambda P$ は上半正則である．

定理4と5から直ちに

定理 6. Λ が可換環ならば，Λ の上の有限生成，射影的且つ忠実な加群は完全忠実である．

再び Λ が必ずしも可換でない場合に戻って，

定理 7. Γ が環，Λ がその unital な (すなわち Γ の単位元を含むような) 部分環であるとき，Λ-左加群とみた $\Gamma={}_\Lambda\Gamma$ が完全忠実であるための必十条件は Λ が Γ の Λ-直和因子なることである．

証明．十分条件の方は明らかである．そこで ${}_\Lambda\Gamma$ を完全忠実と仮定する．すなわち，適当な $f_i:{}_\Lambda\Gamma\to{}_\Lambda\Lambda\ (i=1, 2,\cdots, n)$ 及び $a_i\in\Gamma\ (i=1, 2,\cdots, n)$ をとれば $\sum_{i=1}^{n}f_i(a_i)=1$ である．そこで $x\to\sum_{i=1}^{n}f_i(xa_i)$ $(x\in\Gamma)$ なる写像を考えれば，これは明らかに Γ から Λ の中への Λ-準同型を与える．これを f とおけば，$f(1)=1$ したがってすべての $\lambda\in\Lambda$ に対して $f(\lambda)=\lambda f(1)=\lambda$，すなわち

f は Λ の上では恒等写像をひき起す。かくて，Γ は Λ と f の核との直和になる．

定理 6 と 7 から直ちに，

定理 8. Γ が環，Λ がその unital な可換部分環で，Λ-左加群とみた Γ が有限生成且つ射影的ならば，Λ は Γ の Λ-直和因子である．

2. さて完全忠実加群に関する次の定理 [7, Lemma 3.3] は基本的である．

定理 9. Λ-左加群 P の自己準同型環を Γ とし，P を Γ-右加群とみる．しからば

(i) ${}_\Lambda P$ が完全忠実ならば P_Γ は有限生成且つ射影的であり，Λ は P_Γ の自己準同型環に一致する．

(ii) ${}_\Lambda P$ が有限生成且つ射影的ならば P_Γ は完全忠実である．

森田氏による (ii) の場合の証明は実は (i) の場合の証明法を適用することにより簡易化されるということを見るためもあって，ここに証明を述べてみよう．$f: {}_\Lambda P\to{}_\Lambda\Lambda$, $y\in P$ を任意にとり，$x\to f(x)y$ $(x\in P)$ なる写像を考えるに，これは明らかに ${}_\Lambda P$ の自己準同型である．すなわち Γ の一元 γ に一致する：$f(x)y=x\gamma$ $(\gamma\ni\Gamma)$．γ は勿論 (f 及び) y に依存して決るが，y が P の中を動くとき $y\to\gamma$ なる写像は P から Γ の中への Γ-準同型を与えることは見やすい．今この Γ-準同型を $\varphi: P_\Gamma\to\Gamma_\Gamma$ とおけば，$f(x)y=x\varphi(y)$ がすべての $x, y\in P$ に対して成り立つ．

さて，ここで ${}_\Lambda P$ は完全忠実と仮定する．しからば適当な $f_i: {}_\Lambda P\to{}_\Lambda\Lambda$ と $a_i\in P$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ をとれば $\sum_{i=1}^n f_i(a_i)=1$ であるが，上の意味で f_i に対応する準同型を $\varphi_i: P_\Gamma\to\Gamma_\Gamma$ とすれば，$f_i(x)y=x\varphi_i(y)$ がすべての $x, y\in P$ に対し，したがって特に $\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i(y)=\sum_{i=1}^n f_i(a_i)y=y$ がすべての $y\in P$ に対して成り立つが，これは P_Γ が有限生成且つ射影的であることを示す (Cartan-Eilenberg [5, VII, Prop. 3.1])．P_Γ の自己準同型 μ をとり，$\lambda=\sum_{i=1}^n f_i(\mu a_i)$ とおく．しからば $\lambda\in\Lambda$ であるが，すべての $y\in P$ に対して ($\varphi_i(y)\in\Gamma$ に注意すれば) $\lambda y=\sum_{i=1}^n f_i(\mu a_i)y=\sum_{i=1}^n(\mu a_i)\varphi_i(y)=\sum_{i=1}^n\mu(a_i\varphi_i(y))=\mu\sum_{i=1}^n a_i\varphi_i(y)=\mu y$ が成り立つが，これは $\lambda=\mu$ すなわち $\mu\in\Lambda$ なることを示す．かくて (i) が証明された．次に ${}_\Lambda P$ が有限生成且つ射影的と仮定する．しからば適当な $f_i: {}_\Lambda P\to{}_\Lambda\Lambda$, $a_i\in P$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ をとって $\sum_{i=1}^n f_i(x)a_i=x$ $(x\in P)$ が成り立つように出来るが，上と同様に f_i に対応する準同型を $\varphi_i: P_\Gamma\to\Gamma_\Gamma$ とすれば $f_i(x)a_i=x\varphi_i(a_i)$ が，したがって $x=\sum_{i=1}^n f_i(x)a_i=\sum_{i=1}^n x\varphi_i(a_i)=x\sum_{i=1}^n\varphi_i(a_i)$ がすべての $x\in P$ に対して成り立つ．これは $\sum_{i=1}^n\varphi_i(a_i)=1$ なること，したがって P_Γ が完全忠実であることを示す．かくて (ii) が証明された．

さて，定理 3, 4 及び 9 より直ちに次のことが知られる．

定理 10. Λ, Γ を二つの環，$P={}_\Lambda P_\Gamma$ を両側 Λ-Γ-加群とする．しからば次の条件は互に同値である：

(i) ${}_\Lambda P$, P_Γ はともに有限生成，射影的で，Γ, Λ が夫々の自己準同型環に一致する．

(ii) ${}_\Lambda P$ は有限生成，射影的且つ完全忠実で，Γ は ${}_\Lambda P$ の自己準同型環に一致する．

(iii) ${}_\Lambda P$ は有限生成，射影的且つ上半正則で，Γ は ${}_\Lambda P$ の自己準同型環に一致する．

(iv) P_Γ は有限生成，射影的且つ完全忠実で，Λ は P_Γ の自己準同型環に一致する．

(v) P_Γ は有限生成，射影的且つ上半正則で，Λ は P_Γ の自己準同型環に一致する．

${}_\Lambda P_\Gamma$ が定理 10 の同値な条件 (の何れか一つ) を満すとき，PF-型であるということにする．

さて ${}_\Lambda P_\Gamma$ を (必らずしも PF-型でない) 両側 Λ-Γ-加群とし，任意に Λ-左加群 ${}_\Lambda X$, Γ-左加群 ${}_\Gamma Y$ をとる．しからば $\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda X)$, $P\otimes_\Gamma Y$ は夫々自然的に Γ-左加群，Λ-左加群となるが，

更に夫々に対応する Λ-左加群 $P\otimes_\Gamma \mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda X)$, Γ-左加群 $\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda(P\otimes_\Gamma Y))$ を考える
に，$p\in P$, $f\in\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda X)$ ならばすべての $\gamma\in\Gamma$ に対して $(\gamma f)(p)=f(p\gamma)$ であること，及び
$p\in P$, $y\in Y$ ならばすべての $\lambda\in\Lambda$ に対し $\lambda(p\otimes y)=(\lambda p)\otimes y$ であることに注意すれば，$\sigma(p\otimes f)$
$=f(p)$ によって Λ-準同型

$$\sigma:\ {}_\Lambda(P\otimes_\Gamma \mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda X))\to{}_\Lambda X$$

の定義されること，及び $y\in Y$ を $p\to p\otimes y$ $(p\in P)$ なる Λ-準同型に対応させることによって Γ-
準同型

$$\tau:\ {}_\Gamma Y\to{}_\Gamma\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda(P\otimes_\Gamma Y))$$

の得られることが知られる．

定理 11. 両側 Λ-Γ-加群 ${}_\Lambda P_\Gamma$ が PF-型であるための必十条件はすべての Λ-左加群 ${}_\Lambda X$ と
すべての Γ-左加群 ${}_\Gamma Y$ に対して σ, τ がともに同型を与えることである：

$$\sigma:\ {}_\Lambda(P\otimes_\Gamma \mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda X))\cong{}_\Lambda X,\qquad \tau:\ {}_\Gamma Y\cong{}_\Gamma\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda(P\otimes_\Gamma Y)).$$

証明．必要条件の方は [7, Th. 3.4] で示されている．十分条件の方は [7, Th. 3.2] を使
うことによって [7, Th. 7.3] の証明の i) の部分と同様に出来るはずである．(そこでは Λ の極
小条件が仮定されているが，我々の定理 4 あるいは定理 10 によってこの仮定は不必要と思われ
る.) しかし以下に [7, Th. 3.2] を使わない直接的な方法で証明を述べてみよう．そのために，
すべての ${}_\Lambda X$, ${}_\Gamma Y$ に対し σ, τ が同型を与えると仮定する．今，$P^*=\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda\Lambda)$ とおけば P^*
$={}_\Gamma P^*_\Lambda$ とみられるが，$X=\Lambda$ なる場合として ${}_\Lambda(P\otimes_\Gamma P^*)_\Lambda\cong{}_\Lambda\Lambda_\Lambda$ であるが，この同型 σ は $\sigma(p\otimes f)$
$=f(p)$ $(p\in P, f\in P^*)$ によって与えられる．特に Λ の単位元 1 は $P\otimes_\Gamma P^*$ の元の σ による像に
なる，すなわち適当な $p_i\in P$ と $f_i\in P^*$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ をとれば $\sum_{i=1}^n f_i(p_i)=\sigma(\sum_{i=1}^n p_i\otimes f_i)=1$ とな
る．かくて ${}_\Lambda P$ は完全忠実である．次に $Y=\Gamma$ なる場合として，$\tau: {}_\Gamma\Gamma_\Gamma\cong{}_\Gamma\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda(P\otimes_\Gamma\Gamma))_\Gamma$
であるが，同型 τ は $\tau(\gamma)p=p\otimes\gamma$ $(p\in P, \gamma\in\Gamma)$ によって与えられる．しかるによく知られたよ
うに ${}_\Lambda(P\otimes_\Gamma\Gamma)_\Gamma\cong{}_\Lambda P_\Gamma$ であり，しかもその同型は $p\otimes\gamma\to p\gamma$ によって与えられる．したがって結
局 $\gamma\in\Gamma$ に $p\to p\gamma$ $(p\in P)$ なる ${}_\Lambda P$ の自己準同型を対応させることにより，${}_\Gamma\Gamma_\Gamma\cong{}_\Gamma\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda P)_\Gamma$
なること，すなわち Γ が ${}_\Lambda P$ の自己準同型環とみられることがわかった．さて，${}_\Lambda P$ は完全忠実
だから定理 1 により適当な正の整数 n をとれば P^n から Λ の上への Λ-準同型 φ が存在する．し
かも ${}_\Lambda\Lambda$ は射影的だから φ は split する，すなわち適当な $\varphi': {}_\Lambda\Lambda\to{}_\Lambda P^n$ をとれば $\varphi\circ\varphi'=1$ となる．
そこで (共変) 函手 $\mathrm{Hom}_\Lambda(P,\ )$ を考えれば，$\mathrm{Hom}_\Lambda(P, \varphi): {}_\Gamma\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda P^n)\to{}_\Gamma\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda\Lambda)=$
${}_\Gamma P^*$ も split する上への準同型である．なんとなれば，$\mathrm{Hom}_\Lambda(P, \varphi'): {}_\Gamma P^*\to{}_\Gamma\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda P^n)$ と
の積 $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, \varphi)\circ\mathrm{Hom}_\Lambda(P, \varphi')=\mathrm{Hom}_\Lambda(P, \varphi\circ\varphi')=\mathrm{Hom}_\Lambda(P, 1)=1$ だからである．これは ${}_\Gamma\mathrm{Hom}$
$({}_\Lambda P, {}_\Lambda P^n)$ が ${}_\Gamma P^*$ に同型な Γ-直和因子を有することを示すが，他方 ${}_\Gamma\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda P^n)\cong{}_\Gamma\mathrm{Hom}$
$({}_\Lambda P, {}_\Lambda P)^n\cong{}_\Gamma\Gamma^n$ であるから，${}_\Gamma P^*$ は ${}_\Gamma\Gamma^n$ の Γ-直和因子に同型，したがって有限生成且つ射影
的である．ここで ${}_\Gamma Y$ を既約 Γ-左加群と仮定する．しからば ${}_\Gamma Y\cong{}_\Gamma\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda(P\otimes_\Gamma Y))$ だから
$P\otimes_\Gamma Y\neq0$ である．それゆえ ${}_\Lambda\Lambda$ から ${}_\Lambda(P\otimes_\Gamma Y)$ の中への 0 でない準同型 h が存在する．h の核
を $\mathfrak{l}$ とすれば，$\mathfrak{l}$ は Λ の左イデアルで $\mathfrak{l}\neq\Lambda$，しかるに ${}_\Lambda P$ は完全忠実だから $f(P)\not\subset\mathfrak{l}$ すなわち
$h(f(P))\neq0$ なる如き $f\in P^*$ がある．そこで $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, h): {}_\Gamma P^*\to{}_\Gamma\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda(P\otimes_\Gamma Y))$ を考える
に，$\mathrm{Hom}_\Lambda(P, h)f=h\circ f\neq0$ だから $\mathrm{Hom}_\Lambda(P, h)$ であるが，${}_\Gamma Y\cong{}_\Gamma\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda(P\otimes_\Gamma Y))$ であるか
ら結局 ${}_\Gamma P^*$ から ${}_\Gamma Y$ の中への 0 でないしたがって ${}_\Gamma Y$ の上への準同型が存在することを知る．
かくて ${}_\Gamma P^*$ は上半正則である．それゆえ，${}_\Gamma P^*$ は完全忠実である (定理 4)．よって適当な正の

整数 m をとれば，${}_\Gamma(P^*)^m$ から ${}_\Gamma\Gamma$ の上への準同型 ψ が存在するが（定理 1)，${}_\Gamma\Gamma$ は射影的ゆえ ψ は split する，すなわち適当な $\psi': {}_\Gamma\Gamma\to{}_\Gamma(P^*)^m$ が存在して $\psi\circ\psi'=1$ となる．したがって，今度は（共変）函手 $P\otimes_\Gamma$ を考えることにより，$P\otimes_\Gamma\psi: {}_\Lambda(P\otimes_\Gamma(P^*)^m)\to{}_\Lambda(P\otimes_\Gamma\Gamma)$ もまた split するような上への準同型 (epimorphism) であることが，前の φ の場合と同様に証明出来る．しかるに，${}_\Lambda(P\otimes_\Gamma(P^*)^m)\cong{}_\Lambda(P\otimes_\Gamma P^*)^m$，${}_\Lambda(P\otimes_\Gamma P^*)\cong{}_\Lambda\Lambda$，${}_\Lambda(P\otimes_\Gamma\Gamma)\cong{}_\Lambda P$ だから，${}_\Lambda\Lambda^m$ から ${}_\Lambda P$ の上への split するような準同型が存在すること，すなわち ${}_\Lambda\Lambda^m$ が ${}_\Lambda P$ に同型な Λ-直和因子を有することが知られる．かくて ${}_\Lambda P$ は有限生成，射影的であり，したがって ${}_\Lambda P_\Gamma$ は定理 10 の (ii) を満すこと，すなわち PF-型 であることが証された．

さて一般に両側 Λ-Γ-加群 ${}_\Lambda P_\Gamma$，Λ-左加群 ${}_\Lambda X$，Γ-左加群 ${}_\Gamma Y$ があり，P の元 p，Y の元 y に対して積 py が X の元として定義され，それが次の四条件を満足するものとする：

(1) py は双線型である，すなわち $p, p'\in P$，$y, y'\in Y$ に対し $(p+p')y=py+p'y$，$p(y+y')=py+py'$ が成り立つ．

(2) すべての $\lambda\in\Lambda$，$\gamma\in\Gamma$ 及び $p\in P$，$y\in Y$ に対し $\lambda(py)=(\lambda p)y$，$(p\gamma)y=p(\gamma y)$ が成り立つ．

(3) すべての $p\in P$ に対し $py=0$ なる如き $y\in Y$ は $y=0$ に限る．

(4) $X=PY$ である，すなわち X の各元は $py(p\in P,\ y\in Y)$ なる形の元の有限和として表わされる．

しかるとき，${}_\Lambda X$ と ${}_\Gamma Y$ とは ${}_\Lambda P_\Gamma$（及びこの乗法）に関して平行対 (parallel pair) を作るという．

${}_\Lambda P_\Gamma$ が PF-型 なるとき，任意の ${}_\Lambda X$ に対して ${}_\Gamma Y=\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda X)$ とおけば，$p\in P$，$y\in Y$ に対して $py=y(p)$ とおくことにより，また任意の ${}_\Gamma Y$ に対して ${}_\Lambda X=P\otimes_\Gamma Y$ とおけば，$p\in P$，$y\in Y$ に対して $py=p\otimes y$ とおくことにより夫々 ${}_\Lambda X$ と ${}_\Gamma Y$ とが平行対を作ることは定理 11 の必要条件から知られるが，逆に

定理 12. ${}_\Lambda X$ と ${}_\Gamma Y$ とが PF-型 の ${}_\Lambda P_\Gamma$ に関して平行対を作るならば，${}_\Lambda(P\otimes_\Gamma Y)\cong{}_\Lambda X$，${}_\Gamma Y\cong{}_\Gamma\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda X)$ である．しかもこの同型は夫々 $p\otimes y$ に py を対応させること，y に $p\to py$ なる Λ-準同型：${}_\Lambda P\to{}_\Lambda X$ を対応させることによって得られる．更に，X の Λ-部分加群 X_0 と Y の Γ-部分加群 Y_0 との間に，$X_0=PY_0$，$Y_0=\{y\in Y;Py\subseteq X_0\}$ なる関係による一対一の対応があり，しかもこの場合 ${}_\Lambda X_0$ と ${}_\Gamma Y_0$，${}_\Lambda(X/X_0)$ と ${}_\Gamma(Y/Y_0)$ とがともに平行対を作る．

証明．上の平行対の条件 (1), (2) は，$p\otimes y$ に py を対応させることによって Λ-準同型 $\varphi: {}_\Lambda(P\otimes_\Gamma Y)\to{}_\Lambda X$ が定義されること，及び $y\in Y$ に $p\to py$ なる Λ-準同型 を対応させることによって Γ-準同型 $\psi; {}_\Gamma Y\to{}_\Gamma\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda X)$ が定義されることを示しているが，更に条件 (3), (4) は夫々 ψ, φ が monomorphism, epimorphism であることを示す．しかるに ${}_\Lambda P_\Gamma$ は PF-型 だから P_Γ，${}_\Lambda P$ はともに射影的，したがって $P\otimes_\Gamma\psi: {}_\Lambda(P\otimes_\Gamma Y)\to{}_\Lambda(P\otimes_\Gamma\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda X)$，$\mathrm{Hom}_\Lambda(P, \varphi): {}_\Gamma\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda(P\otimes_\Gamma Y))\to{}_\Gamma\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda X)$ は夫々 monomorphism, epimorphism である．それゆえ，夫々と同型 σ, τ との積 $\sigma\circ(P\otimes_\Gamma\psi): {}_\Lambda(P\otimes_\Gamma Y)\to{}_\Lambda X$，$\mathrm{Hom}_\Lambda(P, \varphi)\circ\tau: {}_\Gamma Y\to{}_\Gamma\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda X)$ もまた夫々 monomorphism, epimorphism となる．しかるに実は $\sigma\circ(P\otimes_\Gamma\psi)=\varphi$，$\mathrm{Hom}_\Lambda(P, \varphi)\circ\tau=\psi$ である．なんとなれば，すべての $p\in P$，$y\in Y$ に対して $(\sigma\circ(P\otimes_\Gamma\psi))(p\otimes y)=\sigma(p\otimes\psi(y))=\psi(y)(p)=py$ であることは前者を，$(\mathrm{Hom}_\Lambda(P, \varphi)\circ\tau)(y)=\mathrm{Hom}_\Lambda(P, \varphi)(\tau(y))=\varphi\circ\tau(y)$ したがって $((\mathrm{Hom}_\Lambda(P, \varphi)\circ\tau)(y))p=\varphi(\tau(y)p)=\varphi(p\otimes y)=py$ は後者を意味するからである．かくて φ, ψ がともに同型 (isomorphism) であることが知られた．

Y_0 を Y の任意の Γ-部分加群とする．$X_0=PY_0(=\sum_{y_0\in Y_0}Py_0)$ とおけば X_0 は X の Λ-部分加

群となるが，明らかに ${}_\Lambda X_0$ と ${}_\Gamma Y_0$ とは ${}_\Lambda P_\Gamma$ に関して平行対を作る．今 $Py\subseteq X_0$ なる $y\in Y$ をとる．しからば $p\to py\ (p\in P)$ なる写像は ${}_\Lambda P$ から ${}_\Lambda X_0$ の中への準同型であるから，適当な $y_0\in Y_0$ によって与えられる，すなわちすべての $p\in P$ に対し $py=py_0$ したがって $p(y-y_0)=0$ であるが条件(3)により $y-y_0=0$，$y=y_0\in Y_0$ が知られる．かくて，$Y_0=\{y\in Y;Py\subseteq X_0\}$ である．

次に X_0 を X の任意の Λ-部分加群とする．${}_\Lambda P_\Gamma$ は PF-型 だから，${}_\Lambda(P\otimes_\Gamma\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda X_0)\cong{}_\Lambda X_0$ であり（定理 11)，しかもその同型 σ が $\sigma(p\otimes f)=f(p)\,(p\in P, f\in\mathrm{Hom}({}_\Lambda P, {}_\Lambda X_0))$ によって得られる．よって $X_0=\sum_{f: {}_\Lambda P\to{}_\Lambda X_0}f(P)$ であるが，$f: {}_\Lambda P\to{}_\Lambda X_0$ は勿論 ${}_\Lambda P$ から ${}_\Lambda X$ の中への準同型であるから適当な $y\in Y$ によって与えられる：$f(p)=py(p\in P)$．特に $Py=f(P)\subseteq X_0$ であるから，結局 $X_0=\sum_{Py\subseteq X_0}Py$ となる．これすなわち $Y_0=\{y\in Y;Py\subseteq X_0\}$ とおけば $X_0=PY_0$ であることを意味する．Y_0 が Γ-部分加群であることは条件 (1), (2) から直ちに知られる．かくて X の Λ-部分加群と Y の Γ-部分加群とが一対一に対応することが証された．今 X_0 と Y_0 とが対応しているとする．Y の元 y, y' が $y\equiv y'\ (\mathrm{mod}\ Y_0)$ すなわち $y-y'\in Y_0$ であるならば，P の各元 p に対し $py-py'=p(y-y')\in PY_0=X_0$ すなわち $py\equiv py'\ (\mathrm{mod}\ X_0)$ であるが，これは $p\in P$ と剰余類 $y+Y_0(\in Y/Y_0)$ との積を $py+X_0(\in X/X_0)$ として一意的に定義出来ることを示す．しかもこの乗法に関して ${}_\Lambda(X/X_0)$ と ${}_\Gamma(Y/Y_0)$ とが平行対を作ることは容易に見られる．

系．${}_\Lambda P_\Gamma$ が PF-型 ならば P の Λ-部分加群 P_0 と Γ の左イデアル $\mathfrak{l}$ との間に $P_0=P\mathfrak{l}$，$\mathfrak{l}=\{\gamma\in\Gamma;P\gamma\subseteq P_0\}$ なる関係による一対一対応が存在する．

証明．${}_\Lambda P$ と ${}_\Gamma\Gamma$ は明らかに ${}_\Lambda P_\Gamma$ に関して平行対を作るから，定理 12 により直ちに知られる．

定理 13. ${}_\Lambda P_\Gamma$ が PF-型 ならば Λ の両側イデアル $\mathfrak{a}$，P の Λ-Γ-部分加群 P_0，Γ の両側イデアル $\mathfrak{b}$ の間に $P_0=\mathfrak{a}P=P\mathfrak{b}$，$\mathfrak{a}=\{\lambda\in\Lambda;\lambda P\subseteq P_0\}$，$\mathfrak{b}=\{\gamma\in\Gamma;P\gamma\subseteq P_0\}$ なる関係による一対一対応が存在する．しかもの場合，P/P_0 は PF-型 $\Lambda/\mathfrak{a}$-$\Gamma/\mathfrak{b}$-両側加群と考えられる．

証明．P_0 を P の Λ-Γ-部分加群とし，$\mathfrak{b}=\{\gamma\in\Gamma;P\gamma\subseteq P_0\}$ とおけば $\mathfrak{b}$ は Γ の両側イデアルであるが，上の系により $P_0=P\mathfrak{b}$ となる．逆に $\mathfrak{b}$ を Γ の任意の両側イデアルとし，$P_0=P\mathfrak{b}$ とおけば P_0 は Λ-Γ-部分加群であるが，上の系により $\mathfrak{b}=\{\gamma\in\Gamma;P\gamma\subseteq P_0\}$ である．しかるに PF-型 という概念は左右対称であるから，全く同様な関係が P の Λ-Γ-部分加群 P_0 と Λ の両側イデアル $\mathfrak{a}$ との間に成り立つ．さて，$\mathfrak{a}P=P_0=P\mathfrak{b}$ であるから P/P_0 は自然的に $\Lambda/\mathfrak{a}$-$\Gamma/\mathfrak{b}$-両側加群とみられるが，${}_\Lambda P$ が有限生成的，射影的だから $\Lambda/\mathfrak{a}$-左加群 P/P_0 も有限生成的，射影的であることは容易に知られる．また $P\gamma\subseteq P_0$，$\gamma\in\Gamma$ は $\gamma\in\mathfrak{b}$ を意味するから，P/P_0 は $\Gamma/\mathfrak{b}$-右加群として忠実であるが，実は $\Gamma/\mathfrak{b}$ は P/P_0 の $\Lambda/\mathfrak{a}$-すなわち Λ-自己準同型環とみられる．なんとなれば，f を任意の ${}_\Lambda(P/P_0)$ の自己準同型とし，φ を ${}_\Lambda P_\Gamma$ から ${}_\Lambda(P/P_0)_\Gamma$ の上への自然準同型とすれば，$f\circ\varphi: {}_\Lambda P\to{}_\Lambda(P/P_0)$ であり，${}_\Lambda P$ が射影的であることから，${}_\Lambda P$ の適当な自己準同型すなわち，適当な Γ の元 γ をとれば $f\circ\varphi=\varphi\circ\gamma$ となるが，このことはすべての $p\in P$ に対して $f(\varphi(p))=(\varphi(p\gamma))=\varphi(p)\gamma$ であることを示す．p がすべての P の元を動けば $\varphi(p)$ はすべての P/P_0 の剰余類を動くことから f は γ の右乗によって得られること，すなわち f が γ の $\mathrm{mod}\ \mathfrak{b}$ の剰余類 $(\in\Gamma/\mathfrak{b})$ に一致することが知られる．以上のことは $\Gamma/\mathfrak{b}$-右加群 P/P_0 に対しても全く同様に成り立つ故，P/P_0 は PF-型 である．

注意． 定理 10（の (iii) と (v) との同値性）と入射的加群に関する次の Morita [7, Th. 6.3] あるいは Azumaya [3, Th. 6] との類似性は興味ある事実であろう．

両側 Λ-Γ-加群 ${}_\Lambda Q_\Gamma$ に対して次の条件は同値である：

(i) Λ は左イデアルに関する極小条件を満足し，${}_\Lambda Q$ は有限生成，入射的且つ下半正則で，Γ は ${}_\Lambda Q$ の自己準同型環に一致する．

(ii) Γ は右イデアルに関する極小条件を満足し，Q_Γ は有限生成，入射的且つ下半正則で，Λ は Q_Γ の自己準同型環に一致する．

但し，ここで Λ 及び Γ の極小条件は本質的に必要であり，射影的加群と入射的加群との著しい差違の一つを示している．このような加群 ${}_\Lambda Q_\Gamma$ を QF-型 と呼ぶことにすれば，PF-型 加群に対する定理 11 (同型定理) に対応して，次の QF-型 加群に対する双対定理 ([7, Th. 6. 3], [3, Ths. 8, 9]) が成り立つ．

${}_\Lambda Q_\Gamma$ が QF-型 であるための必十条件はすべての有限 Λ-左加群 ${}_\Lambda X$ 及びすべての有限 Γ-右加群 Y_Γ に対して ${}_\Lambda\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}({}_\Lambda X, {}_\Lambda Q)_\Gamma, Q_\Gamma) \cong {}_\Lambda X$, $\mathrm{Hom}({}_\Lambda\mathrm{Hom}(Y_\Gamma, Q_\Gamma), {}_\Lambda Q)_\Gamma \cong Y_\Gamma$ なることである．

なお，完全忠実な加群や定理 11 に関連して Auslander-Goldman [2] の Appendix, Bass [4] 及び Garbiel [5] の Chap. V を参照されたい．

文 献

[1] M. Auslander and O. Goldman, Maximal orders, Trans. Amer. Math Soc., 97 (1960), 1–24.

[2] M. Auslander and O. Goldman, The Brauer group of a commutative ring, Trans. Amer. Math. Soc., 97 (1960), 367–409.

[3] G. Azumaya, A duality theory for injective modules, Amer. J. Math., 81 (1959), 249–278.

[4] H. Bass, The Morita theorems, mineographical note.

[5] H. Cartan and S. Eilenberg, Homological algebra, Princeton, 1956.

[6] P. Gabriel, Des categories abeliennes, Bull. Soc. Math. France, 90 (1962), 323–448.

[7] K. Morita, Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition, Sci. Rep. of Tokyo Kyoiku Daigaku, Sec. A, 6 (1958), 83–142.

[8] T. Nakayama, On a generalized notion of Galois extensions of a ring, Osaka Math. J., 15 (1963), 11–23.

[9] 中山正–東屋五郎，代数学 II，岩波書店，1954.

$h: X \to Y$

P generator $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Hom}(P, h): \mathrm{Hom}(P, X) \to \mathrm{Hom}(P, Y)$ 1-1

(i.e. $\mathrm{Hom}(P, h) = 0$ ~~for all~~ $\Rightarrow h = 0$ for any X, Y and $h: X \to Y$)

Separable algebra の Galois の理論

神 崎 熙 夫 (大阪学芸大学)

単位元を有し，必らずしも可換でない環を考える．部分環は常に共通単位元を有するものを意味する．環 Λ の有限 (環) 自己同型群 G に対し，自明な因子団をもつ Λ と G との接合積 $\Delta(\Lambda, G)$ を考える：$\Delta = \Delta(\Lambda, G) = \sum_{\sigma\in G} \oplus \Lambda u_\sigma$, ただし $\{u_\sigma | \sigma \in G\}$ は $\Delta(\Lambda, G)$ の Λ-自由基で，$u_\sigma u_\tau = u_{\sigma\tau}$, $u_\sigma \lambda = \sigma(\lambda) u_\sigma$ $(\lambda \in \Lambda)$, u_1 は $\Delta(\Lambda, G)$ の単位元と見る．このとき，

$$\sum \lambda_\sigma u_\sigma \cdot x = \sum \lambda_\sigma \sigma(x) \quad (\sum \lambda_\sigma u_\sigma \in \Delta,\ x \in \Lambda)$$

と定義して Λ を Δ-左加群と見る．一方 Λ の部分環 Γ に対し Λ の元に Γ の元を右から乗ずることにより Λ を Γ-右加群と見る．特に，Γ の元が G に属する各写像で不変ならば，Λ は Δ-Γ-両側加群となる．

Auslander-Goldman は [1] において可換環のガロア拡大を定義したが，その定義を非可換の場合に迄拡張する。即ち，環 Λ 及びその部分環 Γ に対し次の条件をみたす Λ の有限自己同型群 G が存在するとき Λ/Γ は <u>G-ガロア拡大</u> であると云う：

(1) $\Gamma = \Lambda^G = \{\lambda \in \Lambda | \forall \sigma \in G,\ \sigma(\lambda) = \lambda\}$.

(2) Λ は Γ-右加群として有限生成射影的．

(3) Λ は $\Delta(\Lambda, G)$-左加群として忠実で，$\Delta(\Lambda, G)$ は $\mathrm{Hom}^r_\Gamma(\Lambda, \Lambda)$ と一致する．

補題 1. Λ/Γ が G-ガロアであるためには次の二つの条件が満されることが必要かつ十分である：

(I) $\mathrm{Hom}^l_\Delta(\Lambda, \Lambda) = \Gamma$, $(\Delta = \Delta(\Lambda, G) = \sum_{\sigma\in G} \oplus \Lambda u_\sigma)$.

(II) $\Lambda u \Lambda = \Delta(\Lambda, G)$, $(u = \sum_{\sigma\in G} u_\sigma)$.

証明．(1)$\Longleftrightarrow$(I) は明らか，よって (I) の仮定の下で，(2), (3)$\Longleftrightarrow$(II) を示す．Δ-左加群 Λ に対し [2, Theorem A. 2] 及び [2, Proposition A. 3] を適用し，(2), (3)$\Longleftrightarrow \mathrm{Im}(\tau) = \Delta$ を知る，ここに

$$\tau:\ \Lambda \otimes_\Gamma \mathrm{Hom}_\Delta(\Lambda, \Delta) \to \Delta,\ \tau(\lambda \otimes f) = f(\lambda).$$

ところが，$\mathrm{Hom}_\Delta(\Lambda, \Delta)$ は $u\Lambda$ の元の右乗による写像の全体と一致するから $\mathrm{Im}(\tau) = \Lambda u \Lambda$. 故に，(2), (3)$\Longleftrightarrow$(II).

注意． 条件 (II) は次の条件 (II′) と同値である：

$$\text{(II}'\text{)} \quad \sum_{i=1}^{r} x_i \sigma(y_i) = \begin{cases} 1 & (\sigma = 1) \\ 0 & (\sigma \neq 1) \end{cases}$$

なる如き Λ の元 $x_1, x_2 \cdots, x_r, y_1, \cdots, y_r$ が存在する．

証明．$\Lambda u \Lambda$ は $\Delta(\Lambda, G)$ の両側イデアルをなすから，$\Lambda u \Lambda = \Delta(\Lambda, G) \Longleftrightarrow \Lambda u \Lambda \ni 1\ (= u)_1 \Longleftrightarrow 1 = \sum_{i=1}^{r} x_i u y_i = \sum_{\sigma\in G} \sum_{i=1}^{r} x_i \sigma(y_i) u_\sigma \Longleftrightarrow$(II′).

次の定理は (I), (II′) より明らかである．

定理 1. Λ/Γ が G-ガロア拡大のときの，G 部分群 H に対して Λ/Λ^H は H-ガロア拡大．

Λ の自己同型群が Λ の中心 C にも忠実に作用するとき $(G|C \cong G)$, G を Λ の外部自己同型

群とよぶことにする．しかるとき，次の定理も又(I), (II′)から明らかである．

定理 2. G を Λ の有限外部自己同型群とする。C/C^G が G-ガロア拡大ならば Λ/Λ^G も G-ガロア拡大である．

Λ を可換環 R 上の多元環，Λ^0 を Λ に逆同型な R-多元環とする $(\Lambda\in\lambda\leftrightarrow\lambda^0\in\Lambda^0)$． $x\otimes y^0\in\Lambda^e=\Lambda\otimes_R\Lambda^0$, $\lambda\in\Lambda$ に対し，$x\otimes y^0\cdot\lambda=x\lambda y$ と定義することにより Λ は Λ^e-左加群と考えられる．Λ が Λ^e-射影的なとき Λ は R 上の分離的多元環とよばれる．

補題 2. Λ を R 上の分離的多元環，M を忠実な有限生成射影的 Λ-加群とする．しかるとき，$\Omega=\mathrm{Hom}_\Lambda(M, M)$ は又 R 上の分離的多元環で M は有限生成射影的 Ω-加群となり $\mathrm{Hom}_\Omega(M, M)=\Lambda$ が成り立つ．

証明．Λ はその中心 C 上分離的かつ射影的だから，M は C-射影的，よって $\mathrm{Hom}_C(M, M)$ は C を中心とし C 上分離的．ここで $\Lambda\subset\mathrm{Hom}_C(M, M)$ に [1, Theorem 3. 3] を適用すれば，$V_{\mathrm{Hom}_C(M,M)}(\Lambda)=\mathrm{Hom}_\Lambda(M, M)=\Omega$ は又 C 上分離的で $\mathrm{Hom}_\Omega(M, M)=\Lambda$ となることを知る．従って，Ω は R 上分離的で M は Ω-射影的となる．([3, Theorem 1] 参照.)

補題 3. Λ をその中心 R 上の分離的多元環，Γ を R 上分離的な Λ の部分多元環とする．このとき，$V_\Lambda(\Gamma)$ は又 R 上の分離的多元環で $V_\Lambda(V_\Lambda(\Gamma))=\Gamma$ が成り立つ．

証明．Λ は有限生成射影的 R-加群ゆえ $\Gamma\otimes_R\Lambda^0$ は $\Lambda^e=\Lambda\otimes_R\Lambda^0$ の部分環であるが，Λ および Λ^0 も Λ^e の部分環と見られる．よって，$V_{\Lambda^e}(\Lambda^0)=\Lambda$ したがって $V_{\Lambda^e}(\Gamma\otimes_R\Lambda^0)=V_\Lambda(\Gamma)$．故に，$\Lambda^e(\cong\mathrm{Hom}_R(\Lambda, \Lambda))$ の R 上分離的な部分多元環 $\Gamma\otimes_R\Lambda^0$ について $V_{\Lambda^e}(\Gamma\otimes_R\Lambda^0)$ が R 上分離的であること及び $V_{\Lambda^e}(V_{\Lambda^e}(\Gamma\otimes_R\Lambda^0))=\Gamma\otimes_R\Lambda^0$ の成立を示せばよい．今一般に，有限生成射影的 R-加群 M を考え $\Lambda=\mathrm{Hom}_R(M, M)$ とおいてその R 上分離的な部分多元環 Γ に対して補題を証明する．$V_\Lambda(\Gamma)=\mathrm{Hom}_\Gamma(M, M)$ だから $V_\Lambda(\Gamma)$ は R 上分離的 (補題 2)，一方 Γ の中心を S とすれば，$V_\Lambda(\Gamma)=\mathrm{Hom}_\Gamma(M, M)=V_{\mathrm{Hom}_S(M,M)}(\Gamma)$ で S は $V_\Lambda(\Gamma)$ の中心に含まれるから $V_\Lambda(V_\Lambda(\Gamma))=\mathrm{Hom}_{V_\Lambda(\Gamma)}(M, M)=V_{\mathrm{Hom}_S(M,M)}(V_\Lambda(\Gamma))=V_{\mathrm{Hom}_S(M,M)}(V_{\mathrm{Hom}_S(M,M)}(\Gamma))=\Gamma$． ([3, Theorem 2] 参照.)

定理 3. Λ を可換環 R 上の多元環，Γ をその R-部分多元環とする．Λ/Γ が G-ガロア拡大で Γ が R 上分離的ならば，G の任意の部分群 H に対して Λ^H は又 R 上分離的である．

証明．Γ-右加群 Λ は有限生成射影的で $\mathrm{Hom}_\Gamma^r(\Lambda, \Lambda)=\Delta(\Lambda, G)$ だから，Γ の R-分離性より，$\Delta(\Lambda, G)$ も R-分離的で Λ は有限生成射影的 $\Delta(\Lambda, G)$-加群となる．一方，G の H を法とする右及び左剰余類分解を

$G=\sigma'_1H+\sigma'_2H+\cdots+\sigma'_rH=H\sigma_1+H\sigma_2+\cdots+H\sigma_r(\sigma_1=\sigma'_1=1)$ とすれば

$$\Delta(\Lambda, G)=\Delta(\Lambda, H)\oplus\sum_{i=2}^{r}\Delta(\Lambda, H)u_{\sigma_i},$$

$$\sum_{i=2}^{r}\Delta(\Lambda, H)u_{\sigma_i}=\sum_{i=2}^{r}u_{\sigma'_i}\Delta(\Lambda, H).$$

よって，

$$\Delta(\Lambda, G)^e=\Delta(\Lambda, G)\otimes_R\Delta(\Lambda, G)^0=\sum_{i,j}\oplus\Delta(\Lambda, H)^e u_{\sigma_i}\otimes u^0_{\sigma'_j}.$$

故に，$\Delta(\Lambda, G)$ したがって $\Delta(\Lambda, H)$ は $\Delta(\Lambda, H)^e$-射影的となり R 上分離的，更に，Λ は有限生成射影的 $\Delta(\Lambda, H)$-加群となるから $\mathrm{Hom}_{\Delta(\Lambda,H)}(\Lambda, \Lambda)=\Lambda^H$ は R 上分離的 (補題 2).

補題 4. G を中心が C なる環の有限外部自己同型群とする．C/C^G が G-ガロア拡大ならば $\Delta=\Delta(\Lambda, G)$ は $R=C^G$ 上分離的，したがって $\Gamma=\Lambda^G$ も R 上分離的である．

証明．写像 $\varphi:\Delta^e\to\Delta\,(\varphi(x\otimes y^0)=xy)$ の核の右零化イデアルを A としたとき $\varphi(A)$ が 1 を含むことを示せば Δ は R 上分離的になる [1, Proposition 1. 1]．$\varphi:\Lambda^e\to\Lambda$ の核の右零化イデアルを A とすれば，計算により $A\supset\{\sum_{\sigma\in G}(\sigma\times\sigma)\,a\cdot u_\sigma\otimes u^0_{\sigma^{-1}}|a\in A\}$ を得，ここに $(\sigma\times\tau)(\lambda_1\otimes\lambda_2^0)=\sigma(\lambda_1)\otimes\tau(\lambda_2)^0$ と定義する．よって $\varphi(A)\supset\{\varphi(\sum_{\sigma\in G}(\sigma\times\sigma)a.\ u_\sigma\otimes u^0_{\sigma^{-1}})|a\in A\}=\{\sum_\sigma\sigma\varphi(a)|a\in A\}=\{\sum_\sigma\sigma(x)|x\in\varphi(A)=C\}$．$\sum_\sigma\sigma(x)=1$ なる $x\in C$ が存在するから [1, Proposition 4. 4]，$\varphi(A)$ は 1 を含み，したがって Δ は R 上分離的，一方，Λ は R-射影的であることより Δ-射影的となり，$\mathrm{Hom}_\Delta(\Lambda, \Lambda)=\Gamma$ は R 上分離的となる (補題 2)．([3, Theorem 4] 参照.)

