第 18 回

代数分科会シンポジウム報告集

（環　　論）

1972年

信州大学

第 18 回

代数分科会シンポジウム報告集

（環　　論）

１９７２年

信　州　大　学

目　次

序　文

第18回代数学シンポジウムが昭和47年8月28日から、30日の3日間、信州大学理学部で開かれた。

環論を中心としてホモロジー理論、K−理論、圏理論が研究テーマであった。科研費の都合により今までの開期4日間を今回より3日間に縮めることになり、スケジュールはやゝ過密で、エコノミック・アニマル的色彩が強かった。

そのため講演の内容を補う意味も兼て、その報告集を出すことになった。

最後に開場のお世話をして下さった岸本量夫氏をはじめ、信州大学理学部数学教官の皆様方に深く感謝します。

原　田　　学

昭和47年12月

QF−3 Rings and Direct Sum Decompositions of Modules

太刀川　弘幸（東京教育大学）

Rを環、$_RX$を左R−加群とし、

(1)　$_RX = \bigoplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$

を直和分解とする。すべてのX_λが直既約であるとき (1)を直既約(直和)分解と呼ぶことにする。有名な Krull-Remak-Schmidt-Azumaya の定理は、加群がいくつかの直既約分解をもっている場合の分解のあり方を問題にしている。しかし「如何なる環に対し任意の加群が直既約分解を持つか？」という問題(A)に対して吾々の知っている結果といえば、せいぜい中山氏の結果[14]、一般単列環の場合は肯定的であることを挙げることができるぐらいである。もちろんこれは可換環の場合、Köthe [7]の結果を含むものである。

さて、Rが半単純アルチン環の場合、$_RX$の任意の直和分解$_RX = X_1 \oplus X_2$に対し、$\Lambda_0 \subseteq \Lambda$が存在して、分解

$$X = X_1 \oplus \left(\bigoplus_{\mu\in\Lambda_0} X_\mu\right)$$

をXがもつことは良く知られた事実である。このようなとき、分解(1)を Anderson-Fuller [1]に従い可補的分解と呼ぶことにする。ところで、問題(B)「如何なる環に対し任意の加群が可補的分解を持つか？」に対しても今のところ、Fuller [6]が一般単列環の場合に肯定的であることを証明しているに過ぎない。

体K上の有限次多元環Aの直既約加群のK上の次元が有界であるとき、Aを bounded representation type という。又、直既約加群が有限個しか存在しないとき、Aを finite representation type という。Brauer-Thrall は bounded representation type は finite representation type であろうと予想した。この予想は最近 Roiter [17]によって肯定的に解決された。そこで問題(C)「bounded representation type の多元環に対し、すべての加群は直既約分解をもつであろうか？ 又、その分解は可補的であろうか？」 実は、上の Roiter の解を考慮に入れて、問題(C)が肯定的に解けること、その解答が QF−3 環の

理論を用いて得られる事を報告するのが私の目的である。

最近 Auslander [2]は、多元環の中では QF−3 である極大商環の森田同値類と global dimension ≤ 2 である finite representation type の環の森田同値類とが一対一に対応することを証明した。Ringel と筆者はこの結果を semi-primary ring に拡張し、単純な証明を得た[15]。ここで、前述の Roiter の解を思い出せば、多元環の場合 unboundedness は、有限次の直既約加群は有限個しかないことを保証している。そこで、これをそのまま一般環に対する finite representation type の定義に持ちこみ、以後 定義：「環Rが left Artinian かつ有限生成直既約左R−加群は有限個しかないとき Rを finite representation type という。」を用いることにする。このとき Eisenbud-Griffith [5]の結果より、有限生成直既約右R−加群も有限個しか存在せず、従ってRは right Artinian となる。即ち、上の定義は実は左右対称なのである。

又、QF−3環の定義は、多元環の場合の Thrall [20]のものを踏襲することにする。

定義： unique な極小忠実左R−加群$_RU$が存在するとき、Rを左QF−3環という。右QF−3環も同様に定義され、左及び右QF−3環を単にQF−3環と呼ぶ。

$_RU$は左イデアル Re ($e^2=e$) と同一視できる。そして Reは有限個の単純左イデアルの直和の injective hull になっていることが分る[3]。QF−3環の左極大商環と右極大商環は一致し、また、QF−3環になっている[19]。

さて、Ringel と筆者の結果の証明から、問題(C)の前半の解答が直ちに得られるのであるが、その基盤となる概念を更に整理すると、次の定理になる。

定理： $_R\mathfrak{M}$を(unital)左R−加群のつくる category とし、$\mathfrak{P}$を射影的左R−加群全体からなる$_R\mathfrak{M}$の full subcategory とする。この時、次の条件(i)〜(iv)は同値である。

(i) $\mathfrak{A}$ は Grothendieck category (即ち abelian category であって generators 及び exact direct limits を持つ) である。

(ii) ある一つの入射 R-加群 $_RI$ を torsion-free にする。最大の torsion-theory に関し, torsion-free かつ divisible な左 R-加群全体のつくる $_R\mathfrak{M}$ の full subcategory が $\mathfrak{A}$ と一致する。(Lambek [8] を参照)

(iii) X-dominant dimension が 2 以上である左 R-加群の全体のつくる $_R\mathfrak{M}$ の full subcategory が $\mathfrak{A}$ と一致する。ただし $_RX$ は 森田 [10] の意味で type FI となっている左 R-加群である。

(iv) R は 次の条件を満足する semi-primary QF-3 環である。dom. dim. $_RR \geq 2$ かつ gl. dim $_RR \leq 2$

(v) R は finite representation type の環 A 上の加群 $_AV$ の準同型環として表わされる。ただし $_AV$ は有限生成直既約 A-加群の有限個の直和で, 又, 互いに非同型な有限生成直既約左 A-加群は, すべて $_AV$ の直和因子として現われるものとする。

さて, この同値をすべて証明することは紙数の制限により不可能と思われるので, 核心である (iv) ⇔ (v) の証明のみを述べてみたいと思う。それにしても, QF-3 環の予備知識は欠かせない。

exact sequence ; $0 \longrightarrow {}_RM \longrightarrow {}_RX_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow {}_RX_n$ において X_i がすべて特定の加群 X の copies の直積として表わされているとき, X-dom. dim $_RM \geq n$; 又, X_i がすべて射影的かつ入射的であるとき, 単に dom. dim. $_RM \geq n$ と表わすことにする。又 $\mathfrak{D}(X) = \{M \in {}_R\mathfrak{M} \mid X\text{-dom. dim.}\, {}_RM \geq 2\}$ とおく。

予備知識 (1) R を QF-3 環, $_RRe$, fR_R を おのおの極小忠実 R-加群とすると 次が成立する。

a) $_{fRf}fRe$ は minimum injective cogenerator になる。

b) $_R[\mathrm{Hom}_{fRf}(fR, fRe)] \cong {}_RRe$,

$[\mathrm{Hom}_{eRe}(Re, fRe)]_R \cong fR_R$.

従って fR は fRe-reflexive. fRf と eRe とは fRe に関して森田 dual になる。故に $_{fRf}fR$ は linear compact, generator-cogenerator になっているのである。

c) $\mathrm{End}({}_{fRf}fR)$ は また QF-3, かつ embedding $R \cong \{(fR \ni fr \longmapsto frs \in fR) \mid s \in R\} \subseteq \mathrm{End}({}_{fRf}fR)$ に関し, R の左極大商環。 更に $\mathrm{End}({}_{fRf}fR) = \mathrm{End}(Re_{eRe})$

d) $R = \mathrm{End}({}_{fRf}fR)$ の場合。 a) かつ b) より Re-dom. dim $_RR \geq 2$ かつ $\mathfrak{D}(Re)$ と $_{fRf}\mathfrak{M}$ とは functors $(fR_R \otimes -)$ 及び $\mathrm{Hom}_{fRf}(fR, -)$ で equivalence である [18]。逆に Re-dom. dim. $_RR \geq 2$ より $R = \mathrm{End}({}_{fRf}fR)$ も得られる。又 特に R が semi-primary ならば

$$Re\text{-dom. dim. }{}_RR = \text{dom. dim. }{}_RR$$

が成立する。

(2) A を環, $_AV$ を linear compact, generator-cogenerator 左 A-加群とする。A は適当な環と森田-dual になり, $\mathrm{End}({}_AV)$ は QF-3 極大商環となる。また V は その最小忠実右加群である。[15] 上記の証明には Müller [11] 太刀川 [18],[19] Roux [16] Ringel-太刀川 [15] を参照されたい。そこで

(iv) ⇒ (v) の証明 : $_RRe$, fR_R を各々 R の極小忠実加群とする。R は semi-primary であったから, Re-dom. dim $_RR$ = dom. dim. $_RR \geq 2$. 従って予備 (1) より極大商環, かつ $R = \mathrm{End}({}_{fRf}fR) = \mathrm{End}(Re_{eRe})$ さて fRf, eRe とは森田-dual, fRf は semi-primary であったから fRf は left Artinian, $_{fRf}fRe$ は injective cogenerator なので, 任意の左 fRf-加群 X に対し,

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow \prod_{I_1} fRe \xrightarrow{\sigma} \prod_{I_2} fRe$$

を exact にすることができる。 明らかに、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{fRf}(fR, X) \longrightarrow \prod_{I_1} \mathrm{Hom}_{fRf}(fR, fRe) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(1,\sigma)} \prod_{I_2} \mathrm{Hom}_{fRf}(fR, fRe)$$

は exact。 一方 ${}_R\mathrm{Hom}_{fRf}(fR, fRe) \cong {}_RRe$, さらに、*Colby - Rutter* [4] の結果より、${}_RRe$ は Π-*projective*. そこで、条件 *gl dim.* ${}_RR \leq 2$ より、$\mathrm{Hom}_{fRf}(fR, X)$ は 射影的 R-加群。 さて、R は *semi-primary* であったから $\mathrm{Hom}_{fRf}(fR, X) \cong \bigoplus_{i \in H} Re_i$. ただし、$e_i$ は R の適当な *primitive idempotent* である。 又、H は有限とは限らない [12]。 故に、fR_R 射影的より、${}_{fRf}X \cong fR_R \otimes \mathrm{Hom}_{fRf}(fR, X) \cong fR_R \otimes (\oplus Re_i) \cong \oplus_{fRf} fRe_i$ ところが、"*Semi-primary*" "QF-3" は 左右対称であるから、eRe は *right Artinian*. よって *duality* より、${}_{fRf}fRe$ は 有限生成。一方 fR は fRe-*reflexive* かつ fRf は *left Artinian* であるから ${}_{fRf}fR$. すなわち その直和因子 ${}_{fRf}fRe_i$ は 有限の長さをもつ。

今、特に ${}_{fRf}X$ を直既約とすれば、ある *primitive idempotent* e_i に対し、$X \cong fRe_i$ でなければならない。 これから、fRf が *finitely representation type* であることも、また 任意の直既約 fRf-加群 が、${}_{fRf}fR$ の直和因子として現れることも分る。 この場合上の証明から、任意の fRf-加群 X が 有限生成直既約加群の直和として現わされていることもただちに理解されるであろう。

(v) ⇒ (iv) の証明： A, ${}_AV$ を (v) における環 及び加群とする。 このとき、直既約入射的 A-加群 ${}_AU$ は、有限生成となる。 まず、U の *socle* は単純であるから、U の任意の部分加群は また直既約である。 ${}_AA$ は *Artinian* であるので、もし U が 有限生成でなければ無限個の非同型な有限生成直既約 左 A-加群が存在することになり仮定に反する。

故に *minimum injective cogenerator* 左 A-加群は 有限生成であり、A は或る *right Artinian* 環 に 森田-*dual* になる。 従って ${}_AV$ に対する仮定より ${}_AV$ は *cogenerator*

又、${}_AA$ *Artinian* より、同様に、${}_AV$ は *generator*. さらに、${}_AV$ 有限生成より、${}_AV$ は *linear compact* でもある。 そこで予備(2) より $R = \mathrm{End}({}_AV)$ は *semi-primary* QF-3 極大商環となる。 従って、$V_R = fR_R$ 極小忠実加群、$A = fRf$ とおいて、良い。 R の極小忠実加群を Re とすれば、予備(1) d) より、*dom dim.* ${}_RR = Re$-*dom dim.* ${}_RR \geq 2$ である。

次に、準同型 $\theta : \bigoplus_{i=1}^{n} Re \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{m} Re$ に対し ${}_R\mathrm{Ker}\,\theta$ が 射影的であることを示す。 まず ${}_{fRf}fR \otimes Re \cong fRe$ は 有限生成であるから、$1 \otimes \theta : \bigoplus_{i=1}^{n} fR \otimes Re \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{m} fR \otimes Re$ の *Kernel* も 有限生成。 従って $\mathrm{Ker}(1 \otimes \theta) \cong \bigoplus_{k=1}^{s} {}_{fRf}M_k$

但し、M_k は有限生成直既約 fRf-加群 とおける。 一方、M_k は $fR(=X)$ のある直和因子と同型であった。 故に

$$\mathrm{Hom}_{fRf}(fR, M_k) \cong Re_k, \quad e_k \text{ は } R \text{ の } \textit{primitive idempotent}$$

とおける。 $\mathrm{Ker}\,\theta \in \mathfrak{D}(Re)$ であるから、
$\mathrm{Ker}\,\theta \cong \mathrm{Hom}_{fRf}(fR, fR \otimes_R \mathrm{Ker}\,\theta) \cong \mathrm{Hom}_{fRf}(fR, \mathrm{Ker}(1 \otimes \theta))$
$\cong \mathrm{Hom}_{fRf}(fR, \bigoplus_{k=1}^{s} M_k) \cong \bigoplus_{k=1}^{s} Re_k$ 従って、$\mathrm{Ker}\,\theta$ は 射影的である。

次に、R は *semi-primary* であるので *Colby - Rutter* [4] により、Re は、Σ-*injective* であり、正の整数 r, s を求めて

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^{r} Re \longrightarrow \bigoplus_{j=1}^{s} Re$$

を exact にすることができる。 さて、*gl dim.* ${}_RR \leq 2$ を示すためには 自由加群 $\bigoplus_J {}_RR$ から ${}_RR$ への任意の準同型写像 ρ に対し、$\mathrm{Ker}\,\rho$ が 射影的であることを示せば十分である。 そこで、F を J の有限部分集合、ρ_F を ρ の $\bigoplus_F R$ 上への *restriction* とする。 $\bigoplus_{i=1}^{r} Re$ は 入射加群、故に下の *diagram* を可換にする準同型 ψ が存在する：

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \bigoplus_F R & \xrightarrow{\bigoplus_F \sigma} & \bigoplus_F \left(\bigoplus_{i=1}^{r} Re\right) & \xrightarrow{\bigoplus_F \tau} & \bigoplus_F \left(\bigoplus_{j=1}^{s} Re\right) \\
& \downarrow \rho_F & & \downarrow \psi & & \\
0 \longrightarrow & R & \longrightarrow & \bigoplus_{i=1}^{r} Re & &
\end{array}$$

従って $\mathrm{Ker}\,\rho_F \cong \mathrm{Ker}(\bigoplus_F \tau) \cap \mathrm{Ker}\,\psi$

一方. $\mathrm{Ker}(\underset{F}{\oplus}\tau) \cap \mathrm{Ker}\,\psi$ は 準同型

$$(\underset{F}{\oplus}\tau,\ \psi) : \underset{F}{\oplus}\left(\overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} Re\right) \longrightarrow \underset{F}{\oplus}\left(\overset{s}{\underset{j=1}{\oplus}} Re\right) \oplus \left(\overset{r}{\underset{i=1}{\oplus}} Re\right)$$

の *Kernel* であって 前述に指摘した事実より. $\mathrm{Ker}\,\rho_F$ は. 射影的である。 明らかに. $\mathrm{Ker}\,\rho = \underset{F}{\cup}\mathrm{Ker}\,\rho_F$. これは $\mathrm{Ker}\,\rho_F$ の *direct limit* である。 R は *perfect* であるから $_R\mathrm{Ker}\,\rho$ は. 射影的である。 即ち *gl dim* $_RR \leq 2$ が. 証明できたのである.

これで. 証明は完結した訳である。 ところで. *finite representation type* の 環 A と A-加群 X をとってくる。 (v) の如く. *semi-primary* QF-3 環 R を構成すれば *dom. dim* $R \geq 2$ かつ *gl. dim* $_RR \leq 2$ である。 (iv) ⇒ (v) の 証明 において $_R\mathrm{Hom}_A(fR, X)$ が 射影的であり. *semi-primary* 上の 射影加群が. *primitive ideals* の直和で表わされるということが. *Key point* であった。 一方. *Anderson-Fuller* は *left perfect* 環上の 射影加群は. 可補的分解をもつことを証明している。 従って. この場合も. $_A\mathfrak{M}$ を $\mathrm{Hom}_{fRf}(fR, -)$ で $\mathcal{D}(Re)$ に移し. 実は $\mathcal{D}(Re)$ は 射影加群のつくる *sub-category* に外ならぬのであるから ここでの分解を $_A\mathfrak{M}$ の分解にもどしてやれば. 実は 問題 (c) の後半に対する肯定的な解答も得られたことになるのである。

最後に. 多元環の場合. 従来の意味での *finite representation type* ならば. もちろん 非同型な有限生成直既約加群は. 有限個しか存在しない。 しかし 上述の 証明から この有限生成直既約加群の全体が直既約加群の全体にほかならない。 従って. この多元環は. *bounded representation type* になり. 結局 *bounded representation type* と *finite representation type* は 同値なことも分ったのである。

参 考 文 献

〔1〕 F. W. Anderson, K. R. Fuller: Modules with decompositions that complement direct summands.

〔2〕 M. Auslander: Representation dimension of Artin algebras, Queen MAry College Lecture Notes.

〔3〕 R. R. Colby, jr. E. A. Rutter: QF-3 rings with zero singular ideal, Pacific J. Math. 28 (1969), 303-308

〔4〕 R. R. Colby, jr. E. A. Rutter; Generalizations of QF-3 algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 153 (1971), 371-386.

〔5〕 D. Eisenbud, P.Griffith: The structure of serial rings, Pacific J. of Math. 36 (1971), 109-121.