主定理を証明するため [4] で与えられた次の補題を引用しよう．

補題 5. (Chase-Harrison-Rosenberg). C は直既約な可換環とする．C/R が G-ガロア拡大であるとき，C/R の中間環 S が G のある部分群 H に対して C^H と一致するための必要十分条件は S が R 上分離的になることである．

定理 4. G をその中心 C 上分離的な多元環 Λ の有限外部的自己同型群とし，$R=C^G$, $\Gamma=\Lambda^G$ とおく．C/R が G-ガロア拡大ならば，次の事柄が成立する．

1) Λ/Γ は G-ガロア拡大で，Γ は R 上分離的．

2) G の任意の部分群 H に対し，Λ^H は R 上分離的で Λ/Λ^H は H-ガロア拡大．

3) 特に C が直既約な場合には，任意の R 上分離的な Λ/Γ の中間多元環 Ω は G の適当な部分群 H に対して Λ^H と一致し，G の任意の部分群 H は，$\{\sigma\in G|\forall x\in\Lambda^H, \sigma(x)=x\}$ に一致する．

証明．1) は補題 2, 4 により，2) は定理 1, 3 による．以下においては 3) を証明する．$\Delta=\Delta(\Lambda, G)$ は R を中心とし R 上分離的．故に $V_\Delta(V_\Delta(\Omega))=\Omega$ で $T=V_\Delta(\Omega)$ は R 上分離的．一方，$V_\Delta(\Lambda)=C$, $V_\Delta(\Gamma)=\Delta(C, G)$ となるから，$R\subset C\subset T\subset\Delta(C, G)$．$\Delta(C, G)$ は R を中心とし R 上分離的ゆえ $V_{\Delta(C,G)}(T)$ は，又 R 上分離的で $V_{\Delta(C,G)}(V_{\Delta(C,G)}(T))=T$．$S=V_{\Delta(C,G)}(T)$ とおけば，$V_{\Delta(C,G)}(C)=C$ と $V_{\Delta(C,G)}(\Delta(C, G))=R$ とから $R\subset S\subset C$．故に，補題 5 により，G のある部分群 H に対して C/S は H-ガロア拡大，したがって $\Delta(C, H)=\mathrm{Hom}_S(C, C)=V_{\mathrm{Hom}_R(C,C)}(S)=V_{\Delta(C,G)}(S)=T$．これより，$\Omega=V_\Delta(T)=V_\Delta(\Delta(C, H))=\Lambda^H$．さて，次に G の任意の部分群 H を考えよう．$\bar{H}=\{\sigma\in G, \forall x\in\Lambda^H, \sigma(x)=\sigma\}$ とおけば，$\bar{H}\supset H$, $\Lambda^{\bar{H}}=\Lambda^H(=\Gamma'$ とおく)．よって，2) により，Λ/Γ' は H-ガロア且つ $\bar{H}$-ガロア拡大となるから $\Delta(\Lambda, H)=\Delta(\Lambda, \bar{H})$，したがって $H=\bar{H}$．

注意． 定理 4 により，C が直既約ならば，R 上分離的な Λ/Γ の中間多元環と G の部分群との間に 1 対 1 ガロア対応がつけられる．しかしながら，C が直既約でなければ，一般にかかる対応は成立たない．実際に G-ガロア拡大 C/R で R が代数的閉体，G が巡回群なる場合が考えられる．C は R 上分離的だから $C=Re_1\oplus Re_2\oplus\cdots\oplus Re_n$，ここに $n=|G|$ で $e_1,\cdots, e_n$ は互に直交し $\sum_{i=1}^{n}e_i=1$ をみたす巾等元とする．したがって R 上分離的な C の部分多元環は $Re'_1\oplus Re'_2\oplus\cdots\oplus Re'_r$ なる形のものである，ここに $e'_1,\cdots, e'_r$ は $\{e_1,\cdots, e_n\}$ を r 個の互に素な部分集合に分割し，その各部分集合の和として与えられる．明らかに，かかる形をした部分多元環の個数は 2^{n-1} を下らない．一方，G の部分群の個数は $n-1$ を超えないから ($n>2$ である限り) 一対一ガロア対応は存在しない．

文　献

[1] M. Auslander and O. Goldman, The Brauer group of a commutative ring, Trans. Amer. Math. Soc., 97 (1960), 367–409.
[2] M. Auslander and O. Goldman, Maximal order, Trans. Amer. Math. Soc., 97 (1960), 1–24.
[3] T. Kanzaki, On commuter rings and Galois theory of separable algebras, Osaka J. Math., 1 (1964), 103–115.
[4] S. U. Chase, D. K. Harrison and A. Rosenberg, Galois theory and Galois cohomology of commutative rings, Memoirs Amer. Math. Soc., No. 52 (1965), 15–33.

QF–3 algebra の dominant dimension

太刀川弘幸　(京都工芸繊維大学)

まず表題の説明から始めます．これから取扱う多元環はごく当り前の古典的なもの，すなわち単位元を持ち，可換体上有限次元の多元環に限ります．最近，基礎体と次元の有限性をゆるめる傾向がありますが，問題の所在を明らかにするため，ここではそれを行ないません．QF–3 多元環は準フロベニウス多元環の一般化として R. M. Thrall 氏によって次の如く定義されました：

定義． A を体 F 上の多元環とする．任意の忠実な A の (F における) 表現が直和因子として必ず一つの特定な忠実表現を含むとき，A は QF–3 であるという．そして，この特定な忠実表現を特定最小忠実表現 (unique minimal faithful representation) と呼ぶ．

一般に多元環は第一正則表現と第二正則表現をもつ．第一正則表現は A そのものを表現加群とし，第二正則表現は A の双対加群を表現加群とする．したがって，A が QF–3 であれば，特定最小忠実表現の表現加群は射影的 (projective) 且つ入射的 (injective) であるといえます．逆に，U を一つの射影的且つ入射的，忠実な A-加群とします．直和因子の mulitplicity は忠実性に関係はないので，忠実な A-加群 U_0 を次の如くとることが出来ます：

$U\approx U_0\oplus U'$, $U_0\approx\oplus\sum_{\lambda\in\Lambda} Ae_\lambda$, $Ae_\lambda\not\approx Ae_\mu\,(\lambda\neq\mu)$, ここで e_λ, e_μ は A の原子巾等元とする．

今，x は Ae_λ の socle に属する元とすれば，Ae_λ は入射的でもあるからその socle は simple で Ax そのものが Ae_λ の socle となる．さてここで任意に一つの忠実 A-加群 W をとってみる．W の忠実性より，W の元 w が存在して $xw\neq 0$，そして $ax\to axw$ によって定義される準同型：$Ae_\lambda\to W$ は monomorphism となり，Ae_λ が入射的であることから W は分裂して $W=W_\lambda\oplus W'_\lambda$, $W_\lambda\approx Ae_\lambda$ となる．又 Ae_λ, $Ae_\mu\,(\lambda,\ \mu\in\Lambda)$ は入射的ゆえ $Ae_\lambda\not\approx Ae_\mu$ から [Ae_λ の socle]$\not\approx$[Ae_μ の socle] が得られ，W の忠実性より同様にして，W'_λ が Ae_μ と同型な直和因子を持つことになる．したがって，帰納法により，W の直和分離 $W=W_0\oplus W'$, $W_0\approx U_0$ を得ます．すなわち，U_0 は特定最小表現の表現加群ということになって，次の補題が得られます．

補題． A が QF–3 多元環であるための必十条件は，射影的且つ入射的な忠実 A-加群が存在することである．

さて準フロベニウス多元環は QF–3 であるが，理解を深めるため，準フロベニウスでない QF–3 多元環の例をあげておきます．それは一般単列多元環と称されるものです．すなわち，e_λ を任意の原子巾等元とするとき，イデアルの組成列

$$Ae_\lambda\supset Ne_\lambda\supset N^2e_\lambda\supset\cdots\cdots\supset N^\rho e_\lambda\supset N^{\rho+1}e_\lambda=0,$$
$$e_\lambda A\supset e_\lambda N\supset e_\lambda N^2\supset\cdots\cdots\supset e_\lambda N^\rho\supset e_\lambda N^{\rho+1}=0$$

が夫々一意的である場合です．実際に A が QF–3 であることは次の如くして知られます．上列において，$N^\rho e_\lambda$ は simple ゆえ，適当な原子巾等元 e_κ が存在して $N^\rho e_\lambda\approx Ae_\kappa/Ne_\kappa$ となる．したがって，$Ae_\lambda^*=\mathrm{Hom}_K(Ae_\lambda,\ K)$ は $e_\kappa A$ の準同型像となり，全く同様に，$e_\kappa A^*$ は適当な原子巾等元 e_μ に対して Ae_μ の準同型像となることが知られます．すなわち，$Ae_\mu\xrightarrow{\theta}e_\kappa A^*\longrightarrow 0$ は完全列としてよろしい．しかし，Ae_λ は $e_\kappa A^*$ の部分加群 S に同型だから，$Q=\theta^{-1}(S)$ とおけば，$Q\xrightarrow{\theta}$

$S\longrightarrow 0$ は完全列となる．θ が同型でない限りは，S は射影的ゆえ，Q は split するが，これは Q が Ae_μ の部分加群で Ae_μ の socle が simple だから不可能である．したがって，θ は同型で e_iA^* は射影的，すなわち Ae_i は射影的且つ入射的な加群 e_iA に或意味で含まれると云ってよいことになる．したがって，射影的，入射的な primitive ideal の直和をとればそれは忠実となり，補題によって一般単列環 A は QF-3 であることが保証されます．

ところで，一般単列多元環と QF-3 多元環との関連は，森田，Wall 氏による定理で終止符が打たれました：

定理． 多元環 A の任意の剰余多元環が QF-3 になるための必十条件は，A が一般単列環となることである．

しかしながら，次の森田氏による QF-3 多元環の構造定理は，より基本的といえます．

まず，B を QF-3 多元環と仮定する．補題により B の忠実なイデアル eB (e は一つの巾等元) で射影的且つ入射的なものがある．このとき eB の B-自己準同型多元環は eBe の左乗により得られる．ところで，本誌東屋氏の報告で述べられた森田氏の定理より eB は eBe-左加群として完全忠実 (completely faithful，森田氏の用語では fully faithful，Bass 氏の用語では generator) になる．すなわち，適当な整数 n に対し左 eBe-加群としての同型 $[eB]^n=\overbrace{eB\oplus\cdots\oplus eB}^{n\text{ケ}}\approx eBe\oplus S$ が成り立つ．次に，eB の eBe-自己準同型多元環を B' であらわせば明らかに $B'\supset B$ で，再び森田氏の定理により eB は B'-右加群として射影的となる．更に，eB^* について考えれば eB^* は B-左，eBe-右加群ですが，B'-左加群とも考えられます．Be は B-入射的且つ忠実ゆえ Be^* は B-入射的且つ忠実だが，森田氏の定理により Be^* は eBe-完全忠実，すなわち適当な整数 m に対して eBe-右同型 $[eB^*]^m=\overbrace{eB^*\oplus\cdots\oplus eB^*}^{m\text{ケ}}\approx eB\oplus T$ が成り立つ．今一度森田氏の定理により，eB^* は B'-入射的したがって eB は B'-入射的であることがわかる．以上により eB は B'-射影的，入射的，忠実であることがわかったので補題により B' も QF-3 となる．

QF-3 多元環の構造定理． A を任意の多元環とし，M は A-左加群として完全忠実，M^* は A-右加群として完全忠実と仮定する．M の A-自己準同型環を B' とすれば B' は QF-3 多元環で，$M\approx eB'$，$M^*\approx B'e'$ なる如き巾等元 e, e' が B' の中に存在する．又，1, eB', $B'e'$ を含む B' の部分多元環は QF-3 で，任意の QF-3 多元環は以上の如き手続きで構成される．

QF-3 多元環の説明はこの位で止めておく．

1957 年から 1958 年にかけて，Osaka Math. J., Nagoya Math. J., Abh. Math. Semi. Hamburg において，故中山教授は群のコホモロジー論の一般化としてフロベニウス多元環の complete cohomology theory を展開しました．正ならざる次元のコホモロジー群を定義するために complete resolution を用いるのは便利でもあり且つ有効でもある．complete resolution の存在はフロベニウス多元環においてその射影的な加群は同時に入射的でもあることから容易であった．

B はフロベニウス多元環とし，complex $X=\oplus\sum_{i=-\infty}^{+\infty}X_i$ を B の complete resolution とする．したがって B は両側 B-加群と見做され，X_i ($i=0$, ±1, ±2, $\cdots$) は両側 B-加群で，下の diagram は可換で sequence は完全列である：

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
\cdots\cdots \arrow[r] & X_2 \arrow[r] & X_1 \arrow[r] & X_0 \arrow[rr] \arrow[dr] & & X_{-1} \arrow[r] & X_{-2} \arrow[r] & X_{-3} \arrow[r] & \cdots\cdots \\
& & & & B \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & \\
& & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & &
\end{tikzcd}
$$

$0\to B\to X_{-1}\to X_{-2}\to X_{-3}\to\cdots$ としては B の入射分解 (injective resolution) を持って来てもよかったのですが，一般の多元環ではそうはいきません．そこで中山氏は次の如き予想を提出されました：完全列

$$0\to B\to Y_1\to Y_2\to\cdots\cdots\to Y_k\to\cdots\cdots$$

にあらわれる Y_1, Y_2, $\cdots$, Y_k, $\cdots$ を全て射影的にとろうとするとき，B が準フロベニウス多元環でなければ上の列は有限列で終るのではないか？　又その長さで多元環を分類したらどうなるか？

上の問題はまだ完全な解決を得ていないように思われますが，dominant dimension は此の問題を取扱うべく次の如く定義されます．

M は B-左加群とし，

$$0\to M\to X_1\to X_2\to\cdots\cdots\to X_n\to\cdots\cdots$$

を M の極小入射分解とする．今，X_i ($i=1,\cdots,n$) が射影的ならば M の B に関する dominant dimension は n 以上であると云い domi. $\dim_B M\geqq n$ であらわす．ここで，零加群も射影的と見做すことに注意する．実際に，domi. dim は中山氏の長さと少々異なる所があるが，それは条件が一寸強いからである．しかしながら，最初の段階としては多少の条件の追加は必要と思われる．かくして，中山氏の予想は次の如く述べられる．

予想． B が準フロベニウス多元環でなければ domi. $\dim_{B^e}B<\infty$．

ところで，dominant dimension と QF-3 多元環との関係は次の定理によって示される．

定理． domi. $\dim_{B^e}B\geqq1$ なるための必十条件は B が QF-3 多元環であることである．

この定理の証明には前述の補題が用いられるが，補題そのものが domi. $\dim_B B\geqq1$ と B が QF-3 になることとの同値性を意味している．したがって中山氏の予想からの連想として次の予想が考えられる："B が準フロベニウス多元環でなければ domi. $\dim_B B<\infty$"．この予想の反例はまだ知られていない．

以上述べたことにより，私達が取扱う多元環は QF-3 に限ってよいことになるであろう．所で，森田氏の構造定理における B と B' との関係は dominant dimension にどのような影響を与えるだろうか？　その答は次の定理で与えられる．

定理． domi. $\dim_{B^e}B\leqq$ domi. $\dim_{B'^e}B'$，特に $B\neq B'$ ならば domi. $\dim_{B^e}B=1$．

したがって，domi. $\dim_{B^e}B>1$ なる多元環 B を考える限りにおいて私達は $B=B'$ と仮定してよいことになる．

次に，当然 B' と $A\approx eBe$ との関係が問題になるが今日迄の結果としては次の定理の成立が知られている．

定理． $\dim A<\infty$ ならば domi. $\dim_{B^e}B\leqq\dim A+1$．

このことは中山氏の予想が $\dim A<\infty$ である限り正しいことを示しているが，A に対する条件 $\dim A<\infty$ は満足すべきものとは云えない．事実，A が準フロベニウス多元環であっても此の条件は一般に満足されない．しかし，条件 $\dim A<\infty$ を取り除いてもその予想は成立するものと思われる．というのは，A が一般単列環の場合には $\dim A=\infty$ であっても domi.

$\dim_{B^e} B<\infty$ が証明されるからである．

以上で QF-3 多元環と dominant dimension との関連について述べることを終るが，最後に次のことを附加えておこう．

Kasch はフロベニウス多元環のコホモロジー論を環のフロベニウス拡大に迄拡張したが，当然のこととして，QF-3 多元環についても complete cohomology theory が展開出来るかという問題が生ずる．第一に，QF-3 多元環 B に対して complete derived sequence と云ったようなもの (それは Cartan-Eilenberg 流に云えば multiply connected exact sequence of functors のことであるが) は定義出来るかということですが，中山の自己準同型写像を一般化することにより，その存在が証明されます．そして，制限された次元において，上で定義された負のコホモロジー群と通常の A のホモロジー群との間の同型を証明することが出来ます．

この QF-3 に関するものと，Kasch によるものとを含むような中山氏の complete cohomology theory の拡張が得られるのもおそらくは近い将来のことでありましょう．

射　影　的　加　群　I

(有限生成の場合)

遠　藤　静　男　(慶応義塾大学)

§1. 序． Serre は [28] で，アフィン既約代数的多様体 V を底空間とする代数的ベクトル・バンドルと V の函数環上で有限生成の射影的加群の間に一対一対応があることを指摘した．また Swan [34] において，コンパクトな位相空間 X 上の連続的実ベクトル・バンドルと X 上で実数値をとる連続函数の環 $C(X)$ 上の有限生成射影的加群の間にも同じ関係の成立が示された．これより，ベクトル・バンドルに関する多くの問題が有限生成射影的加群に関する問題にいいかえられる．このような事実から，有限生成射影的加群の研究は重要である．

環 R 上で有限生成の射影的加群の構造を決定し， 分類することは非常に困難な問題である．ここでは，まず，かかる問題に関して基本的な Serre の分解定理，Bass の可約定理を紹介し，その後問題を限定して，多項式環上の射影的加群に関する Serre の一問題およびその一般化について，現在までに得られている結果を整理して紹介する．

ここでは，環 R は単位元をもつ可換環とし，R-加群は有限生成 R-加群とする．まず，後の説明に必要な基礎事項をまとめておく．

R-射影的加群のカテゴリーを $\mathscr{P}(R)$，R-加群のカテゴリーを $\mathscr{M}(R)$ とし，これらをそれぞれ $\approx$(同型) によって類別したものを $P(R)$, $M(R)$ であらわし，$\mathscr{P}(R)$, $\mathscr{M}(R)$ の類カテゴリーという．R-射影的加群，R-加群をそれぞれ $P(R)$, $M(R)$ の元と見るとき，$\approx$ は $=$ と考えてよい．$P(R)$ には $\oplus$ (直和) によって加法が定義されている．

$P(R)$ の元 P_1, P_2 に対して $P(R)$ の自由元 F_1, F_2 をとって $F_1\oplus P_1=F_2\oplus P_2$ とできるとき，$P_1\sim P_2$ とあらわし，$P(R)$ を$\sim$について類別したものを $\widetilde{P}(R)$ であらわす．そのとき，$\widetilde{P}(R)$ は $\oplus$ によってひき起された加法に関して群をなし，R の射影類群とよばれる．

また，$P(R)$ の元を基底とする自由可換群 $Z(P(R))$ において，$P(R)$ の元 P, P', P'' に対して $P=P'\oplus P''$ のとき，$P\equiv P'+P''$ とおくことにし，$Z(P(R))$ を $\equiv$ によって類別したものを $K(R)$ であらわす．そのとき，$K(R)$ は可換群で，R の Grothendieck 群と呼ばれる．Grothendieck 群はより一般のカテゴリーについても定義される．

今後，環 R は 0 と 1 のほかに巾等元をもたないものとする．いま，$P(R)$ の階数 $r(\geq 0)$ の元全体を $P^{(r)}(R)$ とすれば，$P(R)=\bigcup_{r=0}^{\infty} P^{(r)}(R)$, $P^{(i)}(R)\cap P^{(j)}(R)=\phi\,(i\neq j)$ となる． $P^{(0)}(R)=0$ であることは明らかである．また，$P^{(1)}(R)$ の元は R の可逆イデアルで代表されるので，$\otimes_R$ によって積を定めると，$P^{(1)}(R)$ は可換群になる．$P^{(1)}(R)$ を R の可逆イデアル類群という．

$\widetilde{P}(R)$, $K(R)$, $P^{(r)}(R)$ は $P(R)$ の研究に重要である．ここでこれらの間の関係を調べよう．

$P(R)$ の元 P に $\widetilde{P}(R)$ の元 $\widetilde{P}$ を対応させることにより，$P(R)$ から $\widetilde{P}(R)$ の上への加法を保つ写像 ε が定められる． 一方，$\widetilde{P}(R)$ の元 $\widetilde{P}$ が $P^{(r)}(R)$ に代表元 P をもつとき，$\delta(\widetilde{P})=\wedge^r P$ (外部積) とおけば，δ は $\widetilde{P}(R)$ から $P^{(1)}(R)$ への写像である。$\mathfrak{a}$ を $P^{(1)}(R)$ の元とすると $\delta(\varepsilon(\mathfrak{a}))=\delta(\widetilde{\mathfrak{a}})=\mathfrak{a}$． これより，$\varepsilon$ は $P^{(1)}(R)$ から $\widetilde{P}(R)$ への一対一写像であり，δ は $\widetilde{P}(R)$ から $P^{(1)}(R)$ の上への写像であることがわかる．δ は $\oplus$ を $\otimes$ に移すので $\widetilde{P}(R)$ から $P^{(1)}(R)$ の上への群準同

型写像である．また ϵ により $P^{(1)}(R)\subset\widetilde{P}(R)$ と考えてよい．ϵ は又 $K(R)$ から $\widetilde{P}(R)$ の上への群準同型写像 σ をひき起す．また，$P(R)$ の元 P_1, P_2 に対して $\mathrm{rank}_R(P_1\oplus P_2)=\mathrm{rank}_R P_1+\mathrm{rank}_R P_2$ であることより，$\tau(\overline{P})=\mathrm{rank}_R P$ とおけば，τ は $K(R)$ から Z の上への加群としての準同型写像になる．そこで更に $\theta=(\tau, \sigma)$ により $K(R)$ から $Z\times\widetilde{P}(R)$ への群準同型写像を定める．そのとき θ は同型写像となることが容易に示される：$K(R)\approx Z\times\widetilde{P}(R)$．この関係により，$\widetilde{P}(R)$ に関する問題は $K(R)$ に関する問題に帰着する．ここでは，$K(R)$ を用いないが，群としては $K(R)$ の方が扱い易いため，最近種々の立場から研究されている．例えば，Bass [7], Bass-Heller-Swan [10], Heller-Reiner [16], Serre [28], Swan [35] を参照せよ。

§2. **分解定理と可約定理．** X を位相空間とする．X の空でない閉集合 V が空でない二つの閉真部分集合の和としてはあらわされないとき，V は X の既約閉集合という．X の既約閉集合 V に対して，$V=V_0\subsetneqq V_1\subsetneqq\cdots\cdots\subsetneqq V_n$ なる如き既約閉集合 V_i が存在するような整数 n の上限を，V の（X における）高さといい，$\mathrm{ht}(V)$ であらわす．一般に，空でない閉集合 U については，既約閉部分集合の高さの下限を U の高さといい，$\mathrm{ht}(U)$ であらわす．また，$\mathrm{ht}(\phi)=\infty$ と約束する．X の空でない閉集合の高さの上限を X の次元といい，$\dim X$ であらわす．

X の閉集合について（包含関係に関して）極小条件が成立するとき，X は Noether 的であるという．X が Noether 的ならば，X の空でない閉集合はすべて有限個の既約閉集合の和としてあらわされる．$\dim X<\infty$ のときは逆も成立つが，一般には必ずしも成立たない．

環 R の素イデアル全体の集合を R のスペクトルといい，$\mathrm{spec}\,R$ とあらわす．また，R の極大イデアル全体の集合を R の極大スペクトルといい，$\mathrm{m\text{-}spec}\,R$ であらわす．R のイデアル $\mathfrak{a}$ を含む $\mathrm{spec}\,R$ ($\mathrm{m\text{-}spec}\,R$) の元全体を $V(\mathfrak{a})$ とおき，かかる集合を閉集合と定めて，$\mathrm{spec}\,R$ ($\mathrm{m\text{-}spec}\,R$) に位相を導入する．（これは，いわゆる Zariski 位相である．）そのとき，

$$\dim \mathrm{m\text{-}spec}\,R\leq\dim\mathrm{spec}\,R=\mathrm{Krull\text{-}dim}\,R.$$

R が Noether 的なら，$\mathrm{spec}\,R$, $\mathrm{m\text{-}spec}\,R$ は Noether 的であるが，逆は一般に成立たない．

以下に述べる定理では，環 R は 0 と 1 以外に巾等元を含まず，$\mathrm{m\text{-}spec}\,R$ は Noether 的で $\dim\mathrm{m\text{-}spec}\,R=d<\infty$ とする．

Atiyah は [1] において，幾何学的方法で，アフィン既約代数的多様体 V を底空間とする代数的ベクトル・バンドルは自明なものと階数 $\leq\dim V$ のものとの直和に分解出来ることを示した．これはいいかえると，V の函数環 $K[V]$ 上の射影的加群は自由加群と階数 $\leq\mathrm{Krull\text{-}dim}\,K[V]$ なる射影的加群の直和に分解できることを意味する．Serre は [28] において，代数的方法で，この結果の一般化を与えた．[28] では R を Noether 的整域と仮定しているが，その証明は上述のようなより弱い条件を満す環にそのまま適用できる．

定理 2·1（**分解定理**）．R-射影的加群 P に対し，$\mathrm{rank}_R P\geq d+1$ ならば，$P\approx F\oplus Q$ となるような自由加群 F および $\mathrm{rank}_R Q=d$ なる射影的加群 Q が存在する．

証明については，[28], [7] を見られたい．この結果はその後 Swan [32], Giorgiutti [15], Bass [3] 等により，R 上有限生成の多元環（非可換でもよい）に迄拡張された．最も一般的な結果は Bass [7] に与えられている．証明はいずれも本質的には [28] と同じである．

Bass は [7]（または [9]）において，ホモトピー理論における結果からヒントを得て，2·1 を用いて，次の定理を証明した．

定理 2·2（**可約定理**）．R-射影的加群 P_1, P_2 について，$\mathrm{rank}_R P_1=\mathrm{rank}_R P_2\geq d+1$ であるとき，$F\oplus P_1\approx F\oplus P_2$ となるような自由加群 F が存在するならば，$P_1\approx P_2$ である．

これは，$F=R$ の場合に証明すれば十分である．Bass [7] では，$P=Ru\oplus P_1=Rv\oplus P_2$, $R\approx Ru\approx Rv$ として，P の自己同型群 $G_R(P)$ の元 σ で $\sigma(u)=v$ となるものの存在を示し，それから上の結果を導いている．そこでは，$G_R(P)$ の特殊な正規部分群 $E_R(P)$ が 2·1 と共に重要な役割をしている．

この定理も [7] ではより一般的な形で与えられている．特別の場合として，

系 2·3[1)]．R-射影的加群 P が $\mathrm{rank}_R P\geq d+1$ であり，適当な自由加群 F に対して $F\oplus P$ が自由加群なら，P 自身自由加群である．

ここで，$\mathrm{rank}_R P=d$ のときには $F\oplus P$ が自由加群であっても P は自由加群とは限らない．このことを示す例は Swan [34] に与えられている．したがって 2·3 (2·2) は $d+1$ を d に下げると必ずしも成立しない．一方，2·1 については $d+1$ を d に下げると必ずしも成立しないことは明らかである．

いま，$P^{(r)}(R)$ の元 P に $P^{(r+1)}(R)$ の元 $R\oplus P$ を対応させる写像を φ_r とする．また，§1 に与えた $P(R)$ から $\widetilde{P}(R)$ の上への写像 ϵ を $P^{(r)}(R)$ の上に制限したものを ψ_r とする．そのとき，2·1, 2·2 はそれぞれ次のようにいいかえられる．

(a) $r\geqslant d$ のとき φ_r は $P^{(r)}(R)$ から $P^{(r+1)}(R)$ の上への写像である．

(b) $r\geqslant d+1$ のとき φ_r は $P^{(r)}(R)$ から $P^{(r+1)}(R)$ への一対一写像である．

(a), (b) はまた次の (a′), (b′) と同等である．

(a′) $r\geqslant d$ のとき ψ_r は $P^{(r)}(R)$ から $\widetilde{P}(R)$ の上への写像である．

(b′) $r\geqslant d+1$ のとき ψ_r は $P^{(r)}(R)$ から $\widetilde{P}(R)$ への一対一写像である．

これらより，$r\geqslant d+1$ のとき φ_r, ψ_r は同型写像であり，したがって

$$\widetilde{P}(R)=P^{(d+1)}(R)=P^{(d+2)}(R)=\cdots\cdots$$

と考えてよい．$\widetilde{P}(R)$ は可換群だから，$r\geq d+1$ のときは $P^{(r)}(R)$ は可換群と考えてよいことになる．

§3. **多項式環に関する Serre の一問題とその一般化．** 環 R 上で変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ で生成された多項式環を $R[X_1, X_2, \cdots, X_n]$，または簡単に $R[n]$ とあらわすことにする．$P(R)$ の元を $P(R[n])$ の元 $R[n]\otimes_R P$ に対応させる写像は一対一だから，$P(R)\subset P(R[n])$, $P^{(r)}(R)\subset P^{(r)}(R[n])$, $\widetilde{P}(R)\approx\widetilde{P}(R[n])$ と考えてよい．c

Serre は 1955 年 [26]（または [27]）において，次の問題を提出した．

(S) 体 K 上の多項式環 $K[n]$ について，$K[n]$-射影的加群はすべて自由加群であろうか？

これはいいかえると，アフィン空間 K^n を底空間とする代数的ベクトル・バンドルはすべて自明なバンドルであろうかという問題になる．また明らかに，$P(K)=P(K[n])$ が成立するかどうかという問題とも同値である．しかし，次節に述べる如く，問題 (S) の解答は $n=1, 2$ のときに肯定的であることが知られているだけで，$n\geq3$ では未解決のまま残されている．もちろん，$P(R)=P(R[n])$ がすべての n について成立するような環 R の存在も今の所全く不明である．そこでより弱い条件を満足する環について考えることにする．

環 R は 0 と 1 以外に巾等元をもたないものとし，次のようにおく．

1) この系だけを証明するのであれば，Bass の方法より大分簡単な方法がある（筆者の数学会 (1964 年春) における講演参照）．

(I)　$P(R)=P(R[n])$.

(II′)　整数 $m\geq 0$ (n に関係してよい) を適当にとれば，$r\geq m$ に対して常に $P^{(r)}(R)=P^{(r)}(R[n])$.

(II)　$\widetilde{P}(R)=\widetilde{P}(R[n])$.

(III)　$P^{(1)}(R)=P^{(1)}(R[n])$.

そのとき，次の関係がある．

補題 3·1.　(I)⇒(II′)⇒(II)⇒(III).　特に，m-spec R が Noether 的で Krull-dim $R<\infty$ なら (II)⇒(II′).

証明．(I)⇒(II′)⇒(II) は定義から明らかである。(II)⇒(III) は，$P\in P^{(r)}(R)$ のとき $\wedge^{r}_{R[n]}(R[n]\otimes_R P)=R[n]\otimes_R(\wedge^{r}_{R}P)$ となることからわかる．また，Krull-dim $R=d<\infty$ なら dim m-spec $R\leq d$，dim m-spec $R[n]=n+d$．そこで，$m=n+d+1$ とおくと，2·2 より (II)⇒(II′) が示される．

前節の定理より，$P(R)$ は Krull 次元よりむしろ極大スペクトルの次元に関係しており，dim m-spec R が低いほど簡単な構造をもつことがわかっている．しかし，R 上の多項式環については つねに dim m-spec $R[n]=n+$Krull-dim R であり，$P(R[n])$ に関しては，特種の例を除いて，Krull-dim R しか利用できない．このことは $P(R)$ と $P(R[n])$ ($\widetilde{P}(R)$ と $\widetilde{P}(R[n])$) の関係を定めるのが困難な原因の一つである．

§4.　$P(R)=P(R(1))$ と $P^{(1)}(R)=P^{(1)}(R[n])$.

$n=1$ の場合には問題 (S) の答は明らかに "yes" である．また，$n=2$ のときも Seshadri [30] において肯定的に解決された．[30] ではより一般的に，R が主イデアル整域のとき $P(R)=P(R[1])$ となることを示している．これはその後，Seshadri [31]，Serre [29]，Bass [4] 等により一般化され，R が Dedekind 整域でも成立つことが示された．ここでは，これらの結果の完全な一般化を与えよう (証明の詳細については [14] を参照せよ)．この一連の拡張を導くため基本的なのは Seshadri による次の補題である．

補題 4·1.　R を Noether 的整域，$\mathfrak{p}$ を R の素イデアルで $R/\mathfrak{p}$ が Euclid 的であるようなものとする．また，R-加群 Q は階数 1 の R-射影的加群 Q_i $(1\leq i\leq r)$ の直和とする．そのとき，自然準同型写像 $Q\to Q/\mathfrak{p}Q$ によってひき起される自己同型写像の群の間の写像 Φ: $G_R(Q)\to G_{R/\mathfrak{p}}(Q/\mathfrak{p}Q)$[2] により，$SL(r, R/\mathfrak{p})\subset\Phi(G_R(Q))$.

証明．R 上の r 次の行列で，対角成分は全部 1 で，他の成分には高々一つだけ 0 でないものがあるようなもの ([7] における elementary matrix) から生成された $GL(r, R)$ の部分群を $EL(r, R)$ とする．そのとき，$EL(r, R)$ は $GL(r, R)$ の正規部分群で $SL(r, R)$ に含まれる．この補題では，$R/\mathfrak{p}$ が Euclid 的でなくても $Q/\mathfrak{p}Q$ が $R/\mathfrak{p}$-自由加群になりさえもすれば，$EL(r, R/\mathfrak{p})\subset\Phi(G_R(Q))$ となることが示される．特に，$R/\mathfrak{p}$ が Euclid 的なら $EL(r, R/\mathfrak{p})=SL(r, Q)$ となるので，補題が得られる．

この補題により，$P(R)$ の元 P が $P^{(1)}(R)$ の元の和としてあらわされるための十分条件が与えられる．

定理 4·2.　R を Noether 的整域，S を 0 を含まない R の乗法で閉じた集合で，その各元で生成された R の主イデアルが $R/\mathfrak{p}$ が Euclid 的である如き R の可逆素イデアル $\mathfrak{p}$ の積として

2)　$Q/\mathfrak{p}Q$ は $R/\mathfrak{p}$-自由加群であることから，$G_{R/\mathfrak{p}}(Q/\mathfrak{p}Q)=GL(r, R/\mathfrak{p})$.

あらわされるものとする．そのとき，R-射影的加群 P に対して，$P_S=(R_S\otimes_R P)$ が R_S-自由加群になるならば，P は階数 1 の R-射影的加群の直和に分解される．

証明．仮定より，P の R-部分加群 Q で次の条件を満足するものがある：

i)　Q は階数 1 の R-射影的加群の直和．

ii)　R の可逆素イデアル $\mathfrak{p}_i$ で $R/\mathfrak{p}_i$ が Euclid 的であるようなものにより $\mathfrak{p}_1^{e_1}\mathfrak{p}_2^{e_2}\cdots\mathfrak{p}_t^{e_t}P\subset Q$.

R は Noether 的だから，i), ii) を満足する極大な Q が存在する．かかる Q に対して，$Q\subsetneqq P$ と仮定すると，4·1 より矛盾を生じる．

この定理では，$\mathfrak{p}$ が可逆的で $R/\mathfrak{p}$ が Euclid 的なる仮定を除き得ない．それゆえ，これを $P(R)=P(R[n])$ に応用できる範囲は極く限定されたものとなり，特別の例を除けば，Krull-dim $R\leq 1$, $n=1$ の場合だけである．

$P(R[n])$ の各元が $P^{(1)}(R[n])$ の元の和としてあらわされるとき，$P(R)=P(R[n])$ を示すには $P^{(1)}(R)=P^{(1)}(R[n])$ を示せばよい．ところが，$P^{(1)}(R)=P^{(1)}(R[n])$ であるために R が満すべき条件はほとんど完全に決定出来る．そのために正規より弱い弱正規という概念を導入する．

R を Krull 次元 1 の Noether 的局所整域とし，$\mathfrak{m}$ をその極大イデアルとする．また R の商体内での整閉被を $\bar{R}$ とし，$\bar{R}$ の Jacobson 根基を $\bar{\mathfrak{n}}$ とする．そのとき，$\bar{\mathfrak{n}}$ が $\mathfrak{m}$ と一致するなら，R を<u>弱付値環</u>と呼ぶことにする。一般に Noether 的整域 R が次の二つの条件を満足するとき，R を<u>弱正規環</u>という：

1)　R の高さ 1 の各素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して $R_{\mathfrak{p}}$ は弱付値環である．

2)　R の 0 でない単項イデアルの素因子はすべて高さが 1 である．

定義より，Noether 的正規環は弱正規であるが，逆は必ずしも成立たない．まず，特別な場合として

補題 4·3.　Krull 次元 1 なる Noether 的半局所整域 R に対して $P(R)=P(R[1])$ となるための必要十分条件は，R が弱整閉なることである．

証明．R は半局所的ゆえ，2·1 より $P(R)$ の元はすべて自由元である．R の Jacobson 根基を $\mathfrak{n}$，R の全商環における整閉被を $\bar{R}$，$\bar{R}$ の Jacobson 根基を $\bar{\mathfrak{n}}$ とする．

必要性：R が弱整閉でないとすれば，$\mathfrak{n}\bar{R}\neq\mathfrak{n}$ か $\mathfrak{n}R=\mathfrak{n}\neq\bar{\mathfrak{n}}$ のいずれかである．この二つの場合について，$R[X]$ の可逆イデアルで単項でないものの存在を示せばよい．

十分性：Krull-dim $R=1$ より，$\bar{R}[X]$ は主イデアル整域となる．これから，R が弱整閉なら $R[X]$ の高さ 1 なる極大イデアルはすべて主イデアルとなることが示される．そこで，かかる極大イデアルの生成元から生成された R の乗法的に閉じた集合 S に 4·2 を適用すれば，$P(R[X])$ の元もすべて自由であることがでる．

この補題から次の主定理を得る．

定理 4·4.　R は Noether 的整域で，0 でない R の単項イデアルの素因子はすべて高さ 1 とする．そのとき，すべての n について $P^{(1)}(R)=P^{(1)}(R[n])$ が成立つためには，R が弱整閉となることが必要十分である．

証明．$P^{(1)}(R)=P^{(1)}(R[1])$ について考えればよい．$P^{(1)}(R[1])$ の元は $\mathfrak{a}'\cap R\neq 0$ なる $R[X]$ の可逆イデアルであらわされる．R が弱整閉なら，4·3 により，$(\mathfrak{a}'\cap R)R[X]=\mathfrak{a}'$ が直接示される．一方，R が弱整閉でなければ，適当な主イデアルの素因子に 4·3 を適用して，$P^{(1)}(R)\subsetneqq P^{(1)}(R[1])$ を示す．

4·4 は，Krull-dim $R=\infty$ でも成立し，Krull-dim $R=1$ の場合は R に関する付帯条件がと

れる．また Krull-dim $R\leq 1$ のときには，[30]，[31]，[29]，[4] の結果の一般化として次の定理が示される．

定理 4·5.　R を Krull 次元 1 なる Noether 的整域とし，その商体内での整閉被 $\bar{R}$ は R 上有限生成とする．そのとき，$P(R)=P(R[1])$ であるためには R が弱整閉であることが必要十分である．

証明．　4·2, 4·4 により直接示される．

例外的な結果として，

定理 4·6.　Krull 次元 1 なる Noether 的半局所整域 R に対して，$P(R)=P(R[2])$ となるためには R が弱整閉であることが必要十分である．

$R[2]$ の高さが 2 の極大イデアルについて特殊な考察をした後，4·2 を適用することにより上記定理は証明される．

Seshadri の結果に関係したものとして，Lissner [21]，Chase [13] 等がある．最近，Bass は [8] において次の興味ある結果を証明した．そこで用いられるのは，4·1, 4·2 を多元環に関して拡張した補題である．

定理 4·7.　R を主イデアル整域，Π を自由半群または自由群とする．Π により生成された R 上の群環を $R(\Pi)$ とするとき，$R(\Pi)$-射影的加群はすべて自由加群である．すなわち，$P(R)=P(R(\Pi))$ である．

§5. $\widetilde{P}(R)=\widetilde{P}(R[n])$.　本節の主定理 5·3 は，Grothendieck によって最初に与えられた．Serre [28] (Borel-Serre [11] を参照) にその証明が与えられているが，ここでは同じ [28] で R が体の場合に与えられた別証を一般化した Bass-Heller-Swan [10] による証明を与える．[10] では，より一般の次数環 (非可換でもよい) に拡張してあるが，証明法はここに述べるものとほとんど同じである．

$R[n]$ を R' であらわし，R' に更に一つの変数 X_0 をつけ加えたものを R'' とする．いま，R'' を $X_0, X_1, \cdots, X_n$ の次数に関して次数の定まった次数環と考え，R''-次数加群の同型類を $M_g(R'')$, R''-射影的次数加群の同型類を $P_g(R'')$ とあらわす．$R'\approx R''/(X_0-1)R''$ より，$M_g(R'')$ の元 M'' に対して $f(M'')=R'\otimes_{R''}M''$ とおくと f は $M_g(R'')$ から $M(R')$ への写像 (函手) になる．

補題 5·1.　f は $M_g(R'')$ の完全列を $M(R')$ の完全列に写す．R が Noether 的なら，f は $M_g(R'')$ から $M(R')$ の上への写像である．

証明．　f の右完全性は明らか。左完全であることは，$N''\subset M''$ $(N'', M''\in M_g(R''))$ のとき $N''\cap(X_0-1)M''=(X_0-1)N''$ となることからわかる．また，R が Noether 的なら R' も同様だから，$M(R')$ の元 M' は $M(R')$ の自由元 L_1', L_0' に関する準同型写像 $\alpha': L_1'\to L_0'$ の cokernel としてあらわされる．α' は $R''\otimes_{R'}L_1'$ から $R''\otimes_{R'}L_0'$ への R''-次数加群としての準同型写像 α'' に拡張される．そのとき cokernel $\alpha''=M''$ とおけば，$f(M'')=M'$.

R を $R_0=R$, $R_n=0\ (n>0)$ なる次数環と考え，R-次数加群の類カテゴリーを $M_g(R)$, R-射影的次数加群の類カテゴリーを $P_g(R)$ とする．$M_g(R)$ の元 M に対し，

$$(R''\otimes_R M)_d=\sum_{d=i+j}\oplus(R_i''\otimes_R M_j)$$

によって次数の定められた $M_g(R'')$ の元 $R''\otimes_R M$ を対応させる写像を h とおく．

補題 5·2.　h は $P_g(R)$ から $P_g(R'')$ への同型写像である．

証明．　$\mathfrak{n}$ を $X_1, X_2, \cdots, X_n$ で生成された次数環 R'' の同次イデアルとする．そのとき，
$M_g(R'')$ の元 M'' に対し $M''=\mathfrak{n}M''$ なら $M''=0$ となることに注意すれば，h の逆写像は $P_g(R'')$
の元 P'' に対して $P_g(R)$ の元 $P''/\mathfrak{n}P''$ を対応させる写像であることが示される．
定理 5·3.　R をすべての R-加群が有限の射影次元をもつような Noether 的整域 (正則)
とすれば，$\widetilde{P}(R)=\widetilde{P}(R[n])$.
証明．　P' を $P(R')$ の元とすると，5·1 より，$f(M'')=P'$ となるような $M_g(R'')$ の元 M''
がある．R に関する仮定は，R'' に保たれるので，$P_g(R'')$ の自由元 L_0'', L_1'', $\cdots$, L_m'' を順にと
り，完全列 $0\to Q''\to L_m''\to\cdots\cdots\to L_0''\to M''\to 0$
を作って，$Q''\in P_g(R'')$ とできる．5·1 より，f によって，$P(R')$ の完全列

$$0\to R'\otimes_{R''}Q''\to R'\otimes_{R''}L_m''\to\cdots\cdots\to R'\otimes_{R''}L_0''\to P''\to 0$$

を得る．5·2 より，$Q''=\sum_{j=1}^{l}\oplus(R''\otimes_R Q_j)$ となるような $P(R)$ の元 Q_j がある．$R'\otimes_{R''}(R''\otimes_R Q_j)$
$=R'\otimes_R Q_j$ より，$R'\otimes_{R''}Q''=R'\otimes_R(\sum_{j=1}^{l}\oplus Q_j)\in P(R)$ (§3 の意味で)．$P'\in P(R')$ より上の完全列
は分割可能ゆえ，この結果 $P(R')$ の適当な自由元 E', F' により，$E'\oplus(R'\otimes_R(\sum_{j=1}^{l}\oplus Q_j))=F'\oplus P'$
とできる．左辺は $P(R)$ の元ゆえ，右辺も $P(R)$ に属し，$\widetilde{P}(R')\subset\widetilde{P}(R)$ を得る．
5·3 に 2·2 を応用して次の定理を得る (Bass [7])．
定理 5·4.　R は Krull-dim $R=d<\infty$ なる正則整域とする．$r\geq n+d+1$ ならば，$P^{(r)}(R)$
$=P^{(r)}(R[n])$. 特に，R の高さ d なるすべての極大イデアルの共通分が 0 でなければ，$r\geq n$
$+d$ に対して，$P^{(r)}(R)=P^{(r)}(R[n])$.
証明．　前半は 3·1 で示された．後半は，2·2 をこのような場合に精密化しておくことによ
り，同様にして示される．
特別の場合として，
系 5·5.　R を Krull-dim $R=d<\infty$ なる正則整域とし，$\widetilde{F}(R)=0$ とする．$r\geq n+d+1$ な
らば，$P^{(r)}(R[n])$ はただ一つの (自由) 元からなる．特に，R が 5·4 の後半の仮定を満すなら，
$r\geq n+d$ で同様のことが成立つ．
§6. $K[3]$ に関する注意.　K を体とすれば，$0=\widetilde{F}(K)=\widetilde{P}(K[n])$ (5·3)．そのとき，階数
が n より大きい射影的加群はすべて自由的 (5·5)．よって，(S) は階数 $2\leq r\leq n$ のものについ
てのみ考えればよいことになる．特に，n が奇数のときには次の補題 (日野原：未発表) が利用
出来る．
補題 6·1.　R を可換環，P を R-射影的加群とする．$R\oplus P$ が階数 $2m$ の自由加群ならば
P は R を直和成分としてもつ．
証明．　$Ru\oplus P=\sum_{i=1}^{2m}\oplus Ru_i$ $(R\approx Ru\approx Ru_i)$ とおけば，$u=\sum_{i=1}^{2m}r_iu_i$ $(r_i\in R)$, $u_i=a_iu+p_i$ $(a_i\in R,$
$p_i\in P)$. このとき，$\sum_{k=1}^{2m}r_ia_i=1$ がわかる．そこで，$p=\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}p_{2k}-a_{2k}p_{2k-1})=\sum_{k=1}^{m}(a_{2k-1}u_{2k}$
$-a_{2k}u_{2k-1})$ とおけば，Rp は P の直和成分．
6·1 において，$2m$ を $2m+1$ で置き換えることは出来ない (Swan [34])．
これより，階数 $2m+1$ の $K[2m+1]$-射影加群は $K[2m+1]$ を直和成分としてもつことが
わかる．特に，階数 3 の $K[3]$-射影的加群は $K[3]$ と階数 2 の射影的加群の直和としてあらわ
されるから，$P(K[3])$ の構造は $P^{(2)}(K[3])$ によって定まる．

また，6·1 より直接次の補題が示される．

補題 6·2.　次の二つの命題は同値である：

(1)　$P^{(3)}(K[3])$ はただ一つの（自由）元からなる．

(2)　$P^{(2)}(K[3])$ の元は $K[3]\oplus K[3]\oplus K[3]$ の直和成分である．

射　影　的　加　群　II

（有限生成でない場合）

日　野　原　幸　利　（熊本大学）

0.　射影的加群の例 (cf. [5]).　R を閉区間 $[0, 1]$ で定義された連続函数全体のなす環，$\mathfrak{m}_x$ を $[0, 1]$ 内の点 x で 0 となる R の元全体のなすイデアル，P_x を $[0, 1]$ 内の点 x の近傍で 0 となる R の元全体のなすイデアルとする．このとき，P_x は可附番生成，非有限生成，直既約（故に自由でない）な射影的加群である．

証明．　$x=0$ の場合の証明の概略をのべる．$P_0=P$ とおく．まず，各自然数 n に対して，$[0, 1]$ 上の函数 f_n を次のように定義する：

$$f_n(x)=\begin{cases} 0 & (0\leq x\leq 1/2^n) \\ 2^n x-1 & (1/2^n<x<1/2^{n-1}) \\ 1 & (1/2^{n-1}\leq x\leq 1). \end{cases}$$

明らかに f_n は R 上で P を生成し，$f_n\cdot f_{n+1}=f_n$ である．そこで，可附番生成自由加群 $F=\sum_{i=1}^{\infty}\!{}_{\oplus}\, Ru_i$ をつくる，ここに $\{u_i\}$ は自由基底である．完全列

$$(*)\quad 0\longrightarrow \mathrm{Ker}\,\pi\xrightarrow{\ i\ }F\xrightarrow{\ \pi\ }P\longrightarrow 0,\qquad \pi u_i=f_i$$

を考えれば，$\mathrm{Ker}\,\pi=\sum_{n=1}^{\infty}R(u_n-f_n u_{n+1})$ である．そこで，R-準同型 φ：　$F\longrightarrow \mathrm{Ker}\,\pi$ を次のように定義する：

$$\varphi u_n=(u_n-f_n u_{n+1})-f_n\Big(\sum_{i=1}^{n}(u_i-f_i u_{i+1})\Big).$$

このとき，$\varphi\circ i=\text{identity}$ が成り立つ，つまり (*) は split する．故に，P は射影的である．有限生成でないこと，および直既約性は自明．

1.　Kaplanky の補題 (cf. [20]).　(i)　任意の射影的加群は可附番生成射影的加群の直和である。

重要性にかんがみ，以下に証明を与える．本質的には [20] の証明と同じ．

R を環，P を与えられた射影的 R-加群，$F=P\oplus Q=\sum_{i\in I}{}_{\oplus}\, Ru_i$（$\{u_i\}$ は自由基底，I は整列集合）とする．更に，π: $F\to P$ を上の直和分解 $F=P\oplus Q$ における projection，$\pi u_i=\sum_{j\in I_i} r_{ij}u_j$（$r_{ij}\neq 0$, I_i は I の有限部分集合）とする．ここで，$J_i=I_i\cup(\bigcup_{j\in I_i} I_j)\cup(\bigcup_{k\in I_j,\ j\in I_i} I_k)\cup\cdots\cdots$ とおけば，J_i は可附番集合である．$F_i=\sum_{j\in J_i}{}_{\oplus}\, Ru_j$ とおけば，$F\supset F_i\supset \pi F_i$ であり，πF_i は F_i の直和因子（$\pi F_i \underset{\pi}{\overset{i}{\rightleftarrows}} F_i$, $i=\text{inclusion}$, $\pi\circ i=\text{identity}$），$F_i$ は F の直和因子，更に $F\supset P\supset \pi F_i$ だから πF_i は P の直和因子である．今，$A=\sum_{j\leq i}F_j$, $B=\sum_{j<i}F_j$, $C=\sum_{j\leq i}\pi F_j$, $D=\sum_{j<i}\pi F_j$ とおけば，

$$F\supset A\ \begin{array}{c} \supset B \supset \\ \supset C \supset \end{array}\ D$$

であり B は F の直和因子，したがって A の直和因子，D は B の直和因子（$D\underset{\pi}{\overset{i}{\rightleftarrows}}B$, $\pi\circ i=\text{iden-}$

tity), 故に D は A の, したがって, C の直和因子である. そこで,

$$(*)\quad \sum_{j\leq i}\pi F_j=(\sum_{j<i}\pi F_j)\oplus P_i$$

とおくと, $P_i\approx\pi F_i/\pi F_i\cap\sum_{j<i}\pi F_j$, πF_i は可附番生成だから P_i も可附番生成である. ここで, $P'=\sum_{i\in I}P_i$ とおくと, (*) よりこの和が直和であることがわかる. 更に, $P=P'$ となる. 何となれば, $\pi u_j\notin P'$ とすると $\pi u_j\in\sum_{l\leq j}\pi F_l=(\sum_{l<j}\pi F_l)\oplus P_j$ だから, $\pi u_j=x+y$ ($x\in\sum_{l<j}\pi F_l$, $y\in P_j$) とおくと, $y\in P_j\subset P'$ だから, $l<j$ なる l で $\pi u_l\notin P'$ なるものが存在することになる. 故に帰納法により, $P=P'$ なることがわかる.

(ii) M を可附番生成加群とする. M の任意の直和因子 N が次の条件を満すとき M は自由加群 (resp. 有限生成加群の直和) である: N の任意の元は N の自由 (resp. 有限生成) な直和因子に含まれる.

2. Eilenberg の補題 (cf. [5]). $P\oplus Q=F=$ 非有限生成自由加群ならば, $P\oplus F\approx F$ である.

2′. 2 の系として次の補題が成立つ: P が射影的加群, F が非有限生成自由加群で, $P=F\oplus P'$ のとき $P\approx F$ である.

3. Serre の補題 (cf. [28], [17]). R を可換環, P を R 上射影的加群, p を P の任意の元としたとき, R のすべての極大イデアル $\mathfrak{m}$ について $p\notin\mathfrak{m}P$ ならば, Rp は P の直和因子である.

此の補題は次のように拡張される: R を可換環, $F=\sum_\oplus Ru_i$ を R 上自由加群としたとき; F の元 $p_1,\cdots,p_n$ が F の直和因子の自由基底であるための必要十分条件は, $p_i=\sum_{j=1}^{m}r_{ij}u_j$; $i=1,\cdots,n$, $m\geqslant n$, $n\times m$ 行列 (r_{ij}) の $n\times n$ 小行列式を $N_1,\cdots,N_s$, $s=\binom{m}{n}$ としたとき, $N_1,\cdots,N_s$ の生成する R のイデアルが 1 なることである.

証明は, $n=1$ の場合が上の補題であることから, n についての帰納法によればよい.

4. 定　　義. 環 R 上の任意の射影的加群が faithfully flat のとき, R を p-connected という. このとき, R は connected (R 上加群と考えて直既約) である.

5. Eilenberg の補題より次の補題が成り立つ (cf. [17]): R を環, P を R 上射影的加群, p を P の任意の元としたとき, 自然数 n と有限生成自由加群 F が存在して, $(\sum_1^n{}_\oplus R)\oplus P=F\oplus Q$, $F\ni p$ が成り立つ.

6. 1(ii) と 5 から, 次の補題が得られる (cf. [17], [18]): 環 R が次の条件を満すとする:

(*) R 上位意の射影的加群 P およびその元 p に対して, $P=Rp+P'$ ならば, P' の元 p' が存在して, $R(p+p')$ が P の直和因子となる. このとき R 上任意の射影的加群は有限生成射影的加群の直和である.

7. 上記 1〜6 の補題を使って, 例えば, 次の定理を証明することが出来る (cf. [19]): R を可換整域, X を R の極大イデアル全体のつくる集合とする. もし, X が可附番集合ならば, R 上任意の非有限生成射影的加群は自由加群である. (この条件は必要条件でもあろうか?)

証明. P を R 上可附番生成 (cf. 1), 非有限生成射影的群とすれば, 次の命題が成り立つ:

(**) P の任意の有限生成部分加群 N, および X の任意の元 $\mathfrak{m}$ に対して, $P\neq N+\mathfrak{m}P$.

事実, $P=N+\mathfrak{m}P$ ならば $P_\mathfrak{m}=N_\mathfrak{m}+\mathfrak{m}_\mathfrak{m}P_\mathfrak{m}$ であり, $P_\mathfrak{m}$ は局所環 $R_\mathfrak{m}$ 上の射影的加群, した
がって $R_\mathfrak{m}$-自由であり, $N_\mathfrak{m}$ は $R_\mathfrak{m}$-有限生成である. $P_\mathfrak{m}$ の $R_\mathfrak{m}$-自由基底を $\{v_i\}$ とすると適当な
n に対して $N_\mathfrak{m}\subset\sum_{i=1}^{n}{}_\oplus R_\mathfrak{m}v_i$ となる. このとき, 例えば, $v_{n+1}\notin N_\mathfrak{m}+\mathfrak{m}_\mathfrak{m}P_\mathfrak{m}$ となり矛盾.

次に, 6 の条件 (*) が成り立つことを証明する. P の任意の元 p をとり, $P=Rp+M$ が適当な M に対して成り立ったと仮定する. 更に, $F=P\oplus Q$ を自由加群, $\{u_i;\ i=1,2,\cdots\}$ を F の R-自由基底, $X=\{\mathfrak{m}_i;\ i=1,2,\cdots\}$ とする. ここで次の記号を使う: P の任意の元 q に対して, $q=\sum_{i=1}^{n(q)}r(i,q)u_i$ ($r(i,q)\in R$, $r(n(q),q)\neq0$). このとき, はじめに与えられた P の元 p は $p=\sum_{i=1}^{n(p)}r(i,p)u_i$ とかけている. さて, 上に証明された (**) から次のことがわかる:

$$\exists p_1\in M\mid\exists r(j_1,p_1)\notin\mathfrak{m}_1,\ j>n(p),$$
$$\exists p_2\in M\mid\exists r(j_2,p_2)\notin\mathfrak{m}_2,\ j_2>n(p_1),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

以下帰納的に P の可附番部分集合 $\{p_i;\ i=1,2,\cdots\}$ をつくる. この p_i は次の性質を有する:

$$r(j_i,p_i)\notin\mathfrak{m}_i,\ j_i>n(p_{i-1}).$$

ここで, 函数 $s(n)$ ($n=1,2,\cdots$) を定義する:

$$s(1)=1,$$
$$s(2)=\begin{cases}0 & (r(j_1,p_2)+r(j_2,p_2)\in\mathfrak{m}_2)\\ 1 & (r(j_1,p_2)+r(j_2,p_2)\notin\mathfrak{m}_2),\end{cases}$$

$n\geqslant3$ に対しては,

$$s(n)=\begin{cases}0 & (\sum_1^{n-1}s(i)r(j_i,p_n)+r(j_n,p_n)\in\mathfrak{m}_n)\\ 1 & (\sum_1^{n-1}s(i)r(j_i,p_n)+r(j_n,p_n)\notin\mathfrak{m}_n).\end{cases}$$

このとき, $t_n=\sum_1^n s(i)r(j_i,p_n)$ とおくと, $t_n\notin\mathfrak{m}_n$. 故に, $(t_1,t_2,\cdots)=R$ であり, したがって自然数 m が存在して $(t_1,t_2,\cdots,t_m)=R$, すなわち $\sum_1^m r_nt_n=1$ となるような R の元 r_n ($n=1,2\cdots,m$) が存在する. さて, F の可附番部分集合 $\{v_i;\ i=1,2,\cdots\}$ を次のように定義する:

$i\neq j_1$, $i\neq j_2,\cdots$, $i\neq j_m$ のとき, $v_i=u_i$,

$i=j_l$, $l\in\{1,2,\cdots,m\}$ のとき, $v_i=u_{j_l}-s(l)u_{n(p_m)+1}$.

この $\{v_i\}$ は F の自由基底をなし, この基底によって, $p_n(n\leq m)$ は次のようにかける:

$$p_n=\sum_{j=1}^{n(p_n)}r(j,p_n)v_j+(\sum_{i=1}^{m}s(i)r(j_i,p_n))v_{n(p_m)+1}.$$

さて, $p'=\sum_{i=1}^{m}r_ip_i$, $q=p+p'$ とおくと, p' は M に属し, 基底 $\{v_i\}$ を用いて q をあらわし
たとき $v_{n(p_m)+1}$ の係数は 1 である. ($i>n$ ならば $j_i>n(p_n)$, したがって $r(j_i,p_n)=0$, ゆえに
$\sum_{i=1}^{m}s(i)r(j_i,p_n)=t_n$ である.) 故に, Rq は F の, したがって P の直和因子である. よって 6 に
より, P は有限生成射影的加群の直和となる. 以下 [19] におけると同じくして P が R-自由加群であることが証明される.

8. [18], [19] の補足. K を可換体, x_{ij} ($i,j=1,2,\cdots$) を可附番個の K 上の独立変数, $R=K[\{x_{ij}\}]$, $\mathfrak{m}_i=(\{x_{ij}\mid j=1,2,\cdots\})$, $S=\bigcap_{i=1}^{\infty}(R-\mathfrak{m}_i)$, $\bar{R}=R_S$ とおくと, $\bar{R}$ は可換整域で, ネーター環でなく, J-radical $=0$ であり, $X=$m-spec$(\bar{R})$ が Noetherian space である.

文　献

[1] M. Atiyah, Vector bundles over an elliptic curve, Proc. London Math. Soc., 7 (1957), 414-452.
[2] M. Atiyah and F. Hirzebruch, Vector bundles and homogeneous spaces, Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., 3 (1961), 7-38.
[3] H. Bass, Projective modules over algebras, Ann. of Math., 73 (1961), 532-542.
[4] ———, Torsion-free and projective modules, Trans. Amer. Math. Soc., 102 (1962), 319-327.
[5] ———, Big projective modules are free, Ill. J., 7 (1963), 24-31.
[6] ———, The stable structure of quite general linear groups, Bull. Amer. Math. Soc., 70 (1964), 429-433.
[7] ———, K-theory and stable algebras, Publ. de L'Institut des Hautes Etudes Scientifique, 1964, N° 22, 489-544.
[8] ———, Projective modules over free groups are free, to appear.
[9] H. Bass and S. Schanuel, The homotopy theory of projective modules, Bull. Amer. Math. Soc., 68 (1962), 425-428.
[10] H. Bass, A. Heller and R. Swan, The Whitehead group of a polynomial extension, Publ. de L'Institute Hautes Etudes Scientifique, 1964, N° 22, 545-563.
[11] A. Borel and J. P. Serre, La théorème de Riemann-Roch, Bull. Soc. Math. France, 86 (1958), 97-136.
[12] H. Cartan and S. Eilenberg, Homological algebra, Princeton Univ. Press, 1956.
[13] S. U. Chase, Torsion-free modules over $K[X, Y]$, Pacific J. Math., 12 (1962), 437-447.
[14] S. Endo, Projective modules over polynomial rings, J. Math. Soc. Japan, 15 (1963), 339-352.
[15] I. Giorgiutti, Modules projectifs sur les algèbres de groups, C. R. Acad. Sci. Paris, 250 (1960), 1419-1420.
[16] A. Heller and I. Reiner, Grothendieck groups of orders in semisimple algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 112 (1964), 344-355.
[17] Y. Hinohara, Projective modules over semilocal rings, Tohoku Math. J., 14 (1962), 205-211.
[18] ————, Projective modules over weakly noetherian rings, J. Math. Soc. Japan, 15 (1963), 75-88.
[19] ————, Supplement to "Projective modules over semilocal rings", J. Math. Soc. Japan, 15 (1963), 474-475.
[20] I. Kaplansky, Projective modules, Ann. of Math., 68 (1958), 372-377.
[21] D. Lissner, Matrices over polynomial rings, Trans. Amer. Math. Soc., 98 (1961), 285-305.
[22] T. Nakayama and A. Hattori, ホモロジー代数学, 共立現代数学講座, 1957.
[23] H. Ozeki, Chern classes of projective modules, Nagoya Math. J. 23 (1963), 121-152.
[24] D. S. Rim, Modules over finite groups, Ann. of Math., 69 (1959), 700-712.
[25] ————, Projective class groups, Trans. Amer. Math. Soc., 98 (1961), 459-467.
[26] J. P. Serre, Faisceaux algébrique cohérents, Ann. of Math., 61 (1955), 197-278.
[27] ————, Algebraic fibre bundle について (九州大学), Algebraic fibre space and the theory of modules (東京大学), 講演アブストラクト, 数学 7 (1955), 255-257.
[28] ————, Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle, Séminaire Dubreil-Pisot, 11 (1957-1958), N° 23.
[29] ————, Sur les modules projectifs, Séminaire Dubreil-Pisot, 14 (1960-1961), N° 2.
[30] C. S. Seshadri, Triviality of vector bundles over the affine space K^2, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 44 (1958), 456-458.
[31] ————, Algebraic vector bundles over the product space of an affine curve and an affine line, Proc. Amer. Math. Soc., 10 (1959), 670-673.
[32] R. G. Swan, Projective modules over finite groups, Bull. Amer. Math. Soc., 65 (1959), 365-367.

[33] ————, Induced representation and projective modules, Ann. of Math., 71 (1960), 552-578.
[34] ————, Vector bundles and projective modules, Trans. Amer. Math. Soc., 105 (1962), 264-277.
[35] ————, The Grothendieck ring of a finite group, Topology, 2 (1963), 85-110.
[36] ————, Projective modules over group rings and maximal orders, Ann. of Math, 76 (1962), 55-61.

フ ロ ベ ニ ウ ス 拡 大 I

都 筑 俊 郎 (名古屋大学)

体の上のフロベニウス多元環の概念の一般化として Kasch は環のフロベニウス拡大なる概念を導入した (Kasch [4]). その後その理論は二, 三の人達により組立てられ, 一般化された (中山一都筑 [10], [11], [12], Kasch [4], [6], [7], [8], Pareigis [14], 尾野寺 [13]). ここでは, この理論の展開に必要な基礎概念を述べる.

以下環はすべて単位元1をもち, 部分環はすべてこの1をふくむものとする.

B を環, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ を B-右加群 ($\mathfrak{M}_B$, $\mathfrak{N}_B$ 等であらわす. 同様に ${}_A\mathfrak{M}_B$ は A, B が環で $\mathfrak{M}$ は A-左, B-右加群であることを示す), β を B の自己同型とするとき $\mathrm{Hom}_{(B,\beta)}(\mathfrak{M}_B; \mathfrak{N}_B)\,(=\mathrm{Hom}(\mathfrak{M}_B, \mathfrak{N}_{\beta B}))$ により $\mathfrak{M}$ から $\mathfrak{N}$ への (B, β)-準同型 f の全体をあらわす, すなわち f は (i) $\mathfrak{M}$ から $\mathfrak{N}$ への準同型で (ii) $f(mb)=f(m)\beta(b)\,(m\in\mathfrak{M},\ b\in B)$. 更に, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ を夫々 ${}_A\mathfrak{M}_B$, ${}_A\mathfrak{N}_B$ とし α, α' を A の自己同型, β, β' を B の自己同型とするとき $\mathrm{Hom}\,({}_{\alpha A}\mathfrak{M}_{\beta B}, {}_{\alpha' A}\mathfrak{N}_{\beta' B})=\mathrm{Hom}\,({}_A\mathfrak{M}, {}_{\alpha^{-1}\alpha' A}\mathfrak{N})\cap\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{M}_B, \mathfrak{N}_{\beta^{-1}\beta' B})$ とする. 又 ${}_A\mathfrak{M}_B$, ${}_C\mathfrak{N}_B$ に対し $\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{M}_B, \mathfrak{N}_{\beta B})$ は C-左, A-右加群と考えられる; $f\in\mathrm{Hom}\,(\mathfrak{M}_B, \mathfrak{N}_{\beta B})$, $c\in C$, $a\in A$ に対し $(cfa)(m)=c(f(am))$ (時によって cfa を ${}^cf^a$ であらわす. 例えば f の間に積が定義されているようなとき, その積と区別するために.) A を環, B を部分環, α, β を B の自己同型とするとき $V_A(\alpha B, \beta B)=\{a\in A|\forall b\in B,\ (\alpha b)a=a(\beta b)\}$, $V_A(\alpha B, \beta B)^\times=\{a\in V_A(\alpha B, \beta B)|a$ は A の正則元$\}$ とおき, とくに $\alpha=\beta=1$ のときには $V_A(B)$, $V_A(B)^\times$ であらわす.

(1) A を環, B を部分環とするとき, 次の条件が満されるなら A は B の (α,β,γ)-フロベニウス拡大又は $(\alpha,\beta,\gamma,\Phi)$-フロベニウス拡大又は A/B に (α,β,γ) 型のフロベニウス構造が入るといわれる:

(i) A_B は有限生成な射影的加群.

(ii) 適当な A の自己同型 α, B の自己同型 β, γ が存在して ${}_BA_A$ から $\mathrm{Hom}\,(A_B, B_{\beta B})$ への (B, γ)-左, (A, α)-右同型 Φ が定義できる, すなわち $\Phi(bxa)=\gamma(b)\,\Phi(x)\,\alpha(a)\,(a,\ x\in A,\ b\in B)$. 以下単簡に ${}_BA_A \underset{(\gamma,\alpha)}{\overset{\Phi}{\cong}} \mathrm{Hom}\,(A_B, B_{\beta B})$ とかく.

(2) 環拡大 A/B に対して (1) の (i), (ii) が成り立つことは次の条件 (i′), (ii′) の成り立つことと同値である:

(i′) ${}_BA$ が有限生成且つ射影的.

(ii′) ${}_AA_B \underset{(\alpha^{-1},\beta^{-1}\gamma^{-1}\beta)}{\overset{\Psi}{\cong}} \mathrm{Hom}\,({}_BA, {}_{\beta^{-1}B}B)$.

なんとなれば, (ii) より ${}_BA$ は ${}_B\mathrm{Hom}\,(A_B, B_{\beta B})$ に同型で, 後者は (i) により B-射影的, したがって (i′) がでる. (ii′) の Φ は実際に次の如くして得られる:

$$\overbrace{{}_AA_B \underset{(1,1)}{\overset{\tau}{\cong}} \mathrm{Hom}_{(B,\beta^{-1})}(\mathrm{Hom}(A_B, B_{\beta B}), {}_BB) \overset{F}{\cong} \mathrm{Hom}_{(B,\beta^{-1})}({}_BA, {}_BB)}^{\Psi=F\tau}$$

ここに,

$$\tau(a)f=\beta^{-1}f(a)\,(a\in A,\ f\in\mathrm{Hom}\,(A_B, B_{\beta B})),$$
$$F(\varphi)(a)=\beta^{-1}\gamma^{-1}\beta\,\varphi(\Phi(a))\quad(a\in A,\ \varphi\in\mathrm{Hom}_{(B,\beta^{-1})}(\mathrm{Hom}(A_B, B_{\beta B}), {}_BB).$$

このようにして, Φ: ${}_BA_A \underset{(\gamma,\alpha)}{\cong} \mathrm{Hom}_{(B,\beta)}(A_B, B_B)$ に対して Ψ: ${}_AA_B\cong\mathrm{Hom}_{(B,\beta^{-1})}({}_BA, {}_BB)$ が一意的にしたがって一対一に定まる. そしてそれらの間の関係は,

(イ) $\Psi(a)(x)=\beta^{-1}\gamma^{-1}\{\Phi(x)(a)\}\quad(a,\ x\in A)$.

あるいは同等の条件として,

(ロ) $\Psi(1)(x)=\beta^{-1}\gamma^{-1}\,\Phi(1)(\alpha x)$

または,

(ハ) $\Psi(1)=\beta^{-1}\gamma^{-1}\,\Phi(1)\,\alpha$

で与えられる. ここで $\varphi=\Phi(1)$, $\psi=\Psi(1)$ とおけば, これらは夫々 $\mathrm{Hom}({}_{\alpha B}A_{B,\gamma B}B_{\beta B})$, $\mathrm{Hom}({}_BA_{\alpha^{-1}B,\beta^{-1}B}B_{\beta^{-1}\gamma^{-1}\beta B})$ に入ることが知られる. (Φ, Ψ), (φ, ψ) は夫々一組の双対同型, 一組のフロベニウス準同型とよばれる.

(3) δ を B の任意の自己同型とする. A/B が (α,β,γ)-フロベニウス拡大ならそれは $(\alpha, \delta\beta, \delta\gamma)$-フロベニウス拡大である. 証明は, ${}_BA_A \underset{(\gamma,\alpha)}{\cong} \mathrm{Hom}(A_B, B_{\beta B})$ と $\mathrm{Hom}(A_B, B_{\beta B}) \underset{(\delta,1)}{\overset{f}{\cong}} \mathrm{Hom}(A_B, B_{\delta\beta B})$ とを組合わせるとよい, ここに f は $f(\varphi)=\delta\varphi\,(\varphi\in\mathrm{Hom}(A_B, B_{\beta B})$ で定義される.

(4) A/B は $(\alpha,\beta,\gamma,\Phi)$-フロベニウス拡大とする. A/B が同時に $(\alpha,\beta,\gamma,\Phi')$-フロベニウス拡大ならば $\Phi'(x)=\Phi(ax)\,(x\in A)$ ならしめる $a\in V_A(B)^\times$ が存在する. 逆に, $a\in V_A(B)^\times$ に対して $\Phi'(x)=\Phi(ax)\,(x\in A)$ と定義すれば A/B は $(\alpha,\beta,\gamma,\Phi')$-フロベニウス拡大となる.

前半は, ${}_BA_A \underset{(\gamma,\alpha)}{\overset{\Phi'}{\cong}} \mathrm{Hom}(A_B, B_{\beta B}) \underset{(\gamma^{-1},\alpha^{-1})}{\overset{\Phi^{-1}}{\cong}} {}_BA_A$ において $a=(\Phi^{-1}\Phi')(1)$, $b=(\Phi'^{-1}\Phi)(1)$ とおけば, $\Phi'(x)=\Phi(ax)$, $ab=ba=1$ となることから知られる. 後半は逆をたどれば容易. したがって, A/B を (α,β,γ)-フロベニウス拡大とするときこれに対応する双対同型の全体と $V_A(B)^\times$ とは一対一に対応する. したがってもし異なる型のフロベニウス構造が入るとしても夫々に属する双対同型の個数は相等しい.

(5) (α,β,γ)-フロベニウス拡大 A/B が同時に (α',β',γ')-フロベニウス拡大であるための必十条件は $V_A(\gamma^{-1}\beta\beta'^{-1}\gamma' B, \alpha^{-1}\alpha' B)^\times\neq\phi$ である.

証明. A/B が $(\alpha,\beta,\gamma,\Phi)$-, $(\alpha', \beta', \gamma', \Phi')$-フロベニウス拡大であるとする.

$${}_BA_A \underset{(\gamma',\alpha')}{\overset{\Phi'}{\cong}} \mathrm{Hom}(A_B, B_{\beta' B}) \underset{(\beta\beta'^{-1},1)}{\overset{\Gamma_{\beta\beta'^{-1}}}{\cong}} \mathrm{Hom}(A_B, B_{\beta B}) \underset{(\gamma^{-1},\alpha^{-1})}{\overset{\Phi^{-1}}{\cong}} {}_BA_A,$$

ここで $\Gamma_{\beta\beta'^{-1}}$: $\mathrm{Hom}(A_B, B_{\beta' B})\cong\mathrm{Hom}(A_B, B_{\beta B})$ は $f\to\beta\beta'^{-1}f$ で定義される. $a=(\Phi^{-1}\Gamma_{\beta\beta'^{-1}}\Phi')(1)$ とおけば a は $V_A(\gamma^{-1}\beta\beta'^{-1}\gamma' B, \alpha^{-1}\alpha' B)$ に属し, $(\Phi^{-1}\Gamma_{\beta\beta'^{-1}}\Phi')(x)=a(\alpha^{-1}\alpha' x)\,(x\in A)$. 逆に, この様にして Φ' を定めれば A/B は $(\alpha',\beta',\gamma',\Phi')$-フロベニウス拡大となる.

A/B がフロベニウス拡大とすれば, (3) により常に $(\alpha,1,\gamma)$ 型及び $(\alpha',\beta',1)$ 型のフロベニウス構造の入ることがわかる. しかしながら $(1,\beta,1)$ 型のフロベニウス拡大 (すなわち, 中山一都筑 [11] の意味での) に reduce することは出来ない:

(6) 例. K は involutive antomorphism $^-$ をもつ体,

$$A=\left\{\begin{pmatrix} a & & & & \\ & c\bar{a} & & & \\ & & b & & \\ & & & a\bar{c} & \\ & & & & \bar{a}\end{pmatrix}\middle|\, a,\ b,\ c\in K\right\},\quad B=\left\{\begin{pmatrix} a & & & & \\ & \bar{a} & & & \\ & & \bar{a} & & \\ & & & a & \\ & & & & \bar{a}\end{pmatrix}\middle|\, a\in K\right\}$$

とする．A の自己同型 α を $x \to FxF$ (ただし $F=\begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}$ とする) で定め，$\beta=\gamma=1$ とすると A/B は $(\alpha, 1, 1)$-フロベニウス拡大である．所が $V_A(\beta^{-1}B,\ \alpha^{-1}B)^{\times}=\phi$ となることは容易に知られるから (5) によって $(1, \beta, 1)$ 型にはならない．

(7)　A/B を $(\alpha, \beta, \gamma, \Phi)$-フロベニウス拡大とするとき $P=V_A(B)$ に次の様な自己同型 $*$ を定義出来る：$\varphi=\Phi(1)$ とすれば $\varphi^{\alpha\rho}={}^{\rho^*}\varphi$．これをこのフロベニウス拡大の中山自己同型といい，次の如く構成する．φ は $\mathrm{Hom}\,({}_{\alpha B}A_B,\ {}_{\gamma B}B_{\beta B})$ の元であるが，更に $\mathrm{Hom}\,({}_{\alpha B}A_B,\ {}_{\gamma B}B_{\beta B})=\varphi^{\alpha P}$．なんとなれば，$\mathrm{Hom}\,(A_B,\ B_{\beta B}) \supset \mathrm{Hom}\,({}_{\alpha B}A_B,\ {}_{\gamma B}B_{\beta B})$ より $\mathrm{Hom}\,({}_{\alpha B}A_B,\ {}_{\gamma B}B_{\beta B})$ の元は $\varphi^{\rho}\ (\rho \in A)$ なる形をしている．所で，$\varphi^{\rho} \in \mathrm{Hom}\,({}_{\alpha B}A_B,\ {}_{\gamma B}B_{\beta B}) \Longleftrightarrow \varphi^{\rho}(\alpha b \cdot x)=\gamma b \cdot \varphi^{\rho}(x)\ (x \in A,\ b \in B) \Longleftrightarrow \varphi(\rho\alpha b \cdot x) = \gamma b \cdot \varphi(\rho x) = \varphi(\alpha b \cdot \rho \cdot x) \Longleftrightarrow \rho\alpha b=\alpha b \cdot \rho \Longleftrightarrow \rho \in V_A(\alpha B) \Longleftrightarrow \rho \in \alpha P$．同様に，$\mathrm{Hom}\,({}_B A_{\alpha^{-1}B},\ {}_{\beta^{-1}B}B_{\beta^{-1}\gamma^{-1}\beta B})={}^{\alpha^{-1}P}\psi\ (\psi=\Psi(1))$．更に対応 $f \to \beta^{-1}\gamma^{-1}f\alpha$ により $\mathrm{Hom}({}_{\alpha B}A_B,\ {}_{\gamma B}B_{\beta B}) \cong \mathrm{Hom}({}_B A_{\alpha^{-1}B},\ {}_{\beta^{-1}B}B_{\beta^{-1}\gamma^{-1}\beta B})$．したがって，次の如くして合成される写像 $\rho \to \rho^*$ は一対一且つ onto である：

$$\begin{array}{l}
P \to \alpha P \to \varphi^{\alpha P}=\mathrm{Hom}\,({}_{\alpha B}A_B,\ {}_{\gamma B}B_{\beta B}) \to \mathrm{Hom}\,({}_B A_{\alpha^{-1}B},\ {}_{\beta^{-1}B}B_{\beta^{-1}\gamma^{-1}\beta B})={}^{\alpha^{-1}P}\psi \to \alpha^{-1}P \to P \\
\rho \to \alpha\rho \to \varphi^{\alpha\rho} \longrightarrow \beta^{-1}\gamma^{-1}\varphi^{\alpha\rho}\alpha=(\beta^{-1}\gamma^{-1}\varphi\alpha)^{\rho}=\psi^{\rho}={}^{\alpha^{-1}\rho^*}\psi \longrightarrow \alpha^{-1}\rho^* \to \rho^*.
\end{array}$$

更に，$\psi^{(\rho_1\rho_2)}=(\psi^{\rho_1})^{\rho_2}=({}^{\alpha^{-1}\rho_1^*}\psi)^{\rho_2}={}^{(\alpha^{-1}\rho_1^* \cdot \alpha^{-1}\rho_2^*)}\psi={}^{\alpha^{-1}(\rho_1^*\rho_2^*)}\psi$ より $*$ は P の自己同型となる．$\psi^{\rho}={}^{\alpha^{-1}\rho^*}\psi$ を φ の関係で書きかえると $\varphi(\alpha\rho \cdot \alpha x)=\varphi(\alpha x \cdot \rho^*)\ (x \in A)$，すなわち．$\varphi^{\alpha\rho}={}^{\rho^*}\varphi$．

更に A/B の今一つのフロベニウス構造の型を $(\alpha',\ \beta',\ \gamma',\ \Phi')$ とすれば，(5) により $\Phi'(x)=\Gamma_{\mu}\Phi(a \cdot \nu x)$ とかける，ここに $\nu=\alpha^{-1}\alpha'$, $\mu=\beta\beta'^{-1}$, $a \in V_A(\gamma^{-1}\mu\gamma' B,\ \nu B)^{\times}$．したがって

$$\begin{aligned}
\Phi'(\rho x) &= \Gamma_{\mu}\Phi(a \cdot \nu\rho \cdot \nu x)=\Gamma_{\mu}\Phi(a \cdot \nu\rho \cdot a^{-1}a\nu x) \\
&= \Gamma_{\mu}^{(a \cdot \nu\rho \cdot a^{-1})^*}(\Phi(a \cdot \nu x))={}^{(a \cdot \nu\rho \cdot a^{-1})^*}\Phi'(x).
\end{aligned}$$

よって，これに対応する中山自己同型 $\tilde{*}$ は $\rho^{\tilde{*}}=(a \cdot \nu\rho \cdot a^{-1})^*$ で与えられる．

(8)　環拡大 A/B が (α, β, γ)-フロベニウス拡大であるための必十条件は，$a_1, \cdots, a_n \in A$, $b_1, \cdots, b_n \in A$ および $\varphi \in \mathrm{Hom}({}_{\alpha B}A_B,\ {}_{\gamma B}B_{\beta B})$, $\psi \in \mathrm{Hom}({}_B A_{\alpha^{-1}B},\ {}_{\beta^{-1}B}B_{\beta^{-1}\gamma^{-1}\beta B})$ が存在して次の条件をみたすことである：

(i)　$\sum a a_i \otimes_{\gamma^{-1}\beta B} b_i=\sum a_i \otimes_{\gamma^{-1}\beta B} b_i \cdot \alpha^{-1}a$.

(ii)　$\sum (\gamma^{-1}\varphi)(a_i)\, b_i=1=\sum a_i(\beta^{-1}\gamma\beta\psi)(b_i)$.

証明．　まず A/B を $(\alpha, \beta, \gamma, \Phi)$-フロベニウス拡大とする．$\Lambda^{-1}(a \otimes a')(f)=(\gamma^{-1}f)(a)\,a'$ ($f \in {}_B\mathrm{Hom}(A_B,\ B_{\beta B})$) で定義される $\Lambda^{-1}(a \otimes a')$ を考えることにより同型 Λ^{-1}: $A \otimes_{\gamma^{-1}\beta B} A \cong \mathrm{Hom}\,({}_B\mathrm{Hom}(A_B,\ B_{\beta B}),\ {}_{\gamma^{-1}B}A)$ を得る．$\Phi^{-1} \in \mathrm{Hom}({}_B\mathrm{Hom}(A_B,\ B_{\beta B}),\ {}_{\gamma^{-1}B}A)$ より，$\Lambda(\Phi^{-1})=\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i$ ($a_i,\ b_i \in A$) とあらわされる．この $a_1, \cdots, a_n,\ b_1, \cdots, b_n$ と $\varphi=\Phi(1)$, $\psi=\Psi(1)$ が上の条件をみたすことを示す．

$$\begin{aligned}
\Lambda^{-1}(aa_i \otimes b_i)(f) &= \sum (\gamma^{-1}f)(aa_i)b_i=\sum \gamma^{-1}f^{a}(a_i)b_i=\Lambda^{-1}(\sum a_i \otimes b_i)(f^{a}) \\
&= \Phi^{-1}(f^{a})=\Phi^{-1}(f) \cdot \alpha^{-1}a=\sum (\gamma^{-1}f)(a_i)b_i \cdot \alpha^{-1}a=\Lambda^{-1}(\sum a_i \otimes b_i \cdot \alpha^{-1}a)f
\end{aligned}$$

より (i) が得られる．次に，

$$\begin{aligned}
a &= \Phi^{-1}(\Phi(a))=\Phi^{-1}(\Phi(1)^{\alpha a})=\Lambda^{-1}(\sum a_i \otimes b_i)(\Phi(1)^{\alpha a}) \\
&= \sum (\gamma^{-1}\Phi(1)^{\alpha a})(a_i)\, b_i=\sum (\gamma^{-1}\Phi(1))(\alpha a \cdot a_i)\, b_i=\sum (\gamma^{-1}\Phi(1)(a_i)\, b_i)\, a
\end{aligned}$$

より $\sum (\gamma^{-1}\Phi(1))(a_i)\, b_i=1$ が得られる．更に，

$$\begin{aligned}
\Psi(1)(a) &= (\beta^{-1}\gamma^{-1}\Phi(1)\alpha)((\sum \gamma^{-1}\Phi(1)(a_i)\, b_i)\, a) \\
&= (\beta^{-1}\gamma^{-1}\Phi(1))(\sum \alpha\gamma^{-1}\Phi(1)(a_i)\, \alpha b_i \cdot \alpha a) \\
&= (\beta^{-1}\gamma^{-1})(\sum (\gamma\gamma^{-1}\Phi(1))(a_i)\, \Phi(1)(\alpha(b_i a)) \\
&= (\beta^{-1}\gamma^{-1})(\sum \Phi(1)(a_i)\, \Phi(1)(\alpha(b_i a)))=(\beta^{-1}\gamma^{-1})\Phi(1)(\sum a_i\beta^{-1}\Phi(1)(\alpha(b_i a)) \\
&= (\beta^{-1}\gamma^{-1}\Phi(1)\alpha)(a\sum \alpha^{-1}(a_i\beta^{-1}\Phi(1)\alpha b_i))=(\alpha^{-1}\sum a_i\beta^{-1}\Phi(1)\alpha b_i\Psi(1))(a)
\end{aligned}$$

より $\sum a_i\beta^{-1}\Phi(1)\alpha b_i=1$ したがって $\sum a_i(\beta^{-1}\gamma\beta\psi)(b_i)=1$ が得られる．

逆の場合は，$\Phi^{-1}(f)=\sum (\gamma^{-1}f)(a_i)\, b_i$ で Φ^{-1}: $\mathrm{Hom}(A_B,\ B_{\beta B}) \cong {}_B A_A$ を定義することが出来，A/B が $(\alpha, \beta, \gamma, \Phi)$-フロベニウス拡大となることが証明される．

(9)　上の $\{a_i,\ b_i | i=1, \cdots,\ n\}$ と中山自己同型の間には次の関係がある：

$$\sum a_i \otimes \rho b_i = \sum a_i\rho^* \otimes b_i \qquad (\rho \in P).$$

証明．　$\Lambda^{-1}(\sum a_i \otimes \rho b_i)(f) = \sum \gamma^{-1}f(a_i)\, \rho b_i = \rho\sum \gamma^{-1}f(a_i)\, b_i = \rho\Phi^{-1}(f)$
$= \Phi^{-1}(\rho^* f) = \sum \gamma^{-1}({}^{\rho^*}f)(a_i)\, b_i = \sum \gamma^{-1}f(a_i\rho^*)\, b_i = \Lambda^{-1}(\sum a_i\rho^* \otimes b_i)(f)$.