〔6〕 K. R. Fuller: ON Generalized uniserial rings and decompositions that complement direct summands, To appear in Math. Am.

〔7〕 G. Köthe: Verallgemeinerte Abelsche Gruppen mit hyperkomplexen Operatoren ring, Math. Z. 39 (1935), 31-44.

〔8〕 J. Lambek: Torsion theories, additive semantics and rings of quotients, Lecture Notes in Mathematics, 177 Springer (1971).

〔9〕 K. Morita: Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, A6 (1958), 83-142.

〔10〕 K. Morita: Localizations in Categories of modules II, Math. Z. 114, 121-144 (1970).

〔11〕 B. J. Müller: Dominant dimension of semi-primary rings, J. Reine Angew Math. 232 (1968), 173-179.

〔12〕 B. J. Müller: On semi-perfect rings, Illinois J. Math. 14 (1970), 464-467.

〔13〕 B. J. Müller: Linear compactness and Morita duality, J. Algebra 16 (1970), 60-66.

〔14〕 T. Nakayama,: On Frobenius algebras I, Ann. Math. 42 (1941), 1-22.

〔15〕 C. M. Ringel, H. Tachikawa: QF-3 rings, TO appear in J. Reine Angew. Math.

〔16〕 B. Roux: Sur la dualite de Morita, Tohoku Math. J. 23 (1971), 457-472.

[17] A. W. Roiter: Unboundedness of the dimensions of indecomposable representations of algebra having infinitely many indecomposable representations, Izv. Akad. Nauk ssr, Ser. Math.32 (1968), 1275-1282.

[18] H. Tachikawa: On splitting of module categories, Math. Z. 111(1969), 145-150.

[19] H. Tachikawa: On left QF-3 rings, Pcific J. Math. 32 (1970), 225-268.

[20] R. M. Thrall: Some generalizations of quasi-Frobenius algebras, Trans, Amer. Math. Soc. 64 (1948), 173-183.

[21] R. B. Warfield: Rings whose modules have nice decompositions, Math. Z. 125, 187-192 (1972).

注. 可換環の場合 問題(A)は Warfield [21] によって完全に解かれた。

Dominant 加群と左 QF-3 環の構造

加藤 豊紀（東北大学）

ここで述べる内容は 下記参考文献 [1] と [2] の合併である。 よって 文献 [1] と [2] をもって これに代えたい。

参考文献

[1] T. Kato: Structure of left QF-3 rings. Proc. Japan Acad., 48, 479-483 (1972).

[2] T. Kato: Structure of rings having dominant modules (to appear).

Linearly compact modules と cogenerators.

尾野寺 毅 (北海道大学)

1. R を単位元をもつ環とする. 左 R-加群 $_RM$ は次の条件を満すとき linearly compact であるという.

"任意の有限的に解ける合同式の系 $x\equiv m_\alpha \pmod{M_\alpha}$, $\alpha\in I$, は解ける. 但し $m_\alpha\in M$ で M_α は M の部分加群."

ここで合同式の系 $x\equiv m_\alpha \pmod{M_\alpha}$, $\alpha\in I$, が有限的に解けるとは, I の任意の有限部分集合 $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_t\}$ に対して, 合同式系 $x\equiv m_{\alpha_i} \pmod{M_{\alpha_i}}$, $i=1,\cdots,t$ が解けるということを意味する.

Linearly compact module の著しい例としては artinian module が挙げられる. 又アーベル群のカテゴリーにおいては, linearly compact modules のクラスと artinian modules のクラスとは一致する.

B. Müller は [4] において, linearly compact module が chain conditions を仮定しない森田双対理論において本質的な役割を演ずることを示した. ここでは linearly compact module を特に cogenerator との関連の下に詳しく考察し, [4] において得られた諸結果を更に精密に, 且一般化する.

2. $_RQ$, $_RM$ を左 R-加群とする. M の non-zero element m が与えられたとき, つねに $f(m)\neq 0$ なる M より Q への準同型 f が存在するとき, M は Q-torsionless であると呼ばれる. 又すべての左 R-加群が Q-torsionless であるとき, Q は (左 R-加群のカテゴリーにおける) cogenerator であると呼ばれる.

$_RQ$ を cogenerator とし, S をその自己準同型環とする. すると Q_S は右 S-加群となる. 又 $_RM$ を左 R-加群とすると, $M^*=\mathrm{Hom}_R(M,Q)_S$ は自然に右 S-加群と考えられるが, これを M の Q-dual と呼ぶ. 更に $M^{**}=\mathrm{Hom}_S(M^*,Q)$ を考え, これを M の Q-bidual と呼ぶ. さて M から M^{**} への自然な単射 φ,

φ

$$M\ni m\longrightarrow \varphi(m):\left(M^*\ni f\longrightarrow f(m)\in M\right)\in M^{**},$$

が存在するが, これが特に同型射であるとき, M は Q-reflexive であるという.

Cogenerator に関して次の density theorem が成り立つ.

定理 1. $_RM$ を左 R-加群, $_RQ$ を cogenerator, S を Q の自己準同型環とする. このとき M^*_S の任意の有限生成部分加群 $\mathcal{U}$ 及び $\mathcal{U}$ から Q_S への任意の準同型写像 g に対して,

$$g(f)=f(m_0)\quad {}^\forall f\in\mathcal{U},$$

となるような M の元 m_0 が存在する.

証明 $\mathcal{U}=\sum_{i=1}^{t}f_iS$ とする. このとき $g(f_i)=f_i(m_0)$, $i=1,\cdots,t$, となるような M の元 m_0 が存在することを示せばよい. そのためには

$Q^{(t)}$ の部分加群 $Q' = \{(f_1(m), \cdots, f_t(m)) \mid m \in M\}$ を考え，$(g(f_1), \cdots, g(f_t)) \in Q'$ であることを示せばよい．今然らずとすれば，${}_RQ$ は cogenerator なる故 $\alpha(Q')=0$，$\alpha((g(f_1), \cdots, g(f_t))) \neq 0$ なるような $Q^{(t)}$ から Q への R-準同型写像 α が存在する．従って $\alpha = (s_1, \cdots, s_t) \in S^{(t)}$ が存在して，M のすべての元 m に対して $\sum_{i=1}^{t} f_i(m)s_i = 0$ 且 $\sum_{i=1}^{t} g(f_i)s_i \neq 0$ となるが，これは $\sum_{i=1}^{t} f_i s_i = 0$ 且 $g(\sum_{i=1}^{t} f_i s_i) \neq 0$ を意味し，矛盾を生ずる．かくして定理は証明された．

${}_RA$，${}_RB$ を左 R-加群とする．A の任意の部分加群より B への準同型写像が，つねに A より B へのそれに迄拡張出来るとき，B は A-injective であると呼ばれる．

次の linearly compact module の特徴付けが与えられる．

定理2． ${}_RQ$ を cogenerator，S を Q の自己準同型環とする．このとき左 R-加群 ${}_RM$ に関する次の条件は等値である．

(1) ${}_RM$ は linearly compact．

(2) ${}_RM$ は Q-reflexive 且 Q_S は M^*-injective．

(3) M^*_S の任意の部分加群 $\mathcal{U}$ 及び $\mathcal{U}$ より Q_S への任意の準同型 g に対して，

$$g(f) = f(m) \quad {}^{\forall} f \in \mathcal{U},$$

となるような M の元 m_0 が存在する．

証明． (2) $\Longleftrightarrow$ (3) の等値性は定義よりほゞ明らかである．

(1) $\Longrightarrow$ (3)． 定理1により $\mathcal{U}$ の各元 f に対して $g(f) = f(m_f)$ となるような M の元 m_f が存在する．このとき合同式の系

$x \equiv m_f \pmod{\ker f}$，$f \in \mathcal{U}$，は有限的に解ける．何故なら有限個の $f_1, \cdots, f_t \in \mathcal{U}$ に対して再び定理1を適用すると，$g(f_i) = f_i(m')$，$i=1, \cdots, t$，となるような $m' \in M$ が存在するが，これより $f_i(m') = f_i(m_{f_i}) = g(f_i)$ が従い，これは $m' \equiv m_{f_i} \pmod{\ker f_i}$，$i=1,\cdots,t$，を意味する．さて M は linearly compact なる故，上の合同式系の解 m_0 が存在する．するとすべての $\mathcal{U}$ の元 f に対して $f(m_0) = f(m_f) = g(f)$ が成り立ち，これにより条件 (3) が満されることがわかる．

(3) $\Longrightarrow$ (1)． 有限的に解ける合同式の系 $x \equiv m_\alpha \pmod{M_\alpha}$，$\alpha \in I$，を考える．このとき容易に験証される如く，次の写像はよく定義される S-準同型写像である：

$$\mathcal{U} := \sum_{\alpha \in I} \mathrm{Ann}_{M^*}(M_\alpha) \ni \sum_{finite} f_{\alpha_i} \longrightarrow \sum f_{\alpha_i}(m_{\alpha_i}) \in Q,$$

但し，$f_{\alpha_i} \in \mathrm{Ann}_{M^*}(M_{\alpha_i}) := \{f \in M^* \mid f(M_{\alpha_i}) = 0\}$．

このとき条件(3)により $\sum f_{\alpha_i}(m_{\alpha_i}) = (\sum f_{\alpha_i})(m_0)$ となるような M の元 m_0 が存在する．これより各 $\alpha \in I$ に対して，

$$f_\alpha(m_\alpha) = f_\alpha(m_0) \quad {}^{\forall} f_\alpha \in \mathrm{Ann}_{M^*}(M_\alpha),$$

となり，従って $m_0 - m_\alpha \in \mathrm{Ann}_M(\mathrm{Ann}_{M^*}(M_\alpha))$ となる．一方 ${}_RQ$ は cogenerator なる故，$\mathrm{Ann}_M(\mathrm{Ann}_{M^*}(M_\alpha)) = M_\alpha$ である．従って $m_0 \equiv m_\alpha \pmod{M_\alpha}$，$\alpha \in I$，となり m_0 は与えられた合同式系の解である．かくして ${}_RM$ は linearly compact である．

定理2より次のような系が導かれる．(以下証明は略す)

系1． ${}_RQ$ を cogenerator，S を ${}_RQ$ の自己準同型環とする．このとき次の条件は等値である．

(1) $_RQ$ は linearly compact.
(2) Q_S は injective.