フロベニウス拡大 II

尾野寺　毅 (北海道大学)

1954年 Kasch は [4] においてフロベニウス多元環の拡張としてフロベニウス拡大なる概念を導入しその理論の基礎づけを与えた．これは更に最近のホモロジー代数の発展を反映して射影的フロベニウス拡大なる概念に迄拡張されて論じられるようになった．之等については Kasch [6] 及び中山–都筑 [11] 等において詳しく述べられてある．

さて Kasch の与えた射影的フロベニウス拡大の定義は次の通りである．即ち Γ を単位元 1 をもつ環，Λ を 1 を含む Γ の部分環とする．このとき次の条件がみたされるならば Γ は Λ の射影的フロベニウス拡大であるといわれる：

(1)　${}_\Lambda\Gamma_\Gamma \cong \mathrm{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda)$

(2)　Γ_Λ は有限生成且射影的

他方 $A \ni 1$ を可換体 K 上のフロベニウス多元環，即ちその第一及び第二正則表現が等値である多元環とする．すると A の中に K 上の双対基 $\{l_i\}$, $\{r_i\}$ が存在して A の各元 a に対して

$$l_i a = \sum_j \lambda_{ij}(a) l_j,\ a r_i = \sum_j r_j \lambda_{ji}(a),\quad \lambda_{ij}(a) \in K,\ i = 1, 2, \cdots, n$$

が成り立つ．今 h_i 及び k_i で夫々 $h_i(a) = \lambda_i$, $k_i(a) = \lambda'_i$ (但し，$a = \sum_j \lambda_j l_j = \sum_j r_j \lambda'_j$, λ_j, $\lambda'_j \in K$) により定義される A から K への K–線形変換を表わすならば A のすべての元 a に対して

$$(*)\quad a = \sum_j h_j(a) l_j = \sum_j r_j k_j(a),\quad h_i(l_j a) = k_j(a r_i)\quad (1 \leqq i, j \leqq n)$$

が成り立つ．この性質は K が可換体であることを必要とせず，従ってフロベニウス多元環の概念を拡張することができることを暗示している．即ち Γ を単位元 1 を有する環，Λ を 1 を含む Γ の部分環とする．このとき Γ, Λ につき次の条件を考える：Γ の元の族 $\{l_i\}$, $\{r_i\}$ 及び ${}_\Lambda\Gamma$ から Λ への準同型の族 $\{h_i\}$, Γ_Λ から Λ への準同型の族 $\{k_i\}$ が存在して Γ のすべての元 a に対して $(*)$ が満たされる．

そこで本節ではこの条件が前記 (1), (2) の条件に等値であることを証明する．即ち，

定理　(非可換環) Λ の拡大環 Γ が射影的フロベニウス拡大であるための必要且つ十分な条件は Γ の有限個の元 $l_1, l_2, \cdots, l_n$; $r_1, r_2, \cdots, r_n$, Λ–左加群 Γ から Λ への準同型 $h_1, h_2, \cdots, h_n$ Λ–右加群 Γ から Λ への準同型 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ を適当に見出して Γ のすべての元 γ に対して

$$\gamma = \sum_{j=1}^{n} h_j(\gamma) l_j = \sum_{j=1}^{n} r_j k_j(\gamma),\ \ h_i(l_j \gamma) = k_j(\gamma r_i)\quad 1 \leqq i,\ j \leqq n$$

が成り立つようにできることである．

定理の証明に先だち若干の準備をする．

今 $A = {}_\Gamma A_\Lambda$ を Γ–Λ–両側加群，$B = {}_\Lambda B_\Lambda$ を Λ–Λ–両側加群とすると A から B への Λ–右準同型写像の全体 $\mathrm{Hom}(A_\Lambda, B_\Lambda)$ は

$$(\lambda f \gamma)(a) = \lambda f(\gamma a),\quad f \in \mathrm{Hom}(A_\Lambda, B_\Lambda),\ \lambda \in \Lambda,\ \gamma \in \Gamma,\ a \in A$$

と定義することにより Λ–Γ–両側加群となる．同様に ${}_\Lambda A_\Gamma$ が Λ–Γ–加群で ${}_\Lambda B_\Lambda$ が Λ–Λ–加群なら $\mathrm{Hom}({}_\Lambda A, {}_\Lambda B)$ は

$$(\gamma \circ f \circ \lambda)(a) = f(a\gamma)\lambda,\qquad f \in \mathrm{Hom}({}_\Lambda A, {}_\Lambda B),\ \lambda \in \Lambda,\ \gamma \in \Gamma,\ a \in A$$

と定義することにより Γ–Λ–加群になる．更に加群 ${}_\Gamma A_\Lambda$ (resp. ${}_\Lambda A_\Gamma$) 及び ${}_\Gamma B_\Lambda$ (resp. ${}_\Lambda B_\Gamma$) が与えられたとき $\mathrm{Hom}(A_\Lambda, B_\Lambda)$ (resp. $\mathrm{Hom}({}_\Lambda A, {}_\Lambda B)$) は

$$(\gamma_1 f \gamma_2)(a) = \gamma_1 f(\gamma_2 a)\qquad (\text{resp. } (\gamma_1 \circ f \circ \gamma_2)(a) = f(a\gamma_1)\gamma_2)$$

と定義することにより Γ–Γ–加群となる．

補題 1.　Γ_Λ が有限生成且つ射影的ならば各 Λ–Γ'–両側加群 ${}_\Lambda C_{\Gamma'}$ に対して Γ–Γ'–同型

$$\Gamma \otimes_\Lambda C \cong \mathrm{Hom}({}_\Lambda\mathrm{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda), {}_\Lambda C)$$

が成り立つ．同様に ${}_\Lambda\Gamma$ が有限生成且つ射影的なら各 Γ'–Λ–両側加群 ${}_{\Gamma'}C_\Lambda$ に対して Γ'–Γ–同型

$$C \otimes_\Lambda \Gamma \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}({}_\Lambda\Gamma, {}_\Lambda\Lambda)_\Lambda, C_\Lambda)$$

が成り立つ．但し Γ' は任意の環をあらわす．

証明．写像 $\tau : \Gamma \otimes_\Lambda C \to \mathrm{Hom}({}_\Lambda\mathrm{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda), {}_\Lambda C)$ を

$$\tau(\gamma \otimes c) f = f(\gamma) c,\quad \gamma \in \Gamma,\ c \in C,\ f \in \mathrm{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda)$$

により定義する．τ が求める同型写像を与えることを示そう．$\Gamma = \Lambda$ の場合，$\tau(\lambda \otimes c) = 0$ は $f(\lambda) c = 0$ $\forall f \in \mathrm{Hom}(\Lambda_\Lambda, \Lambda_\Lambda)$ を意味する．ここで $f = 1_\Lambda$ (Λ における恒等写像) とおけば $\lambda c = 0$ 従って $\lambda \otimes c = 1 \otimes \lambda c = 0$ となる．即ち τ は monomorphism である．明らかに $\mathrm{Hom}(\Lambda_\Lambda, \Lambda_\Lambda) = \Lambda 1_\Lambda$ である．今 $g \in \mathrm{Hom}({}_\Lambda\mathrm{Hom}(\Lambda_\Lambda, \Lambda_\Lambda)), {}_\Lambda C)$ とする．ここで $c_0 = g(1_\Lambda)$ とおけば

$$\tau(1 \otimes c_0)(\lambda 1_\Lambda) = \lambda c_0 = \lambda g(1_\Lambda) = g(\lambda 1_\Lambda),\qquad \lambda \in \Lambda$$

となり，これより $\tau(1 \otimes c_0) = g$ を得る．従って τ は epimorphism でもある．τ が Λ–Γ'–同型であることは直接確かめられる．Γ_Λ が有限生成且つ射影的の場合にはよく知られた直和論法により τ が Γ–Γ'–同型であることがわかる．補題の後半も同様にして証明できる．

補題 2.　Λ–右加群 A_Λ が射影的であるためには A の元の族 $\{a_\alpha\}$ 及び Λ–準同型 $\varphi_\alpha : A \to \Lambda$ の族 $\{\varphi_\alpha\}$ が存在して A のすべての元 a に対して $a = \sum_\alpha a_\alpha \varphi_\alpha(a)$ となることが必要且つ十分である (ここで $\varphi_\alpha(a)$ は有限個の α を除き 0 である)．

証明．Cartan-Eilenberg : Homological Algebra, p. 132.

定理の証明． 必要性．Λ–Γ–同型 ${}_\Lambda\Gamma_\Gamma \cong \mathrm{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda)$ において Γ の単位元 1 に対応する $\mathrm{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda)$ の元を h とする．$\lambda 1 = 1\lambda (= \lambda)$ より $\lambda h = h\lambda$ が成り立つ故 $h \in \mathrm{Hom}({}_\Lambda\Gamma_\Lambda, {}_\Lambda\Lambda_\Lambda)$ である．又上の対応は $\Gamma \ni \gamma \leftrightarrow h\gamma \in \mathrm{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda)$ により与えられる．さて Γ_Λ は有限生成且つ射影的なる故 ${}_\Lambda\mathrm{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda)$，従って ${}_\Lambda\Gamma$ も又有限生成且つ射影的である．更に補題 1 において $C = \Lambda$, $\Gamma' = \Lambda$ とおけば Γ–Λ–同型 ${}_\Gamma\Gamma_\Lambda \cong \mathrm{Hom}({}_\Lambda\Gamma, {}_\Lambda\Lambda)$ を得る．しかもこの同型が $\gamma \longleftrightarrow \gamma \circ h$ により与えられることは

$$\begin{aligned}\Gamma \ni \gamma &\longleftrightarrow (h\gamma' \to h(\gamma'\gamma)) \in \mathrm{Hom}({}_\Lambda\mathrm{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda),\ {}_\Lambda\Lambda)\\ &\longleftrightarrow (\gamma' \to h(\gamma'\gamma) = \gamma \circ h(\gamma')) \in \mathrm{Hom}({}_\Lambda\Gamma, {}_\Lambda\Lambda)\end{aligned}$$

によりわかる．そこで今次の Γ–Γ–加群及び Γ–Γ–同型の図式を考える．

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}({}_\Lambda\Gamma, {}_\Lambda\Lambda)_\Lambda, \Gamma_\Lambda) & \longleftrightarrow & \Gamma \underset{\Lambda}{\otimes} \Gamma & \longleftrightarrow & \mathrm{Hom}({}_\Lambda\mathrm{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda), {}_\Lambda\Gamma) \\
(\gamma\cdot h \to \gamma a) & & \sum_i r_i \otimes l_i & & (h\gamma \to \gamma) \\
\updownarrow & & & & \updownarrow \\
(\gamma \to \gamma a) & & & & (\gamma \to \gamma) \\
\mathrm{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Gamma_\Lambda) & \leftarrow & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \rightarrow & (\mathrm{Hom}({}_\Lambda\Gamma, {}_\Lambda\Gamma)
\end{array}$$

ここで上の行における Γ-Γ-同型は補題において ($C=\Gamma$, $\Gamma'=\Gamma$ とおくことにより) 与えられる同型であり，列における同型は夫々同型 $\gamma \leftrightarrow h\gamma$ 及び $\gamma \leftrightarrow \gamma\cdot h$ より自然に誘導される Γ-Γ-同型である．之等の同型を連結することにより $\mathrm{Hom}({}_\Lambda\Gamma, {}_\Lambda\Gamma)$ の $\mathrm{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Gamma_\Lambda)$ の上への Γ-Γ-同型を得る． $f\in \mathrm{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Gamma_\Lambda)$ をこの同型の下での $1_\Gamma \in \mathrm{Hom}({}_\Lambda\Gamma, {}_\Lambda\Gamma)$ の像とする．するとすべての Γ の元 γ に対して $\gamma f=f\gamma$ が成り立つ．即ちこれは $\gamma f(\gamma')=f(\gamma\gamma')$, $\gamma, \gamma' \in \Gamma$ を意味する． 従って f は Γ の Γ-Λ-自己準同型であり Γ の適当な元 a による右乗により与えられる．今 $\sum r_i \underset{i}{\otimes} l_i \in \Gamma \underset{\Lambda}{\otimes} \Gamma$ を上の図式における $(h\gamma \to \gamma) \in \mathrm{Hom}({}_\Lambda\mathrm{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda), {}_\Lambda\Gamma)$ の像とする．すると我々の同型写像の構成の仕方から

$$\gamma = \sum_i h(\gamma r_i) l_i, \quad \gamma a = \sum_i r_i h(l_i\gamma), \quad \gamma\in\Gamma$$

を得る．上の第１式において $\gamma=1$ とおくと $1=\sum_i h(r_i) l_i$ となり従って $\gamma=\sum_i h(r_i) l_i\gamma$ となる．之より $h(\gamma)=\sum_i h(r_i) h(l_i\gamma) = h(\gamma a) = a\cdot h(\gamma)$ が従い，これは $h=a\cdot h$ 即ち $a=1$ を意味する．かくして $\gamma = \sum_i h(\gamma r_i) l_i = \sum_i r_i h(l_i\gamma)$ $(\gamma\in\Gamma)$ が成り立つ．ここで $h_i(\gamma)=h(\gamma r_i)$, $k_i(\gamma)=h(l_i\gamma)$ により h_i, k_i を定義すれば $\{l_i\}$, $\{r_i\}$, $\{h_i\}$ 及び $\{k_i\}$ が定理において要求されているものであることがわかる．

十分性．補題２により Γ_Λ は有限生成且つ射影的である． 今 Γ と Γ との Λ におけるスカラー積を $(\gamma_1, \gamma_2)=\sum_i h_i(\gamma_i) k_i(\gamma_2)$ $(\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma)$ により定義する．この積は双線形且 Γ-associative である即ち．

(i) $(\lambda\gamma_1, \gamma_2)=\lambda(\gamma_1, \gamma_2)$, $\quad (\gamma_1, \gamma_2\lambda)=(\gamma_1, \gamma_2)\lambda$

(ii) $(\gamma_1+\gamma_1', \gamma_2)=(\gamma_1, \gamma_2)+(\gamma_1', \gamma_2)$, $\quad (\gamma_1, \gamma_2+\gamma_2')=(\gamma_1, \gamma_2)+(\gamma_1, \gamma_2')$

(iii) $(\gamma_1\gamma, \gamma_2)=(\gamma_1, \gamma\gamma_2)$, $\quad \lambda\in\Lambda$, $\gamma_1, \gamma_1', \gamma_2, \gamma_2', \gamma\in\Gamma$

を満す．第３の等式は

$$\begin{aligned}
(\gamma_1\gamma, \gamma_2) &= \sum_i h_i(\gamma_1\gamma) k_i(\gamma_2) = \sum_i h_i(\sum_j h_j(\gamma_1) l_j\gamma) k_i(\gamma_2) \\
&= \sum_{i,j} h_j(\gamma_1) h_i(l_j\gamma) k_i(\gamma_2) = \sum_{i,j} h_j(\gamma_1) k_j(\gamma r_i) k_i(\gamma_2) \\
&= \sum_j h_j(\gamma_1) k_j(\sum_i \gamma r_i k_i(\gamma_2)) = \sum_j h_j(\gamma_1) k_j(\gamma\gamma_2) = (\gamma_1, \gamma\gamma_2)
\end{aligned}$$

より従う．ここで次の Γ から Λ への写像 h を考える：

$$h: \quad \Gamma \ni \gamma = \gamma_1\gamma_2 \longrightarrow h(\gamma)=(\gamma_1, \gamma_2).$$

(iii) により $h(\gamma)=(\gamma_1, \gamma_2)=(1, \gamma_1\gamma_2)=(1, \gamma)$ ゆえ h はよく定義された Γ から Λ への Λ-Λ-準同型写像である．さて対応 φ : $\Gamma\ni\gamma \longrightarrow h\gamma\in \mathrm{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda)$． が Γ から $\mathrm{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda)$ 上への Λ-Γ-同型であることを示そう．$\varphi(\gamma)=h\gamma=0$ とする．すると

$$0 = h\gamma(r_i) = h(\gamma r_i) = \sum_j h_j(\gamma) k_j(r_i)$$

$$= \sum_j h_j(\gamma) h_i(l_j) = h_i(\sum_j h_j(\gamma) l_j) = h_i(\gamma), \quad i=1, 2, \cdots\cdots, n$$

を得，従って $\gamma=\sum_i h_i(\gamma) l_i = 0$ となる．即ち φ は monomorphism である．次に $f\in \mathrm{Hom}(\Gamma_\Lambda, \Lambda_\Lambda)$ として $\gamma'=\sum_i f(r_i) l_i$ とおく．すると

$$\gamma = \sum_i r_i k_i(\gamma) = \sum_i r_i(k_i(\sum_j r_j k_j(\gamma))) = \sum_{i,j} r_i k_i(r_j) k_j(\gamma) = \sum_{i,j} r_i h_j(l_i) k_j(\gamma)$$

なる故

$$\begin{aligned}
f(\gamma) &= \sum_{i,j} f(r_i) h_j(l_i) k_j(\gamma) = \sum_j (\sum_i f(r_i) h_j(l_i)) k_j(\gamma) \\
&= \sum_j h_j(\sum_i f(r_i) l_i) k_j(\gamma) = \sum_j h_j(\gamma') k_j(\gamma) = h(\gamma'\gamma) = h\gamma'(\gamma)
\end{aligned}$$

を得，従って $f=h\gamma'=\varphi(\gamma')$ となる．即ち φ は epimorphism である．

系　Λ の拡大環 Γ が射影的フロベニウス拡大であるための必要且つ十分条件は Γ の有限個の元 $l_1, l_2, \cdots\cdots, l_n$; $r_1, r_2, \cdots\cdots, r_n$ 及び Λ-Λ-両側加群 Γ から Λ への準同型 h を適当に見出して Γ のすべての元 γ に対して $\gamma = \sum_i h(\gamma r_i) l_i = \sum_i r_i h(l_i\gamma)$ が成り立つようにできることである．

文　　献

[1] H. Cartan and S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton (1965).

[2] S. Eilenberg and T. Nakayama, On the dimension of modules and algebras II, Nagoya Math. J., 9 (1955), 1-16.

[3] K. Hirata, On relative homological algebra of Frobenius extensions, Nagoya Math. J., 15 (1959), 17-28.

[4] F. Kasch, Grundlagen einer Theorie der Frobenius-Erweiterungen, Math. Ann., 127 (1956), 453-474.

[5] F. Kasch, Homologisch Algebra, Seminarausarbeiterung Math. Institut der Universität Heidelberg (1959/60).

[6] F. Kasch, Projective Frobenius-Erweiterungen, Sitzungsber. Heidelberger Akad., (1960/61), 89-109.

[7] F. Kasch, Ein Satz über Frobenius-Erweiterungen, Arch. Math., 12 (1961), 102-104.

[8] F. Kasch, Dualitätseigenschaften von Frobenius-Erweiterungen, Math. Z., 77 (1961), 219-227.

[9] B. Müller, Quasi-Frobenius-Erweiterungen, Math. Z., 85 (1964), 345-368.

[10] T. Nakayama and T. Tsuzuku, A remark on Frobenius extensions and endomorphism rings, Nagoya Math. J., 15 (1959), 9-16.

[11] T. Nakayama and T. Tsuzuku, On Frobenius-extensions I and II, Nagoya Math. J., 17 (1960), 89-110, 19 (1961), 127-148.

[12] T. Nakayama and Tsuzuku, Correction to our paper "On Frobenius-extensions II", Nagoya Math. J., 20 (1962), 205.

[13] T. Onodera, Some studies on projective Frobenius extensions, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I, 18 (1964), 89-107.

[14] B. Pareigis, Einige Bemerkungen über Frobenius-Erweiterungen, Math. Ann., 153 (1964), 1-13,

可換環上の半単純多元環

服部　昭（東京教育大学）

ホモロジー代数は半単純でない環をとり扱うときに意味をもつものだから，半単純環に関する話はホモロジー代数をテーマとするシンポジウムにはふさわしくないと思われるかもしれない．しかし，ここでいう半単純多元環の概念はホモロジー代数の考え方，とくに相対ホモロジー代数という立脚点に立ってはじめて浮び上って来るもので，やはりホモロジー代数の支配下にあるといってもよいだろう．

このようなものを考えてみることの背景にはいろいろなことがある．可換環 R 上の多元環で従来考察されてきた重要なものの多くは，R が整域の場合で，それは R の商体 K の上の多元環の order という角度から研究されているが，R 上で直接とり扱うことはそれ自身で興味深いことだし，零因子をもつ R を基礎にするものが次第に扱われるようになるだろうから，望ましいことでもある．Adèle 環などもその一例といえるだろう．代数数体のガロア拡大 L/K に関し，L の adèle 環を $A(L)$, idèle 群を $I(L)$ とすれば，数論で重要な写像 $H^2(L^*) \to H^2(I(L))$ は多元環論的に Brauer 群の写像 $B_L(K) \to B_L(A(K))$ として捉えられる．$B_L(A(K))$ は $A(K)$ 上の中心的分離的多元環に関するものである．また有限群 G の整数表現論は群環 $R(G)$ が完全可約性をもたない点に根本的な困難の一つがあって，$K(G)$ との関係，$R/\mathfrak{m}(G)$ との関係等を用いて研究されるが，R 上の多元環のカテゴリー内で基準になる完全可約性の問題がよく調べられ，それとの関係を見るというようなことができることが望ましい．

古典的な場合と同様，重要な半単純環は多く分離的であろうが，分離的多元環の理論は主として両側加群を直接の対象としているので，片側加群を表現論的に見るには半単純環が自然な領域をなすであろう．[4] に述べた結果はまだ概略的，表面的なものと云わねばならない．以下ではその結果の主なものを紹介しながら未解決の問題を挙げて行くことにしたい．なお，[4] 以後に得られた若干の結果も述べるが，これは近く発表の予定である．

1. 定　義． 取扱う環は単位元 1 をもち，1 は加群に恒等写像として作用するものとする．有限生成というときはいつも加群としての生成についていう．可換環 R 上の“半単純”多元環というべきものを考えたいのであるが，それにはいろいろの考え方があり得る．たとえば，環として半単純で R 上の多元環をなすものが考えられるが，ここで問題にするのはそのような型のものではなく，R 上の“多元環としての半単純性”というようなものである．さて，体の上の半単純多元環は，1) 単純環の直和，2) 根基が 0，3) 表現の完全可約性，などによって特徴づけられるが，ここでは 3) の立場で考える．これにも又さまざまの変形があり得るが，相対ホモロジー代数の考え方で次の様に定式化するのが自然な捉え方の一つと云えるであろう：

定義． 有限生成左 A-加群の完全系列で R-加群列として split するものはすべて A-加群列としても split するとき，A を左半単純と呼ぶ．別な云い方をすれば，有限生成左 A-加群がすべて (A, R)-射影的 [6] であるとき A を左半単純と呼ぶ．同様に右半単純性が定義され，両側半単純のとき単に半単純と呼ぶ．

ただちに，次の三つの問題が考えられる．

問題 1. 有限生成左 A-加群がすべて (A, R)-射影的のとき，任意の左 A-加群が (A, R)-射影的であるか？

問題 2. 左半単純性と右半単純性とは同値であるか？

問題 3. (A, R)-入射性から同じように定義したものと左半単純性とは同値であるか？

問題 1 の答は否定的である様に想像されるが，特に反例を作る試みをしていない．問題 1 が否定的の場合，定義の形としてはすべての加群の射影性を仮定する方がすっきりしているしそれで多くのことが同様に論じられ，ある場合にはその方が適切でさえあるが，有限生成加群に限定したときにはよい二，三の重要な性質を証明し難くなるので，有限性の条件がつきまとうことは甘受して上のような定義によることにしている．問題 2, 3 については，R が Noether 環で A が R-有限生成の場合には肯定的だが，全く一般にはおそらく否定されるであろう．

上の半単純性の定義は，R に関し相対的に考えることで，同様に環の部分環に関する半単純拡大の概念を導くが，ここではふれないことにする．

2. 分離性との関係，その他． 分離的多元環の概念はすでに一般化されて研究されている ([1], [2])．A が分離的とは両側 A-加群 A すなわち $A^e(=A\otimes A^o)$-加群 A が射影的なことと定義される。これとの関係は古典的な場合と同様で，分離的ならば半単純であり，R-有限生成な A が分離的であるためには A^e が半単純なることが必要十分，また R が Noether 環のとき R-有限生成な A が分離的であるためには絶対半単純なることが必要十分である．しかし，次の問題は未解決である．

問題 4. 中心的 ($R=A$ の中心) 半単純環は分離的であるか？

これが成り立てば，半単純環の分離性は中心なる可換多元環の分離性と同値になる．中心に関する次の問題は，R が Dedekind 環で，A が R-有限生成射影的の場合には正しいことが知られている：

問題 5. (左) 半単純環の中心はまた半単純であるか？

$\mathfrak{m}$ を R の極大イデアルとするとき，局所環 $R_\mathfrak{m}$ 上の $A_\mathfrak{m}=A\otimes R_\mathfrak{m}$ や，剰余体 $R/\mathfrak{m}$ 上の $A/\mathfrak{m}A$ が考えられる．Noether 環 R 上の有限生成な A が半単純であるためには，すべての $A_\mathfrak{m}$ が半単純であることが必要十分である．$A/\mathfrak{m}A$ との関係がよくわかると，体の上の場合の結果が適用出来て都合がよいが，次の二点が不明である：

問題 6. A が中心的半単純のとき，$A/\mathfrak{m}A$ は $R/\mathfrak{m}$ 上中心的半単純であるか？

問題 7. 任意の $\mathfrak{m}$ について $A/\mathfrak{m}A$ が $R/\mathfrak{m}$ 上半単純なら，A は R 上半単純であるか？

問題 6 が肯定されれば問題 4 も肯定される．また問題 7 は，有限性の条件がある場合，局所化の方法と，局所的な場合について完備化を考える方法 ([5] 参照) とにより，次の問題に帰着する：

問題 7′. R を完備局所環，$\mathfrak{m}$ をその極大イデアルとするとき，$A/\mathfrak{m}A$ の半単純性から A のそれが導かれるか？

3. Frobenius 性との関係． R-左 (右) 加群 M の双対右 (左) 加群 $\mathrm{Hom}_R(M, R)$ を M^* であらわす．とくに，A^* には A と同様 A-左，右，両側加群なる三種の構造が与えられる．R-有限生成射影的な A が左加群として $A^*\cong A$ をみたすことと右加群として $A^*\cong A$ をみたすこととは同値で，このとき A は R 上 Frobenius と呼ばれる．また両側加群として $A^*\cong A$ なるときは対称的と呼ばれる．周知の如く，体上の半単純環は対称的である．

問題 8. 環上の半単純環について，Frobenius とか対称的とかいうことがやはり成り立つか？

可換または split type の分離的多元環が Frobenius であることはすでに平田氏により確かめられたが，一般の場合はわからない．自由加群でない射影的加群の存在などが関係して，一般には成立たないのではないかとも考えられる．そこで少し弱めて quasi-Frobenius ということとの関係を考える．A が Noether 環のとき，quasi-Frobenius とは A が左 A-(または右A-)入射的なることである [3]．R が体のときには一次写像の転置をつくる対応で $\mathrm{Hom}_A(A^*, M) \cong \mathrm{Hom}_A(M^*, A)$ が任意の有限次元 A-加群 M について成り立つから，A が右 A-入射的なることと A^* が左 A-射影的なることとは同値である．しかし，R が一般の場合にはこの二つの性質は必ずしも同値ではないであろう．いま，A が R-有限生成射影的で A^* が左 (右) A-射影的のとき，A を左 (右) 半 Frobenius と呼ぼう．これは，右 (左) A-有限生成射影的加群の双対がまた射影的であることを意味する．R-有限生成射影的な左半単純環 A が左半 Frobenius であることは定義から明らかであるが，A の自己入射性はわからない．それで，上の半 Frobenius 性に興味がある．左 A-加群 A^* の自己準同型環は A の元の右作用から成るから，左半 Frobenius のとき A^* は右-completely faithful である (本誌：東屋氏の報告参照)．よって，R-有限生成射影的な A が左かつ右半 Frobenius なることは，左 A-加群 A^* が射影的かつ completely faithful なることとも，右 A-加群 A^* が射影的かつ completely faithful なることとも同値で，このとき単に半 Frobenius という．(両側) 半単純環は半 Frobenius である．

問題 9. 半 Frobenius 多元環の性質を調べること．

たとえば，A を左半 Frobenius とする．そのとき，R-有限生成射影的な右 A-加群 M の A-有限生成射影的な部分加群で R-直和因子なるものは A-直和因子をなす．これから R-射影的な A-加群の射影次元が 0 か ∞ であることが分る．また，R-有限生成射影的な A-加群が忠実ならば completely faithful である．

多元環の対称性についても同様の問題が考えられる。すなわち，体上の場合には A が A^e-入射的であることと A^* が A^e-射影的であることとは同値であるが，一般には云えない．いま，A が R-有限生成射影的で A^* が A^e-射影的のとき，A を半対称的と呼ぶことにしよう．分離的多元環は半対称的であり，半対称的ならば半 Frobenius である．

問題 10. 半対称的多元環の性質を調べること．

4. 半単純環の構造． [4] では，やや特殊な場合について構造を調べている。ここでは Wedderburn の構造定理の拡張を述べる．A-加群 M が R-split する自明ならざる A-部分加群をもたないとき，(A, R)-既約であるという．以下では単に既約という．A が左半単純ならば，有限生成左 A-加群は有限個の既約加群の直和である，とくに A 自身は既約左イデアルの直和である．左半単純環 A が忠実な既約加群をもつとき，A を左単純環と呼ぶ．R が Prüfer 環のとき，A が忠実な既約加群をもつためには A が R の商体 K 上の単純多元環の order なることが必要十分であり，左単純環とは左半単純な order を意味する．この場合については [4] で取扱われている．一般に左単純環は両側イデアルの直和に分解されない．とくに，両側単純環は R-split する両側イデアルをもたない。両側半単純環が片側単純であれば両側単純であり，一般に両側半単純環は両側単純環の直和としてあらわされる．

左半単純環 D で左 D-加群 D が既約なるものを左 division algebra と呼ぶ．これはもちろん左単純である．両側単純環について，左 division algebra なることと右 division algebra

なることとは同値で，このとき単に division algebra という．R-有限生成射影的な A が左単純であれば，右 division algebra D と忠実な右 D-加群 M があって，A は M の D-自己準同型環と同型になる．逆もある弱い条件の下で成り立つ．

問題 11. 単純環について忠実な既約加群や $\{D, M\}$ の多様性を記述すること．

5. その他． 1) 半単純性と相補的な概念として根基を考えたいが，それには難点がある．まず Jacobson 根基はいまの立場での“多元環根基”にはふさわしくない．極端な例でいうならば，任意の可換環 R は R 上の多元環として半単純だから，R 上の多元環としての R の根基は 0 であってほしい．一般に，A のイデアル N で A/N が半単純になるものに最小は必ずしも存在しない．たとえば，$R=Z$, $A=Z[i]$ のとき，素数 $p\neq 2$ について A/pA はつねに半単純であるが，$\cap pA=0$ で A 自身は半単純でない．これは無限個のイデアルの共通分をとる場合であるが，有限個の場合はどうだろうか？

問題 12. A/I_1, A/I_2 が半単純のとき，$A/I_1 \cap I_2$ も半単純であるか？

これが成立てば，半単純な A/I の射影極限を考えることができる．R が完備な場合にはかかるものを考えることも意味があろう．

2) A_1, A_2 を中心的分離的多元環 B の部分環で，同型 φ: $A_1 \to A_2$ があるとする．

問題 13. どのような φ が B の自己同型に拡張されるか？ また，内部同型に拡張されるのはどのような場合か？

これについては，[7] がよい model をなすであろう．

文　献

[1] M. Auaslander and O. Goldman, The Brauer group of a commutative ring, Trans. Amer. Math. Soc., 97 (1960), 367–409.

[2] G. Azumaya, On maximally central algebras, Nagoya Math. J., 2 (1951), 119–150.

[3] S. Eilenberg and T. Nakayama, On the dimension of modules and algebras II, Nagoya Math. J., 9 (1955), 1–16.

[4] A. Hattori, Semi-simple algebras over a commutative ring, J. Math. Soc. Japan, 15 (1963), 404–419.

[5] D. G. Higman, On representations of orders over Dedekind domains, Can. J. Math., 12 (1960), 107–125.

[6] G. Hochschild, Relative homological algebra, Trans. Amer. Math. Soc., 82 (1956), 246–269.

[7] A. Rosenberg and D. Zelinsky, Automorphisms of separable algebras, Pacific J. Math., 11 (1961), 1109–1117.

Maximal order のホモロジー的考察

原　田　　学　(大阪市立大学)

R を Dedekind 整域，K をその商体，そして Σ を K 上の単純環とする．古くから R の整数の理論を K の代りに Σ の中で組立てることが考えられて来た ([1], [1′], [6], [8] 及び [14] 等)．そのために Σ の中で maximal order が考えられ，そこで R と同じ様な理論が成り立つこともよく知られている．更に Σ を一般に商環としてその理論が拡張されている ([1], [1′] 及び [16])．

ここでは Auslander 及び Goldman [3] に与えられている方法によって maximal order のホモロジー的な性質を二，三考えることにする．この様な考え方は Chevalley [6] にも与えられているがそれを functor Hom，$\otimes$ で書きかえ，それらの性質を考えることになる．

先ず，Dedekind 整域のホモロジー的な第一の特徴はそれが hereditary ring である．即ち，すべてのイデアルが projective であることである．またこのことは R の可換整域性よりイデアルが可逆的ということと一致する．この見地から Σ の中で Dedekind 整域に相当する部分環として hereditary order (即ち，Σ の部分環 Λ が $\Lambda\cdot K=\Sigma$ をみたし且つ R–有限 (order の定義) でその左イデアルが Λ–projective) を考えるのは当然のことである。以下このような order のことを簡単のために h-order とよぶことにしよう．

今後 Λ の左イデアル $\mathfrak{l}$ とは ① $\mathfrak{l}$ は左 R–加群 ② $\mathfrak{l}\cdot K=\Sigma$ ③ $r\mathfrak{l}\subseteq\Lambda$ なる $r\neq 0\in R$ が存在するごときものを意味し，更に次の記号を用いる：

$$\Lambda^l(\mathfrak{l})=\{x\,|\,x\in\Sigma,\ x\mathfrak{l}\subseteq\mathfrak{l}\},$$
$$\Lambda^r(\mathfrak{l})=\{x\,|\,x\in\Sigma,\ \mathfrak{l}x\subseteq\mathfrak{l}\},$$
$$\mathfrak{l}^{-1}=\{x\,|\,x\in\Sigma,\ \mathfrak{l}x\subseteq\Lambda^l(\mathfrak{l})\}=\{x\,|\,x\in\Sigma,\ x\mathfrak{l}\subseteq\Lambda^r(\mathfrak{l})\}.$$

明らかに $\Lambda^l(\mathfrak{l})$, $\Lambda^r(\mathfrak{l})$ は order になり，$\mathfrak{l}^{-1}$ はイデアルになる．これらは又 functor Hom を用いて次の様に書きあらわされる：

$$\Lambda^l(\mathfrak{l})=\mathrm{Hom}_{\Lambda^r(\mathfrak{l})}(\mathfrak{l},\ \mathfrak{l}),\qquad \Lambda^r(\mathfrak{l})=\mathrm{Hom}_{\Lambda^l(\mathfrak{l})}(\mathfrak{l},\ \mathfrak{l}),$$
$$\mathfrak{l}^{-1}=\mathrm{Hom}_{\Lambda^l(\mathfrak{l})}(\mathfrak{l},\ \Lambda^l(\mathfrak{l}))=\mathrm{Hom}_{\Lambda^r(\mathfrak{l})}(\mathfrak{l},\ \Lambda^r(\mathfrak{l})).$$

更に $\mathfrak{l}$ が Λ-projective 左イデアルであれば任意の右イデアル $\mathfrak{r}$ に対して $\mathfrak{r}\otimes_\Lambda\mathfrak{l}=\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{l}$ であることは明らかである．

以上の如き必要とされる道具を functor Hom，$\otimes$ で書直しておくと，下記の如くなる：$\mathfrak{l}$ が $\Lambda_r(\mathfrak{l})$- projective な $\Lambda^r(\mathfrak{l})$-ideal ならば，$\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{l}^{-1}=\mathfrak{l}\otimes_{\Lambda^r(\mathfrak{l})}\mathfrak{l}^{-1}=\mathfrak{l}\otimes_{\Lambda^r(\mathfrak{l})}\mathrm{Hom}'_{\Lambda^r(\mathfrak{l})}(\mathfrak{l},\ \Lambda^r(\mathfrak{l}))$．
これと [5] とから次の定理を得る．

定理 1. $\mathfrak{l}\cdot\mathfrak{l}^{-1}=\Lambda^l(\mathfrak{l})\Longleftrightarrow\mathfrak{l}$ は有限 $\Lambda^r(\mathfrak{l})$-projective 加群 (このとき $\mathfrak{l}$ は $\Lambda^l(\mathfrak{l})$ で可逆的であると呼ぼう)．

Λ が maximal order であればすべての単側イデアルが可逆的であることはよく知られているから ([1], [7])，上のことより Λ-projective となる．更に L を Λ の環としての左イデアルとすれば，$L\cdot K$ は Σ の左イデアル，故に $\Sigma=L\cdot K\oplus L_0'$ とあらわされ，$L_0=\Lambda\cap L_0'$ とおけば

$\underline{L}=L\oplus L_0$ が Λ のイデアルになることは明らかである．よって L も Λ-projective になることがわかる．即ち，

定理 2 ([3])．Λ が maximal order ならばそれは h-order である．

勿論，定理 2 の逆は一般に成り立たない (可換環の場合には成立)．したがって次に問題になるのは maximal order と h-order との間にはどの程度の違いがあるかということである。

先ず Λ が h-order であればそれを含む任意の order は又 h-order であること，および Σ の中に h-order Λ があれば R が単に整域という仮定のみから出発しても Λ の中心は Dedekind 整域になることがわかり，結局 Σ が K 上の central algebra であればよいことになる ([9])．

さて上記の問題に対して，二つの order $\Lambda\subseteq\Gamma$ の差として $C_\Lambda(\Gamma)=\{x|x\in\Sigma,\ \Gamma x\subseteq\Lambda\}$ を考えよう。明らかに $C_\Lambda(\Gamma)$ は Λ の中の両側イデアルであるが，$C_\Lambda(\Gamma)=\mathrm{Hom}_\Lambda^l(\Gamma,\ \Lambda)$ と表わされるから functor Hom 及び $\otimes$ の性質，特に projective 加群上における性質を用いて次の定理が得られる．

定理 3 ([9])．Λ を h-order，A を巾等な Λ のイデアル，Γ を Λ を含む任意の order とすれば

$$A\to\Gamma=\Lambda^l(A)\to C_\Lambda(\Gamma)=A$$

なる対応が $\{A\}$ と $\{\Gamma\}$ との間の逆束同型を与える．

定理 3 により，Λ と maximal order との差は巾等イデアルの作る列の長さで決まることがわかった (maximal order Λ の巾等イデアルは Λ 自身である)．更に，h-order と maximal order との関係を考える時に R を局所環として考えればよいから ([10[)．R は唯一つの極大イデアル $\mathfrak{p}$ を持つ付値環としよう．このとき

補題 1 ([9])．Λ の根基 N を真に含む両側イデアル A に対して，$I(A)+N=A$ となるような唯一つの巾等イデアル $I(A)$ が存在する．このとき $A\supseteq B\Rightarrow I(A)\supseteq I(B)$．

補題 1 と定理 3 から，Λ を含む order は Λ/N を単純両側イデアルの和に分解したときその個数によって完全に決まることがわかる．即ち，

定理 4 ([9])．Λ を h-order，R を局所環，N を Λ の根基とする．Λ を含む order Γ はすべて h-order で，かかる Γ と Λ/N の両側イデアルとの間に一対一の対応がある．特に Λ/N が n 個の単純環の直和とすれば，Λ を含む丁度 n 個の maximal order が存在し，Γ はそれを含む maximal order の共通分として一意的にあらわされる．

定理 4 により，固定した h-order とそれを含む h-order との関係は完全に解明されたわけである．双対的に Λ に含まれる h-order も決定されるが，それは Λ/N の単側イデアルによる分解の方法によって得られる ([10])．更に，任意の二つの h-order の関係等も知られているが，それらについては又別の機会に述べることにしよう ([4], [10])．

次に問題になるのは Dedekind 整域におけるイデアルの分解定理が h-order ではどんな型で一般化されるかということである．勿論，単側イデアル及び両側イデアルの分解が問題になるが，前者については更に詳しい考察が要求されるので ([11] 参照)，ここではもっぱら後者についてだけのべようと思う．したがって，以下においてイデアルとは常に両側イデアルを意味するものとする．

今 Σ は K 上の単純環として考えているが，次にのべる方法は [1], [2], [6] における如く Σ を商環としたときでも適当な仮定のもとで適用される．

補題 2. h-order Λ の中の極大イデアルは可逆イデアルであるか巾等イデアルである，ここにイデアル A が可逆とは $AA^{-1}=A^{-1}A=\Lambda$ を意味する.

補題 3. h-order Λ の中の極大イデアル M が巾等ならば，$C(\Lambda^r(M))$ も又巾等な極大イデアルである.

以上の証明は [12] に与えられている. よって，巾等な極大イデアル M に対して巾等な極大イデアルの列

$$M_1=M,\ M_2=C(\Lambda^r(M)),\ \cdots,\ M_i=C(\Lambda_r(M_{i-1})),\ \cdots$$

が考えられる.

補題 4. 上記巾等な極大イデアルの列において，$M_t=M_1$ なるが存在すれば $M_0=M_1\cap\cdots\cap M_{t-1}$ は可逆イデアルで，M_t に含まれる可逆イデアルはすべて M_0 に含まれる.

以上により，極大可逆イデアルは，それ自身極大イデアルであるか又は有限個の巾等極大イデアルの共通分であることがわかる. したがって，よく用いられる方法で次の定理が証明される.

定理 5 ([9[, [11]). h-order Λ の可逆イデアルは極大可逆イデアルの積として一意的にあらわされ，可逆イデアルの全体は無限巡回群の直積に同型なアーベル群をなす.

可逆でないイデアル A については，$\Lambda^l(A)$ 及び $\Lambda^r(A)$ が共に Λ を真に含むことが知られ，結局この場合には A を $\Lambda^l(A)$ の左イデアルとして分解を考えることになる.

最後に，R を局所環，$\Sigma=K_n$ としたとき Σ の h-order は次の型のものと同型になることを記しておこう ([10], [13], [15]).

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c}
R\cdots R & \mathfrak{p}\cdots\mathfrak{p} & \mathfrak{p}\cdots\mathfrak{p} & \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
R\cdots R & \mathfrak{p}\cdots\mathfrak{p} & \mathfrak{p}\cdots\mathfrak{p} & \\
\hline
R\cdots R & R\cdots R & \mathfrak{p}\cdots\mathfrak{p} & \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
R\cdots R & R\cdots R & \mathfrak{p}\cdots\mathfrak{p} & \\
\hline
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\
R\cdots R & R\cdots R & R\cdots R & \cdots\cdots
\end{array}\right)$$

文 献

[1] 浅野啓三，環論及びイデアル論，共立社 (1949).

[1'] K. Asano, Arithmetische Idealtheorie in nicht-kommutative Ringen, Japan J. Math., 16 (1939).

[2] K. Asano and T. Ukegawa, Ergenzende Bemerkungen über Arithmetik in Schiefring, J. Math. Osaka City Univ., 3 (1952).

[3] M. Auslander and O. Goldman, Maximal order, Trans. A mer. Math. Soc., 97 (1960).

[4] A. Brumer, Structure of hereditary orders, Bull. Amer. Math. Soc., 69 (1963).

[4'] A. Brumer, Structure of hereditary orders, Ph. D. thesis, Princeton Univ., (1963).

[5] H. Cartan and S. Eilenberg, Homological algebra, Princeton Univ. Press (1956).

[6] C. Chevalley, Dans les algèbres des matrices, Act. Sci. Ind., 323, Univ. Paris (1935).

[7] M. Deuring, Algebren, Springer, Berlin (1935).

[8] L. Dickson, Algebren und ihre Zahlentheorie, Zürich (1927).

[9] M. Harada, Hereditary orders, Trans. Amer. Math. Soc., 107 (1963).

[10] M. Harada, Structure of hereditary orders over local rings, J. Math. Osaka City Univ., 14 (1963).

[11] M. Harada, Multiplicative ideal theory in hereditary orders, J. Math. Osaka City Univ., 14 (1963).