系2. $_RQ$ を linearly compact な cogenerator とする. このとき左 R-加群 $_RM$ に関する次の条件は等値である.

(1) $_RM$ は linearly compact
(2) $_RM$ は Q-reflexive.

系3 環 R に関する次の条件は等値である.

(1) $_RR$ および R_R はともに (injective) cogenerator.
(2) $_RR$ は linearly compact cogenerator.
(3) $_RR$ は cogenerator 且 R_R は injective.

系4. Linearly compact な左 R-加群のクラスは準同型像, 部分加群, 及び拡大に関して閉じている.

Annihilators に関しては次のような定理がえられる.

定理3. $_RM$ を linearly compact な左 R-加群, $_RQ$ をその socle が essential であるような injective cogenerator, S を $_RQ$ の自己準同型環とする. このとき $_RM$ のの任意の部分加群 M' に対して,

$$Ann_M(Ann_{M^*}(M')) = M',$$

又 M^*_S の任意の部分加群 $\mathcal{U}$ に対して,

$$Ann_{M^*}(Ann_M(\mathcal{U})) = \mathcal{U},$$

が成り立つ.

定理3より直ちに次の系が従う.

系. 環 R に関し, $_RR$ が linearly compact ならば R は semi-perfect ring である.

さて一般化された森田双対理論は linearly compact なる概念を用いて次のように述べられる.

定理4. $_RQ$ を balanced, linearly compact, cofinitely generated, injective cogenerator とし, S をその自己準同型環とする. このとき右 S-加群 Q_S も又 linearly compact, cofinitely generated, injective cogenerator であり, $_RR$ および S_S も linearly compact である. そして linearly compact な左 R-加群のカテゴリーと linearly compact な右 S-加群のカテゴリーとは contravariant functors $Hom_R(\ ,Q)$, $Hom_S(\ ,Q)$ により dual となる.

尚 linearly compact module の自己準同型環に関しては次の結果がえられる.

Proposition 1. $_RP$ を linearly compact, projective 左R-加群, S をその自己準同型環とする. このとき $_SS$ は linearly compact である.

Proposition 2 ${}_RQ$ を linearly compact, cofinitely generated injective 左 R-加群, S をその自己準同型環とする. このとき S_S は linearly compact である.

参考文献

[1] G. Azumaya: A duality for injective modules, Amer. J. Math. 81 (1959), 247–278.

[2] F. Kasch and E. Mares: Eine Kennzeichnung semi-perfekter Moduln, Nagoya Math. J. 27 (1966), 525–529.

[3] K. Morita: Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A 6 (1958), 83–142.

[4] B. Müller: Linear compactness and Morita duality, J. Alg. 16 (1970), 60–66

[5] T. Onodera: Linearly compact modules and cogenerators, Journ. Fac. Sci. Hokkaido Univ, Ser. 1, vol. 22. No 3,4 (1972), 116–125.

[6] F. L. Sandomierski: Linearly compact modules and local Morita duality, Ring Theory, Academic Press, 1972.

加群の圏における $\underline{n}$-fold Torsion Theory

倉田吉喜 (山口大)

R は単位元をもった環, ${}_R\mathfrak{M}$ は unital 左 R-加群の圏とする. Jans [5] の意味の TTF-theory の概念を拡張して, 自然数 $\underline{n} > 1$ に対して, $\underline{n}$-fold torsion theory for ${}_R\mathfrak{M}$ を, $\underline{n}$ 個の左 R-加群の作る級の組

$$(T_1, T_2, \cdots, T_{\underline{n}})$$

であって, 隣りあった組 $(T_{\underline{i}}, T_{\underline{i}+1})$, $\underline{i} = 1, 2, \cdots, \underline{n}-1$, は Dickson [4] の意味で torsion theory であるときめる.

仮りにある自然数 $\underline{i}$, $1 < \underline{i} < \underline{n}$, があって $T_1 = T_{\underline{i}+1}$ となるならば, かかる $\underline{i}$ の最小なものを $(T_1, T_2, \cdots, T_{\underline{n}})$ の長さとよぶ. この様な $\underline{i}$ がないときは, $(T_1, T_2, \cdots, T_{\underline{n}})$ の長さは $\underline{n}$ であるときめる.

§1 では準備を, §2 で $\underline{n}$-fold torsion theory には 4つの異なった型しかないことを示す. §3 ではこれらの型の $\underline{n}$-fold torsion theory が実際に存在することを例をあげて示す. §4 では, R が直交的な primitive idempotent $e_1, e_2, \cdots, e_{\underline{n}}$ によって $R = Re_1 \oplus Re_2 \oplus \cdots \oplus Re_{\underline{n}}$ とあらわされているとき, 2-fold torsion theory (T_1, T_2) に対して

(*) $Re_1, \cdots, Re_{\underline{n}}$ のおのおのは T_1 か T_2 に含まれる

という条件について調べる.

§1. Dickson[4] の意味の torsion theory とは, 左R-加群の級の組 (T_1, T_2) で次の条件をみたすものときめる.

(1) $T_1 \cap T_2 = \{0\}$.

(2) T_1 は homomorphic image に関して閉.

(3) T_2 は submodule に関して閉.

(4) 任意の左R-加群 $_RM$ に対して, M の submodule $t_1(M)$ が存在して, $t_1(M) \in T_1$, $M/t_1(M) \in T_2$.

この(実は一意的にきまる) submodule $t_1(M)$ は (T_1, T_2) に関する M の torsion submodule とよばれる.

左R-加群の級 T_1 が torsion class とは, ある左R-加群の級 T_2 があって, (T_1, T_2) が(上の意味で) torsion theory をなすものときめる. torsion-free class T_2 は双対的に定義される.

torsion class T_1 が, 或いは torsion theory (T_1, T_2) が, hereditary (stable) とは, T_1 が submodule に関して (injective hull に関して) 閉であるときめる.

torsion class T_1 が, 或いは torsion theory (T_1, T_2) が, splitting とは, 任意の $_RM$ に対して $t_1(M)$ が M の直和因子であるときめる.

後の議論のために次の Dickson[4] の結果を引用する.

(1.1) 左R-加群の級 T_1 が torsion class になるための必要十分条件は T_1 が homomorphic image, 直和, extension に関して閉なことである. 双対的に級 T_2 が torsion-free class になるための必要十分条件は T_2 が submodule, 直積, extension に関して閉なことである.

(1.2) torsion theory (T_1, T_2) において, T_1, T_2 は互いに他を

$$T_1 = \{ {}_RM \mid \mathrm{Hom}_R(M, N) = 0 \text{ for all } N \in T_2 \}$$
$$T_2 = \{ {}_RM \mid \mathrm{Hom}_R(N, M) = 0 \text{ for all } N \in T_1 \}$$

によって一意的に定める.

(1.3) torsion theory (T_1, T_2), 任意の $_RM$ に対して M の torsion submodule

$$t_1(M) = \sum \{ N \mid N \text{ は } M \text{ の submodule で, } N \in T_1 \}$$
$$= \bigcap \{ N \mid N \text{ は } M \text{ の submodule で, } M/N \in T_2 \}$$

であらわされる.

(1.4) torsion theory (T_1, T_2) において, T_1 が hereditary の必要十分条件は T_2 が injective hull に関して閉なことである.

T_1 が hereditary torsion class であるとき,

$$F(T_1) = \{ L \mid L \text{ は } R \text{ の左 ideal で } R/L \in T_1 \}$$

を T_1 の torsion filter とよぶことにする.