[12] M. Harada, On generalization of Asano's maximal orders in a ring, Osaka J. Math., 1 (1964).

[13] H. Hijikata, Maximal compact subgroups in $\mathfrak{p}$-adic classical groups, 数学の歩み (1963).

[14] K. Henke, Zur Arithmetischen Idealtheorie hyperkomplexer Zahlen, Abh. Math. Sem., 11 (1935).

[15] J. A. Murtha, Hereditary orders over principar ideal domains, Ph. D. thesis, Univ. Wisconsin (1964).

[16] T. Ukegawa, Zur Ideal Theorie in Ordnungen, J. Math. Osaka City Univ., 12 (1961).

Profinite group のコホモロジー論と整数論への応用 I

河　田　敬　義[1)]（東京大学）

§0. まえがき．Profinite 群は，無限次代数拡大の Galsis 群として，Krull その他の人々によって以前から取り扱われていたが，そのコホモロジー論を系統的に扱うようになったのは比較的新しいことであって，Tate のセミナー講義の内容を報告した Douady [3] (1959-60) あたりからである．Serre の講義録 (1963) はこれに関するていねいな解説である．このコホモロジー論の整数論への応用は (1) Šafarevič その他の人々による局所無限次 Galais 群の構造に関する問題（本誌：佐々木氏の報告参照） (2) 類体論との関係（この項目 §5）などもあるが，(3) 最近 Šafarevič が "Kassenkörperturm" の問題に否定的解決を与えたことは，著しい成果であった．(Šafarevič の結果は現在論文として公表されていないが，謄写版刷りの形で流布している：E. S. Gold and I. R. Šafarevič: On the tower of class fields (1964)[2)].

以下，主として上述の Tate, Serre の結果の紹介をしよう．

§1. Profinite 群

定義 1. G が profinite 群であるとは，G が有限群の射影的極限群であることを意味する．すなわち，G は完全不連結なコンパクト位相群のことであり，また $G=\varprojlim G/U_\alpha$，ここに $\{U_\alpha\}$ は G の単位元 1 の近傍系を作るような開正規部分群の集合である．

profinite 群の集合と，連続準同型とからカテゴリーが構成される．

例 1. k を体，K/k を無限次 Galois 拡大とし，$G(K/k)$ を Krull 位相をもつ K/k の Galois 群とすれば，$G=\varprojlim G(K_\alpha/k)$，ここに K_α/k は有限次 Galois 拡大で，$K=\cup K_\alpha$ とする．

定義 2. 体 k の（ある代数的閉体の中での）最大の Galois 拡大を K として，$G_k=\mathfrak{G}(K/k)$ とおく．また，k の最大の p 拡大を $K(p)$ として，$G_k(p)=G(K(p)/k)$ とおく．

例 2. G を discrete な群とする．$\{U_\alpha\}$ を指数有限な正規部分群のある系とし，$\hat{G}=\varprojlim G/U_\alpha$ とおく．$\hat{G}$ を G の $\{U_\alpha\}$ に関する完備化という．

定義 3. 拡張された自然数 $\prod_\alpha p_\alpha^{n_\alpha}\,(0\leq n_\alpha\leq\infty)$ を定義する．位数 $|G|$ が拡張された自然数として定まる．

定義 4. pro-p 群 G とは，p 群の射影的極限群をいう：$|G|=p^n\,(0\leq n\leq\infty)$．たとえば，$G_k(p)$ は pro-p 群である．

定義 5. profinite 群 G に対し，$|P|=p^\infty$ でかつ $(G:P)$ が p と素となる p-Sylow 群 P が存在し，それらは G において互に共役となる．

定義 6. ある添数の集合を I とし，$u_i(i\in I)$ を自由生成元とする自由群を $L(I)$ とおく．指数有限な $L(I)$ の正規部分群で，ほとんどすての u_i を含むもの M_α の全体をとり，$F(I)=\varprojlim L(I)/M_\alpha$ を定める．$F(I)$ を自由 profinite 群という．

1) 病気のため，シンポジウムに欠席しましたので，そのとき用意した予稿をそのままここに掲載させていただきます．

2) 希望の方は東大に英訳（佐々木訳）がありますから，河田までお申し越し下さい．

定義 7. 上において，$(L(I):M_\alpha)=p$ の冪となる M_α^* のみに限るとき，

$$F_p(I)=\varprojlim L(I)/M_\alpha^*$$ を pro-p 自由群という．

§2. Profinite 群のコホモロジー群．

定義 8. A が discrete G 加群というとき，G は A に連続的に作用するものとする．すなわち，$G_a=\{g\in G;\ ga=a\}$ はつねに開集合であり，また $A=\bigcup_\alpha A^{U_\alpha}$（$U_\alpha$ は G の開部分群とし，$A^G=\{a\in A;\ ga=a,\ g\in G\}$）の成立つこととも同値である．

$C_G=\{\mathrm{Obj}=\text{discrete } G \text{ 加群},\quad \mathrm{hom}=G \text{ 準同型}\}$，

$C_G'=\{\mathrm{Obj}=\text{有限 discrete } G \text{ 加群},\quad \mathrm{hom}=G \text{ 準同型}\}$，

$C_G''=\{\mathrm{Obj}=\text{torsion discrete } G \text{ 加群},\quad \mathrm{hom}=G \text{ 準同型}\}$

なるカテゴリーが考えられる．

定義 9. G を profinite 群，$A\in C_G$ とする．

$C^n(G,A)=\{G^n\to A \text{ の連続写像}\}$，

$d:\ C^n(G,A)\to C^{n+1}(G,A)$ は普通の如く

$(df)(g_1,\cdots,g_{n+1})=g_1f(g_2,\cdots,g_{n+1})+\cdots+(-1)^{n+1}f(g_1,\cdots,g_n)$，

コホモロジー群は

$H^q(G,A)=(q\text{-cocycle})/(q\text{-coboundary})\ (q=0,1,2,\cdots)$．

定理 1. G の開正規部分群 $\{U_\alpha\}$ について，

$H^q(G,A)=\varinjlim H^q(G/U_\alpha,A^{U_\alpha})$．

系．$H^q(G,A)$ は torsion 群である．

$H^0(G,A)=A^G$．

$H^1(G,A)=\{\text{連続 crossed hom}: G\to A \text{ の class}\}$．

$H^2(G,A)=\{\text{連続 factor sets}\}$．

有限群 G と同様に，

H：G の閉部分群：$\mathrm{Res}: H^q(G,A)\to H^q(H,A)$（ただし $A\in C_G$），

H：G の開部分群：$\mathrm{Inj}: H^q(H,A)\to H^q(G,A)$，

かつ　$\mathrm{Inj}\circ\mathrm{Res}=(G:H)$．

また cup 積についても同様であり，G の閉正規部分群 H に対して，次の完全系列が成り立つ：

$$H^1(G/H,A^H)\to H^1(G,A)\to H^1(H,A)^{G/H}\xrightarrow{\delta}H^2(G/H,A^H)\to H^2(G,A).$$

§3. コホモロジー次元．G を profinite 群，p を素数とする．

定義 10. （M に対して，p-primary 成分を M_p と書くとき）G の p-コホモロジー次元 $\mathrm{cd}_p(G)\leq n$ とは，$q>n$ および $A\in C_G''$ に対して，$H^q(G,A)_p=0$ が成立つことである．

定理 2.

$\mathrm{cd}_p(G)\leq n\Longleftrightarrow q>n$ および p-primary $A\in C_G''$ に対して $H^q(G,A)=0$

$\Longleftrightarrow pA=0$ となる simple な $A\in C_G$ に対して $H^q(G,A)=0\ (q>n)$

とくに，G が pro-p 群のときは

$\Longleftrightarrow q>n$ では $H^q(G, Z/(p))=0$.

定義 11. G のコホモロジー次元 $\mathrm{cd}(G)$ とは,

$$\mathrm{cd}(G)=\sup_p \{\mathrm{cd}_p(G)\}.$$

定義 12. G の strict p-コホモロジー次元 $\mathrm{scd}_p(G)\le n$ とは, $q>n$ と $A\in C_G$ に対して, $H^q(G, A)=0$ が成立つことである. 同じく, $\mathrm{scd}(G)=\sup_p \{\mathrm{scd}_p(G)\}$ と定義する.

定理 3. G の p-Sylow 群を G_p とするとき,

$$\mathrm{cd}_p(G)=\mathrm{cd}_p(G_p), \quad \mathrm{scd}_p(G)=\mathrm{scd}_p(G_p).$$

定理 4. $\mathrm{cd}_p(G)\le \mathrm{scd}_p(G)\le \mathrm{cd}_p(G)+1$.

定理 5. $\mathrm{cd}_p(G)\le 1 \Longleftrightarrow$ pro-p 群を核とするすべての G の拡大は trivial.

系. $\mathrm{cd}_p(F_p(I))\le 1$.

§4. Pro-p 群, Klassenkörperturm 問題の反例. G は pro-p 群とし, $H^q(G)=H^q(G, Z/(p))$ とする. とくに, $H^1(G)=\mathrm{Hom}(G, Z/(p))$ である.

定理 6. 任意の pro-p 群 G は, $F_p(I)$ の準同型像である: $G\cong F_p(I)/R$.

定理 7. G を pro-p 群とするとき,

$$G=\text{自由 pro-}p\text{ 群} \Longleftrightarrow \mathrm{cd}_p(G)\le 1.$$

定義 13. $\{g_1, \cdots, g_n\}$ が G の生成系とは, $\{g_1, \cdots, g_n\}$ が G の稠密な部分群を生成することをいう.

定理 8. G を pro-p 群とする. $\dim_{(Z/p)} H^1(G)=n<\infty$ であれば, n は G の生成系の最小個数である.

定理 9. F を自由 pro-p 群とし, R を G の閉正規部分群とする. $\{r_1, \cdots, r_m\}$ が正規部分群 R を生成するとは, $r_1, \cdots, r_m$ の共役元の全体が R を生成することを云う. そのとき,

$$\dim H^1(R)^{F/R}=\{R \text{ の生成元の最小個数}\}.$$

系. $G=F_p(I)/R$, $|I|=n$ とすれば,

$$n(G)=\dim H^1(G),$$
$$r(G)=\dim H^2(G)=\{G \text{ の最小生成元の間の基本関係の最小個数}\}.$$

定理 10. G を pro-p 群しと, $n(G)$ を G の最小生成元数とする. そのとき,

$$r(G)=n(G)+\dim H^3(G, Z)_p \ (\text{ただし}, A_p=\mathrm{Kernel}: p\to pA).$$

定理 11. k を代数体とし, K/k を有限次 Galois 拡大体, $G=\mathfrak{G}(K/k)$ を有限 p 群とする. K が次数 p の不分岐巡回拡大をもたぬものとすれば,

$$r(G)-n(G)\le r_1+r_2 \ (r_1, r_2 \text{ は } k \text{ の実および虚の共役体の個数}).$$

定理 12 (Šafarivič). G を有限 p 群とする. $n(G)\ge 1$ に対して

$$r(G)\ge \frac{1}{4}(n(G)-1)^2.$$

Klassenkörperturm の反例: 代数体 k, $(k:Q)=s$ とし, K を k の最大不分岐 p 拡大とする. K が有限次代数体とすると, 定理 11, 12 より

$$n(G)+s\ge \frac{1}{4}(n(G)-1)^2.$$

これは, $n(G)$ が十分大のとき矛盾となる. たとえば, $p=2$, $s=2$ のとき,

$$k=Q(\sqrt{-3\times5\times7\times11\times13\times17\times19})$$

の類群の 2 成分は 7 個の生成元をもつので, 上の不等式に反する.

§5. Galois コホモロジー論, class formation との関係. k を体とし, G_k, $G_k(p)$ を §1 の意味とする.

定理 13. k の標数 $p(\neq 0)$ とする. そのとき, $\mathrm{cd}(G_k(p))\le 1$, すなわち $G_k(p)$ は自由 pro-p 群である.

定理 14. k を perfect な体とする.

$\mathrm{cd}(G_k)\le 1 \Longleftrightarrow k$ の任意の代数拡大 K に対して K の Brauer 群は 0.

$\Longleftrightarrow$ 任意の有限正規拡大 L/K ($(K:k)<\infty$) に対して $N_{L/K}L^*=K^*$.

また, k が次の条件 (C) をみたせば $\mathrm{cd}(G_k)\le 1$:

(C) 任意の次数 $d(d<n)$ の斉次多項式 f に対して $f(x_1, \cdots, x_n)=0$ は $k\times\cdots\times k$ で解をもつ. (Chevalley, Tsen の結果は有名である.)

定理 15 (Tate: 未発表). k を体, K を k の無限次 Galois 拡大, $\hat{G}=G(K/k)$ とすると,

$\mathrm{scd}(G)\le 2 \Longleftrightarrow$(下の性質):

(P_1) $\hat{G}$ の任意の有限指数の開部分群 F が $\hat{G}$ の部分群 H の正規部分群であれば,

$$H^1(F/H, H/H')=0, \quad H^2(F/H, H/H')\cong Z/(F:H),$$

しかも, F/H の H/H' による群拡大の類 ζ は, H^2 において丁度位数 $(F:H)$ をもつ.

この性質 (P_1) は抽象的な class formation の理論の中にあらわれるものである. このような性質をもつ拡大 K/k の例をあげると,

(1) 定理 13, 14 の例,

(2) k を $\mathfrak{p}$ 進体, K を k の代数拡大とした場合 (局所類体論による),

(3) class formation として, 知られている場合に, いくつかの例があげられる.

定理 16 (河田 [73]). G は偶数個の生成元 $x_1, \cdots, x_n$, $y_1, \cdots, y_n$ をもち, 唯一つの基本関係

$$x^q(x_1, y_1)(x_2, y_2)\cdots(x_n, y_n)=1 \quad (q \gtreqless 0)$$

をもつものとする.

(i) $\hat{G}$ を G の完備化とする. $q=0$ のとき (P_1) は成り立たない.

(ii) $n=1$ ならば, $q=-2$ を除いて (P_1) が成り立つ.

(iii) n は任意, p は素数, $q=\pm p^m (m\neq 0)$, $\hat{G}$ を G の p-完備化とする. $p\neq 2$ のときつねに (P_1) が成り立つ. $p=2$ のときは, $q=-2$ を除いて成立する.

Profinite group のコホモロジー論と整数論への応用 II

佐 々 木 義 雄 (愛媛大学)

§1. **問題**. 局所体 K (有理 p 進体 R_p の有限 d 次拡大体) を基礎にとる. K 上の極大 p 拡大体 C とは, K 上の p 冪次 Galois 拡大体の合併である: $C=\bigcup_i K_i$ (K_i/K は p 冪次 Galois 拡大). C/K の Galois 群 G は, K_i/K の Galois 群 G_i の射影極限となっている: $G=\varprojlim G_i$.

G_i を discrete な群として, G は位相群であり, totally disconnected かつ compact である. 一般に, p 群の射影極限を pro-p 群という.

又, 開不変部分群 H_i を用いて, $G=\varprojlim G/H_i$ ともあらわされる.

この G の構造を決定することが問題で, 有限個の元からなる生成系をもち, 基本関係が高々一つということは以前から知られている. この基本関係の形を定めることが主内容である.

§2. **歴史**.

(イ) I. R. Šafarevič [9] は K が p 乗根を含まぬなら, G は $d+1$ 個の元で生成される自由群なることを示した. ただし, $d=[K:R_p]$.

(ロ) Y. Kawada [6] は K が p 乗根を含むとき, G は $d+2$ 個の元で生成され, 基本関係を唯一つ持つことを示した.

(ハ) S. P. Demuškin [1] [2] は, p が奇素数なるときに, その基本関係の形を決定した:

$$r = x_2^q(x_1, x_2)(x_3, x_4)\cdots\cdots(x_{n-1}, x_n).$$

ただし, 1 の p 冪根のうちで K に含まれる最大冪根を $q=p^s$ とし, (a, b) は交換子 $aba^{-1}b^{-1}$ をあらわす.

(ニ) J. P. Serre [12] はコホモロジー的な方法で上述の Demuškin の結果を再現し, 更に進んで $p=2$ のときも $q=2^s\geqq 4$ なら同様な形であり, 又 $q=2$ でも生成元の個数 n が奇数ならば

$$r = x_1^2x_2^4(x_2, x_3)\cdots\cdots(x_{n-1}, x_n)$$

であることを示した.

$q=2$, 生成元の個数 n が偶数の場合は未解決に残されている.

本稿では, Serre の方法の概要を示し, 未解決の場合がどの程度迄わかっているかを報告する. 一般的な事柄の証明は略したが, Serre [11] および本誌河田氏の報告を参照されたい.

§3. **Pro-p 群の filtration**. 以下の計算の基礎となる事柄を先ず説明しておく.

G を一般の pro-p 群とするとき, filtration を次のように定める:

$$G_1 = G\supseteq G_2 = G_1^q(G, G_1)\supseteq\cdots\cdots\supseteq G_{i+1} = G_i^q(G, G_i)\supseteq\cdots\cdots$$

ここに, q は p の冪. 有限 p 群では有限の段階で切れて $\{e\}$ で終るから, 各 H_i に対して適当な l_i があって $G_{l_i}\subseteq H_i$ となる. したがって, $\bigcap_i G_i=\{e\}$.

かつ, 基本的な性質として

$$(G_i, G_j)\subseteq G_{i+j}$$

が成り立つ. 計算は相当煩雑だが, 大体初等的に出来る. (Lazard [8] 参照.)

§4. **Demuškin 群**. Serre [12] は次のような pro-p 群 G を定義して Demuškin 群と呼んだ. (後でわかることであるが, 上述の局所体の場合の G より少し範囲が広い.) コホモロジー群の係数群は $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ とする.

1°. $H^1(G)$ の $\dim = n<\infty$.

2°. $H^2(G)$ の $\dim = 1$.

3°. 対応 $H^1(G)\times H^1(G)\xrightarrow{\text{cup 積}}H^2(G)$ から生ずる双一次形式が non-degenerate.

1° から, Demuškin 群 G の生成元が n 個であることがわかる ([11] 参照).

2° からは, 基本関係が唯一つであることがわかる [11]. このとき, 次の同型が成り立つ: $H^1(R)^F\simeq H^2(F/R)$, ここで F は生成元が n 個の自由 pro-p 群で, $G\simeq F/R$.

後で計算に使うために, 完全列

$$0\to H^1(G)\to H^1(F)\xrightarrow{\text{Res}}H^1(R)^F\xrightarrow{\tau}H^2(G)\xrightarrow{\text{Inf}}H^2(F)=0$$

をもとにして $\delta\colon H^1(R)^F\simeq H^2(G)$ を直接定義する:

$f\in Z^1(R)$, $f\colon R\to\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ で $f(gxg^{-1})=f(x)$ $(x\in R,\ g\in F)$ とする. f を F 上に任意に延長したものを $\tilde{f}$ とする: $\tilde{f}\colon F\to\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$. $\partial\tilde{f}$ は R 上で 0 函数だから, $\partial\tilde{f}=\mathrm{Inf}\ h$ となる $h\in H^2(G)$ が存在する. 此のとき, $\delta f=-h$ と対応を定める. (例えば, Hattori [4] 参照.)

§5. **基本関係の形の第一段階**. 基本関係が一つだから単因子論と同様な計算で

$$G/(G, G)\simeq\begin{cases}\boldsymbol{Z}_p\times\cdots\times\boldsymbol{Z}_p\times(\boldsymbol{Z}_p/q\boldsymbol{Z}_p), & \text{又は}\\ \boldsymbol{Z}_p\times\cdots\times\boldsymbol{Z}_p.\end{cases}$$

後者の場合は $q=0$ と考える. $q=p^s$ を用いて F の filtration (§3) を定めると $G=F/(r)$, $r\in F_2$ よって, $r\equiv\Pi x_i^{qa_i}\Pi(x_i, x_j)^{b_{ij}} \bmod F_3$, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ は生成元で b_{ij} は $\bmod q$ で考える.

Demuškin 群の定義 3° を用いて, もっと簡単な形にするために, 先ず $p\neq 2$ の場合を計算する:

f_i を定義して, $f_i\in H^1(G)$, $f_i(x_j)\equiv\delta_{ij} \bmod p$. cup 積 $f_i\cdot f_j\in H^2(G)$ に対応する $\pi\in H^1(R)^F$ があるが, この π は $r\to b_{ij} \bmod p$ となることを示そう:

§4 の最後から, $\tilde{\pi}\in C^1(F)$ で $\partial\tilde{\pi}=-f_i\cdot f_j$ であるが, 一般に

$$\partial\tilde{\pi}(a, b)=\tilde{\pi}(a)-\tilde{\pi}(ab)+\tilde{\pi}(b)=-f_i\cdot f_j(a, b)$$

よって

$$\tilde{\pi}(ab)=\tilde{\pi}(a)+\tilde{\pi}(b)+f_i\cdot f_j(a, b)$$

が成立つ. そこで $\tilde{\pi}(x_ix_jx_i^{-1}x_j^{-1})=1$. 他の項は結局影響がなく, $\tilde{\pi}(r)\equiv b_{ij} \bmod p$.

さて, non-degenerate という条件から

$$\det(b_{ij})\not\equiv 0 \mod p.$$

cup 積は skew だから, これが成立つためには n が偶数でなければならない. 行列の変形と同様な計算で, 適当に生成元をとりかえて

$$r\equiv x_1^q(x_1, x_2)\cdots\cdots(x_{n-1}, x_n) \mod F_3$$

と変形できる. ただし新しい生成元を矢張り $x_1, x_2, \cdots, x_n$ と書いている.

$q=2^s>2$ のときも結論は同じになる. b_{ij} は $\bmod q$ で意味があって, skew matrix を作っ

たものを mod 2 で考えたとき $\det(b_{ij}) \not\equiv 0 \bmod 2$ だから，矢張り n は偶数で前と同様な変形が出来る．

$q=2$ のときは，skew matrix は利用出来ないが，symmetric matrix の変形と同様にして，生成元をとりかえて

$$r \equiv x_1^2 x_2^2 \cdots\cdots x_n^2 \quad \bmod F_3$$

と出来る．

§6. $q>2$ の場合の極限移行． §5 の

$$r \equiv x_1^q (x_1, x_2) \cdots\cdots (x_{n-1}, x_n) \quad \bmod F_3$$

を出発点として，filtration number の順次大きな項で修正し

$$r = x_1^q (x_1, x_2) \cdots\cdots (x_{n-1}, x_n)$$

の形にするのであるが，各段階での修正法は次の通り：

$$r \equiv x_1^q (x_1, x_2) \cdots\cdots (x_{n-1}, x_n) \quad \bmod F_h \ (h \geqq 3)$$

となったとすると

$$x_i = x_i' c_i, \quad c_i \in F_{h-1}, \quad c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$$

を代入して

$$x_1^q (x_1, x_2) \cdots\cdots (x_{n-1}, x_n) \equiv x_1'^q (x_1', x_2') \cdots\cdots (x_{n-1}', x_n')\, d(c) \quad \bmod F_{h+1}$$

となり，写像 $d: (F_{h-1})^n \to F_h$ が $(c_1, c_2, \cdots, c_n) \to d(c) \bmod F_{h+1}$ の意味で決定される．

この d が onto の写像であることは初等的な計算で示される．$q=2^s>2$ の場合は計算が簡単でない．特に，

$$(x, (x, y))^{\frac{q}{2}-1} \in d(F_2)^n \quad \bmod F_4$$

であることが本質的であって，$q=2$ の場合と区別される．

§7. $q=2$ の場合の r の形．

$$r \equiv x_1^2 x_2^2 \cdots\cdots x_n^2 \quad \bmod F_3$$

を出発点として，先ず n が奇数である場合は，生成元を修正して（初等的計算）

$$r \equiv x_1^2 (x_2, x_3) \cdots\cdots (x_{n-1}, x_n) \quad \bmod F_3$$

とできる．これ以後の修正には §6 の場合が応用できて

$$r = x_1^2 x_2^q (x_2, x_3) \cdots\cdots (x_{n-1}, x_n)$$

となる（[12] 参照），q は 2 の冪で 4 以上．

次に n が偶数である時には

$$r \equiv (x_1, x_2)(x_3, x_4) \cdots\cdots (x_{n-1}, x_n) x_n^2 \quad \bmod F_3$$

と直してから

$$r = x_1^k (x_1, x_2) \cdots\cdots (x_{n-1}, x_n) x_n^{2+l}$$

となることは比較的容易にわかる．ただし k は 2 の冪で 4 以上，l は 4 で割り切れる 2 進数．

更に l が k で割り切れるときは

$$r = x_1^k (x_1, x_2) \cdots\cdots (x_{n-1}, x_n) x_n^2$$

と直せることが示されるが，計算は相当に複雑である．

l が k で割り切れないときは，もっと簡単な形になるかどうかは未詳．ただし $n=2$ の時は

$$r = (x, y)\, y^{2+l}$$

を基本関係に採用出来る（Serre [12]），ただしこのとき，生成元を修正するだけではないことは注目に値いする．

§8. Demuškin 群の分類—dualizing character．

定義と計算に必要な事実を述べる．詳細は Serre [11] 参照．

準同型　$\chi: G \to U_p$（G は Demuškin 群；U_p は p 進単数）があって，$\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p$ 上に χ を媒介して G を作用させる時生ずる G 加群 I は次の性質をもつ：

a)　$H^2(G, I) = \boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p$．

b)　M を有限 G 加群とし，$M' = \mathrm{Hom}(M, I)$ とおけば

$$H^i(G, M) \times H^{2-i}(G, M') \xrightarrow{\text{cup積}} H^2(G, I) = \boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p \quad (i=0, 1, 2)$$

は non-degenerate な双一次形式となる．

このような I は存在して，同型を除いて一意的に定まる．又 $\boldsymbol{Z}/p^n\boldsymbol{Z}$ を，χ を媒介として G 加群と考えたものを I_n とおくと $H^1(G, I_n) \to H^1(G, I_1) = H^1(G)$ は onto となる．この事実を利用して χ の計算が可能である．例えば，$f \in Z^1(G, I_n)$ とすると，cycle の関係式から

$$f(xyx^{-1}y^{-1}) \equiv (\chi(x)-1) f(y) + (1-\chi(y)) f(x) \quad \bmod 2^n$$

が成り立つ．$0 \equiv f(r)$ に対して計算をすれば，次の結果を得る：

(イ)　$r = x_1^q (x_1, x_2) \cdots (x_{n-1}, x_n)$ のとき

$$\chi(x_i) = 1 \ (i \neq 2);\ \chi(x_2) = 1+q.$$

(ロ)　$r = x_1^2 x_2^q (x_2, x_3) \cdots (x_{n-1}, x_n)$ のとき

$$\chi(x_1) = -1;\ \chi(x_3) = 1+q;\ \chi(x_i) = 1 \ (i \neq 1, 3).$$

(ハ)　$r = x_1^k (x_1, x_2) \cdots (x_{n-1}, x_n) x_n^{2+l}$ のとき

$$\chi(x_2) = 1+k;\ \chi(x_{n-1}) = -(1+l);\ \chi(x_i) = 1 \ (i \neq 2, n-1).$$

この結果，U_p の中における像 $\chi(G)$ が異なれば G が異なることがわかり，G の分類ができるわけである．

逆は勿論成り立つかどうか分らないので，(ハ)の場合には分類が完成していない．これに反して (イ)，(ロ) では分類が完成していて，例えば (ロ) においては，

$$\chi(G) \simeq \{\pm 1\} \times U_s,$$

ただし U_s は mod 2^s で 1 に合同な 2 進数の全体が作る乗法群．勿論，s が異なれば G も異なる．

§9. 整数論への応用． 最初に §1 で述べた C/K の Galois 群は pro-p 群であるが，Demuškin 群であることが示される：（[11]，[12] 参照）．K が 1 の p 冪根を含まぬ場合（Šafarevič [9]）を除外すると

$$0 \to \boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z} \to C^* \xrightarrow{p} C^* \to 0$$

なる完全列からコホモジー群に移って

$$0\to H^2(G)\to H^2(G,\ C^*)\xrightarrow{p} H^2(G,\ C^*)$$

なる完全列を得る．$H^2(G,\ C^*)=\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p$ なることは知られているので，$H^2(G)=\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ を得る．又 $H^1(G)\simeq K^*/K^{*p}$ であり，cup 積は Hilbert のノルム剰余記号 $(a,\ b)$ に対応する．これは non-degenerate である．更に G のアーベル化したものは局所類体論により K^* の p 完備化（すなわち，位数が p 幂である準同型像の射影極限）に同型で，$(\boldsymbol{Z}/q\boldsymbol{Z})\times(\boldsymbol{Z}_p)^{d+1}$ に同型．不変数は q と $d+2$ とである．したがって，§2 に述べた事柄の(ロ)，(ハ)と(ニ)の前半が示されたわけである．(ニ)の後半の $p=2$ で $[K:\boldsymbol{Q}_2]=d$ が奇数の時は χ による G の像 $\chi(G)$ が $U_1=\{\alpha|\alpha\equiv 1 \bmod 2\}$ と一致することから，§8 の(ロ)での $q=4$ であることがわかる．この場合

$$r = x_1^2x_3^4(x_2,\ x_3)\cdots\cdots(x_{n-1},\ x_n)$$

となり(ニ)の後半が出る．$p=2$, $[K:\boldsymbol{Q}_2]$ が偶数の時は未解決である．

文　献

[1] S. P. Demuškin, The group of the maximal p-extension of a local field, D. A. N. 128 (1959), 657-660 (in Russian).

[2] S. P. Demuškin, Ibid., Izvestia Akad. Nauk SSSR., 25 (1961), 329-346.

[3] A. Douady, (Exposition of results of Tate), Cohomologie des groups compacts totalement discontinus, Seminaire Bourbaki, 1959-60, exposé 189.

[4] A. Hattori, On exact sequences of Hochschild and Serre, J. Math. Soc. Japan, 7 (1955), 312-321.

[5] K. Iwasawa, A note on the group of units of an algebraic number field, J. Math. Pures et Appl., 35 (1956), 189-192.

[6] Y. Kawada, On the structure of the Galois group of some infinite extensions I, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, 7 (1954), 1-18.

[7] Y. Kawada, Cohomology of group extensions, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I, 9 (1963), 417-431.

[8] M. Lazard, Sur les groups nilpotents et les anneaux de Lie, Ann. Sci. Ecole Normal Sup., 71 (1954), 101-190.

[9] I. R. Šafarevič, On the p-extensions, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2, 4, 59-72.

[10] I. R. Šafarevič, Extensions à points de ramification donnés (in Russian), Publ. Math. IHES (1964).

[11] J. P. Serre, Cohomologie Galoisienne (Lecture Notes, Collège de France), 1963. (Chap. I. Cohomologie des groupes profinis, II. Cohomologie Galoisienne—Cas commutatif, III. Cohomologie Galoisienne non commutatif).

[12] J. P. Serre, Structure de certains pro-p-groupes (d'après Demuškin), Seminaire Bourbaki, 1963, exposé 252, 1-11.

Grothendieck cohomology の理論の紹介

山　田　　浩　（東京教育大学）

§0. Introduction.

（復習）．X を位相空間とする．X の各集合 U に abel 群 $\mathscr{F}(U)$ が対応していて，さらに各開集合の組 $(U,\ V)$ について，$U\supset V$ であれば準同型写像 φ_V^U: $\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(V)$ が与えられていて，$U\supset V\supset W$ であるとき，$\varphi_W^U=\varphi_W^V\circ\varphi_V^U$ となっているときに，組 $\mathscr{F}=\{\mathscr{F}(U),\ \varphi_V^U\}$ を X 上の（abel 群に値をもつ）presheaf（または sheaf の data）という．presheaf $\mathscr{F}$ がさらに次の条件をみたすとき，$\mathscr{F}$ を sheaf と呼ぶ：

(S)　X の各開集合 U と，U の開集合による covering $U=\bigcup_\alpha V_\alpha$ に対して，

$$0\to\mathscr{F}(U)\xrightarrow{\lambda}\prod_\alpha\mathscr{F}(V_\alpha)\xrightarrow{\mu}\prod_{\alpha,\beta}\mathscr{F}(U_\alpha\cap U_\beta)$$

が exact．ただし，

$$\lambda(x)=(\varphi_{V_\alpha}^U(x))_\alpha,\quad \mu\{(x_\alpha)_\alpha\}=(\varphi_{V_\alpha\cap V_\beta}^{V_\alpha}(x_\alpha)-\varphi_{V_\alpha\cap V_\beta}^{V_\beta}(x_\beta))_{\alpha,\beta}.$$

このように定義された X 上の (pre-) sheaf 全体は abelian category $\mathscr{D}_X$, $\mathscr{S}_X$ (cf. [3]) をつくる．$\mathscr{S}_X$ における homological algebra が X 上の sheaf 係数の cohomology の理論である．

ここでは，一般の category に "topology" の概念を導入することで，その category の上の (pre-) sheaf を考え，その cohomology の理論を展開しようとすることが目的である．主として，[1] の Chs. I, II の内容を紹介するが，[1] の後半では，応用として代数的多様体 (scheme) の category に従来の Zariski topology より強い étale topology を導入して整数論への応用をはかっている．また，[2] では，以下に述べる "topology" よりさらに一般的な定義を与えている．([1] の topology は [2] では pre-topology.)

(Model).

定義 1.　category $\mathscr{K}$ の diagram

$$(\sharp)\qquad A\xrightarrow{\lambda}B\overset{\mu}{\underset{\nu}{\rightrightarrows}}C$$

が exact であるとは，(i) $\mathscr{K}$＝集合の category (set) の場合：λ が B の部分集合 $\{b\in B|\mu(b)=\nu(b)\}$ への bijection であることをいう．(ii) 一般の場合：任意の $X\in\mathrm{Ob}(\mathscr{K})$ に対して

$$\mathrm{Hom}(X,\ A)\longrightarrow\mathrm{Hom}(X,\ B)\rightrightarrows\mathrm{Hom}(X,\ C)$$

が (i) の意味で exact になることをいう．また，$(A,\ \lambda)$ を $(\mu,\ \nu)$ の kernel という：$(A,\ \lambda)=\mathrm{Ker}(\mu,\ \nu)$．((i) は (ii) の意味で exact と同値.)

このとき，sheaf の条件 (S) は次の条件と同値になる．

(S′)　(S) における U, V_α について，

$$\mathscr{F}(U)\xrightarrow{\lambda}\prod\mathscr{F}(V_\alpha)\overset{\mu}{\underset{\nu}{\rightrightarrows}}\prod\mathscr{F}(V_\alpha\cap V_\beta):\ \text{exact}.$$

ただし，

$$\lambda(x)=(\varphi^{U}_{V_\alpha}(x))_\alpha,\ \mu\{(x_\alpha)\}=(\varphi^{V_\alpha}_{V_\alpha\cap V_\beta}(x_\alpha))_\alpha,\ \nu\{(x_\alpha)\}=(\varphi^{V_\beta}_{V_\alpha\cap V_\beta}(x_\beta))_{\alpha,\beta}.$$

そこで，位相空間 X の開集合を object とし，その間の自然な injection を morphism とする category $\mathscr{C}_X$ を考えると，

presheaf = contravariant functor $\mathscr{C}_X\to$(abel 群),

sheaf = (S') をみたす presheaf.

一般に，$\mathscr{C}_X$ からある category $\mathscr{K}$ への contravariant functor $\mathscr{F}:\mathscr{C}_X\to\mathscr{K}$ を，<u>X 上の $\mathscr{K}$ に値をもつ presheaf</u>, それが (S') を満足するとき，<u>X 上の $\mathscr{K}$ に値をもつ sheaf</u> と呼ばれる.

§1. **Topology**. $\mathscr{C}$ を category とするとき，object の集合を $\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, morphism の集合を $\mathrm{Fl}(\mathscr{C})$ と書く.

定義 2. $\mathscr{C}$ を category とする. 各 $S\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ に対して $\mathscr{C}$ の morphism $X\xrightarrow{f}S$ を，$\mathscr{C}$ の S 上の <u>object</u> という. また，$X\xrightarrow{f}S$, $Y\xrightarrow{g}S$ を二つの S 上の object とするとき，morphism $X\xrightarrow{h}Y\in\mathrm{Fl}(\mathscr{C})$ で $g\circ h=f$ となるものを $X=(X\xrightarrow{f}S)$ から $Y=(Y\xrightarrow{g}S)$ への <u>S 上の morphism</u> といい，この全体を $\mathrm{Hom}_S(X,Y)$ であらわす. これらは，一つの category $\mathscr{C}/S$ をつくる.

定義 3. $\mathscr{C}$ を category とする. 各 $S\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ に対して，$\mathrm{Ob}(\mathscr{C}/S)$ の部分集合の族 $R(S)$ が与えられていて，それらが次の条件を満足するとき，$R=\{R(S)\}_{S\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C})}$ を $\mathscr{C}$ の <u>covering</u> という ($R(S)$ の各元を S の covering という):

(1) $S'\to S\in\mathrm{Fl}(\mathscr{C})$ が isomorphism なら $\{S'\to S\}\in R(S)$.

(2) $\{S_i\xrightarrow{\phi_i}S\}_{i\in I}\in R(S)$, $\{T_{ij}\xrightarrow{\phi_{ij}}S_i\}_{j\in J}\in R(S_i)$ $(i\in I)$ であれば，$\{T_{ij}\xrightarrow{\phi_i\cdot\phi_{ij}}S\}_{(i,j)\in I\times J}\in R(S)$.

(3) $\{S_i\to S\}_{i\in I}\in R(S)$, $T\to S\in\mathrm{Fl}(\mathscr{C})$ であれば，fibre product $S_i\times_S T$ が定義されて，$\{S_i\times_S T\to T\}_{i\in I}\in R(T)$.

category $\mathscr{C}$ に covering R が与えられたとき，$\mathscr{C}$ に topology が定義されたといい，$T=\mathscr{C},R)$ を <u>topology</u> という.

定義 4. $T=(\mathscr{C},R)$, $T'=(\mathscr{C}',R')$ を二つの topology とする. このとき，covariant functor $f:\mathscr{C}\to\mathscr{C}'$ が次の条件をみたすならば，f を topology T から T' への morphism という:

(1) 任意の $S\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ と任意の $E=\{S_i\to S\}\in R(S)$ に対して，$f(E)=\{f(S_i)\to f(S)\}\in R'(f(S))$.

(2) 任意の $E=\{S_i\to S\}\in R(S)$ $(S\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C}))$ と任意の $T\to S\in\mathrm{Fl}(\mathscr{C})$ に対して，fibre product $f(S_i)\times_{f(S)}f(T)$ が定義されて，canonical morphism

$$f(S_i\times_S T)\longrightarrow f(S_i)X_{f(S)}f(T)$$

は isomorphism.

topology T の全体は，この morphism とともに category (Top.) をつくる.

定義 5. category $\mathscr{C}$ の object S に対して，$\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ の二つの部分集合 $E_1=\{S_i\to S\}_{i\in I}$, $E_2=\{T_j\to T\}_{j\in J}$ の間の morphism $f:E_1\to E_2$ を次のように定義する: f は index set の map $\varepsilon:I\to J$ と S-morphism $f_i:S_i\to T_{\varepsilon(i)}$ の組 (ε,f_i).

$\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ の部分集合の全体はこの morphism とともに category をなす. とくに，$\mathscr{C}$ に covering R が与えられているときは，各 $R(S)$ はこの subcategory である.

$E_1\to E_2\in\mathrm{Fl}(\mathrm{R}(S))$ を E_2 の細分とよぶ.

記号: $E_1=\{S_i\to S\}$, $E_2=\{T_j\to S\}\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C}/S)$ について，$E_1\times_S E_2=\{S_i\times_S T_j\to S\}_{i,j}$ と書く. このとき，自然な morphism $E_1\times_S E_2\xrightarrow{p_i}E_i$ $(i=1,2)$ が定義される.

$E_1,E_2\in R(S)$ なら $E_1\times_S E_2\in R(S)$.

また，$E=\{S_i\to S\}_{i\in I}$, $T\to S\in\mathrm{Fl}(\mathscr{C})$ について，$E\times_S T=\{S_i\times_S T\to T\}_{i\in I}\subset\mathrm{Ob}(\mathscr{C}/T)$. $E\in R(S)$ なら，$E\times_i T\in R(T)$.

$E=\{S_i\to S\}\in R(S)$, $E_i=\{T_{ij}\to S_i\}\in R(S_i)$ に対して，$\{E_i\to S\}=\{T_{ij}\to S\}\in R(S)$ (定義 3 (2)) と書く.

§2. **Presheaf, sheaf.**

定義 6. category $\mathscr{C}$ から category $\mathscr{K}$ への contravariant functor を <u>$\mathscr{C}$ の $\mathscr{K}$ に値をもつ presheaf</u> という. さらに，$\mathscr{C}$ に covering R が与えられていて，$\mathscr{K}$ は任意個数の定義されているものとする. このとき，任意の $E=\{S_i\to S\}\in R(S)$ $(S\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C}))$ に対して，

$$\mathscr{F}(S)\longrightarrow\prod_i\mathscr{F}(S_i)$$

が injective であるとき，presheaf $\mathscr{F}$ は R に関して <u>separated</u> であるという. また，すべての $E=\{S_i\to S\}\in R(S)$ $(S\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C}))$ に対して，

$$(*)\qquad \mathscr{F}(S)\longrightarrow\prod_i\mathscr{F}(S_i)\rightrightarrows\prod_{i,j}\mathscr{F}(S_i\times_S S_j)$$

が exact であるとき，presheaf $\mathscr{F}$ を $\mathscr{K}$ に値をもつ topology $T=(\mathscr{C},R)$ の <u>sheaf</u> という.

記号: $\mathscr{F}$ を presheaf $(\mathscr{C}\to\mathscr{K})$ とする. $E=\{S_i\to S\}_{i\in I}\in R(S)$ に対して $\mathscr{F}(E)=\prod_{i\in I}\mathscr{F}(S_i)$ と書けば，$\mathscr{F}$ は category $R(S)$ から $\mathscr{K}$ への contravariant functor になる. とくに，$S=\{S\xrightarrow{\mathrm{id}}S\}$ と書けば，$S\in R(S)$ (定義 3 (1))，かつ任意の $E\in R(S)$ に対して，$R(S)$ の diagram $S\leftarrow E\underset{p_2}{\overset{p_1}{\leftleftarrows}}E\times_S E$ が得られる. このとき，$(*)$ は

$$(*')\qquad \mathscr{F}(S)\longrightarrow\mathscr{F}(E)\underset{\mathscr{F}(p_2)}{\overset{\mathscr{F}(p_1)}{\rightrightarrows}}\mathscr{F}(E\times_S E).$$

以下においては，此の記法を自由に用うる.

(presheaf に associate した sheaf.) 以下，簡単のため category $\mathscr{K}$ を集合の category (set) とする. topology $T=(\mathscr{C},R)$ 上の presheaf $\mathscr{F}:\mathscr{C}^\circ\to\mathscr{K}=(\mathrm{set})$ と $E\in R(S)$ $(S\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C}))$ に対して，

$$\mathscr{F}_S(E)=\mathrm{Ker}\,(\mathscr{F}(E)\rightrightarrows\mathscr{F}(E\times_S E))$$

とおけば，$\mathscr{F}_S$ はまた $R(S)$ から (set) への contravariant functor となる. この $\mathscr{F}_S$ について:

命題 1. (i) $R(S)$ の二つの morphism $E\underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}}E'$ (定義 5) ついて，$\alpha^*=\mathscr{F}_S(\alpha)$ とすれば (以下同様)，$\alpha^*=\beta^*:\mathscr{F}_S(E')\longrightarrow\mathscr{F}_S(E)$.

(ii) 任意の $E,E'\in R(S)$ について $R(S)$ の morphism $E''\to E$, $E''\to E'$ が存在する.