Jans[5] は hereditary torsion class が直積に関しても閉なとき, これを torsion torsion-free class (TTF-class) とよんだ. 従って (T_2, T_3) が hereditary torsion theory で, T_2 が TTF-class ならば, 適当な torsion class T_1 をみつけて, (T_1, T_2, T_3) が 3-fold torsion theory となる. Jans[5] によれば, T_2 が TTF-class となるための必要十分条件は T_2 の torsion filter $F(T_2)$ が最小元をもつことであり, この最小元は R の両側 ideal で, R の (T_1, T_2) に関する torsion submodule

$\underline{t}_1(R)$ に一致することが知られている．しかも，このとき
$$T_2 = \{{}_RM \mid \underline{t}_1(R)\cdot M = 0\}$$
であらわされる．

§2. (T_1, T_2, T_3) を 3-fold torsion theory for ${}_R\mathfrak{M}$ とする．左R-加群 ${}_RM$ の (T_1, T_2), (T_2, T_3) に関する torsion submodule を $\underline{t}_1(M)$, $\underline{t}_2(M)$ であらわす．§1 にのべた様に，T_2 の torsion filter $F(T_2)$ は最小元 $\underline{t}_1(R)$ をもち，
$$T_2 = \{{}_RM \mid \underline{t}_1(R)\cdot M = 0\}$$
とあらわされる．

Lemma 2.1. 任意の ${}_RM$ に対して
$$\underline{t}_1(M) = \underline{t}_1(R)\cdot M, \quad \underline{t}_2(M) = \underline{l}_M(\underline{t}_1(R))$$
が成り立つ．ここで
$$\underline{l}_M(\underline{t}_1(R)) = \{x \in M \mid \underline{t}_1(R)\cdot x = 0\}$$
証明. (1.3) を用いて
$$\begin{aligned}\underline{t}_1(M) &= \bigcap\{N \mid N \text{ は } M \text{ の submodule で, } M/N \in T_2\}\\ &= \bigcap\{N \mid N \text{ は } M \text{ の submodule で, } \underline{t}_1(R)\cdot M \subseteq N\}\\ &= \underline{t}_1(R)\cdot M\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\underline{t}_2(M) &= \sum\{N \mid N \text{ は } M \text{ の submodule で, } N \in T_2\}\\ &= \sum\{N \mid N \text{ は } M \text{ の submodule で, } N \subseteq \underline{l}_M(\underline{t}_1(R))\}\\ &= \underline{l}_M(\underline{t}_1(R))\end{aligned}$$

この lemma から，任意の ${}_RM$ に対して
$$\begin{aligned}\underline{t}_2(\underline{t}_1(M)) &= \underline{l}_{\underline{t}_1(M)}(\underline{t}_1(R)) = \underline{l}_M(\underline{t}_1(R)) \cap \underline{t}_1(M)\\ &= \underline{t}_2(M) \cap \underline{t}_1(M).\end{aligned}$$

$T_1 = \{{}_RM \mid \underline{t}_1(M) = M\}$, $T_3 = \{{}_RM \mid \underline{t}_2(M) = 0\}$ に注意すると
$$T_1 \subseteq T_3 \rightleftarrows \underline{t}_1(M) \cap \underline{t}_2(M) = 0 \text{ for all } {}_RM$$
が成り立つ．

Lemma 2.2. T_1 が hereditary であるか，T_2 が splitting であれば，$T_1 \subseteq T_3$ が成り立つ．

証明. T_1 が hereditary のときは，任意の $M \in T_1$ に対して $\underline{t}_2(M) \in T_1$，従って $\underline{t}_2(M) \in T_1 \cap T_2 = 0$. T_2 が splitting のときには，任意の ${}_RM$ に対して
$$\underline{t}_1(M) = \underline{t}_2(\underline{t}_1(M)) \oplus N$$
なる submodule N をとる．このとき
$$\underline{t}_1(M)/N \cong \underline{t}_2(\underline{t}_1(M)) \in T_1 \cap T_2 = 0.$$

Lemma 2.1 から任意の ${}_RM$ に対して
$$\begin{aligned}\underline{t}_1(M/\underline{t}_2(M)) &= \underline{t}_1(R)\cdot(M/\underline{t}_2(M))\\ &= (\underline{t}_1(R)\cdot M + \underline{t}_2(M))/\underline{t}_2(M).\end{aligned}$$
従って
$$T_3 \subseteq T_1 \rightleftarrows M = \underline{t}_1(M) + \underline{t}_2(M) \text{ for all } {}_RM$$
更にこれは
$$R = \underline{t}_1(R) + \underline{t}_2(R)$$
と同値である．何故ならば，$R = \underline{t}_1(R) + \underline{t}_2(R)$ としたとき，任意の ${}_RM$ に対して
$$\begin{aligned}M &= \underline{t}_1(R)\cdot M + \underline{t}_2(R)\cdot M\\ &= \underline{t}_1(M) + \underline{l}_R(\underline{t}_1(R))\cdot M\end{aligned}$$

ここで $l_R(\underline{t}_1(R))\cdot M = l_M(\underline{t}_1(R)) = \underline{t}_2(M)$ となることに注意したらよい。

Lemma 2.3. T_3 が homomorphic image で閉じ，$\underline{t}_1(R)$ が左 R-加群として R の直和因子ならば，$T_3 \subseteq T_1$ が成り立つ。

証明. T_3 が homomorphic image で閉のときは，$R/(\underline{t}_1(R)+\underline{t}_2(R))$ は，$R/\underline{t}_1(R)$，$R/\underline{t}_2(R)$ の homomorphic image であるから，

$$R/(\underline{t}_1(R)+\underline{t}_2(R)) \in T_2 \cap T_3 = 0.$$

$\underline{t}_1(R)$ が ${}_RR$ の直和因子のときは，$R = \underline{t}_1(R) \oplus L$ となる左 ideal L をとる。

$$\underline{t}_1(R)\cdot L \subseteq \underline{t}_1(R) \cap L = 0.$$

従って $L \subseteq l_R(\underline{t}_1(R)) = \underline{t}_2(R)$ で $R = \underline{t}_1(R) + \underline{t}_2(R)$ となる。

Jans[5] によれば，次の条件は互いに同値である：
3-fold torsion theory (T_1, T_2, T_3) に対して

(1) $R = \underline{t}_1(R) \oplus \underline{t}_2(R)$ （環としての直和）

(2) $M = \underline{t}_1(M) \oplus \underline{t}_2(M)$ for all ${}_RM$

(3) $T_1 = T_3$

(4) $\underline{t}_2(\underline{t}_1(M)) = 0$ かつ $\underline{t}_1(M/\underline{t}_2(M)) = M/\underline{t}_2(M)$ for all ${}_RM$.

Bernhardt [2] によれば，これらは更に次の条件とも同値である。

(5) T_2 が stable で，$\underline{t}_1(R)$ が左 R-加群として R の直和因子。

(6) T_3 が TTF-class で，$\underline{t}_2(R)$ が左 R-加群として R の直和因子。

(7) $\underline{t}_1(R)$ が R の環としての直和因子。

Bernhardt [2] はこれらの条件の成り立つとき，(T_1, T_2, T_3) を centrally splitting とよんだ。これは (T_1, T_2, T_3) の長さが 2 ということと同じである。上にのべた lemma を用いて更に同値な条件をつけかえることができる。

Theorem 2.4. 3-fold torsion theory (T_1, T_2, T_3) に対して次の条件は互いに同値である。

(1) (T_1, T_2, T_3) は長さ 2 をもつ。

(2) T_1, T_2 共に splitting.

(3) $\underline{t}_1(R)$, $\underline{t}_2(R)$ 共に左 R-加群とみて R の直和因子。

(4) T_1 は hereditary かつ splitting.

(5) T_1 が hereditary，T_3 が TTF-class.

証明. (3) $\Rightarrow$ (1) を示せば十分である。(3) を仮定すると $R = \underline{t}_2(R) \oplus L$ となる左 ideal L がある。$R/L \cong \underline{t}_2(R)$ から $L \in F(T_2)$. $\underline{t}_1(R)$ が $F(T_2)$ の最大元故 $\underline{t}_1(R) \subseteq L$. 従って $\underline{t}_1(R) \cap \underline{t}_2(R) = 0$. Lemma 2.3 の証明から $R = \underline{t}_1(R) + \underline{t}_2(R)$.

次に (T_1, T_2, T_3, T_4) を 4-fold torsion theory for ${}_R\mathfrak{M}$ とする。T_2 は hereditary で，T_3 は TTF-class 故 $T_2 \subseteq T_4$，$T_3 \subseteq T_1$ が成り立つ。従って

Proposition 2.5. 4-fold torsion theory (T_1, T_2, T_3, T_4) for ${}_R\mathfrak{M}$ に対して次の条件は同値である.

(1) (T_1, T_2, T_3, T_4) が長さ2をもつ.

(2) T_1 が hereditary.

(3) T_2 が splitting.

(4) $t_2(R)$ が左R-加群として R の直和因子.

(5) T_4 が TTF-class.

長さが3の4-fold torsion theory に関しては

Proposition 2.6. 長さが3の4-fold torsion theory は ありえない.

証明. (T_1, T_2, T_3, T_4) が長さが3の4-fold torsion theory とする. 長さが3故 $T_1 = T_4$. $T_2 \subseteq T_4$ から $T_2 \subseteq T$ 従って $T_2 = \{0\}$, $T_1 = {}_R\mathfrak{M} = T_3$. これは矛盾.

Proposition 2.5, (5) から

Theorem 2.7. $n > 4$ ならば, 任意の n-fold torsion theory は長さ2をもつ.

従って次の定理が成り立つ.

Theorem 2.8. n-fold torsion theory for ${}_R\mathfrak{M}$ には次の4つの型しかありえない.

(1) 2-fold torsion theory で, 3-fold torsion theory にひろげることはできないもの.

(2) 3-fold torsion theory で長さが2のもの.

(3) 長さが3の3-fold torsion theory で, 4-fold torsion theory にひろげられないもの.

(4) 長さが4の4-fold torsion theory.

§3.

3.1. Theorem 2.8, (1) の型の torsion theory の例としては, 整数環 Z の上の普通の意味の torsion theory がある.

3.2. Theorem 2.8, (2) の型の例をあげる.

P を有限生成 projective 右R-加群, その trace ideal を $t_1(R)$ とする.

$$T_2 = \{ {}_RM \mid t_1(R) \cdot M = 0 \}$$

は適当な T_1, T_3 とあわせて 3-fold torsion theory (T_1, T_2, T_3) を作る. R が可換のときには Auslander and Goldman [1] から $R = t_1(R) + l_R(P)$. ところで P の R における左 annihilator $l_R(P)$ は $t_1(R)$ のそれ $l_R(t_1(R))$ に等しく, 従って $R = t_1(R) + l_R(t_1(R))$. R は可換故 $t_1(R) \cap l_R(t_1(R))$

$t_1(R) \cdot l_R(t_1(R)) = 0$. 従って

$$R = t_1(R) \oplus l_R(t_1(R)) = t_1(R) \oplus t_2(R).$$

3.3. Theorem 2.8, (3) の型の torsion theory の例としては次のものがある. K を体, A を無限の index set とする.

$$Q = \prod_{\alpha \in A} K_\alpha, \quad K_\alpha = K \text{ for all } \alpha \in A,$$

$$R = \sum_{\alpha \in A} \oplus K_\alpha + 1 \cdot K$$

但し 1 は Q の単位元とおく. R はこのとき可換な semi-prime ring となる．$\sum_{\alpha\in A}\oplus K_{\alpha}$ は R の巾等な両側 ideal で，

$$T_2=\{{}_RM \mid \sum_{\alpha\in A}\oplus K_{\alpha}\cdot M=0\}$$

は適当な T_1, T_3 とあわせて 3-fold torsion theory (T_1, T_2, T_3) を作る．R がこの両側 ideal $\sum_{\alpha\in A}\oplus K_{\alpha}$ の essential extension であることから，(T_1, T_2, T_3) の長さは 2 ではありえない．従って長さは 3 となる．　　この torsion theory が 4-fold にひろげることができないということを見るには，一般に次のことが成り立つことに注意したらよい．

可換環 K に対しては，$\underline{n}>3$ ならば，任意の $\underline{n}$-fold torsion theory for ${}_R\mathfrak{M}$ は長さ 2 をもつ．

3.4. Theorem 2.8, (4) の型の torsion theory の1例としては次のものがある．R を体 K 上の 2×2 上三角行列全体のなる環とする．

$$I=\left\{\begin{pmatrix} 0 & \underline{a} \\ 0 & \underline{b}\end{pmatrix} \;\middle|\; \underline{a}, \underline{b}\in K\right\}$$

は R の巾等な両側 ideal で，従って

$$T_2=\{{}_RM \mid I\cdot M=0\}$$

は適当な T_1, T_3 とあわせて 3-fold torsion theory を作る．ここで

$$\underline{t}_1(R)=I, \quad \underline{t}_2(R)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0\end{pmatrix} \;\middle|\; \underline{a}, \underline{b}\in K\right\}$$

故 $R=\underline{t}_1(R)+\underline{t}_2(R)$, $\underline{t}_1(R)\cap\underline{t}_2(R)\neq 0$ となり，(T_1, T_2, T_3) の長さは 2 ではありえない．一方 $R=\underline{t}_1(R)+\underline{t}_2(R)$ に注意すると

$$\underline{t}_2(M)=\underline{t}_M(\underline{t}_1(R))=\underline{t}_R(\underline{t}_1(R))\cdot M=\underline{t}_2(R)\cdot M$$

が成り立ち，しかも $\underline{t}_2(R)$ も巾等な両側 ideal 故

$$T_3=\{{}_RM \mid \underline{t}_2(M)=0\}=\{{}_RM \mid \underline{t}_2(R)\cdot M=0\}$$

となり，T_3 は TTF-class となる．従って適当な T_4 があって (T_1, T_2, T_3, T_4) は 4-fold torsion theory となり，その長さは 4 である．

§4. この節では R は単位元 1 をもった環で，しかも有限個の直交的な primitive idempotent $e_1, e_2, \cdots, \underline{e_n}$ に対して

$$R=Re_1\oplus Re_2\oplus\cdots\oplus R\underline{e_n}$$

とあらわされるものとする．

2-fold torsion theory (T_1, T_2) に対して

(*) $Re_1, Re_2, \cdots, R\underline{e_n}$ のおのおのは T_1 か T_2 に含まれる

という条件を考える．

Lemma 4.1. 2-fold torsion theory (T_1, T_2) for ${}_R\mathfrak{M}$ に対して次の条件は同値である．

(1) (T_1, T_2) は条件 (*) をみたす．

(2) $\underline{t}_1(R)$ は左 R-加群として R の直和因子．

証明．(1) ⇒ (2) は容易．

(2) ⇒ (1)．$\underline{t}_1(R)=0$ のときは $Re_1, Re_2, \cdots, R\underline{e_n}$ のすべてが T_2 に含まれるから，(*) が成り立つ．$\underline{t}_1(R)\neq 0$ のとき，

$$\underline{t}_1(Re_1)\neq 0,\ \underline{t}_1(Re_2)\neq 0,\ \cdots,\ \underline{t}_1(Re_{\underline{m}})\neq 0,$$
$$\underline{t}_1(Re_{\underline{m}+1})=\cdots=\underline{t}_1(R\underline{e_n})=0$$

と仮定する．従って $\underline{t}_1(R)=\sum_{i=1}^{m}\oplus\underline{t}_1(Re_{\underline{i}})$ で，従ってまた

$$R=\left(\sum_{i=1}^{m}\oplus\underline{t}_1(Re_{\underline{i}})\right)\oplus L$$

となるRの左 ideal Lがある. 任意の $k=1,2,\cdots,m$ に対して

$$Re_k = t_1(Re_k) \oplus \Big(\sum_{i\neq k}{}^{\oplus} t_1(Re_i) \oplus L\Big) \cap Re_k.$$

Re_k は直既約, $t_1(Re_k) \neq 0$ 故 $Re_k = t_1(Re_k)$ が成り立つ. すなわち, $Re_1, \cdots, Re_m \in T_1$, $Re_{m+1}, \cdots, Re_n \in T_2$

特にRが semi-perfect のときには, 有限生成 projective 左R-加群 は $Re_1, Re_2, \cdots, Re_n$ のいくつかのものの直和と同型になるから, このときは, Lemma 4.1 の(1) (2) は次の(3)と同値になる.

(3) 有限生成 projective 左R-加群 M に対して, $t_1(M)$ は Mの直和因子 (Rutter [7, Theorem 4] 参照)

Lemma 4.1 と Theorem 2.4 とから

Proposition 4.2. 3-fold torsion theory (T_1, T_2, T_3) for $\mathfrak{M}$ に対して次の条件は同値である.

(1) (T_1, T_2, T_3) は長さ 2 をもつ.

(2) (T_1, T_2), (T_2, T_3) が共に条件(*)をみたす.

§3, 3.4 にのべた例では (T_1, T_2) は (*) をみたすが, (T_2, T_3) は (*) をみたしていない. 他方, 次の例は (T_2, T_3) は (*) をみたすが, (T_1, T_2) は (*) をみたさないような 3-fold torsion theory が存在することを示している.

Example 4.3 (Bernhardt [3]). R を体K上の 4×4 上三角行列全体の作る環とし

$$I = Re_{11} + Re_{12} + Re_{33} + Re_{34}$$

とおく. 但し e_{ij} は行列単位. Iは巾等な両側 ideal で

$$T_2 = \{{}_RM \mid I\cdot M = 0\}$$

とおけば 3-fold torsion theory (T_1, T_2, T_3) が得られる.

$$t_1(R) = I,\quad t_2(R) = t_R(I) = 0$$

に注意すれば, (T_2, T_3) は (*) をみたし, (T_1, T_2, T_3) の長さが 2 でありえないことから, (T_1, T_2) は (*) をみたす訳にはいかない.

Bernhardt [2] に従って, 2-fold torsion theory (T_1, T_2) が principal であるとは, 各 $i = 1, 2, \cdots, n$ に対して

(1) $Re_i \in T_1 \rightleftarrows Re_i/Ne_i \in T_1$,

(2) $Re_i \in T_2 \rightleftarrows Re_i/Ne_i \in T_2$

をみたすものと定義する. 但し N は Rの Jacobson 根基をあらわす.

3-fold torsion theory (T_1, T_2, T_3) に対しては, (T_1, T_2) が (*) をみたしたら, (T_1, T_2) は principal となり, Rが特に semi-perfect のときには, この逆も成り立つ.

Lemma 2.2, 2.3 を用いて

Theorem 4.4 ((Bernhardt [2, Theorem 5], Rutter [7, Theorem 6] 参照).) (T_1, T_2, T_3) は 3-fold torsion theory で T_1 が hereditary ならば, 次の条件は同値である.