(iii) 任意の $E'\xrightarrow{\alpha}E$, $E''\xrightarrow{\beta}E\in\mathrm{Fl}(R(S))$ に対し，

$$\begin{tikzcd} & \mathscr{F}_S(E') \arrow[dr, "\gamma^*"] & \\ \mathscr{F}_S(E) \arrow[ur, "\alpha^*"] \arrow[dr, "\beta^*"'] & & \mathscr{F}_S(E''') \\ & \mathscr{F}_S(E'') \arrow[ur, "\delta^*"'] & \end{tikzcd}$$

:するような $E''' \xrightarrow{\tau} E'$, $E''' \xrightarrow{\delta} E'' \in \mathrm{Fl}\,R(S)$ が存在する.

の証明. $E=\{S_i \to S\}_{i\in I}$, $E'=\{T_j \to S\}_{j\in J}$, $\alpha=\{\varepsilon: I\to J, f_i\}$, $\beta=\{\tau: I \to J, g_i\}$ とする. こ
各 $i\in I$ に対して, 可換な diagram

$$\begin{tikzcd} & S_i \arrow[dl, "f_i"'] \arrow[d, "h_i=(f_i,g_i)"] \arrow[dr, "g_i"] & \\ T_{\varepsilon(i)} & T_{\varepsilon(i)} \times_S T_{\tau(i)} \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & T_{\tau(i)} \end{tikzcd}$$

る. このとき, $x=(x_j)_j \in \mathscr{F}_S(E') \subset \prod_j \mathscr{F}(T_j)$ に対して, $p_1^*(x_{\varepsilon(i)})=p_2^*(x_{\tau(i)})$. また, $\alpha^* x$
$^*x=(z_i)_i$ とおけば, $y_i=f_i^*(x_{\varepsilon(i)})=h_i^*\circ p_1(x_{\varepsilon(i)})=h_i^*\circ p_2(x_{\tau(i)})=g_i^*(x_{\tau(i)})=z_i$. 故に, $\alpha^*=\beta^*$.

)証明. $E''=E\times_S E \begin{smallmatrix} \xrightarrow{p_1} E \\ \longrightarrow E' \end{smallmatrix}$

は (ii) と (i) より明白.

1 より, $\{\mathscr{F}_S(E),\ \alpha^*=\mathscr{F}_S(\alpha) \mid E\in R(S),\ \alpha\in \mathrm{Fl}(R(S))\}$ は inductive system となる. そ

$$(L\mathscr{F})(S)=\varinjlim_{E} \mathscr{F}_S(E)$$

自然な仕方で $L\mathscr{F}$ は S について contravariant functor ($\mathscr{C}\to\mathscr{K}$)(すなわち, presheaf)
さらに, 対応 $\mathscr{F} \rightsquigarrow L\mathscr{F}$ は presheaf の category $\mathscr{D}_K$ から自分自身への covariant
$:\mathscr{D}_K \to \mathscr{D}_K$ を与えることは容易にたしかめられる.
に, 各 $E\in R(S)$ に対して, $\mathscr{F}(S)\subset\mathscr{F}_S(E)$ であるから, canonical map $\mathscr{F}(S)\to L\mathscr{F}(S)$
これは, 自然な仕方で functorial morphism (presheaf の morphism および functor
の間の morphism)

$$l_{\mathscr{F}}: \mathscr{F} \longrightarrow L\mathscr{F}, \quad l: (\mathrm{id}_{\mathscr{D}_K}) \longrightarrow (L)$$

1. $\mathscr{F}$ を topology $T=(\mathscr{C}, R)$ の presheaf とするこのとき:
$L\mathscr{F}$ は separated.
$\mathscr{F}$ が separated なら $L\mathscr{F}$ は sheaf.
$\mathscr{F}$ が sheaf なら, $l_{\mathscr{F}}: \mathscr{F}\to L\mathscr{F}$ は isomorphism.
〈$L_2=L\circ L$ の universal mapping property〉任意の sheaf $\mathscr{G}$ に対して, 写像
$\mathrm{Hom}(L^2\mathscr{F}, \mathscr{G}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathscr{D}, \mathscr{G})$ $(f \rightsquigarrow f\circ l_{\mathscr{F}}^2)$

n.

(i) $S\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $E\in R(S)$, $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2 \in L\mathscr{F}(S)=\varinjlim_F \mathscr{F}_S(F)$ が $L\mathscr{F}(S)\to L\mathscr{F}(E)$ で同じ
ったとする. 適当な $F\in R(S)$ に対して, $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$ は $\mathscr{F}_S(F)$ の元 ξ_1, ξ_2 で代表される.
$\}_{i\in I}$ とすると, 各 $i\in I$ について可換な diagram

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}_S(F) \arrow[r] \arrow[d] & L\mathscr{F}(S) \arrow[d] \\ \mathscr{F}_{S_i}(F\times_S S_i) \arrow[r] & L\mathscr{F}(S_i) \end{tikzcd} \qquad (F\times_S S_i \in R(S_i))$$

ξ_1, ξ_2 は $L\mathscr{F}(S_i)$ で一致するから, $F\times_S S_i$ の適当な細分 $F_i\in R(S_i)$ をとれば, ξ_1, ξ_2 は

$\mathscr{F}_{S_i}(F_i)\subset\mathscr{F}(F_i)$ で一致する. $F'=\{F_i\to S\}_i$ とおけば, $F'\in R(S)$ かつ F の細分である. さらに, $\mathscr{F}_S(F')\subset\mathscr{F}(F')=\prod_i \mathscr{F}(F_i)$ であるから, ξ_1 と ξ_2 は $\mathscr{F}_S(F')$ で一致する. 故に, $\bar{\xi}_1=\bar{\xi}_2$.

(ii) 次の補題を用うる.

補題. $\mathscr{F}$ を separated presheaf とする. このとき, 任意の $E\xrightarrow{\alpha}E'\in\mathrm{Fl}(R(S))$ に対して, $\alpha^*=\mathscr{F}_S(\alpha): \mathscr{F}_S(E')\to\mathscr{F}_S(E)$ は injection.

補題の証明. (可換ではない) diagram

$$\begin{tikzcd} & E\times_S E' \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ E \arrow[rr, "\alpha"] & & E' \end{tikzcd}$$

において, 命題 1 (i) より, $p_2^*=p_1^*\circ\alpha^*$. 従って, $p_2^*: \mathscr{F}_S(F')\to\mathscr{F}_S(E\times_S E')$ が injection であることを示せばよい. $E'=\{S_i\to S\}_{i\in I}$ とすれば, $E\times_S S_i\in R(S_i)$ $(i\in I)$. 仮定 (separated) より, $\mathscr{F}(S_i)\to\mathscr{F}(E\times_S S_i)$ は injection, 故に $\mathscr{F}(E')=\prod_i \mathscr{F}(S_i)\to\mathscr{F}(E\times E')=\prod_i \mathscr{F}(E\times_S S_i)$ も injection である. 従って, これを制限した写像 $p_2^*: \mathscr{F}_S(E')\to\mathscr{F}_S(E\times_S E')$ も injection である.

系. F が separated であれば, $l_{\mathscr{F}}: \mathscr{F}\to L\mathscr{F}$ は injection (presheaf の category $\mathscr{D}_K$ で).

さて, $S\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$, $E=\{S_i\to S\}_{i\in I}\in R(S)$, $\bar{\xi}\in\mathrm{Ker}\{L\mathscr{F}(E)\rightrightarrows L\mathscr{F}(E\times_S E)\}$ とする. 各 $i\in I$ について, $F_i\in R(S_i)$ が存在し, $\bar{\xi}$ を代表する $\xi\in\prod_i \mathscr{F}_{S_i}(F_i)$ がとれる. $F=\{F_i\to S\}\in R(S)$ とおくと, diagram

$$\mathscr{F}_S(F)\longrightarrow\prod_i \mathscr{F}_{S_i}(F_i)\longrightarrow L\mathscr{F}(E)\rightrightarrows L\mathscr{F}(E\times_S E)$$

は次の如く分解される:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & \prod_i \mathscr{F}_{S_i}(F_i\times_S E) \arrow[dr] & & \\ \mathscr{F}_S(F) \arrow[r] & \prod_i \mathscr{F}_{S_i}(F_i) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathscr{F}_S(F\times F) \arrow[r] & L\mathscr{F}(E\times E) \\ & \xi \arrow[u, phantom, "\Cup" description] & \prod_i \mathscr{F}_{S_i}(E\times_S F_i) \arrow[ur] & & \bar{\xi} \arrow[u, phantom, "\Cup" description] \end{tikzcd}$$

この二つの路を通って, ξ は $L\mathscr{F}(E\times E)$ で一致するから, $F_i\times E$ と $E\times F_i$ の適当な共通の細分で一致する. 従って, 補題より, ξ は $\mathscr{F}_S(E\times F)$ で一致しなければならない. 一方, $\mathscr{F}_S(F)=\mathrm{Ker}(\prod \mathscr{F}_{S_i}(F_i)\rightrightarrows\mathscr{F}_S(F\times F))$ であることに注意すれば, $\xi\in\mathscr{F}_S(F)$. 故に, 可換な diagram

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}_S(F) \arrow[r] \arrow[d] & L\mathscr{F}(S) \arrow[d] \\ \prod_i \mathscr{F}_{S_i}(F_i) \arrow[r] & L\mathscr{F}(E) \end{tikzcd}$$

より, $\bar{\xi}\in\mathrm{Im}(L\mathscr{F}(S)\to L\mathscr{F}(E))$. これと (i) とから, $L\mathscr{F}$ は sheaf となり, (ii) が証明された.

(iii) $\mathscr{F}$ が sheaf であれば, 定義より, $\mathscr{F}(S)\simeq\mathscr{F}_S(E)$ $(E\in R(S))$. これより明らか.

(iv) $f\rightsquigarrow(l_{\mathscr{G}}^{-1})^2\circ(L^2 f)$ $(f\in\mathrm{Hom}(\mathscr{F}, \mathscr{G}))$ によって, 逆の対応が得られる.

定義 7. presheaf $\mathscr{F}$ に対して, $L^2\mathscr{F}=\#\mathscr{F}$ を $\mathscr{F}$ に associate した sheaf という. これは, 定理 1 (iv) によって特徴づけられる.

§3. **Abelian category $\mathscr{D}_T$, $\mathscr{S}_T$.** $T=(\mathscr{C}, R)$ を topology, $\mathscr{D}_T=\mathscr{D}$, $\mathscr{S}_T=\mathscr{S}$ をそれぞれ abel 群の category (ab.) に値をもつ T の presheaf および sheaf のつくる category とする (morphism は functional morphism). これらは, 明らかに abelian category (cf. [3]) になる. また,

$\mathscr{F}\longrightarrow\mathscr{G}\longrightarrow\mathscr{H}$: exact in $\mathscr{D}$

$\Longleftrightarrow$ 任意の $S\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ に対し,

$\mathscr{F}(S)\longrightarrow\mathscr{G}(S)\longrightarrow\mathscr{H}(S)$: exact in (ab.).

ːxact, および次の定理中の Ker, Coker 等の定義についても [3] を参照されたい.)

定理 2. (i) $\mathscr{F}\xrightarrow{f}\mathscr{G}$ を $\mathscr{S}$ の morphism とすると, Ker f in $\mathscr{S}$ = Ker f in $\mathscr{D}$, Coker f in $^{\mathscr{o}}=\#$(Coker f in $\mathscr{D}$).

(ii) canonical injection $i:\mathscr{S}\to\mathscr{D}$ は left exact functor, $L:\mathscr{D}\to\mathscr{D}$ は left exact, $\#:\mathscr{D}\to\mathscr{S}$ ŀ exact.

証明. (i) $K=\mathrm{Ker}\,f$ in $\mathscr{D}$ とする, すなわち $K(S)=\mathrm{Ker}\,(\mathscr{F}(S)\to\mathscr{G}(S))$ $(S\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C}))$. この
:き, 可換な diagram $(E\in R(S),\ S\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C}))$

$$
(*)\quad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
K(S) \arrow[r] \arrow[d] & K(E) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & K(E\times_S E) \arrow[d] & \\
\mathscr{F}(S) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{F}(E) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \mathscr{F}(E\times_S E) \arrow[d] & : \text{exact} \\
\mathscr{G}(S) \arrow[r] & \mathscr{G}(E) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \mathscr{G}(E\times_S E) & : \text{exact}
\end{tikzcd}
$$

.り, 明らかに (*) も exact, すなわち K は sheaf である. $K=\mathrm{Ker}\,f$ in $\mathscr{S}$ であることは明ら
. 次に, $C=\mathrm{Coker}\,f$ in $\mathscr{D}$ とする, すなわち $C(S)=\mathrm{Coker}\,(\mathscr{F}(S)\to\mathscr{G}(S))$ $(S\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C}))$. この
き, 任意の $X\in\mathscr{S}$ に対して得られる可換な diagram (定理 1 (iv))

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(\#\mathscr{F},X) \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}(\#\mathscr{G},X) \arrow[l] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}(\#C,X) \arrow[l] \arrow[d, "\wr"] & 0 \arrow[l] \\
\mathrm{Hom}(\mathscr{F},X) & \mathrm{Hom}(\mathscr{G},X) \arrow[l] & \mathrm{Hom}(C,X) \arrow[l] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}
$$

おいて, 下の行は exact ゆえ, 上も exact, すなわち $\#C=\mathrm{Coker}\,f$ in $\mathscr{S}$ (これが定義であっ
! [3]).

(ii) $\langle i\rangle$: (i) の前半より明らか.

$\langle L\rangle$: $0\to\mathscr{F}\to\mathscr{G}\to\mathscr{H}$: exact in $\mathscr{D}$ とすると可換な diagram

$$
(**)\quad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathscr{F}_S(E) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{G}_S(E) \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{H}_S(E) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F}(E) \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \mathscr{G}(E) \arrow[r] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & \mathscr{H}(E) \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & : \text{exact} \\
0 \arrow[r] & \mathscr{F}(E\times_S E) \arrow[r] & \mathscr{G}(E\times_S E) \arrow[r] & \mathscr{H}(E\times_S E) & : \text{exact}
\end{tikzcd}
$$

り, (**) も exact $(E\in R(S))$. $\varinjlim$ は exact functor であるから (命題 1), $0\to L\mathscr{F}(S)\to L\mathscr{G}(S)\to$ $L\mathscr{H}(S)$: exact.

$\langle\#\rangle$: まず, $\#=L^2$ であるから, $\mathscr{D}\xrightarrow{\#}\mathscr{D}$ と考えれば left exact. 従って (i) の前半を $\mathscr{D}\xrightarrow{\#}\mathscr{S}$ しても left exact. right exact は (i) の後半より明らかで, 証明は終る.

$f:T=(\mathscr{C},R)\to T'=(\mathscr{C}',R')$ を topology の morphism とする (定義 4). このとき, $\mathscr{F}'\leadsto$ $(\mathscr{F}')=\mathscr{F}'\circ f$ によって additive functor $f^p:\mathscr{D}_{T'}\to\mathscr{D}_T$ を得る. f^p は明らかに exact functor で
る. また, $\mathscr{F}'\in\mathscr{S}_{T'}$ なら $f^p(\mathscr{F}')\in\mathscr{S}_T$ であることは容易にたしかめられる. すなわち, f^p は
$:\mathscr{S}_{T'}\to\mathscr{S}_T$ をひきおこす. $f^s=\#_T\circ f^p\circ i_{T'}$ であるから, 定理 2 (ii) により f^s は left exact であ

る. さらに次の結果が得られる:

定理 3. (i) f^p の left adjoint[1] $f_p:\mathscr{D}_T\to\mathscr{D}_{T'}$ が存在する.

(ii) $f_s=\#_{T'}\circ f_p\circ i_T:\mathscr{S}_T\to\mathscr{S}_{T'}$ は f^s の left adjoint である.

(iii) f_p は left exact functor である. f_s については, $\mathscr{C}$ および $\mathscr{C}'$ がともに final object[2] をもち, 有限個の fibre product が定義され, さらにそれらが f によって保存されるなら exact functor となる.

大ざっぱに云って, (i) の f_p は,

$$[f_p(\mathscr{F})](S')=\varinjlim_{X}\mathscr{F}(X)\qquad(\mathscr{F}\in\mathscr{D}_T,\ S'\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C}'))$$

で定義される. ただし, direct limit は $\mathrm{Hom}(Y,f(X))\neq\phi$ なる X について適当に定められた (拡張された意味での) direct limit である. (詳しくは, [3, Ch. I, §§1, 2] 参照.) (ii), (iii) については [3, Ch. I (2.1), Ch. II (4.6), (4.14)] を参照されたい.

さらに, $\mathscr{D}$, $\mathscr{S}$ の injective object については, 次の結果がある:

定理 4. (i) 各 presheaf (sheaf) は injective presheaf (sheaf) の sub-presheaf (-sheaf) である.

(ii) injective sheaf は injective presheaf である. ここに, injective presheaf (sheaf) = abelian category $\mathscr{D}(\mathscr{S})$ の injective object.

$S\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ に対して, presheaf $\mathcal{Z}_S$ を

$$\mathcal{Z}_S(T)=\bigoplus_{\mathrm{Hom}(T,S)}\mathbf{Z}.\qquad(T\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C}))$$

で定義すれば, これは category $\mathscr{D}$ の generator ([3, (1.9)]) になることがわかる. 従って, [3, Th. 1. 10. 1] より, $\mathscr{D}$ について (i) がわかる. $\#\mathcal{Z}_S$ は $\mathscr{S}$ の generator になるから, $\mathscr{S}$ についても同様である. (詳しくは, [1, Ch. I (2.7)] 参照.) (ii) については, [1, Ch. I (2.7)] を参照されたい.

定理 4 (i) により, abelian category $\mathscr{D}$ および $\mathscr{S}$ 上の left exact functor f ($\to$abelian category) について, derived functor R^qf $(q\geqq 0)$ の議論が保障される. 例えば,

定義 8. (i) $S\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ を固定する. 各 sheaf $\mathscr{F}\in\mathscr{S}$ に $\mathscr{F}(S)$ を対応させる functor を Γ_S: $\mathscr{S}\to$(ab.) と記す. これは, left exact functor であって (定理 2 (ii)), S 上の section と呼ばれる. このとき,

$$R^q\Gamma_S(\mathscr{F})=H^q(S;\mathscr{F})\qquad(q\geqq 0,\ \mathscr{F}\in\mathscr{S})$$

と書き, topology $T=(\mathscr{C},R)$ の S 上の sheaf 係数の cohomology と呼ぶ

(ii) left exact functor $i:\mathscr{S}\to\mathscr{D}$ (定理 2 (ii)) に対して,

$$R^qi(\mathscr{F})=\mathscr{H}^q(\mathscr{F})\qquad(q\geqq 0,\ \mathscr{F}\in\mathscr{S}).$$

次の事柄は容易にたしかめられる.

命題 2. (i) $[\mathscr{H}^q(\mathscr{F})](S)=H^q(S;\mathscr{F})$ $(S\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C}),\ \mathscr{F}\in\mathscr{S})$.

(ii) $f:T\to T'$ を topology の morphism とするとき,

---

1) 二つの covariant functor $\mathscr{C}\underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}}\mathscr{C}'$ について, $\mathrm{Hom}(A,\alpha B)$ と $\mathrm{Hom}(\beta A,B)$ が $(A,B)\in\mathscr{C}'\times\mathscr{C}$ の bifunctor として同型になるとき, β を α の left adjoint という. β は存在すれば, 同型の意味で一意的.

2) category $\mathscr{C}$ の object A で, 任意の $X\in\mathrm{Ob}(\mathscr{C})$ に対して $\mathrm{Hom}(X,A)$ がただ一つの元からなるとき, A を final object という.

$$R^q f^p(\mathscr{F}) = \#[f^p(\mathscr{H}^q(\mathscr{F}))] \quad (\mathscr{F} \in \mathscr{S}_T).$$

さらに，

命題 3. $L[\mathscr{H}^q(\mathscr{F})] = 0 \quad (q>0,\ \mathscr{F} \in \mathscr{S})$.

証明. 定理 1 (i) と補題の系 (§2) とより，

$$L[\mathscr{H}^q(\mathscr{F})] \subset L^2[\mathscr{H}^q(\mathscr{F})] = \#[\mathscr{H}^q(\mathscr{F})].$$

しかるに，$\#$ は exact functor ゆえ，

$\#[\mathscr{H}^q(\mathscr{F})] = \#(R^q i(\mathscr{F})) = R^q(\# i)(\mathscr{F}) = R^q(\mathrm{id.})(\mathscr{F}) = 0 \ (q>0)$. ゆえに，$L[\mathscr{H}^q(\mathscr{F})] = 0 \ (q>0)$.

§4. Čech cohomology. $T=(\mathscr{C}, R)$ を topology とする．任意の $E \in R(S)$ $(S \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C}))$ に対して，

$$\hat{k} : (E)^{p+2} = \overbrace{E \times_S \cdots\cdots \times_S E}^{p+2} \longrightarrow (E)^{p+1} = \overbrace{E \times_S \cdots\cdots \times_S E}^{p+1} \quad (0 \leqslant k \leqslant p+1)$$

は k 番目の因子を除く projection $(\in \mathrm{Fl}(R(S))$ とする．$K^p(E, \mathscr{F}) = \mathscr{F}((E)^{p+1})$ $(\mathscr{F} \in \mathscr{D}_T,\ p \geqslant 0)$ とおき，

$$d_p = \sum_{k=0}^{p} \mathscr{F}(\hat{k}) : K^p(E\,;\mathscr{F}) \longrightarrow K^{p+1}(E\,;\mathscr{F})$$

と定義すれば，$d_{p+1} \circ d_p = 0$，すなわち $K^{\cdot}(E\,;\mathscr{F}) = \{K^p(E\,;\mathscr{F}), d_p\}_{p\geqslant 0}$ は cochain complex となる．また，$\mathscr{F} \rightsquigarrow \mathscr{F}(S)$ が exact functor $\mathscr{D} \to (\mathrm{ab.})$ であることから $K^{\cdot}(E\,;*) : \mathscr{D} \to$ (cochain complex) も exact functor となり，cohomological functor[3]：

$$H^{\cdot}(E\,;*) = \{H^p(E\,;*)\}_{p\geqslant 0}, \qquad H^p(E\,;\mathscr{F}) = \mathrm{Ker}\, d_p / \mathrm{Im}\, d_{p-1}$$

を得る．これを S の covering E 上の <u>Čech cohomology の functor</u> と呼ぶ：

$$H^{\cdot}(E\,;\mathscr{F}) = \mathrm{Ker}\,\{\mathscr{F}(E) \rightrightarrows \mathscr{F}(E \times_S E)\} = \mathscr{F}_S(E).$$

さらに，injective presheaf I に対して，$H^p(E\,;I)=0$ $(p>0)$ となることがわかるから，

定理 5. $H^{\cdot}(E\,;*)$ は functor $\mathscr{F} \to \mathscr{F}_S(E)$ $(\mathscr{D} \to (\mathrm{ab.}))$ の derived functor である．

さらに，$E \xrightarrow{f} E$ を $R(S)$ の morphism とすれば，f は自然に cochain complex の homomorphism $f^{\cdot} : K^{\cdot}(E'\,;\mathscr{F}) \to K^{\cdot}(E\,;\mathscr{F})$ を定める．さらに $f^{\cdot}$ は Čech cohomology の homomorphism $f^* : H^{\cdot}(E'\,;\mathscr{F}) \to H^{\cdot}(E\,;\mathscr{F})$ を induce する．この f^* は，f が induce する functional morphism $\mathscr{F}_S(E') \rightsquigarrow \mathscr{F}_S(E)$ $(H^{\cdot}(E'\,;*) \to H^{\cdot}(E\,;*))$ から得られる derived functor の morphism として定義してもよい．このことは，$\{H^{\cdot}(E'\,;\mathscr{F})\}_{E' \in R(S)}$ が inductive system であることを示している (命題 1).

定義 9. $\check{H}^p(S\,;\mathscr{F}) = \varinjlim_{E} H^p(E\,;\mathscr{F})$ $(\mathscr{F} \in \mathscr{D})$ で $\mathscr{F}$ に係数をもつ S 上の Čech cohomology を定義する：$\check{H}^{\cdot}(S, *)$ は Čech cohomology functor : $\mathscr{D} \to (\mathrm{ab})$.

$\check{H}^{\cdot}(S\,;\mathscr{F}) = L\mathscr{F}(S)$，また $\varinjlim_{E}$ は exact functor (命題 1) であるから，

定理 5′. $\check{H}^{\cdot}(S\,;\mathscr{F})$ は functor $\mathscr{F} \rightsquigarrow (L\mathscr{F})(S)$ $(\mathscr{D} \to (\mathrm{ab.}))$ の derived functor である．

とくに，$\mathscr{F}_S(E) = (L\mathscr{F})(S) = \mathscr{F}(S) = \Gamma_S(\mathscr{F})$ $(\mathscr{F} \in \mathscr{S})$ だから，

$$\Gamma_S : \mathscr{S} \xrightarrow{i} \mathscr{D} \underset{\check{H}^{\cdot}(S\,;*)}{\overset{H^{\cdot}(E\,;*)}{\rightrightarrows}} (\mathrm{ab.}) \quad (\text{composition functor}).$$

3) cohomology の exact sequence のできる functor.

ここで，i は $\mathscr{S}$ の injective object を $\mathscr{D}$ の injective object にうつすことに注意すれば (定理 4 (ii))，定理 5 および 5′ により，composition functor についての Leray の spectral sequence (cf. [3, Th. 2. 4. 1]) を得る：

(A) $E_2^{pq}(\mathscr{F}) = H^p(E\,;\mathscr{H}^q(\mathscr{F})) \Rightarrow H^{\cdot}(S\,;\mathscr{F})$,

(B) $E_2^{pq}(\mathscr{F}) = \check{H}^p(S\,;\mathscr{H}^q(\mathscr{F})) \Rightarrow H^{\cdot}(S\,;\mathscr{F}) \quad (\mathscr{F} \in \mathscr{S})$.

命題 3 より，(B) において $q>0$ のとき

$$E_2^{\cdot q}(\mathscr{F}) = \check{H}^{\cdot}(S\,;\mathscr{H}^q(\mathscr{F})) = [L\mathscr{H}^q(\mathscr{F})](S) = 0.$$

従って，edge homomorphism より，

定理 6. $\check{H}^p(S\,;\mathscr{F}) \simeq H^p(S\,;\mathscr{F}) \quad (p=0, 1)$.

$\check{H}^2(S\,;\mathscr{F}) \subsetneq H^2(S\,;\mathscr{F})$.

文 献

[1] M. Artin, Grothendieck topology, Harvard Univ., (1962).

[2] M. Demazure, Topologies et faisceaux, Sém. Géom. Alg. IHES, (1963), Exp. IV.

[3] A. Grothendieck, Sur quelque points d'algèbre homologique, Tohoku Math. J., (1957).

Chern classes と projective class group

尾　関　英　樹　(名古屋大学)

§0. **問題**. Rを環，$\{P\}$を finitely generated projective (f.g. proj.) R-左加群の全体とする．このとき，次の様な問題が生じ，いろいろの考察がされてきている．

1) どのようなPも自由的になるのは，Rが如何なるときか？

2) Pに対し，$P+F$が自由的になるような自由加群Fが存在するか？

3) 二つのP_1, P_2に対し，$P_1+F_1=P_2+F_2$となるような自由加群F_1, F_2が存在するか？

1) については，本誌遠藤氏の報告でも考えられているが，特にRが多項式環の場合が未解決である．2), 3) の問題は環の射影類群の問題になり，これが topology におけるK-理論の問題と関連を持って来る．

f.g. proj. R-左加群の category の Grothendieck 群 $K(R)$ は次の如く定義される：f.g. proj. R-左加群の同型類を$\{P\}$であらわす（これは集合としてあらわされる）．$\{P\}$から生成される自由可換群をFとし，Fに次の関係を入れる：$P_1+P_2\sim P$ とは完全列 $0\to P_1\to P\to P_2\to 0$ が存在することである．Fをこの関係$\sim$で割って得られる可換群を$K(R)$とする．

次に，Rの射影類群$k(R)$を次の如く定義する：$\{P\}$に次の関係を入れる：$P_1\sim P_2$とは$P_1\oplus F_1\approx P_2\oplus F_2$なる f.g. 自由加群$F_1$, F_2が存在することである．$\{P\}$をこの関係で割って出来る集合を$k(R)$とし，Pの入る類を$[P]$とするとき，$k(R)$に$[P_1]+[P_2]=[P_1\oplus P_2]$で和を定義する．かくして，$k[R]$は可換群となり，その0元は自由加群の作る類である．

最初にのべた問題2)および3)が$k(R)$の中での問題に帰着されることは明らかであろう．

定義の仕方から知られる様に，$K(R)$から$k(R)$の上への群準同型が存在する．この核は，Rが“キレイ”な環の場合には丁度$\mathbf{Z}$になることが知られている．例えば，Rが可換で，spec(R)が連結ならばよい．この様に，$k(R)$と$K(R)$は群としてはたいして変っていないが，$K(R)$の良い点は次の事実による：“Rが可換なら tensor product $\otimes$ により$K(R)$は可換環となる．この積における1はR自身の像である”．

更に又，$K(R)$, $k(R)$はRに対し functorial である：“$R\to K(R)$, $R\to k(R)$ は環の category から可換群の category への covariant functor である”．実際に，環準同型$f: R_1\to R_2$に対し，f.g. proj. R_1-加群P_1をとれば，$R_2\otimes_{R_1}P_1$は f.g. proj. R_2-加群となる．

以下の目的は，topology における vector bundle と proj. 加群との類似性および関係をのべ，topology における Chern class なる概念をどのように proj. 加群に対して定義すればよいか，その一方法を最後に紹介する．

以下において考えられる proj. 加群は，すべて可換環上の有限生成のものとする．

§1. **Vector bundles と projective modules.** 位相空間上の vector bundle への切断 (cross section) 全体は，その空間上の函数が作る環の上の f.g. proj. 加群となることを種々の場合に示そう．証明はそれぞれの文献を見られたい．

Xを位相空間，EをX上の vector bundle (complex でも real でもよい) とする．すなわち，Eは位相空間で，EからXへの prejection πが存在して，Xの各点pに対してp上の fibre

$\pi^{-1}(p)$は有限次元 vector space の構造をもち，更に，Xは開被覆$\{U_i\}$を有し，$\pi^{-1}(U_i)$は$U_i\times$ (vector space) となって，各 fibre の vector space の構造はこの同型で保たれているものとする．$\mathscr{C}(X)$でX上の連続函数全体のなす環，$\Gamma(E)$で vector bundle Eへの連続な切断の全体をあらわそう．Eの各 fibre の和の構造から，$\Gamma(E)$は可換群となり，更に$\mathscr{C}(X)$-加群となる．Xに対し，二，三の条件をつけ加えれば，$\Gamma(E)$は f.g. proj. $\mathscr{C}(X)$-加群となる．

逆に，Γを f.g. proj. $\mathscr{C}(X)$-加群としよう．Xの各点xに対し，$\mathfrak{m}_x=\{f\in\mathscr{C}(X); f(x)=0\}$とおけば，$\mathfrak{m}_x$は$\mathscr{C}(X)$の極大イデアルで$\mathscr{C}(X)/\mathfrak{m}_x$は体となる．仮定より，$\Gamma/\mathfrak{m}_x\Gamma$はこの体の上の有限次元 vector space となる．Xの各点xに対し，vector space $\Gamma/\mathfrak{m}_x\Gamma$を対応させて，$X$上の vector bundle を得る．$X$が連結ならば，各 fibre の次元は一定となる．Γが$\mathscr{C}(X)$-自由加群の場合には，その vector bundle は product bundle となっている．

定理 1. (Swan [12]). Xが compact Hansdorff 空間なら，X上の vector bundle Eに対して，$\Gamma(E)$は f.g. proj. $\mathscr{C}(X)$-加群で，この対応により，X上の vector bundles と f.g. proj. $\mathscr{C}(X)$-加群との間の一対一対応が得られる．

注意 1. 対応のつけかたから容易にわかるように，vector bundles の $+$(Whitney sum), $\otimes$ (tensor product) は加群の $\oplus$, $\otimes$ に対応する．

注意 2. 定理1の対応は（そのつけかたから容易にわかるように）functorial である．すなわち，連続写像$f: X\to Y$は環準同型$f^*: \mathscr{C}(Y)\to\mathscr{C}(X)$をひきおこし，$f$による vector bundles の対応は$f^*$による加群の対応に対応する．

定理 2. (Milnor [8]). Xが paracompact, 有限次元の場合に，定理1と同様の事実が成立する．

定理 3. X, $\mathscr{C}(X)$, E, $\Gamma(E)$として以下の場合をとれば，注意1, 2迄もふくめて，定理1と同様の事が成立する．

3) $X\to$paracompact differ. manifold, $\mathscr{C}(X)\to X$上のC^∞-differ. functions の作る環，$E\to X$上の differ. vector bundle, $\Gamma(E)\to E$への differ. cross-sections 全体．

4) $X\to$compact real analytic manifold, $\mathscr{C}(X)\to X$上の real analytic functions の作る環，$E\to$real analytic vector bundle, $\Gamma(E)\to$real analytic cross-sections 全体．

5) $X\to$Stein manifold, $\mathscr{C}(X)\to X$上の hol. functions の作る環，$E\to$hol. vector bundle, $\Gamma(E)\to$hol. cross-sections 全体．

6) $X\to$non-singular affine variety, $\mathscr{C}(X)\to X$上の algebraic functions の作る環，$E\to X$上の algebraic vector bundle, $\Gamma(E)\to$algebraic cross-sections 全体．

3)の証明については Milnor [8] を，6)については Serre [10], [11] を見られたい．4), 5) は筆者による注意であるが，Grauert [3] を参照されたい．

注意 3. 環の場合と全く同様にして，位相空間Xに対しても，$K(X)$, $k(X)$が complex vector bundles から定義される．

注意 4. Xが連結であれば，X上の vector bundle Eの各 fibre の次元は一定で，それは$\Gamma(E)$の localization の rank と一致する．

さて，これらの定理が代数的にどのような意味をもつか，二，三の例をあげてみよう．

例 1. $X=\mathbf{C}^n$ (n次元複素アフィン空間) とし，$R=\mathbf{C}[Z^1, \cdots, Z^n]$ (C上のn変数多項式環) を考える．f.g. proj. R-加群Pは$X=\mathbf{C}^n$上の complex vector bundle Eを定義する（定理1）．$\mathbf{C}^n$は contractible だから，Eは differentially trivial である．更に，Grauert の定理により，E

は holomorphically trivial である，すなわち，$\Gamma(E)$ を $\boldsymbol{C}^n$ 上の hol. functions の作る環へ拡張すれば，そこでは自由的になる．しかし，$\Gamma(E)$ が R 上で自由的かどうかということは，$n\geqq 3$ のときにまだ解決されていない．

例 2. $X=S^2$ (2 次元球面とする). $S^2=\{(x, y, z)\in R^3 ; x^2+y^2+z^2=1\}$ である．今，環 $R=\boldsymbol{R}[X, Y, Z]/(X^2+Y^2+Z^2-1)$ とおく ($\boldsymbol{R}$ は実数体). F は生成元 $\partial_X, \partial_Y, \partial_Z$ を有する R-自由加群とし，次の如き部分加群を考える：

$P=\{x\partial_Y-y\partial_X, y\partial_Z-z\partial_Y, z\partial_X-x\partial_Z\}$ から生成された部分加群，

$N=x\partial_X+y\partial_Y+z\partial_Z$ から生成された部分加群．

ここに，x, y, z は X, Y, Z の R への像である．容易に示される如く，$F=P\oplus N$. さて，P は S^2 を affine variety と考えたときの tangent bundle への切断全体，すなわち微分全体の作る加群と同型である．ところが，S^2 の differ. tangent bundle は product bundle でないことが topology で知られている．したがって，上の P は自由 R-加群ではあり得ない．しかし，N は明らかに自由的だから，P の $k(R)$ への像は 0 となる．

§2. **Vector bundles の $\boldsymbol{K}$-理論，Chern classes.** 前節に述べたことから，位相空間 X の $K(X)$, $k(X)$ は夫々，X 上のある種の函数の作る環の Grothendieck 群，射影類群となることがわかった．

topology において，$K(X)$, $k(X)$ を調べるのに，Chern character, Chern class なる概念があるが，これらについて述べることにしよう．

以下，vector bundles はすべて complex vector bundles とする．

位相空間 X とその上の vector bundle E に対し，X の $\boldsymbol{Z}$ 係数コホモロジー群 $H^*(X, \boldsymbol{Z})$ の元 $c(E)$ が対応していて，次の条件をみたすとき，これを Chern class という：

0) E の fibre の次元を n とするとき，$c(E)=c_0(E)+\cdots+c_n(E)$, $c_i(E)\in H^{2i}(X, \boldsymbol{Z})$.

1) $c(E_1+E_2)=c(E_1)\wedge c(E_2)$.

2) c は functorial, すなわち，$f: X\to Y$ に対し X 上の vector bundle E から Y 上の vector bundle E' がひきおこされて，$c(E')=f^*(c(E))$.

3) $S^2=P^1(C)$ 上の canonical line bundle E に対し，$c(E)=1+c_1(E)$. ここに $c_1(E)$ は $H^2(S^2, Z)=\boldsymbol{Z}$ の生成元．

この定義は Hirzebruch [5] による．実際は，X に対し少し条件をつけなければならない．存在については Hirzebruch [5], Milnor [7] を参照されたい．

Chern class の定義から容易にわかるように，c は $k(X)$ から $H^{**}(X, \boldsymbol{Z})$ への群準同型を ひきおこす，ここに $H^{**}(X, \boldsymbol{Z})$ は $H^*(X, \boldsymbol{Z})$ の偶数次元の元よりなり，$\wedge$ に関する可換群を示す．したがって，vector bundles E_1, E_2 に対し，product bundles F_1, F_2 が存在して $E_1+F_1\approx E_2+F_2$ ならば，$c(E_1)=c(E_2)$ となる．

位相空間 X 上の vector bundle E に対し，その Chern character $\mathrm{ch}(E)$ は $H^{ev}(X, \boldsymbol{Q})$ の元として次の様に定義される，ここに $H^{ev}(X, \boldsymbol{Q})$ は $H^*(X, \boldsymbol{Q})$ の偶数次の元全体からなる部分環で，$\boldsymbol{Q}$ は有理数体をあらわす．

E の Chern class $c(E)=\sum c_i(E)$ に対し，

$$\sum c_i(E)\, t^i = \prod (1+x_i t),$$
$$\mathrm{ch}(E) = \sum e^{x_i}.$$

(この意味については，Hirzebruch [5] を見られたい，又便宜上 X は有限次元と仮定した.)

さて，Chern character は次の性質を有する：

1) $\mathrm{ch}(E_1+E_2)=\mathrm{ch}(E_1)+\mathrm{ch}(E_2)$.

2) $\mathrm{ch}(E_1\otimes E_2)=\mathrm{ch}(E_1)\wedge \mathrm{ch}(E_2)$.

3) ch. は functorial である．

これらのことから，Chern class と同様に，環準同型：$K(X)\to H^{ev}(X, \boldsymbol{Q})$ がひきおこされる．

さて，X が有限 C-W-complex のとき，$K(X)\otimes \boldsymbol{Q}\xrightarrow{\mathrm{ch.}} H^{ev}(X, \boldsymbol{Q})$ は injective である [1]. これは，$K(X)\otimes\boldsymbol{Q}$, $k(X)\otimes\boldsymbol{Q}$ がほぼ Chern character, Chern class により定まることを意味している．

$K(X)$ を用いて，K-理論が展開され，vector bundle の特徴づけに利用されるが，最近 Bass は K-理論を代数的に建設することを試み，種々の結果を得ている．

§3. **Chern classes of projective modules.** 可換環 R 上の f.g. prj. 加群 P に対し，その Chern class を定義したい．すなわち，以下の目的は Chern による微分幾何学的方法を代数化することにある．

R を可換な S-多元環 ($S=\boldsymbol{Z}$ でもよい), D を R の S-derivations の全体とする．D は R-加群をなし，これから R の de Rham cohomology 群 $H^*(R)$ が作られる．

P を f.g. proj. R-加群とし，$\mathrm{End}_R(P)\subset \mathrm{End}_S(P)$ を考える．$N(P)=\{\alpha\in \mathrm{End}_S(P) ; \forall f\in R, \exists g\in R \text{ such that } [f, \alpha]=f\circ\alpha-\alpha\circ f=g \text{ in } \mathrm{End}_S(P)\}$ とおく，ここに $R\subset \mathrm{End}_S(P)$ と考えている．

$N(P)$ は R-加群で，$[\,,]$ に関して閉じている．今 P が constant rank であると仮定すれば，$N(P)$ の定義における対応 $f\to g$ は一意的で，R の derivation $\theta(\alpha)$ を与える．

定理 4. f.g. proj. R-加群 P が constant rank なら

$$0\longrightarrow \mathrm{End}_R(P)\longrightarrow N(P)\xrightarrow{\ \theta\ } D\longrightarrow 0$$

は完全列で，θ は R-加群，S-Lie 多元環としての準同型である．(証明は [9] 参照.)

上記定理中の完全列の R-加群としての splitting ω ; $D\to N(P)$ を connection という．かかる ω は常に存在し [9], この connection の定義は微分幾何における vector bundle の connection に対応している．

connection ω に対し，その curvature Ω を

$$\Omega(X, Y) = \omega([X, Y])-[\omega(X), \omega(Y)] \quad (X, Y\in D)$$

により定義する，Ω は $\mathrm{End}_R(P)$ に値を持つ D 上の 2 次の skew-symmetric bilinear form である．

この Ω を用いて $H^*(R)$ の元を対応させ，P の Chern class を定義するのであるが，その定義の仕方は微分幾何におけるそれとほぼ同様である．

微分幾何における Chern class の定義で，その class が connection によらないことは，Weil による巧妙な方法がある．しかしながら，それは積分を使うので，代数化は出来ない．この点の証明については筆者の論文 [9] の最後を見られたい．

又，§1 の定理の証明については，筆者の論説 (数学) を見られたい．

文献

M. Atiyah and F. Hirzebruch, Vector bundles and homogeneous spaces, Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc., 3 (1961).

S. S. Chern, Topics in differential geometry, Institute for Advanced Study, 1951.

H. Grauert, Analytische Faserungen über holomorph-vollständigen Räumen, Math. Ann., 135 (1958).

] A. Grothendieck, La théorie de classes de Chern, Bull. Soc. Math. France, 86 (1958).

] F. Hirzebruch, Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie, Springer, 1956.

] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations in differential geometry, Vol. 2.

] J. Milnor, Lectures on characteristic classes, Princeton, 1957.

] J. Milnor, Lectures on differential manifolds, Princeton, 1958.

] H. Ozeki, Chern classes of projective modules, Nagoya Math. J., 23 (1963).

)] J. P. Serre, Faisceaux algébrique cohérents, Ann. of Math., 61 (1955).

l] J. P. Serre, Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle, Sém. Dubreil-Pisot, 11 (1957–1958), N° 23.

2] R. G. Swan, Vector bundles and projective modules, Trans. Amer. Math. Soc., 105 (1962).

Derived category の理論の紹介

松　村　英　之　(京都大学)

序.　コホモロジー論が複雑になると定理がいくつかの関手 (functor) の導来関手の間の関係としてあらわされなければならないことがある．そのような場合，超コホモロジーを用いスペクトル系列の形で関係を表現することが従来の方法であったが ([3], Ch. 17])，スペクトル系列はなんといっても間接的で，具体的計算にはともかく，一般理論の言葉としては不十分である．

数年前，Verdier (おそらくは Grothendieck の弟子であろう．1964/65 は Harvard で過している) が導来圏 (derived category) の理論を組立てて，超ホモロジー論の面目を一新した．彼の理論はそのうちに Thèse として発表されるのであろうが，まだ雑誌等には現われていない．Grothendieck は早速この理論を彼の双対定理の記述に応用し，その下書きを Harvard の Hartshorne に送り，Harvard ではそれに基づいてセミナーが行なわれた．本稿は [1] の Exposé I を再構成して丁寧に解説したものである．

訳語については，圏＝category，関手＝functor，導来関手＝derived functor，対象＝object，射＝morphism，同等射＝isomorphism，移入的＝injective，部分圏＝subcategory，ただし本稿では部分圏は常に充満な (full, 仏 pleine) 部分圏を意味するものとする．

内容を概観しておこう．$\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ をアーベル圏とし，$F: \mathscr{A}\to\mathscr{B}$ を加法的関手とする．F の右導来関手 $R^qF: \mathscr{A}\to\mathscr{B}$ $(0\leqq q<\infty)$ を別々に考えず，$A\in\mathscr{A}$ に対して $\mathscr{B}$ における複体 $\boldsymbol{RF}(A)$ を対応させ，そのコホモロジーをとれば丁度 $H^q(\boldsymbol{RF}(A))=R^qF(A)$ となるようにする．実は，更に $A\in\mathscr{A}$ のみならず $\mathscr{A}$ における複体 $X^{\cdot}$ についても $\boldsymbol{RF}(X^{\cdot})$ が定義され，$H^q(\boldsymbol{RF}(X^{\cdot}))$ は $X^{\cdot}$ の q 次元超コホモロジーを与える．この際，$\boldsymbol{RF}(A)$ が“同型”を除いて一意的にきまるためには $\mathscr{B}$ における複体の間の“射”を適当に定義しなければならない．こうして $\mathscr{B}$ の導来圏 $D(\mathscr{B})$ が定義される．これは一般にアーベル圏ではないが，triangulation という構造が入って，short exact sequence の役割りを果す．

§§ 1–4 では，[1] を大分並べ替え，証明や解説を補った．§§ 5, 6 は [1] にかなり忠実に従ったが，補題 9 の証明はこちらでつけたものである．triangulated category は [1] の定義ではもう一つ (TR 4) として複雑な公理があるが，十分に練れていないように思われるのでそれは省き，具体的な $K(\mathscr{A})$，$D(\mathscr{A})$ に注意を集中した．“三角圏”の一般論が重要になることがあれば，[1] の (TR 4) よりも次の公理をおいたらどんなものかと思う：

“二つの三角形の間の準同型 (f, g, h) において，f, g が同等射なら h も同等射である”．

§ 1.　圏 $\boldsymbol{C}(\mathscr{A})$ と圏 $\boldsymbol{K}(\mathscr{A})$.　$\mathscr{A}$ をアーベル圏とする．この報告では，$\mathscr{A}$ における複体といえば微分作用素が $+1$ 次のものとする．複体を，$X^{\cdot}: \cdots\cdots\to X^{-1}\to X^0\to X^1\to\cdots\cdots$ のようにあらわす．複体 $X^{\cdot}$ から $Y^{\cdot}$ への鎖写像 (chain map, より正確に鎖射とでも呼ぶべきであろうが) $f=\{f_i: X^i\to Y^i\}_{i\in Z}$, $d_Yf=fd_X$, に対して，その属するホモトピー類を $[f]$ であらわす．

$\mathscr{A}$ における複体を対象とし，鎖写像 [resp. 鎖写像のホモトピー類] を射として得られる加法圏を $C(\mathscr{A})$ [resp. $K(\mathscr{A})$] であらわす．$C(\mathscr{A})$ において対象を下に有界 [resp. 上に有界，有

界] な複体に限った部分圏を $C^+(\mathscr{A})$ [resp. $C^-(\mathscr{A})$, $C^b(\mathscr{A})$] であらわす. 同様に, $K^+(\mathscr{A})$, $K^-(\mathscr{A})$, $K^b(\mathscr{A})$ が定義される. いま, $C^*(\mathscr{A})$ を $C(\mathscr{A})$, $C^+(\mathscr{A})$, $C^-(\mathscr{A})$, $C^b(\mathscr{A})$ の任意の一つとし, $C^*(\mathscr{A})$ と, 対応する $K^*(\mathscr{A})$ とについて考える. ホモトープな二つの鎖写像はコホモロジーの上に同じ射をひき起すから, i 次元コホモロジー $H^i(X^\cdot)$ は $C^*(\mathscr{A})\to\mathscr{A}$ の加法的関手とも $K^*(\mathscr{A})\to(\mathscr{A})$ のそれとも考えられる .

$C^*(\mathscr{A})$ はあきらかにアーベル圏であるが, $K^*(\mathscr{A})$ では射に核が必らずしも存在せず, したがって $K^*(\mathscr{A})$ は一般にアーベル圏でない.

反例 1. $\mathscr{A}$ をアーベル群の圏とする.

$$\begin{tikzcd}
T^\cdot \arrow[d, "u"] & & 0 \arrow[r] & \boldsymbol{Z}_4 \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & 0 \\
X^\cdot \arrow[d, "v"] & & 0 \arrow[r] & \boldsymbol{Z}_2 \arrow[r] \arrow[d, "2"'] & 0 \\
Y^\cdot & 0 \arrow[r] & \boldsymbol{Z}_4 \arrow[r] & \boldsymbol{Z}_4 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\qquad (\boldsymbol{Z}_n=\boldsymbol{Z}/n\boldsymbol{Z})$$

を考える. あきらかに $[vu]=0$, $[v]\neq 0$, $[u]\neq 0$. よって, $[v]$ は $K(\mathscr{A})$ の単射ではない. $K(\mathscr{A})$ において $[v]$ の核が存在したものとして, それを

$$\begin{tikzcd}
L \arrow[d, "\alpha"] & \cdots\cdots \arrow[r] & L^0 \arrow[r, "d"] \arrow[d] & L^1 \arrow[r, "d"] \arrow[d, "\alpha_1"] & L^2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots\cdots \\
X^\cdot & & 0 \arrow[r] & \boldsymbol{Z}_2 \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

とする. 定義により $[\alpha]$ は単射である. もし α のひきおこす $H^1(L^\cdot)\to H^1(X^\cdot)=\boldsymbol{Z}_2$ が単射でなければ, その核を $M/d(L^0)$, $M\subset Z^1(L^\cdot)$, $M\neq d(L^0)$, として

$$\beta:\quad \begin{tikzcd}
& 0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots\cdots \arrow[r] & L^0 \arrow[r] & L^1 \arrow[r] & L^2 \arrow[r] & \cdots\cdots
\end{tikzcd}$$

を考えれば $[\beta]\neq 0$, $[\alpha\beta]=0$ となって $[\alpha]$ が単射であることに矛盾する. よって $H^1(L^\cdot)$ は $\boldsymbol{Z}_2$ の部分群ゆえ 0 か $\boldsymbol{Z}_2$ であるが, $[u]:T^\cdot\to X^\cdot$ が $[\alpha]$ で割れねばならず $u_*:H^1(T^\cdot)=\boldsymbol{Z}_4\to H^1(X^\cdot)=\boldsymbol{Z}_2$ が onto であることから, $H_1(L^\cdot)=\boldsymbol{Z}_2$ のはずである. 一方, 再び核の定義から $[v\alpha]=0$. よって鎖ホモトピー $k=\{k_i:L^i\to Y^{i-1}\}_{i\in\boldsymbol{Z}}$ があって $v\alpha=kd+dk$.

$$\begin{tikzcd}
L^\cdot \arrow[d, "\alpha"] & \cdots \arrow[r] & L^0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[dd, "0"'] & L^1 \arrow[r, "d_1"] \arrow[d, "\alpha_1"] \arrow[ddl, "k_1"'] & L^2 \arrow[r] \arrow[dd, "0"] \arrow[ddl, "k_2"'] & \cdots \\
X^\cdot \arrow[d, "v"] & & & \boldsymbol{Z}_2 \arrow[d, "2"] & & \\
Y^\cdot & 0 \arrow[r] & \boldsymbol{Z}_4 \arrow[r, "2"] & \boldsymbol{Z}_4 \arrow[r] & 0 &
\end{tikzcd}$$

いま $Z^1(L^\cdot)$ 上では $v\alpha_1=2k_1$, で, すでに見たように $\alpha_1(Z^1(L^\cdot))=\boldsymbol{Z}_2$ だから, $k_1(Z^1(L^\cdot))=\boldsymbol{Z}_4$ でなければならない. 一方 $k_1d_0=0$. ゆえに k_1 は $Z^1(L^\cdot)/B^1(L^\cdot)=H^1(L^\cdot)=\boldsymbol{Z}_2$ から $\boldsymbol{Z}_4$ の上への写像となるがこれは不合理である.

$C^*(\mathscr{A})$ あるいは $K^*(\mathscr{A})$ において, 複体の次数を一つ減らし微分作用素の符号を変える操作を T であらわす. すなわち $T(X^\cdot)^i=X^{i+1}$, $d_{T(X)}=-d_X$ として複体を定義する. $u:X^\cdot\to Y^\cdot$ に対しては $T(u)_i=u_{i+1}$ として, T は関手になり圏の自己同型である.

$C^*(\mathscr{A})$ における射 $u:X^\cdot\to Y^\cdot$ の<u>写像柱</u> (mapping cylinder) とは次の如くして定義される

複体 $W^\cdot$ である: $W^i=T(X^\cdot)^i\oplus Y^i=X^{i+1}\oplus Y^i$, $d_W=\begin{pmatrix}-d_X & 0\\ u & d_Y\end{pmatrix}$. これを (不正確な云い方で) "写像柱 $W^\cdot=TX^\cdot+Y^\cdot$" のように書くこともあるが複体としての直和ではない.

$W^\cdot$ に対し, 自然な鎖写像 $Y^\cdot\to W^\cdot$, $W^\cdot\to TX^\cdot$ が定義されて, $0\to Y^\cdot\to W^\cdot=TX^\cdot+Y^\cdot\to TX^\cdot\to 0$ が $C^*(\mathscr{A})$ での完全系列である.

補題 1. 恒等射 $1_X:X^\cdot\to X^\cdot$ の写像柱 $TX^\cdot+X^\cdot$ は $K^*(\mathscr{A})$ で zero object である, すなわち複体 0 と同型である.

証明. $TX^\cdot+X^\cdot$ の恒等射が 0 ホモトープであることを示せばよいが, それには鎖ホモトピーを $k=\begin{pmatrix}0 & 1_X\\ 0 & 0\end{pmatrix}$:
$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
W^i=X^{i+1} & \oplus & X^i \arrow[dll, dash, "1"'] \\
W^{i-1}=X^i & \oplus & X^{i-1}
\end{tikzcd}$$
で定義すればよい:

$$\begin{aligned}
kd+dk&=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-d&0\\1&d\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-d&0\\1&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\\
&=\begin{pmatrix}1&d\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&-d\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

補題 2. $K^*(\mathscr{A})$ における任意の射 $u:X^\cdot\to Y^\cdot$ は $C^*(\mathscr{A})$ における全射と同値である.

証明. 命題の意味は, $C^*(\mathscr{A})$ における全射 $\bar{u}:\bar{X}^\cdot\to\bar{Y}^\cdot$ と, $K^*(\mathscr{A})$ における同型 $[\alpha]:\bar{X}^\cdot\to X^\cdot$, $[\beta]:Y^\cdot\to\bar{Y}^\cdot$ とがあって, $[\beta u\alpha]=[\bar{u}]$ となるということである. $\bar{Y}^\cdot=Y^\cdot$, $\beta=1_Y$ とし, 1_Y の写像柱 $W^\cdot=TY^\cdot+Y^\cdot$ をとり $\bar{X}^\cdot=X^\cdot\oplus T^{-1}W^\cdot$ (複体の直和) とおく. $K^*(\mathscr{A})$ では $T^{-1}W^\cdot\simeq 0$ だから projection を $\alpha:\bar{X}^\cdot\to X^\cdot$ とすれば $[\alpha]$ は同型である. $\bar{u}:\bar{X}^\cdot=X^\cdot\oplus T^{-1}W^\cdot\to Y^\cdot$ を $X^\cdot$ 上では u に, $T^{-1}W^\cdot=Y^\cdot+T^{-1}Y^\cdot$ 上では mod $T^{-1}Y^\cdot$ の自然準同型に等しいとおけば要求はすべてみたされる.

補題 3. $K^*(\mathscr{A})$ における任意の射 $u:X^\cdot\to Y^\cdot$ は $C^*(\mathscr{A})$ での単射と同値である.

証明. 1_X の写像柱を $W^\cdot$ として $\bar{u}:X^\cdot\to W^\cdot\oplus Y^\cdot$ を考えればよい.

§2. Triangulation. "short exact sequence からコホモロジーの long exact sequence がしたがう" という形の命題はホモロジー代数学の中核をなすといってよい. 前節で構成した加法圏 $K^*(\mathscr{A})$, および次節で構成する加法圏 $D^*(\mathscr{A})$ はアーベル圏ではないので short exact sequence というものも文字通りには意味を持たないが, ホモロジー代数学の場としてこのままでは不便である. それで short exact sequence の代りになる "三角形" という概念が導入される. 本質的には新しい概念でないかもしれないが, 写像柱の性質がうまく利用される点が面白い.

$K^*(\mathscr{A})$, $D^*(\mathscr{A})$ には, $X^\cdot\rightsquigarrow TX^\cdot$ で与えられる圏の自己同型 T が存在する. 少し抽象的に, 自己同型 T をもった加法圏 $\mathscr{C}$ を考える. $\mathscr{C}$ における図式 (diagram)

$$X\xrightarrow{u}Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}TX$$

を<u>三辺形</u>と呼び (X, Y, Z, u, v, w) と略記することにする. 二つの三辺形の準同型 $(X, Y, Z, u, v, w)\longrightarrow(X', Y', Z', u', v', w')$ とは可換な図式

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX'
\end{tikzcd}$$

のこととする．逆のある準同型を同型という．

$\mathscr{C}$ の三辺形のある族 $\mathscr{F}$ を与えて，$\mathscr{F}$ に属する三辺形を三角形 (triangle) と呼ぶことにする．このとき次の公理をおく：

(TR 1) a) 一つの三角形に同型な三辺形はまた三角形である．b) $u:X\to Y$ が $\mathscr{C}$ の射ならばこれを含む三角形 (X, Y, Z, u, v, w) が存在する．c) $(X, X, 0, 1_X, 0, 0)$ は三角形である．

(TR 2) (X, Y, Z, u, v, w) が三角形ならば $(Y, Z, TX, v, w, -Tu)$ も三角形で，逆も成り立つ．

(TR 3) 二つの三角形 (X, Y, Z, u, v, w) と (X', Y', Z', u', v', w') および射 $f: X\to X'$, $g: Y\to Y'$ とが与えられ，$u'f=gu$ が成り立つとき，射 $h: Z\to Z'$ が存在して (f, g, h) が第一の三角形から第二の三角形への準同型になる．(h の 一意性は要求しない)．

このような T, $\mathscr{F}$ を附加的構造として具えた加法圏 $\mathscr{C}$ を triangulated category と呼ぶ．

三角形は普通
$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "w"'] & \\ X \arrow[rr, "u"] & & Y \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd}$$
のように書かれるが，w は $Z\to X$ ではなく実は $Z\to TX$ であることを記憶せねばならない．

三角形
$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "w"'] & \\ X \arrow[rr, "u"] & & Y \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd}$$
が与えられたとき，(TR 1) の c) と (TR 3) および

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] & Y \arrow[r, "v"] & Z \arrow[r, "w"] & TX \\ X \arrow[u, "1_X"] \arrow[r, "1_X"] & X \arrow[u, "u"] \arrow[r] & 0 \arrow[r] & TX \arrow[u, "T(1_X)=1_{TX}"'] \end{tikzcd}$$

とから，$v\circ u=0$ が得られる．(TR 2) によれば，

$$Y\xrightarrow{v}Z\xrightarrow{w}TX\xrightarrow{-Tu}TY,$$
$$Z\xrightarrow{w}TX\xrightarrow{-Tu}TY\xrightarrow{-Tv}TZ$$

もそれぞれ三角形だから，今証明したことから $w\circ v=0$, $(-Tu)\circ w=0$ (したがって $(Tu)\circ w=0$) である．すなわち，三角形の中の二辺を続けると常に 0 射が得られる．

$\mathscr{C}$, $\mathscr{C}'$ が triangulated categories, $F:\mathscr{C}\to\mathscr{C}'$ が加法的関手で $\mathscr{C}$ の三角形を $\mathscr{C}'$ の三角形にうつすとき，F は ∂-関手 (∂-functor) と呼ばれる．

$\mathscr{C}$ からアーベル圏 $\mathscr{A}$ への加法的関手 $H:\mathscr{C}\to\mathscr{A}$ は次の条件をみたすときコホモロジー的関手 (cohomological functor) と呼ばれる：いかなる三角形 (X, Y, Z, u, v, w) についても，long sequence $\cdots\cdots\to H(T^iX)\to H(T^iY)\to H(T^iZ)\to H(T^{i+1}X)\to H(T^{i+1}Y)\to H(T^{i+1}Z)\to\cdots\cdots$ (ここで矢は $H(T^iu)$ 等，H が反変のときは矢の向きが逆になる) が exact である．このとき $H(T^iX)$ の代りに $H^i(X)$ のように書くことが多い．

例．M が $\mathscr{C}$ の一つの対象のとき，関手 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(M,\cdot)$, $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\cdot, M)$ はコホモロジー的である．証明は容易である．(読者はぜひ試みられたい．)

さて，アーベル圏 $\mathscr{A}$ から作った加法圏 $K^*(\mathscr{A})$ において，射 $u:X^\cdot\to Y^\cdot$ の写像柱を $Z^\cdot=TX^\cdot+Y^\cdot$ とし，$Y^\cdot\xrightarrow{v}Z^\cdot\xrightarrow{w}TX^\cdot$ をそれに附随する自然な射とするとき，三辺形 $(X^\cdot,$

$Y^\cdot, Z^\cdot, u, v, w)$ が考えられる．このような形の三辺形に同型な三辺形を $K^*(\mathscr{A})$ における三角形と定義する．(TR 1) の a), b) は自明的で，c) は補題 1 により成り立つ．(TR 2) を証明する前に，圏の自己同型 T は triangulated category としての自己同型ではないことを注意しよう．実際に，$Z^\cdot=TX^\cdot+Y^\cdot$ が $u:X^\cdot\to Y^\cdot$ の写像柱なら $TZ^\cdot$ は $Tu:TX^\cdot\to TY^\cdot$ の写像柱ではなく $-Tu$ のそれである．さて (TR 2) であるが，前半は $Z^\cdot$ を u の写像柱として，

$$① \qquad Y^\cdot\xrightarrow{v}Z^\cdot\xrightarrow{w}TX^\cdot\xrightarrow{-Tu}TY^\cdot$$

が三角形であることを示せばよい．よって次の図を考える．

$$\begin{tikzcd} ① \arrow[d, shift right] & Y^\cdot \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & Z^\cdot \arrow[r, "w"] \arrow[d, equal] & TX^\cdot \arrow[rr, "-Tu"] \arrow[d, shift right, "\psi"'] & & TY^\cdot \arrow[d, equal] \\ ② \arrow[u, shift right] & Y^\cdot \arrow[r] & Z^\cdot \arrow[r] & TY^\cdot+TX^\cdot+Y^\cdot \arrow[rr] \arrow[u, shift right, "\varphi"'] & & TY^\cdot \end{tikzcd},$$

ここに $TY^\cdot+TX^\cdot+Y^\cdot=TY^\cdot+Z^\cdot$ は v の写像柱をあらわし，φ, ψ は $\varphi=(0,\ 1_X,\ 0)$ $\psi=\begin{pmatrix}-u\\ 1_X\\ 0\end{pmatrix}$ で与える．しかるとき φ, ψ は鎖写像であって，

$$\begin{aligned}\psi\varphi&=\begin{pmatrix}-u\\ 1_X\\ 0\end{pmatrix}(0\ 1_X\ 0)=\begin{pmatrix}0&-u&0\\ 0&1_X&0\\ 0&0&0\end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix}1_Y&&\\ &1_Y&\\ &&1_X\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-d_Y&0&0\\ 0&-d_X&0\\ 1_Y&u&d_Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1_Y\\ 0&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix}\\ &\quad-\begin{pmatrix}0&0&1_Y\\ 0&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-d_Y&0&0\\ 0&-d_X&0\\ 1_Y&u&d_Y\end{pmatrix}\sim 1,\end{aligned}$$

すなわち $K^*(\mathscr{A})$ で $[\psi\varphi]=1$ となる．(これは $TY^\cdot+TX^\cdot+Y^\cdot$ で $TY^\cdot+Y^\cdot$ が 0 ホモトープな部分複体であることを丁寧に書いてみたのにすぎない．) また，$TY^\cdot+TX^\cdot+Y^\cdot$ から $TY^\cdot$ へのホモトピー作用素を $k=(0\,0\,1_Y)$ で与えると $(-Tu)\circ\varphi=(0\ -u\ 0)=(1\,0\,0)-dk-kd$ となるから，上図は $K^*(\mathscr{A})$ で可換な図式となり，①は②と同型したがって三角形である．後半の証明は読者に委ねよう．(直接今のような方法でやってもよく，前半から導き出すことも出来る．)

(TR 3) の証明には与えられた二つの三角形が共に写像柱のそれであるとしてよく，図式

$$(*) \qquad \begin{tikzcd} X^\cdot \arrow[r, "\alpha"] & Y^\cdot \arrow[r] & TX^\cdot+Y^\cdot \arrow[r] & TX^\cdot \\ U^\cdot \arrow[u, "f"] \arrow[r, "\alpha'"] & V^\cdot \arrow[u, "g"] \arrow[r] & TU^\cdot+V^\cdot \arrow[u, "h"] \arrow[r] & TU^\cdot \arrow[u, "Tf"] \end{tikzcd}$$

が $K^*(\mathscr{A})$ で可換となるように，与えられた f, g に対して，h をきめることが出来ればよいのだが，これは簡単である．まず，仮定により $[\alpha f]=[g\alpha']$ だから ホモトピー作用素 $k: U^\cdot\to Y^\cdot$ があって $g\alpha'-\alpha f=dk+kd$. よって，$h=\begin{pmatrix}f&0\\ k&g\end{pmatrix}$ とおけば，$\begin{pmatrix}f&0\\ k&g\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-d_U&0\\ \alpha'&d_V\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-fd_U&0\\ -kd+g\alpha'&gd_V\end{pmatrix}$ $=\begin{pmatrix}-d_Xf&0\\ dk+\alpha f&d_Yg\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-d_X&0\\ \alpha&d_Y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f&0\\ k&g\end{pmatrix}$ となりたしかに鎖写像で，(*) の可換性は明らかである．

以上で，$K^*(\mathscr{A})$ が triangulated category であることが知られた．

0 次のコホモロジーを H であらわせば，これは $K^*(\mathscr{A})\to\mathscr{A}$ の加法的共変関手であり，$H\circ T^i$ は i 次コホモロジーに外ならない．そして H は triangulated category の意味でコホモ

ロジー的関手である．それを見るには，写像柱の三角形 $X^\cdot \xrightarrow{u} Y^\cdot \xrightarrow{v} TX^\cdot+Y^\cdot \xrightarrow{w} TX^\cdot$ について……$\to H_i(X^\cdot)\to H_i(Y^\cdot)\to H^i(TX^\cdot+Y^\cdot)\xrightarrow{H_i w} H^{i+1}(X^\cdot)\to H^{i+1}(Y^\cdot)\to H^{i+1}(TX^\cdot+Y^\cdot)\to\cdots$ が exact であることを示せばよいが，$0\to Y^\cdot\to TX^\cdot+Y^\cdot\to TX^\cdot\to 0$ は $C(\mathscr{A})$ における short exact sequence だから，これはよく知られたことである．($\mathscr{A}$ が加群の圏なら古典的，一般の場合には Mitchel の embedding theorem を用いて加群の場合から導く．)

§3. Qis と Derived category. $K^*(\mathscr{A})$ または $C^*(\mathscr{A})$ の射 $X^\cdot\to Y^\cdot$ がコホモロジーの同型をひき起すとき擬同型 (quasi-isomorphism) という．$K^*(\mathscr{A})$ での擬同型の全体を Qis で示す．$[f]:X^\cdot\to Y^\cdot$，$[g]:Y^\cdot\to T^\cdot$ が共に擬同型なら $[gf]$ もあきらかに擬同型である．われわれは，$K^*(\mathscr{A})$ の射の集合に "Qis の元の逆を添加" することにより新しい加法圏 $D^*(\mathscr{A})$ を作り，$K^*(\mathscr{A})$ の擬同型が $D^*(\mathscr{A})$ では本当に同型になるようにしたいのであるが，そのためにはいくつかの補題が必要となる．

補題 4. $K^*(\mathscr{A})$ における図式

$$\begin{array}{ccc} & & A^\cdot \\ & & \downarrow{\scriptstyle [s]} \\ B^\cdot & \xrightarrow{[\alpha]} & T^\cdot \end{array}$$

において，$[s]\in$ Qis ならばこれを補って可換な図式

$$\begin{array}{ccc} U^\cdot & \longrightarrow & A^\cdot \\ {\scriptstyle [t]}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle [s]} \\ B^\cdot & \xrightarrow{[\alpha]} & T^\cdot \end{array}$$

を作り $[t]\in$ Qis ならしめることが出来る．この双対命題も成り立つ．

証明．補題 2 より ($A^\cdot$ と s とを $K^*(\mathscr{A})$ で同値なものにおきかえて) s が $C^*(\mathscr{A})$ の全射であるとしてよい．しかる後，$C^*(\mathscr{A})$ における fibre 積 $U^\cdot=(A^\cdot, s)\times_{T^\cdot}(B^\cdot, \alpha)$ を考える．すなわち，$A^\cdot\oplus B^\cdot$ の projection を p, q として，$0\to U^\cdot\to A^\cdot\oplus B^\cdot\xrightarrow{sp-\alpha q}T^\cdot$ なる $C^*(\mathscr{A})$ での完全系列で $U^\cdot$ を定義するのであるが，s を全射にとったから $sp-\alpha q$ も全射で $0\to U^\cdot\to A^\cdot\oplus B^\cdot\to T^\cdot\to 0$ が exact となる．したがって，long exact sequence……$\to H^i(U^\cdot)\to H^i(A^\cdot)\oplus H^i(B^\cdot)\to H^i(T^\cdot)\to H^{i+1}(U^\cdot)\to$……が得られるが，仮定より $H^i(A^\cdot)\simeq H_i(T^\cdot)$ だから $H_i(U^\cdot)\simeq H^i(B^\cdot)$ となることは見易い．よって可換図式

$$\begin{array}{ccc} U^\cdot & \xrightarrow{p} & A^\cdot \\ {\scriptstyle q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s} \\ B^\cdot & \xrightarrow{\alpha} & T^\cdot \end{array}$$

において $[q]\in$ Qis である．

双対命題の方は，図式

$$\begin{array}{ccc} & & A^\cdot \\ & & \uparrow{\scriptstyle [s]} \\ B^\cdot & \xleftarrow{[\alpha]} & T^\cdot \end{array}$$

が与えられたとき，補題 3 により，$A^\cdot$ と s とを同値なものでおきかえて，s を $C^*(\mathscr{A})$ の単射であると仮定出来る．$A^\cdot$, $B^\cdot$ から $A^\cdot\oplus B^\cdot$ への injection を i, j として exact sequence $0\to T^\cdot\xrightarrow{is-j\alpha}A^\cdot\oplus B^\cdot\to U^\cdot\to 0$ で $U^\cdot$ を定義すればよい．(fibre product の双対で，$A^\cdot$ と $B^\cdot$ との $T^\cdot$ 上の amalgamated sum と呼ばれるものである．)

補題 5.

$$\begin{array}{ccccccc} X_1^\cdot & \longrightarrow & X_2^\cdot & \longrightarrow & X_3^\cdot & \longrightarrow & TX_1^\cdot \\ {\scriptstyle [f]}\uparrow & & {\scriptstyle [g]}\uparrow & & {\scriptstyle [h]}\uparrow & & {\scriptstyle [Tf]}\uparrow \\ Y_1^\cdot & \longrightarrow & Y_2^\cdot & \longrightarrow & Y_3^\cdot & \longrightarrow & TY_1^\cdot \end{array}$$

を $K^*(\mathscr{A})$ における二つの三角形間の準同型とする．もし $[f]$, $[g]$, $[h]$ のうちの二つが擬同型なら，他の一つもそうである．

証明．コホモロジーの long exact sequence と $\mathscr{A}$ における five lemma とから明らかである．

補題 6. $K^*(\mathscr{A})$ において，$(X^\cdot, Y^\cdot, Z^\cdot, [u], [v], [w])$ を三角形，$[f]:Y^\cdot\to W^\cdot$ を射とするとき，$[fu]=0$ であるためには $[f]=[gv]$ をみたす $[g]:Z^\cdot\to W^\cdot$ の存在することが必要十分である：

$$\begin{tikzcd} X^\cdot \arrow[r, "{[u]}"] & Y^\cdot \arrow[r, "{[v]}"] \arrow[d, "{[f]}"] & Z^\cdot \arrow[dl, dashed, "{[g]}"] \\ & W^\cdot & \end{tikzcd}$$

証明．ホモトピー類の代表 u, f を選んでおく．そして，$Z^\cdot$ が u の写像柱 $TX^\cdot+Y^\cdot$ であるとして一般性を失なわない．しかるとき，$[fu]=0$ とすればホモトピー作用素 $k:X^\cdot\to W^\cdot$ が存在して $uf=dk+kd$ となるから，$g:Z^\cdot\to W^\cdot$ を行列 $(k\ f)$ で与えれば $gv=f$．逆に，$[gv]=[f]$ なる $[g]$ があれば f として gv をとって $g=(k\ f)$ と書くとき，k が $dk+kd=fu$ をみたす．

補題 7. (補題 6 の双対)．$K^*(\mathscr{A})$ において，$(X^\cdot, Y^\cdot, Z^\cdot, [u], [v], [w])$ を三角形，$[f]:W^\cdot\to Y^\cdot$ を射とするとき，$[vf]=0$ であるためには $[ug]=[f]$ をみたす $[g]:W^\cdot\to X^\cdot$ の存在することが必要十分である：

$$\begin{tikzcd} X^\cdot \arrow[r, "{[u]}"] & Y^\cdot \arrow[r, "{[v]}"] & Z^\cdot \\ & W^\cdot \arrow[ul, dashed, "{[g]}"] \arrow[u, "{[f]}"'] & \end{tikzcd}$$

証明．補題 6 の証明と同様にしてできる．$Z^\cdot$ を u の写像柱とし，$[vf]=0$ とすれば $vf=dk+kd$．ホモトピー $k:W^\cdot\to Z^\cdot=TX^\cdot+Y^\cdot$ を $k=\binom{g}{\varphi}$ と書けば，$vf=\binom{0}{f}=\begin{pmatrix}-d_X & 0\\ u & d_Y\end{pmatrix}\binom{g}{\varphi}+\binom{g}{\varphi}d_W$，すなわち $-d_Xg+gd_W=0$，$f=ug+d_Y\varphi+\varphi d_W$．よって g は鎖写像で $[f]=[ug]$．逆も又容易である．

補題 8. $K^*(\mathscr{A})$ において，$[f]:X^\cdot\to Y^\cdot$ を射とするとき次の二条件は同値である．

(i) $[fs]=0$ となるような擬同型 $[s]:\overline{X}^\cdot\to X^\cdot$ が存在する．

(ii) $[tf]=0$ となるような擬同型 $[t]:Y^\cdot\to\overline{Y}^\cdot$ が存在する．

証明．(i)⇒(ii)．$[fs]=0$ とする．(TR 1) により $[s]$ を含む三角形 $(\overline{X}^\cdot, X^\cdot, Z^\cdot, [s], [v], [u])$ が存在する．$[fs]=0$ だから補題 6 により $[g]:Z^\cdot\to Y^\cdot$ が存在して $[f]=[gv]$．次に，$[g]$ を含む三角形 $(Z^\cdot, Y^\cdot, \bar{Y}^\cdot, [g], [t], [p])$ を作れば，$[v]$ の存在から $[tf]=0$ が出る (補題 7)．

$$\begin{tikzcd} & Z^\cdot \arrow[r, "p"] \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "g"] & Y^\cdot \\ X^\cdot \arrow[r, "s"] & X^\cdot \arrow[u, "v"] \arrow[r, "f"] & Y^\cdot \arrow[u, "t"'] \end{tikzcd}$$

おいて，t が擬同型であることを云えばよい．s が擬同型だから，最初の三角形についての
ıg exact sequence から $Z^{\cdot}$ が acyclic (すなわち，すべての i に対して $H_i(Z^{\cdot})=0$)，よって第
の三角形 $(Z^{\cdot},\ Y^{\cdot},\ \bar{Y}^{\cdot})$ の lonng exact sequence から t が擬同型となることが知られる．

(ii)$\Rightarrow$(i)．上と同様である．(TR 1) と (TR 2) とから $[t]$ を第二辺として含む三角形 $(Z^{\cdot}$,
$^{\cdot}$, $\bar{Y}^{\cdot}$, g, t, $p)$ を作り，以下逆に論ずればよい．

$X^{\cdot}\in K^*(\mathscr{A})$ なるとき，$[s]:X'^{\cdot}\to X^{\cdot}$, $[s]\in \mathrm{Qis}$, なる $[s]$ の全体は，$[s]$ が $[t]$ の因子であ
とき $[s]<[t]$ とおくことにより，準順序集合 (ensemble pre-ordonné) となり，補題 4 によっ
有向的である．(実は $\mathscr{A}$ が "small category" でなければ，これは集合にならぬおそれがあ
が，今は基礎論的論点を無視しよう．) この準順序集合を $\mathrm{Qis}/X^{\cdot}$ であらわすことにする．
て，圏 $D^*(\mathscr{A})$ を，対象は $K^*(\mathscr{A})$ と (したがって $C^*(\mathscr{A})$ と) 同じとし，射を

$$\mathrm{Hom}_{D^*(\mathscr{A})}(X^{\cdot},\ Y^{\cdot})=\varinjlim_{\mathrm{Qis}/X^{\cdot}}\mathrm{Hom}_{K^*(\mathscr{A})}(X'^{\cdot},\ Y^{\cdot})$$

:よって定義する．すなわち，$D^*(\mathscr{A})$ の射は $C^*(\mathscr{A})$ に戻って考えれば

$$\begin{tikzcd} & X'^{\cdot} \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X^{\cdot} & & Y^{\cdot} \end{tikzcd} \qquad [s]\in \mathrm{Qis}$$

)ような図式によってあらわされ，これと

$$\begin{tikzcd} & X''^{\cdot} \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "v"] & \\ X^{\cdot} & & Y^{\cdot} \end{tikzcd} \qquad [t]\in \mathrm{Qis}$$

とが同じ $D^*(\mathscr{A})$ の射を定めるのは

$$\begin{tikzcd} & X_1^{\cdot} \arrow[dl, "{[s']}"'] \arrow[dr, "{[t']}"] & \\ X'^{\cdot} \arrow[dr, "{[s]}"'] & & X''^{\cdot} \arrow[dl, "{[t]}"] \\ & X^{\cdot} & \end{tikzcd} \qquad [s'],\ [t']\in \mathrm{Qis}$$

なる可換図式を適当にとって，$[\overset{f}{\cancel{u}}s']=[vt']$ となるときである．$\mathrm{Hom}_{D^*(\mathscr{A})}(X^{\cdot},\ Y^{\cdot})$ はアーベ
ル群の構造をもっている．射の合成を定義するには補題 4, 8 が用いられる．

$$\begin{tikzcd} & X_1^{\cdot} \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & & Y_1^{\cdot} \arrow[dl, "t"'] \arrow[dr, "g"] & \\ X^{\cdot} & & Y^{\cdot} & & Z^{\cdot} \end{tikzcd} \qquad [s],\ [t]\in \mathrm{Qis},$$

が射 $\varphi:X^{\cdot}\to Y^{\cdot}$, $\psi:Y^{\cdot}\to Z^{\cdot}$ を代表するとき，補題 4 により

$$\begin{tikzcd} & W^{\cdot} \arrow[dl, "{[t']}"'] \arrow[dr, "{[f']}"] & \\ X_1^{\cdot} \arrow[dr, "{[f]}"'] & & Y_1^{\cdot} \arrow[dl, "{[t]}"] \\ & Y^{\cdot} & \end{tikzcd} \qquad [t']\in \mathrm{Qis}$$

なる可換図式が得られる．これを用いて

$$\begin{tikzcd} & W^{\cdot} \arrow[dl, "st'"'] \arrow[dr, "gf'"] & \\ X^{\cdot} & & Z^{\cdot} \end{tikzcd}$$

が定める $D^*(\mathscr{A})$ の射を $\varphi\psi$ とする．この際，$W^{\cdot}$ のとり方に依存しないことは補題 8 を用いて証明される．φ,ψ の代表のとりかたに依存しないことは補題 4 のみから簡単に出る．かくして $D^*(\mathscr{A})$ が加法圏の公理をみたすことが容易に知られる．

自然な関手 $K^*(\mathscr{A})\to D^*(\mathscr{A})$ によって Qis の元が $D^*(\mathscr{A})$ での同等射に写されることは今や明らかであろう．$s:X^{\cdot}\to Y^{\cdot}$, $[s]\in\mathrm{Qis}$, ならば図式

$$\begin{tikzcd} & X^{\cdot} \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, equal, "1_X"] & \\ Y^{\cdot} & & X^{\cdot} \end{tikzcd}$$

が $s^{-1}:Y^{\cdot}\to X^{\cdot}$ を定める．鎖写像とその定義する $D^*(\mathscr{A})$ の射とを同じ文字であらわせば，図式

$$\begin{tikzcd} & X'^{\cdot} \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "u"] & \\ X^{\cdot} & & Y^{\cdot} \end{tikzcd} \qquad [s]\in\mathrm{Qis},$$

で定まる射は $fs^{-1}:X^{\cdot}\to Y^{\cdot}$ である．

複体 $Y^{\cdot}$ を一つきめるとき，$Y^{\cdot}$ から出る擬同型 $[t]:Y^{\cdot}\to \cancel{X'^{\cdot}}\ Y'^{\cdot}$ のなす準順序集合を $Y^{\cdot}/\mathrm{Qis}$ であらわせば，補題 4, 8 によって，$\mathrm{Hom}_{D^*(\mathscr{A})}(X^{\cdot},\ Y^{\cdot})=\varinjlim_{Y^{\cdot}/\mathrm{Qis}}\mathrm{Hom}_{K^*(\mathscr{A})}(X^{\cdot},\ Y'^{\cdot})$ ともあらわせる．実際，

$$\begin{tikzcd} & X'^{\cdot} \arrow[dl, "{[s]}"'] \arrow[dr, "{[f]}"] & \\ X^{\cdot} \arrow[dr, "{[g]}"'] & & Y^{\cdot} \arrow[dl, "{[t]}"] \\ & Y'^{\cdot} & \end{tikzcd}$$

が可換なら，$fs^{-1}:X^{\cdot}\to Y^{\cdot}$ はまた $t^{-1}g$ とも書ける．$Y'^{\cdot}$ のとり方を変えると，図式

$$\begin{tikzcd} X^{\cdot} \arrow[d, "{[g_1]}"'] \arrow[drr, "{[g_2]}" near start] & & Y^{\cdot} \arrow[d, "t_2"] \arrow[dll, "t_1" near end] \\ Y_1'^{\cdot} \arrow[dr, "t_3"'] & & Y_2'^{\cdot} \arrow[dl, "t_4"] \\ & Y_3'^{\cdot} & \end{tikzcd} \qquad [t_i]\in\mathrm{Qis},\quad [t_3t_1]=[t_4t_2],$$

を作って Y_1', Y_2' の代りに Y_3' で考えれば，

$$\begin{tikzcd} X^{\cdot} \arrow[dr, shift right, "g_1"'] \arrow[dr, shift left, "g_2"] & & Y^{\cdot} \arrow[dl, "t"] \\ & Y'^{\cdot} & \end{tikzcd} \qquad [t]\in\mathrm{Qis},\ t^{-1}g_1=t^{-1}g_2,$$

という状態で g_1 と g_2 とを比べるとよく，このとき $D^*(\mathscr{A})$ の射として $g_1=g_2$．これは適当な擬同型 $[\sigma]:\bar{X}^{\cdot}\to X^{\cdot}$ をとれば $[g_1\sigma]=[g_2\sigma]$ となることを意味するが，補題 8 によればこれは適当な擬同型 $[\tau]:Y'^{\cdot}\to\bar{Y}^{\cdot}$ があって $[\tau g_1]=[\tau g_2]$ となることと同値である．よって，$fs^{-1}:X^{\cdot}\to Y^{\cdot}$ に対して $\varinjlim_{Y^{\cdot}/\mathrm{Qis}}\mathrm{Hom}_{K^*(\mathscr{A})}(X^{\cdot},Y'^{\cdot})$ の一つの元が定まることがわかり，この対応が bijection であることも見易い．

$D^+(\mathscr{A})$ [resp. $D^-(\mathscr{A})$, $D^b(\mathscr{A})$] が $D(\mathscr{A})$ の部分圏とみなされることも容易に証明できる．$X^{\cdot}\in \mathrm{Ob}K^+(\mathscr{A})$ [resp. $\mathrm{Ob}\,K^-(\mathscr{A})$, $\mathrm{Ob}\,K^b(\mathscr{A})$] なるとき，$K(\mathscr{A})$ の $\mathrm{Qis}/X^{\cdot}$ の中で $K^+(\mathscr{A})$ の $\mathrm{Qis}/X^{\cdot}$ が cofinal であることに注意すればよい．

f, $g:X^{\cdot}\to Y^{\cdot}$ を二つの鎖写像とするとき，次の論理的関係が成り立つ：

$f=g \Rightarrow f \sim g$(f と g とがホモトープ)$\Rightarrow f$ と g とが $D(\mathscr{A})$ で同じ射を定める$\Rightarrow f$ と g とがコホモロジー上に同じ射をひき起す．

上記関係中のどの $\Rightarrow$ も $\Longleftrightarrow$ でおきかえることはできない． このことは，第一の$\Rightarrow$については明らかである．第二，第三の$\Rightarrow$については次の反例 2, 3 が得られている．

反例 2. $X^{\cdot}=Y^{\cdot}=[0\to \boldsymbol{Z}\xrightarrow{2}\boldsymbol{Z}\to \boldsymbol{Z}_2\to 0]$ とおき，$f=1_X$ とする． $H^*(X^{\cdot})=0$ だから $D(\mathscr{A})$ で $X^{\cdot}\simeq 0$ ($K(\mathscr{A})$ での $[0]:0\to X^{\cdot}$ が擬同型だから)，しかし $f\sim 0$ ではない．

反例 3. §1 の反例 1 を考える．

$$\begin{array}{ccc} X^{\cdot} & & \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & \boldsymbol{Z}_2 \arrow[r] \arrow[d, "2"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \boldsymbol{Z}_4 \arrow[r, "2"] & \boldsymbol{Z}_4 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \\ \downarrow f & & \\ Y^{\cdot} & & \end{array}$$

f はコホモロジー群上に 0 写像をひき起す． f が $D(\mathscr{A})$ で 0 射になることは擬同型 $s:L^{\cdot}\to X^{\cdot}$ があって $fs\sim 0$ となることであるが，これは不可能である．(反例 1 の末尾を見よ．)

命題 1. $\mathscr{A}$ の対象を 0 次元のみに退化した複体とみなして得られる関手 $\mathscr{A}\to D^*(\mathscr{A})$ は充満かつ忠実 (full faithful) である，すなわち $A,\ B\in\mathscr{A}$ に対して $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)=\mathrm{Hom}_{D^*(\mathscr{A})}(A, B)$ が成り立つ．よって $\mathscr{A}$ は $D^*(\mathscr{A})$ の部分圏と考えられる．