(1) (T_1, T_2) は (*) をみたす.

(2) T_1 は splitting.

(3) (T_1, T_2, T_3) は長さ 2 をもつ.

特にRが semi-perfect のときは次も又同値となる.

(4) (T_1, T_2) が principal.

(5) (T_2, T_3) が principal.

証明: (5) $\Rightarrow$ (3) の証明には次の proposition と, Bernhardt [2, Corollary 4] または Rutter [7, Proposition 1] に注意したらよい.

この定理から直ちに

Proposition 4.5. 4-fold torsion theory (T_1, T_2, T_3, T_4) for ${}_R\mathfrak{M}$ に対して、次は同値である。

(1) (T_1, T_2, T_3, T_4) は 長さ2をもつ。

(2) (T_2, T_3) は (*) をみたす。

References

[1] M. Auslander and O. Goldman, Maximal Orders, Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960), 1-24.

[2] R. L. Bernhardt, Splitting Hereditary Torsion Theories over Semiperfect Rings, Proc. Amer. Math. Soc. 22 (1969), 681-687.

[3] R. L. Bernhardt, On Splitting in Hereditary Torsion Theories, Pacific J. Math. 39 (1971), 31-38.

[4] S. E. Dickson, A Torsion Theory for Abelian Categories, Trans. Amer. Math. Soc. 121 (1966), 223-235.

~~[5]~~ J. P. Jans, Some Aspects of Torsion, Pacific J. Math. 15 (1965), 1249-1259.

[6] Y. Kurata, On an n-Fold Torsion Theory in the Category ${}_RM$, J. Algebra 22 (1972), 559-572.

[7] E. A. Rutter, Jr., Torsion Theories over Semi Perfect Rings (to appear).

Localization in categories of modules

森田紀一（東京教育大学）

§1 Aは単位元をもつ環。${}_A\mathfrak{M}$ は左A-加群全体の category とする。$\mathcal{L}$ を ${}_A\mathfrak{M}$ の full subcategory とするとき、inclusion functor $T : \mathcal{L} \longrightarrow {}_A\mathfrak{M}$ に対し、その left adjoint となる functor $S : {}_A\mathfrak{M} \longrightarrow \mathcal{L}$ が存在するならば、$\mathcal{L}$ は ${}_A\mathfrak{M}$ の reflective subcategory という。また、このとき自然同値を除いて一意に定まる functor S のことを reflector という。

以下 $\mathcal{L}$ は ${}_A\mathfrak{M}$ の reflective subcategory, Sは reflector とする。このとき、$X \in {}_A\mathfrak{M}$, $Y \in \mathcal{L}$ について の自然同型

(1) $\lambda(X, Y) : \mathrm{Hom}_A(S(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_A(X, T(Y))$

が存在する。次に、

(2) $\alpha(X) = \lambda(X, S(X)(1_{S(X)})) : X \longrightarrow TS(X)$

は自然変換となる。ここで、Tは inclusion functor であるから、Tを省いて

(2') $\alpha(X) : X \longrightarrow S(X)$

と書くことにする。

よって $S({}_AA) = C$ とおけば、Cは左-A加群で

(3) $\alpha({}_AA) : {}_AA \longrightarrow {}_AC$

は、A準同型であるが、(1)により、Cに環の構造をいれて、(3)が環として準同型になるようにすることができる。

§2 左-A加群Xが finitely cogenerating（f. cog. と略記する）とは

$$\bigcap\{\mathrm{Ker}\, g \mid g \in \mathrm{Hom}_A(A, X)\} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}\, f_i$$

となる有限個の $f_i \in \mathrm{Hom}_A(A, X)$ $i = 1, \cdots, n$ が存在することである。

左A-加群 V が FI型とは.

1) C^V が入射的かつ f. cog. であり.

2) ${}_C V_B \cong \mathrm{Hom}_A({}_A C_C,\ {}_A V_B)$ が成り立つことをいう.

ここで. $B = \mathrm{End}({}_A V)$, $C = \mathrm{End}(V_B)$

例えば. V が入射的で f. cog. ならば V は FI型である.

次に. 左A-加群 X に対し.

$$0 \longrightarrow X \longrightarrow X_1 \longrightarrow \cdots \cdots \longrightarrow X_n$$

が完全系列となるような V の直積 X_i が存在するとき. X の V-*dominant dimension* は n 以上であるといい.
V-dom. dim $X \geq n$ と書く.

V-dom. dim $X \geq 2$ をみたす X 全体の作る ${}_A\mathfrak{M}$ の *full subcategory* を $\mathcal{D}(V)$ で表わす。 そうすると. 次の二つの定理が成り立つ。

定理1 ([1]) 左A-加群 V が FI型であれば. $\mathcal{D}(V)$ は ${}_A\mathfrak{M}$ の *reflective subcategory* であり. それ自身 *Grothendieck category* である。

定理2 ([1]) ${}_A\mathfrak{M}$ の *full subcategory* $\mathcal{L}$ が. *reflective* であり かつ *Grothendieck category* であり. 更に. X が $\mathcal{L}$ の *object* であれば. X と同型なものはすべて $\mathcal{L}$ の *object* となるならば. $\mathcal{L} = \mathcal{D}(V)$ となる FI型左A-加群 V が存在する。

すなわち. ${}_A\mathfrak{M}$ の *reflective subcategory* のうち. *Grothendieck category* となるものについては. FI型左A-加群 V による $\mathcal{D}(V)$ を考えれば十分ということになる。 このような $\mathcal{D}(V)$ について *reflector* $S: {}_A\mathfrak{M} \longrightarrow \mathcal{D}(V)$ が存在するが. §1 により $S({}_AA)$ には. 環構造が入り. 特に V が入射的ならば. $S({}_AA)$ は いわゆる A の商環になる。 例えば $V = E({}_AA)$ (${}_AA$ の *injective hull*) としたときの $S({}_AA)$ は. A の左極大商環 または *Utumi-Lambek* の商環である。

§3 前記論文[1]では. V が FI型のとき *reflector* $S: {}_A\mathfrak{M} \longrightarrow \mathcal{D}(V)$ を定めたが. ここでは別の構成法を示すことにする。

まず. $B = \mathrm{End}({}_AV)$ とし. 左A-加群 X に対し ${}_AV_B$ により *bidual module*

$$D(X) = {}_A[\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A({}_AX,\ {}_AV_B),\ {}_AV_B)]$$

を作り. 自然準同型

$$\pi(X) : X \longrightarrow D(X)$$

を.

$$[\pi(X)(x)](f) = f(x), \quad x \in X, \quad f \in \mathrm{Hom}_A({}_AX,\ {}_AV)$$

で定義する。 ここで.

$$\widehat{D}(X) = \cap\{\mathrm{Ker} f \mid f \in \mathrm{Hom}_A(D(X), V) \quad f\circ\pi(X) = 0\}$$

とおけば. $\widehat{D}(X)$ は $D(X)$ の部分加群で. *inclusion map* $\xi(X) : \widehat{D}(X) \longrightarrow D(X)$ により. $\pi(X) = \xi(X)\circ\widehat{\pi}(X)$ となる自然準同型

$$\widehat{\pi}(X) : X \longrightarrow \widehat{D}(X)$$

が存在する。 このとき. $\widehat{\pi}$ は ${}_A\mathfrak{M}$ から $\mathcal{D}(V)$ への *functor* となり. 次の定理が成り立つ。

定理3 左A-加群 V が FI型か. または入射的であれば. $X \in {}_A\mathfrak{M}$, $Y \in \mathcal{D}(V)$ についての自然同型

$$\mathrm{Hom}_A(\widehat{\pi}(X), Y) \cong \mathrm{Hom}_A(X, Y)$$

が存在する。 すなわち. $\widehat{\pi}$ は $\mathcal{D}(V)$ に対する *reflector* となる。

ところで. $\widehat{D}(X) = D(X)$ となるための必要十分条件として.

(i) $\pi(\widehat{D}(X)) : \widehat{D}(X) \cong D(\widehat{D}(X))$

(ii) $\pi(D(X)) : D(X) \cong D(D(X))$

(iii) $\pi(D^i(X)) : D^i(X) \cong D(D^i(X))$

(或る $i \geq 1$ に対し. または. すべての $i \geq 1$ に対し)

等が挙げられるが.