証明は容易だから省略する．かくの如く $\mathscr{A}$ を $D(\mathscr{A})$ の中に入れて考えると $\mathscr{A}$ の対象 A とその任意の resolution とは $D(\mathscr{A})$ の中で同型な対象であり，したがって公式の中などで区別の要はない．たとえば，

$$(0\longrightarrow A\xrightarrow{\varepsilon})X^0\longrightarrow X^1\longrightarrow X^2\longrightarrow\cdots\cdots$$

が A の移入分解なら，$X^{\cdot}:0\to X^0\to X^1\to\cdots\cdots$ とおけば，鎖写像

$$\begin{tikzcd} X^{\cdot} & 0 \arrow[r] & X^0 \arrow[r] & X^1 \arrow[r] & X^2 \arrow[r] & \cdots\cdots \\ A \arrow[u] & 0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[u, "\varepsilon"] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[r] \arrow[u] & \cdots\cdots \end{tikzcd}$$

は擬同型，したがって $D(\mathscr{A})$ での同型である．このことから，$D(\mathscr{A})$ が導来関手の理論に有用であることは察するに難くない．云い忘れたが，$D^*(\mathscr{A})$ を $\mathscr{A}$ の導来圏 (derived category) と呼ぶ．

$D^*(\mathscr{A})$ においても写像柱の三辺形

$$X^{\cdot}\xrightarrow{u}Y^{\cdot}\xrightarrow{v}TX^{\cdot}+Y^{\cdot}\xrightarrow{w}TX^{\cdot}$$

と同型な三辺形を三角形と定義する． このことは，"$K^*(\mathscr{A})$ の三角形 (を $D^*(\mathscr{A})$ で考えたもの) と同型な三辺形を $D^*(\mathscr{A})$ の三角形という" といっても同じことである． このとき (TR 1) の a), c) は自明的で，b) は次の如くして知られる．$u:X^{\cdot}\to Y^{\cdot}$ を $D^*(\mathscr{A})$ の射とし，それが

$$\begin{tikzcd} & \bar{X}^{\cdot} \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ X^{\cdot} & & Y^{\cdot} \end{tikzcd} \qquad [s]\in\mathrm{Qis},$$

で定義されたとしよう．f の写像柱を $W^{\cdot}=T\bar{X}^{\cdot}+Y^{\cdot}$ とおけば $u=fs^{-1}$ で，

$$\begin{tikzcd} \bar{X}^{\cdot} \arrow[r, "f"] \arrow[d, shift right, "s"'] & Y^{\cdot} \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & W^{\cdot} \arrow[r, "w"] \arrow[d, equal] & T\bar{X}^{\cdot} \arrow[d, shift right, "Ts"'] \\ X^{\cdot} \arrow[r, "u"] \arrow[u, shift right, "s^{-1}"'] & Y^{\cdot} \arrow[r, "v"] & W^{\cdot} \arrow[r, "Ts\circ w"] & TX^{\cdot} \arrow[u, shift right, "(Ts)^{-1}"'] \end{tikzcd}$$

(上の行は写像柱の三角形) は $D^*(\mathscr{A})$ における三辺形間の同型だから，定義により，下の行も三角形となる．(要するに，上の三角形において $\bar{X}^{\cdot}$ をそれと isomorphic な $X^{\cdot}$ でおきかえただけである．)

(TR 2) は $K^*(\mathscr{A})$ で成り立つから $D^*(\mathscr{A})$ でも当然成り立つ．

(TR 3) を証明するには $K^*(\mathscr{A})$ における二つの三角形について云えば十分である．よって

$$\text{(A)}\quad \begin{tikzcd} X_1^{\cdot} \arrow[r, "u"] & X_2^{\cdot} \arrow[r, "v"] & X_3^{\cdot} \arrow[r, "w"] & TX_1^{\cdot} \\ Y_1^{\cdot} \arrow[r, "u'"] \arrow[u, "\alpha"] & Y_2^{\cdot} \arrow[r, "v'"] \arrow[u, "\beta"] & Y_3^{\cdot} \arrow[r, "w'"] & TY_1^{\cdot} \arrow[u, "T\alpha"] \end{tikzcd}$$

なる $D^*(\mathscr{A})$ での可換な図式を考える．ここで各行は $K^*(\mathscr{A})$ での三角形 (を $D^*(\mathscr{A})$ で考えたもの) で，$\alpha,\ \beta$ は $D^*(\mathscr{A})$ における射である．($wv=0,\ w'v'=0$ に注意！) 図式 (A) に射 $\gamma: Y_3^{\cdot}\to X_3^{\cdot}$ を補って準同型を完成したいのである．そのため，$\alpha,\ \beta$ がそれぞれ

$$Y_1^{\cdot}\xleftarrow{s}\bar{Y}_1^{\cdot}\xrightarrow{f}X_1^{\cdot} \qquad [s]\in\mathrm{Qis},$$

$$Y_2^{\cdot}\xrightarrow{g}\bar{X}_2^{\cdot}\xleftarrow{t}\bar{X}_2^{\cdot} \qquad [t]\in\mathrm{Qis},$$

によって定義されたとしよう． すなわち，$\alpha=fs^{-1}$, $\beta=t^{-1}g$． 仮定により $u\alpha=\beta u'$ だから $D^*(\mathscr{A})$ で $tuf=gu's$ が成り立つ：

$$\begin{tikzcd} & X_1^{\cdot} \arrow[r, "u"] \arrow[d, dashed, "\alpha"] & X_2^{\cdot} \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\beta"] & \bar{X}_2^{\cdot} \\ \bar{Y}_1^{\cdot} \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "s"] & Y_1^{\cdot} \arrow[r, "u'"] & Y_2^{\cdot} \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

これは定義により，"擬同型 $s':\bar{\bar{Y}}_1^{\cdot}\to\bar{Y}_1^{\cdot}$ があって $K^*(\mathscr{A})$ で$[tufs']=[gu'ss']$ が成り立つ" ことを意味する．それゆえ，$\bar{\bar{Y}}_1^{\cdot}$ をあらためて $\bar{Y}^{\cdot}$ と書けば $[tuf]=[gu's]$ であるとしてよい．(TR 2) によれば，$K^*(\mathscr{A})$ において三角形の準同型：

$$\text{(B)}\quad \begin{tikzcd} X_1^{\cdot} \arrow[r, "tu"] & \bar{X}_2^{\cdot} \arrow[r, "j"] & TX_1^{\cdot}+\bar{X}_2^{\cdot} \arrow[r, "p"] & TX_1^{\cdot} \\ X_1^{\cdot} \arrow[r, "u"] \arrow[u, equal] & X_2^{\cdot} \arrow[r, "v"] \arrow[u, "t"] & X_3^{\cdot} \arrow[r, "w"] \arrow[u, "\varrho"] & TX_1^{\cdot} \arrow[u, equal] \end{tikzcd}$$

$$\text{(C)}\quad \begin{tikzcd} Y_1^{\cdot} \arrow[r, "u'"] & Y_2^{\cdot} \arrow[r, "v'"] & Y_3^{\cdot} \arrow[r, "w'"] & TY_1^{\cdot} \\ \bar{Y}_1^{\cdot} \arrow[r, "u's"] \arrow[u, "s"] & Y_2^{\cdot} \arrow[r, "j'"] \arrow[u, equal] & T\bar{Y}_1^{\cdot}+Y_2^{\cdot} \arrow[r, "p'"] \arrow[u, "\varepsilon"] & T\bar{Y}_1^{\cdot} \arrow[u, "Ts"] \end{tikzcd}$$

が存在する． 補題 5 により $\varrho,\ \varepsilon$ は擬同型になるから，(B), (C) は $D^*(\mathscr{A})$ で考えると三角形の同型である．よってわれわれは (A) の代りに

$$
\text{(D)}\quad
\begin{tikzcd}
X^\bullet_1 \arrow[r, "tu"] & X^\bullet_2 \arrow[r, "j"] & TX^\bullet_1+\bar{X}^\bullet_2 \arrow[r, "p"] & TX^\bullet_1 \\
Y^\bullet_1 \arrow[u, "f"] \arrow[r, "u's"] & Y^\bullet_2 \arrow[u, "g"] \arrow[r, "j'"] & T\bar{Y}^\bullet_1+Y^\bullet_2 \arrow[r, "p'"] & T\bar{Y}^\bullet_1 \arrow[u, "Tf"']
\end{tikzcd}
$$

を考えればよく，これは $K^*(\mathscr{A})$ で可換な図式である．$K^*(\mathscr{A})$ では (TR 3) が成り立つから，(D) に補えば $K^*(\mathscr{A})$ での三角形の準同型が得られるような鎖写像 $l: T\bar{Y}^\bullet_1+Y^\bullet_2 \to TX^\bullet_1+\bar{X}^\bullet_2$ が存在する．(A) に戻って，$\gamma=\delta^{-1}l\varepsilon^{-1}: Y^\bullet_3\to X^\bullet_3$ とおけば要求がみたされる．

以上で，$D^*(\mathscr{A})$ も triangulated category であることがわかった． 自然な関手 $K^*(\mathscr{A})\to D^*(\mathscr{A})$ は勿論 ∂ 関手である． 0 次コホモロジー $H=H^0$ がコホモロジー的関手であることも $K^*(\mathscr{A})$ のときと同様である．

たとえば，“$D^+(\mathscr{A})$ の三辺形 $(X^\bullet, Y^\bullet, Z^\bullet, u, v, w)$ が $D(\mathscr{A})$ で三角形ならば $D^+(\mathscr{A})$ ででも三角形であるか？” という問題が生じるが答は肯定的である． 何故なら，(TR 1) により存在する $D^+(\mathscr{A})$ の三角形 $(X^\bullet, Y^\bullet, U^\bullet, u, f, g)$ を考えれば，$D(\mathscr{A})$ における (TR 3) により

$$
\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y^\bullet \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & Z^\bullet \arrow[r, "w"] & TX^\bullet \arrow[d, equal] \\
X^\bullet \arrow[r, "u"] & Y^\bullet \arrow[r, "f"] & U^\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[u, "\gamma"'] & TX^\bullet
\end{tikzcd}
$$

なる準同型が存在する．射 γ は補題 5 と同じようにしてコホモロジーの同型をひき起すから鎖写像 s, f によって $\gamma=fs^{-1}$ のように書くとき f も擬同型，よって γ は $D^*(\mathscr{A})$ の同等射である．かくして，与えられた三辺形は $D^+(\mathscr{A})$ の三角形と同型である．

命題 2. $C^*(\mathscr{A})$ における short exact sequence

$$
s: \quad 0 \longrightarrow X^\bullet \xrightarrow{u} Y^\bullet \xrightarrow{v} Z^\bullet \longrightarrow 0
$$

が与えられたとき $D^*(\mathscr{A})$ の射 $\partial(s): Z^\bullet\to TX^\bullet$ で $(X^\bullet, Y^\bullet, Z^\bullet, u, v, \partial(s))$ が三角形になるようなものが存在する．逆に，$D^*(\mathscr{A})$ の任意の三角形はこのような三角形と同型である．

証明． $W^\bullet=TX^\bullet+Y^\bullet$ を u の写像柱とし，$(X^\bullet, Y^\bullet, W^\bullet, u, i, p)$ をそれから作った $K^*(\mathscr{A})$ の三角形とする． $vu=0$ だから補題 6 により $g: W^\bullet\to Z^\bullet$ で $[v]=[gi]$ なるものが存在する．ホコモロジーの long exrct sequence と five lemma とから g は擬同型である． よって，$\partial(s)=pg^{-1}$ とおけばこれは $D^*(\mathscr{A})$ の射として意味があり，

$$
\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y^\bullet \arrow[r, "v"] \arrow[d, equal] & Z^\bullet \arrow[r, "\partial(s)"] \arrow[d, shift left, "g^{-1}"] & TX^\bullet \arrow[d, equal] \\
X^\bullet \arrow[r, "u"] & Y^\bullet \arrow[r, "i"] & W^\bullet \arrow[r, "p"] \arrow[u, shift left, "g"] & TX^\bullet
\end{tikzcd}
$$

が可換な図式となるから上の行が三角形になる．

逆に，$D^*(\mathscr{A})$ の三角形は $K^*(\mathscr{A})$ の三角形たとえば $(X^\bullet_1, X^\bullet_2, X^\bullet_3, f, g, h)$ と同型で，補題 3 によって f を $C^*(\mathscr{A})$ の単射と考えてもよい． しからば，完全系列 $0\to X^\bullet_1 \longrightarrow X^\bullet_2 \xrightarrow{f} X^\bullet_2/f(X^\bullet_1) \longrightarrow 0$ から上のようにして作った三角形が $(X^\bullet_1, X^\bullet_2, X^\bullet_3, f, g, h)$ と同型になる．

§4. 超コホモロジーの復習． $\mathscr{A}$ をアーベル圏とし，$\mathscr{A}$ が i~~c~~njectives を十分沢山持つ (すなわち 任意の対象に対しそれから移入的対象への単射が存在する) と仮定する． 複体 $X^\bullet \in C(\mathscr{A})$ の Cartan-Eilenberg 移入分解 (略して CE 分解) とは二重複体 $L^{\bullet\bullet}=(L^{p,q})_{p\in\mathbb{Z}, q\geq 0}$ と augmentation $\varepsilon: X^\bullet\to L^{\bullet\bullet}$ との対で次の条件をみたすものである：

i) 微分作用素 d_1 について完全に分解する． すなわち $L^{p,q}=H^{p,q}_{\mathrm{I}}\oplus B^{p,q}_{\mathrm{I}}\oplus B^{p+1,q}_{\mathrm{I}}$ となっている．

ii) $H^{p\bullet}_{\mathrm{I}}$, $B^{p\bullet}_{\mathrm{I}}$, $Z^{p\bullet}_{\mathrm{I}}$, $L^{p\bullet}$ はそれぞれ $H^p(X^\bullet)$, $B^p(X^\bullet)$, $Z^p(X^\bullet)$, X^p の移入分解になっている．

ii) では実は H と B についてのみ成り立てば他はおのずから従う． CE 分解の存在は次のようにして証明される．まず各 p に対し $H^p(X^\bullet)$, $B^p(X^\bullet)$ の移入分解 $H^{p\bullet}$, $B^{p\bullet}$ を一つづつとっておく．$B^p(X^\bullet)\to B^{p,0}$ の $Z^p(X^\bullet)$ への拡張を一つえらんで ($B^{p,0}$ は移入的！) φ とおき，$Z^p(X^\bullet)\to H^p(X^\bullet)\to H^{p,0}$ の合成を ψ とおき，$\varepsilon_Z=\begin{pmatrix}\varphi\\ \psi\end{pmatrix}: Z^p(X^\bullet)\to B^{p,0}\oplus H^{p,0}$ と定める．次に $d_Z=\begin{pmatrix}d_B & \alpha_1\\ 0 & d_H\end{pmatrix}: B^{p,0}\oplus H^{p,0}\to B^{p,1}\oplus H^{p,1}$ を $d_Z\varepsilon_Z=0$ すなわち $d_B\varphi+\alpha_1\psi=0$ なる如く定める． $d_B\varphi$ は $B^p(X^\bullet)$ 上では 0 だから $H^p(X^\bullet)$ から $B^{p,1}$ への射をひきおこす，したがってその $H^{p,0}$ への拡張の一つを α_1 とおけばよい．以下同様に $d_Z: B^{p,q}\to B^{p,q+1}$ を $d_Zd_Z=0$ となるように q について順々に定めて行けば，$Z^{p,q}=B^{p,q}\oplus H^{p,q}$ なる複体 $Z^{p\bullet}$ が得られる．

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B^{p\bullet} \arrow[r] & Z^{p\bullet} \arrow[r] & H^{p\bullet} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & B^p(X^\bullet) \arrow[r] \arrow[u] & Z^p(X^\bullet) \arrow[r] \arrow[u] & H^p(X^\bullet) \arrow[r] \arrow[u] & 0
\end{tikzcd}
$$

は可換な図式で各水平線は完全系列である．

ほとんど同じようにして，$L^{p,q}=B^{p,q}\oplus H^{p,q}\oplus B^{p+1,q}$ なる複体 $L^{p\bullet}$ と augumentation $\varepsilon: X^p\to L^{p\bullet}$ とが作られ，完全系列を行とする可換な図式

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z^{p\bullet} \arrow[r] & L^{p\bullet} \arrow[r] & B^{p+1\bullet} \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & Z^p(X^\bullet) \arrow[r] \arrow[u, "\varepsilon_Z"] & X^p \arrow[r] \arrow[u, "\varepsilon"] & B^{p+1}(X^\bullet) \arrow[r] \arrow[u, "\varepsilon_B"] & 0
\end{tikzcd}
$$

が得られる．$L^{\bullet\bullet}=(L^{p,q})$ において，

$$
d_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}: B^{p,q}\oplus H^{p,q}\oplus B^{p+1,q}\to B^{p+1,q}\oplus H^{p+1,q}\oplus \overset{B}{\cancel{H}}{}^{p+2,q}
$$

とおき $d_2: L^{p,q}\to L^{p,q+1}$ は一重複体 $L^{p\bullet}$ の微分作用素に等しいとすれば，$L^{\bullet\bullet}$ は二重複体になり CE 分解の条件をみたす．

上の構成で，もし整数のある集合 N に対し $X^p=0\,(p\in N)$ が成り立てば N に属する p に対し $B^p(X^\bullet)$, $B^{p+1}(X^\bullet)$, $H^p(X^\bullet)$ がすべて 0 になるから対応する $B^{p\bullet}$, $B^{p+1\bullet}$, $H^{p\bullet}$ をすべて 0 にとってよい．したがって，$L^{p,q}=0\,(p\in N, \forall q)$ としてよい．

CE 分解はホモトピー同値を除いて一意的に定まる．

$\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ をアーベル圏，$F: \mathscr{A}\to\mathscr{B}$ を加法的関手とする．$X^\bullet\in C^+(\mathscr{A})$ とし，簡単のため $X^p=0\,(p<0)$ としよう．$\mathscr{A}$ が十分に沢山の移入的対象を持つものとし，$L^{\bullet\bullet}$ を $X^\bullet$ の CE 分解で $L^{p,q}=0$ ($p<0$ または $q<0$) なるものとする．$\mathscr{B}$ における二重複体 $F(L^{\bullet\bullet})=(F(L^{p,q}))_{p,q}$ を考え，これに附属する二通りのスペクトル系列

$$
H^p_{\mathrm{I}}H^q_{\mathrm{II}}(F(L^{\bullet\bullet}))\underset{p}{\Rightarrow}H^*(F(L^{\bullet\bullet}))\underset{q}{\Leftarrow}H^q_{\mathrm{II}}H^p_{\mathrm{I}}(F(L^{\bullet\bullet}))
$$

を考えることが出来る．ここに終点 $H^*(F(L^{\bullet\bullet}))$ は $F(L^{\bullet\bullet})$ に附属する一重複体のコホモロジーであるが，これは $X^\bullet$ と F のみによって定まるので $X^\bullet$ の超コホモロジー不変量と呼ばれる．左辺において $H^q_{\mathrm{II}}(F(L^{p\bullet}))=\mathfrak{R}^qF(X^p)$ である，ここに $\mathfrak{R}^qF$ は F の q 次右導来関手である．

また右辺において，$L^{\cdot\cdot}$ が d_1 に関して完全に分解しているから H_{I} と F とは交換可能で $H_{\mathrm{I}}^p(F(L^{\cdot\cdot}))=F(H_{\mathrm{I}}^p(L^{\cdot\cdot}))$ となり，$H_{\mathrm{I}}^p(L^{\cdot\cdot})$ が $H^p(X^{\cdot})$ の移入分解であったことから右辺は $\mathfrak{R}^qF(H^p(X^{\cdot}))$ に等しくなる．よって，

$$H^p(\mathfrak{R}^q F(X^{\cdot}))\underset{p}{\Rightarrow} H^*(F(L^{\cdot\cdot}))\underset{q}{\Leftarrow}\mathfrak{R}^qF(H^p(X^{\cdot})).$$

$\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ をアーベル圏とし，$\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ とは十分沢山の移入的対象を持つものとする．$F:\mathscr{A}\to\mathscr{B}$, $G:\mathscr{B}\to\mathscr{C}$ は加法的関手とする． $\mathscr{A}$ の対象 A と，その移入分解 $X^{\cdot}$ とを考える． $F(X^{\cdot})$ は $\mathscr{B}$ における複体で，その CE 分解を $L^{\cdot\cdot}$ とおいて上の理論を適用すれば

$$H^p(\mathfrak{R}^q G(FX^{\cdot}))\underset{p}{\Rightarrow} H^*(F(L^{\cdot\cdot}))\underset{q}{\Leftarrow}\mathfrak{R}^q G(\mathfrak{R}^p F(A)).$$ この左辺は関手 $(\mathfrak{R}^q G)\circ F$ の p 次右導来関手の A における値である：$H^p(\mathfrak{R}^q G(F(X^{\cdot}))=\mathfrak{R}^p[(\mathfrak{R}^q G)\circ F](A)$. 特に大切なのは，$F$ が $\mathscr{A}$ の移入的対象を G-acyclic な対象にうつし且つ G が左完全（したがって $\mathfrak{R}\circ G=G$）なるときである．このとき

$$\mathfrak{R}^q G(F(X^{\cdot}))=\begin{cases}0 & (q>0)\\ GF(X^{\cdot}) & (q=0)\end{cases}$$

だから

$$H^p(\mathfrak{R}^q G(F(X^{\cdot}))=\begin{cases}0 & (q>0)\\ \mathfrak{R}^p(GF)(A) & (q=0)\end{cases}$$

したがって，$H^p(F(L^{\cdot\cdot}))\cong\mathfrak{R}^p(GF)(A)$ となり，スペクトル系列 $\mathfrak{R}^q G(\mathfrak{R}^p F(A)\underset{q}{\Rightarrow}\mathfrak{R}^*(GF)(A)$ が得られる．これが合成関手の導来関手をあらわすこれ迄の方法でもっとも一般的なものであったといえる．三つ以上の関手の合成を考えたりすると至極複雑な表示になるであろう．

§5. Derived functors. 右導来関手についてのべる． 左導来関手についても双対的な理論が出来ることは明らかである．

$\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ をアーベル圏，$F:K(\mathscr{A})\to K(\mathscr{B})$ を ∂-関手とする[1]．

もし F が擬同型を擬同型に写すならば，F は $D(\mathscr{A})$ から $D(\mathscr{B})$ への関手をひきおこす．F が $\mathscr{A}$ から $\mathscr{B}$ への完全関手なら，それはホモロジーと交換可能 $(H^i(F(X^{\cdot}))=F(H^i(X^{\cdot})))$ だからそのようになっている．しかし一般には，F が擬同型を擬同型に写すとは限らない．それゆえ，$D(\mathscr{A})\to D(\mathscr{B})$ の関手で F になるべく近いものを求める． ($K(\mathscr{A})\to D(\mathscr{A})$, $K(\mathscr{B})\to D(\mathscr{B})$ の自然な関手を共に Q であらわす.)

定義. F の total right derived functor とは ∂-関手 $\boldsymbol{R}F:D(\mathscr{A})\to D(\mathscr{B})$ と関手の準同型 $\xi:Q\circ F\to\boldsymbol{R}F\circ Q$ との対であって，普遍写像性："G が $D(\mathscr{A})$ から $D(\mathscr{B})$ への ∂-関手で ζ が $Q\circ F$ から $G\circ Q$ への準同型ならば準同型 $\eta:\boldsymbol{R}F\to G$ であって $\zeta=\eta^Q\circ\xi$ となるものが一意的に存在する" を持つものである．（ここに，η^Q は $\eta:\boldsymbol{R}F\to G$ から得られた準同型 $\boldsymbol{R}F\circ Q\to G\circ Q$ を意味する.）

同様にして，$\boldsymbol{R}^+F:D^+(\mathscr{A})\to D^+(\mathscr{B})$ 等を定義出来る． 以下において $\boldsymbol{R}F$ 等の存在を論じよう．

Triangulated category $\mathscr{C}_1$ の full subcategory $\cancel{\mathscr{C}_2}$ トい が triangulated subcategory であるとは $\mathscr{C}_2$ の三辺形は，$\mathscr{C}_1$ で三角形であるとき且つそのときに限り，$\mathscr{C}_2$ の三角形であると定義した

1) $\mathscr{A}$ から $\mathscr{C}$ への加法的関手 F が与えられればそれは $K(\mathscr{A})$ から $K(\mathscr{C})$ への加法的関手に拡張され，$u:X^{\cdot}\to Y^{\cdot}$ の写像柱を $W^{\cdot}$ とすれば $F(W^{\cdot})$ は $F(u)$ の写像柱となる。したがって，F は ∂-関手となる。

とき $\mathscr{C}_2$ がtriangulated category の公理をみたしていることとする．

定理 1. F を $K^*(\mathscr{A})\to K^*(\mathscr{B})$ なる ∂-関手とする．(ここに * は＋，－，b, 又は nothing.) $K^*(\mathscr{A})$ の triangulated subcategory $\mathfrak{K}$ が存在し，次の条件が満されているものとする：

1) 任意の対象 $X^{\cdot}\in K^*(\mathscr{A})$ に対し，$X^{\cdot}$ から $\mathfrak{K}$ の対象への擬同型が存在する．

2) I_1, $I_2\in\mathfrak{K}$ で $s:I_1\to I_2$ が擬同型ならば，$F(s)$ も擬同型である．

しからば，

a) $\boldsymbol{R}^*F:D^*(\mathscr{A})\to D^*(\mathscr{B})$ は存在する．

b) もしも $i:X^{\cdot}\to I^{\cdot}$ が擬同型で $I^{\cdot}\in\mathfrak{K}$ ならば，$\boldsymbol{R}^*F\circ Q(X^{\cdot})\cong Q\circ F(I^{\cdot})$ である．

証明. $D^*(\mathscr{A})$ の中で $\mathfrak{K}$ の対象を対象とする部分圏を $\mathfrak{K}'$ であらわす．$Y^{\cdot}\in\mathfrak{K}$ なるとき $s:Y^{\cdot}\to\bar{Y}^{\cdot}\in\mathfrak{K}$ なる擬同型 s の集合を $Y^{\cdot}/\mathrm{Qis}\,(\mathfrak{K})$ であらわせば，仮定 1) により $X^{\cdot}$, $Y^{\cdot}$, $\in\mathfrak{K}'$ に対し $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{K}'}(X^{\cdot}, Y^{\cdot})=\mathrm{Hom}_{D^*(\mathscr{A})}(X^{\cdot}, Y^{\cdot})=\varinjlim_{Y^{\cdot}/\mathrm{Qis}}\mathrm{Hom}_{K^*(\mathscr{A})}(X^{\cdot}, \bar{Y}^{\cdot})=\varinjlim_{X^{\cdot}/\mathrm{Qis}}\mathrm{Hom}_{K^*(\mathscr{A})}(X^{\cdot},\bar{Y}^{\cdot})$

が成り立つ．よって仮定 2) により，

$$\begin{array}{ccc}\mathfrak{K} & \xrightarrow{F} & K^*(\mathscr{B})\\ {\scriptstyle Q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Q}\\ \mathfrak{K}' & \xrightarrow{F'} & D^*(\mathscr{B})\end{array}$$

$\mathfrak{K}'$

が可換になるような関手 F' が一意的に定まる． さて，$D^*(\mathscr{A})$ の各対象 $X^{\cdot}$ に対して擬同型 $s_X:X^{\cdot}\to I_X$, $I_X\in\mathfrak{K}$, を一つづつ選び射 $\varphi:X^{\cdot}\to Y^{\cdot}$ には射 $s_Y\varphi s_X^{-1}:I_X\to I_Y$ を対応させれば関手 $\nu:D^*(\mathscr{A})\to\mathfrak{K}'$ が定まり，これによって $D^*(\mathscr{A})$ と $\mathfrak{K}$ とは圏として同値になる．$\boldsymbol{R}F=F'\circ\nu:D^*(\mathscr{A})\to D^*(\mathscr{B})$ とおく．(ν のとり方は勿論一意的ではないが F の導来関手の定義自身関手の同型を除いてきまるものであるから問題はない． 云い忘れたが ν を定めるとき $\mathfrak{K}'$ の $I^{\cdot}$ に対しては常に $s_I=\mathrm{id}_I$ と取るものとする.) このとき $\boldsymbol{R}F$ が普遍写像性を有することを示そう．まず，各 $X^{\cdot}\in K^*(\mathscr{A})$ に対し，$s_X:X^{\cdot}\to I_X$ から射 $Q\circ F(X^{\cdot})\to Q\circ F(I_X)=\boldsymbol{R}F\circ Q(X^{\cdot})$ が得られ，したがって関手の準同型 $\xi:Q\circ F\to\boldsymbol{R}F\circ Q$ が得られる． 関手 $G:D^*(\mathscr{A})\to D^*(\mathscr{B})$ と準同型 $\zeta:Q\circ F\to G\circ Q$ が与えられたとき $\eta:\boldsymbol{R}F(X^{\cdot})\to G(X^{\cdot})$ は $\zeta:Q\circ F(I_X)\to G\circ Q(I_X)$ と $G(s_X^{-1}):G\circ Q(I_X)\to G(X^{\cdot})$ との合成が定義される．

補題 9. $\mathscr{A}$ をアーベル圏，$\mathscr{D}$ をその部分圏とする．

a) $\mathscr{D}$ が次の条件 (i) をみたすなら，任意の $X^{\cdot}\in K^+(\mathscr{A})$ に対し擬同型 $X^{\cdot}\to I^{\cdot}$ ($I^{\cdot}\in K^+(\mathscr{A})$; $\forall p$, $I^p\in\mathscr{D}$) が存在する．

(i) 任意の $A\in\mathscr{A}$ に対し，$A\to A'\in\mathscr{D}$ なる単射が存在する．

b) $\mathscr{A}$ が環の上の加群の圏，またはより一般的に Grothendieck 圏で，$\mathscr{D}$ は (i) をみたし且つ無限直和を持つとする． しからば，任意の $X^{\cdot}\in K(\mathscr{A})$ に対し擬同型 $X^{\cdot}\to I^{\cdot}$ ($I^{\cdot}\in K(\mathscr{A})$; $\forall p$, $I_p\in\mathscr{D}$) が存在する．

c) $\mathscr{D}$ が (i) をみたし，有限直和をもち，次の条件 (ii) をみたすときも b) の結論が成り立つ．

(ii) 次のような自然数 n が存在する：

$$X^0\longrightarrow X^1\longrightarrow\cdots\cdots\longrightarrow X^{n-1}\longrightarrow X^n\longrightarrow 0$$

が $\mathscr{A}$ における完全系列で $X^p\in\mathscr{D}$ $(0\leqslant p\leqslant n-1)$ ならば $X^n\in\mathscr{D}$ である．

証明. a) $X^\cdot : 0\to X^m\to X^{m+1}\to\cdots\cdots$ とする. 単射 $X^m\to I^m\in\mathscr{D}$ を一つとる. 次に $Z^p=Z^p(X^\cdot)$, $B^p=B^p(X^\cdot)$ とおいて, 図式

$$\begin{tikzcd} X^m \arrow[r] \arrow[d] & B^{m+1} \arrow[r] \arrow[d] & X^{m+1} \arrow[d] \\ I^m \arrow[r] & I^m/Z^m \arrow[r] & I^{m+1} \end{tikzcd}$$

が可換になるように $I^{m+1}\in\mathscr{D}$ をとる. これには, X^{m+1} と I^m/Z^m との B^{m+1} 上の amalgamated sum を J^{m+1} としたとき $B^{m+1}\to X^{m+1}$ が単射ゆえ $I^m/Z^m\to J^{m+1}$ も単射となるから, この J^{m+1} を適当な $\mathscr{D}$ の対象 I^{m+1} の中に埋めこめばよい. 同様にして, 可換な図式

$$\begin{tikzcd} X^{m+1} \arrow[r] \arrow[d] & B^{m+2} \arrow[r] \arrow[d] & X^{m+2} \arrow[d] \\ I^{m+1} \arrow[r] & I^{m+1}/Z^{m+1} \arrow[r] & I^{m+2} \end{tikzcd}$$

が得られ, 以下同様に続ければよい.

b) CE 分解と類似した idea で証明される. 各 X^p に対し単射 $\varepsilon'_p : X^p\to M^p$, $M^p\in\mathscr{D}$, を一つえらぶ. $L^{p,0}=M^p\oplus M^{p+1}$ とおく, ただし $X^p=0$ ならば $L^{p,0}=0$ とおく. $d' : L^{p,0}\to L^{p+1,0}$ を$\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$で定義し, $\varepsilon_p : X^p\to L^{p,0}$ を$\begin{pmatrix}\varepsilon'_p\\ \varepsilon'_{p+1}d\end{pmatrix}$で定義すると複体の鎖写像 $\varepsilon : X^\cdot\to L^{\cdot 0}$ が得られ, $C(\mathscr{A})$ の単射である. $C(\mathscr{A})$ の完全系列 $0\to X^\cdot\to L^{\cdot 0}\to Y^\cdot\to 0$ を考え, $Y^\cdot$ について同様のことをくり返す. かくして完全系列

$$0\longrightarrow X^\cdot\xrightarrow{\varepsilon}L^{\cdot 0}\xrightarrow{d''}L^{\cdot 1}\xrightarrow{d''}L^{\cdot 2}\to\cdots\cdots$$

が得られる. 二重複体 $L^{\cdot\cdot}$ に附属した一重複体を $I^\cdot$ とする : $I_p=\oplus_{q=0}^{\infty}L^{p-q,q}$. ε がひきおこす $X^\cdot\to I^\cdot$ は擬同型であることが直接容易に確められる. ($\mathscr{D}$ が有限直和をもつときは a) の証明もこの方法による方がすっきりする.)

c) b) の証明を少々修正すればよい.

定理 2. 次の各々の場合に定理 1 の仮定が (したがって結論が) 成り立つ.

Case I. $*=+$ で F は加法的関手 $F_0 : \mathscr{A}\to\mathscr{B}$ からひきおこされる. 更に $\mathscr{A}$ の部分圏 $\mathscr{D}$ で補題 9 の条件 (i) と次の (iii), (iv) とをみたすものがある.

(iii) $0\to A\to B\to C\to 0$ が $\mathscr{A}$ における完全系列で $A\in\mathscr{D}$ ならば, $B\in\mathscr{D}\Longleftrightarrow C\in\mathscr{D}$.

(iv) F_0 は $\mathscr{D}$ の対象からなる short exact sequence を $\mathscr{B}$ の short exact sequence にうつす.

Case II. $*=$nothing で F は加法的関手 $F_0 : \mathscr{A}\to\mathscr{B}$ からひきおこされる. 更に $\mathscr{A}$ の部分圏 $\mathscr{D}$ で補題 9 の条件 (i), (ii) および上記 (iii), (iv) をみたすものがある.

Case II において, 定理 1 により存在する $\boldsymbol{R}F : D(\mathscr{A})\to D(\mathscr{B})$ の $D^+(\mathscr{A})$ への制限が $\boldsymbol{R}^+F$ である.

証明. $\mathscr{D}$ における複体を対象とする部分圏を $\mathfrak{K}$ とする. 定理 1 の条件 1) は補題 9 により成り立つ. 条件 2) を示すには, $s : I_1\to I_2$ を $\mathfrak{K}$ の三角形の一辺として埋め込んで考えれば, "$I^\cdot\in K$ が acychic ならば $F(I^\cdot)$ も acychic である" ことを証明すればよい. Case I では, 仮定 (iii) をくり返し用うれば $Z^p(I^\cdot)\in\mathscr{D}$ $(\forall p)$ がわかる. Case II では, 仮定 (ii) から同じ結論が得られる. $F(I^\cdot)$ が acyclic であることは (iv) を用いて示される. $\boldsymbol{R}F$ の $D^+(\mathscr{A})$ への制限が $\boldsymbol{R}^+F$ (と同型) であることは定理 1 の結論 b) から知られる.

例. $\mathscr{A}$ が十分沢山移入的対象をもてば, $\mathscr{D}$ をそれらのなす部分圏として Case I における

仮定が成り立つ. このとき $X^\cdot\in D^+(\mathscr{A})$ に対しその CE 分解 $L^{\cdot\cdot}$ をとり一重複体とみなせば, $L^{\cdot\cdot}\in\mathfrak{K}$ であり $X^\cdot\to L^{\cdot\cdot}$ は擬同型だから, 定理 1 の b) により $\boldsymbol{R}^+F(X^\cdot)\cong F(L^{\cdot\cdot})$, したがって $H^i(\boldsymbol{R}^+F(X^\cdot))$ は $X^\cdot$ の F に関する i 次元の超コホモロジーを与える.

$\mathscr{A}$ が十分沢山移入的対象をもち, F_0 が左完全ならば, $\mathscr{D}$ として F-acyclic な対象 ($X\in\mathscr{A}$ で $R^iF(X)=0$ $(i>0)$ をみたすもの) のなす部分圏をとっても Case I の仮定が成り立つ. 更に $\mathscr{A}$ が F に対して有限次元 (すなわち, 自然数 n があって, すべての $X\in\mathscr{A}$ に対して $R^iF(X)=0$ $(i>n)$ が成り立つ) ならば, F-acyclic な対象のなす部分圏は Case II の仮定をみたす.

次の命題は容易に証明される.

命題 3. $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{C}$ をアーベル圏とし, $\mathscr{A}$ と $\mathscr{B}$ とは十分沢山移入的対象をもつものとする. $F : \mathscr{A}\to\mathscr{B}$, $G : \mathscr{B}\to\mathscr{C}$ を加法的関手とし, G は左完全で, F は移入的対象を G-acyclic な対象にうつすとする. しからば, $\boldsymbol{R}^+(G\circ F)=(\boldsymbol{R}^+G)\circ(\boldsymbol{R}^+F)$.

§ 6. 例. Ext と $\boldsymbol{R}$ Hom$^\cdot$. $\mathscr{A}$ をアーベル圏, $X^\cdot$, $Y^\cdot\in D(\mathscr{A})$ とする. i 次の hyperext を

$$\mathrm{Ext}^i(X^\cdot,\ Y^\cdot)=\mathrm{Hom}_{D(\mathscr{A})}(X^\cdot,\ T^i(Y^\cdot))$$

で定義する. この定義により特に X, $Y\in\mathscr{A}$ に対し $\mathrm{Ext}^i(X, Y)$ が定義されるが, $\mathscr{A}$ が十分沢山移入的対象をもつときは, これは普通の Ext^i に一致することが証明される.

$C(\mathscr{A})$ における完全系列 $0\to X^\cdot\to Y^\cdot\to Z^\cdot\to 0$ と $V^\cdot\in C(\mathscr{A})$ とに対し long exact sequences :

$$\cdots\cdots\to\mathrm{Ext}^i(V^\cdot,\ X^\cdot)\to\mathrm{Ext}^i(V^\cdot,\ Y^\cdot)\to\mathrm{Ext}^i(V^\cdot,\ Z^\cdot)\to\mathrm{Ext}^{i+1}(V^\cdot,\ X^\cdot)\to\cdots\cdots,$$
$$\cdots\cdots\to\mathrm{Ext}^i(Z^\cdot,\ V^\cdot)\to\mathrm{Ext}^i(Y^\cdot,\ V^\cdot)\to\mathrm{Ext}^i(X^\cdot,\ V^\cdot)\to\mathrm{Ext}^{i+1}(Z^\cdot,\ V^\cdot)\to\cdots\cdots,$$

が成り立つ.

$X^\cdot$, $Y^\cdot\in C(\mathscr{A})$ に対し, $\mathrm{Hom}^\cdot(X^\cdot,\ Y^\cdot)\in C(\mathrm{Ab})$ (ここに Ab はアーベル群の圏) を二重複体 $(\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X^{-p},\ Y^q))$ に附属する一重複体として定義する : $\mathrm{Hom}^\cdot(X^\cdot,\ Y^\cdot)^n=\oplus_p\mathrm{Hom}(X^p,\ Y^{p+n})$, ここに微分作用素は $d=d_X+(-1)^{p+n}d_Y$ とする.

Hom$^\cdot$ は $X^\cdot$ について反変, $Y^\cdot$ について共変, すなわち $C(\mathscr{A})^\circ\times C(\mathscr{A})\to C(\mathrm{Ab})$ であって, これは直ちに $K(\mathscr{A})^\circ\times K(\mathscr{A})\to K(\mathrm{Ab})$ なる関手をひきおこす. これも Hom$^\cdot$ であらわされる. $\mathscr{A}$ が十分沢山移入的対象をもてば, 第二変数について導来関手をとり

$$\boldsymbol{R}^+\mathrm{Hom}^\cdot : K(\mathscr{A})^\circ\times D^+(\mathscr{A})\to D(\mathrm{Ab})$$

が得られる. これは第一変数について完全関手であるから $D(\mathscr{A})$ にまで拡張できる :

$$\boldsymbol{R}^+\mathrm{Hom}^\cdot : D(\mathscr{A})^\circ\times D^+(\mathscr{A})\to D(\mathrm{Ab}).$$

定理 3. (Yoneda). $\mathscr{A}$ を十分沢山移入的対象をもつアーベル圏とする. $X^\cdot\in D(\mathscr{A})$, $Y^\cdot\in D^+(\mathscr{A})$ に対し, $H^i(\boldsymbol{R}^+\mathrm{Hom}^\cdot(X^\cdot,\ Y^\cdot))=\mathrm{Ext}^i(X^\cdot,\ Y^\cdot)$.

証明はいささか長くなるので読者に委ねよう.

最後に応用の一つに触れておく. S を有限次元の準概型 (prescheme), X を S 上の射影空間 $X=\boldsymbol{P}^n_S=\boldsymbol{P}^n_{\mathrm{Spec}(Z)}\times S$, $f : X\to S$ を S への射影とする. X 上の $\mathscr{O}_X$-加群の層のなす圏を $\mathscr{A}$ とし, $D(\mathscr{A})$, $D^+(\mathscr{A})$ 等を $D(X)$, $D^+(X)$ 等であらわす. 層の順像関手 $f_* : \mathscr{A}(X)\to\mathscr{A}(S)$ から $\boldsymbol{R}f_* : D(X)\to D(S)$ が得られる. (定理 2 のCase II.)

層の逆像関手 $f^* : \mathscr{A}(S)\to\mathscr{A}(X)$ は, いまの場合 X が S 上 flat なことから, 完全関手であって $D(S)\to D(X)$ をひきおこす. これをも単に f^* と書くことにする. $\omega=\mathscr{O}_X(-n-1)$ とおき

$-n$ 次元で ω, その他の次元で 0 になる複体を $\omega[n]$ であらわし, $f^!(G^\cdot)=f^*(G^\cdot)\otimes\omega[n]$ で $f^!$: $D(S)\to D(X)$ を定義する. すなわち, $f^!(G^\cdot)^p=f^*(G^{p+n})\otimes\mathscr{O}(-n-1)$. このとき Grothendieck によれば,

$$\boldsymbol{R}\mathrm{Hom}^\cdot_{\mathcal{O}_X}(F^\cdot,\ f^!G)\simeq\boldsymbol{R}\mathrm{Hom}^\cdot_{\mathcal{O}_S}(\boldsymbol{R}f_*F^\cdot,\ G^\cdot)$$

が quasi-coherent な $F^\cdot\in D^-(X)$ と quasi-coherent な $G^\cdot\in D^+(S)$ とに対して成り立つ. これは射影空間に関する Serre の双対定理の一般化である. 実際に, $S=\mathrm{Spec}(k)$, k は体, $F^\cdot=F\in\mathscr{A}(X)$ とおき両辺の $-q$ 次元コホモロジーをとれば

$\mathrm{Ext}^{n-q}_{\mathcal{O}_X}(F,\ \omega)\cong\mathrm{Hom}_k(H^q(X,\ F),\ k)$ となる. ([2] を参照せよ.)

文　　献

[1] Séminaire Hartshorne 1963/64, Harvard University.
[2] A. Grothendieck, Théorème de dualité pour les faisceaux algébriques coherents, Sem. Bourbaki, no 149 (1957).
[3] H. Cartan and S. Eilenberg, Homological algebra, Princeton, 1956.