(iv) $D(X) \subsetneq \mathbb{V}^{*}$

は十分条件である。 これから $\mathbb{V}$ が FI 型であれば

$$\tilde{D}({}_AA) = D({}_AA) = C \quad (C \text{ は } \mathbb{V} \text{ の double centralizer})$$

となることが分り、前の論文〔1〕で得た結果と一致する。

文 献

〔1〕 K.Morita, Quotient rings, Ring Theory, Academic Press New York and London (1972), 257-285

完全圏

原田 学 (大阪市立大学)

H. Bass〔2〕が準素環のホモロジー的な拡張として、準完全(semi-perfect)或は完全環を定義して以来 環論ではこれまでアルチン環又は準素環で成立している結果を、準完全或は完全環にまで拡張されるようになった。

ここではその完全環を更に拡張して、完全圏を定義して、それが完全環とどの程度の類似性をもつかを考えることにしよう。

勿論、一般な圏を考えても、期待通りの結果は得られそうもないので、以下圏 $\underline{A}$ といえば、断らない限りグロタンディエク圏(Grothendieck)を考えていることにする。更に、これを略してG-圏ということもある。

また加群の圏の中で定義されている言葉、記号等で そのまま $\underline{A}$ の中でも適用するときは、それをそのまま用いることにしよう。

先づ完全圏の定義のしかたから考えてみよう。 Bass〔2〕, Theorem P の中で圏的に取り扱い易いものは、

(※) すべての対象(object)が射影被覆(projective cover)を持つ。

という事柄である。

そこで $\underline{A}$ が(※)をみたしているとき、$\underline{A}$ は完全圏(perfect category)という。 いま $\underline{A}$ の対象 A について、任意の A の部分対象 $A^{(i)}$ の被覆 $A = \cup A^{(i)}$ に対して、つねに 有限の $A^{(i)}$ によって $A = \cup A^{(i)}$ となるとき A を有限生成と呼ぶ。若し $\underline{A}$ の任意の有限生成の対象が射影被覆をもつとき、$\underline{A}$ を準完全圏という。

環 R について、R-加群の作る圏を $\underline{M}_R$ とすれば、R が完全(或は準完全)環であるときに限り $\underline{M}_R$ が完全(或は準完全)圏になる。

一方 Harada, Sai〔4〕 Example に見られる圏は、完全圏であっても〔2〕 Theorem P にあるような性質をもっていないものもある。それらを除くために次のことを考察しよう。

B. E. Mares〔8〕において 完全環 R の拡張として、R-射影加群 P について P の任意の剰余加群が射影被覆を持つと

き．Pと準完全的．Pの任意の直和が準完全的であるとき Pを完全的とよぶ。このとき完全的或は準完全的な射影加群は環の場合の本質的な拡張であることが示されている。

以上 二つの論文において重要な性質：[2] *Proposition* 2.7 任意の射影加群 Pについて $P \neq J(P)$ ここに $J(\ )$ は *Jacobson radical* を表わす。であった。上の例では この事実が成立していないため 完全圏であっても 完全環と異ったものになっているのである。

G－圏の中で 上の定理が成立しているものとして *Weidenfeld* [12] が 関手圏 $(\underline{C}, Ab)$ をあげている。$\underline{M}_R$も一つの関手圏 (R°, Ab) と考えられるので．$(\underline{C}, Ab)$ の完全性を考えるのは 無意ではない。

上の定理の一般化として．次のことが成り立つ。

補題1　圏 $\underline{A}$ の対象の族 $\{A^{(i)}\}$ について $[A^{(i)}, J(A^{(i)})] \subseteq J[A^{(i)}, A^{(i)}]$ をみたしているとき．$A = \sum \oplus A^{(i)}$ の自己準同型写像 fに対して $\mathrm{Ker}(1-f) \neq 0$ なら $\mathrm{Im} f \neq J(\mathrm{Im} f)$ となる。

証明 [1] 参照

補題1において．$\underline{A} = \underline{M}$　$(\underline{C}, Ab)$　或は Aが *locally noetherian* であれば．任意の射影対象 P について $P \neq J(P)$となることがわかる。

さて．$(\underline{C}\ \ Ab)$ において．$H^c(-) = [c, -]$ が 射影的かつ有限生成で．しかも．$\{H^c\}$ が $(\underline{C}, Ab)$ の *generating set* になっている [10] p 99。このことより 今後圏 $\underline{A}$ には有限生成な対象よりなる *generating set* $\{P(i)\}$ をもつものを考えることにする。

、これまで $\underline{M}_R$ の中で完全加群の研究でよく使われるもので それを $\underline{A}$ の中で考えると．

定理1（[8]．[5]．[7]）$\underline{A}$の射影対象 P について．次は同値である。

1) $S(P) = [P, P]$ は局所環：$S(P)/JS(P)$ が体

2) Pの真の部分対象は Pの中で *small* である

3) Pは直既約かつ準完全である。

このとき．$J(P)$が Pの唯一の極大対象で．Pは有限生成である．

証明　[7]．*Proposition* 1の方法を少し改良すればよい。

Bass [2] が完全環を定義するのに用いたT－巾零性を定義しよう。$\underline{A}$ の対象の族 $\{M(i)\}$ について 準同型の族 $\{f(i) ; M^{(i)} \longrightarrow J(M^{(i+1)})\}$ に対して．常にあるnがあって $f(n) f(n-1) \cdots f(1) = 0$ となるとき $\{M^{(i)}\}$ が右T－巾零系であるという。ここに $f(i)$を定義する$M(i)$．$M(i+1)$ 等は重複して表われてもかまわない。もし順序が逆に．$f(1) \cdots f(n) = 0$ となるとき．$\{M(i)\}$ を左T－巾零系という。

[2]．*Theorem* P の一つの条件に注目して．*Nastasescu-Popescu* [11] が．任意の対象が．極小対象を含むとき $\underline{A}$を準アルチン的（*semi-Artinian*）と呼んだ。

以上の準備により．次の基本定理が成り立つ。

定理2．$\underline{A}$を有限生成な対象よりなる *generating set* をもつG－圏とする。$\underline{A}$が準完全であるため必要十分な条件は．$\underline{A}$には完全直既約な射影対象 $P(i)$からなる *generating set* をもつことである。さらに $\underline{A}$ が完全的である必要十分条件は $\{P(i)\}$が右T－巾零系をつくることである。そして $\underline{A}$ が．準アルチン的であるのは．$\{P(i)\}$が左T－巾零のときに限る。

証明　$\underline{A}$を準完全 $\{G(i)\}$を有限生成な *generating set* とする。$G(i)$が射影被覆をもつことより．$G(i)$が射影的と考えてよく 補題1より $P \neq J(P)$が成り立つ。このことより [8] *Corollary* 4 4 を用いて $P(i)$を直既約と考えていいことがわかる。逆は定理1より明らかである。完全性については．[5] *Theorem* 6 或は [7]．*Lemma* 5 を用いれば容易である。準アルチン的については [2] *Theorem* Pの中で．Rの代りに $\{G(i)\}$を取って考えれば．証明は明らかであろう。（[6] 参照）

この定理により完全圏は特徴づけられたが それを環の

場合と比較してみよう。
　一般に　G-圏（もう少し弱くてもよい）$\underline{A}$が　射影対象
$P(i)$からなる *generating set* をもつとき　*Freyd* の定理［　］$P109$
によって$\underline{C}$を$\{P(i)\}$からなる *pre-additive* 圏として　$\underline{A} \approx (\underline{C}^{\circ}, A$
となる。一方　*Gabriel*［3］．*Chapter* II によって $S = \Sigma \oplus [P(i), P(j)$
に対して　写像の積によって　Sを環と考え．$[P(i), P(i)]$の恒
等写像を$e(i)$とおけば．$S = \Sigma \oplus e(i)S = \Sigma \oplus Se(i)$となり．
$\{e(i)\}$は互に直交する巾等元である。更に$\underline{M}_S$の部分圏（*full*
で$BS = B$となる対象B全体を取れば．$A \approx (\underline{C}^{\circ}, Ab) \approx$（上
の部分圏となる。

　ここで$\{P(i)\}$が有限であれば．Sには単位元が存在し（逆も
成立）$\underline{A} \approx \underline{M}_S$となり．森田の定理の一方を示している。従って
M_Sと異なるG-圏を考えるときには．単位元をもたない環を取
扱うことになる。

　以上の考察により．ホモロジー代数を考えている限り．環には
単位元が存在するのは常識であったが．それを圏の中で考えると
きは．単位元がむしろ邪魔になることがあることがわかった。
例えば．環$R(i)$の族について　$\Pi M_{R(i)}$を考えるとき．これに
対応する環は$\Sigma \oplus R(i)$であるが．それに単位元があれば．必
然的に$R(i)$が有限個になってしまう。

　次に単位元がなくなった故に．環Rの$\underline{M}_R$と上の$\underline{A}$（S
$= \Sigma \oplus e(i)S$）との違いを少し考えてみよう。以下S-加群B
は$BS = B$をみたすとし．それらの作る圏を$\underline{M}'_S$で表わす。Bに
ついて．$B \otimes_S S \approx B$となるが．$\mathrm{Hom}_S(S, B) \approx \Pi Be(i)$とな
って$\underline{M}'_S$の対象にはならない。また$A(i)$を$\underline{M}'_S$の族とすると
き．$\Pi A(i) \notin \underline{M}'_S$で．$\Sigma \Pi A(i)e(j)$が$M'_S$での直積となる。

　以上の通り　$\underline{A}$の代りにS-加群の圏を考えるときに．少し
は取り扱いに注意しなければならないことがわかる。

　この方法を用いて　完全圏$\underline{A}$の局大次元　弱局大次元等を
定義して．［2］*Theorem* P が少し修正してそのまま$\underline{A}$に於ても
成り立つことがわかる。局大次元が0の完全圏は体Kの$\underline{M}_K$
と同値になるが．局大次元が1の準完全圏になれば　環R
（単位元をもつ）の$\underline{M}_R$とはやや異って単位元のない特徴が表わ
れてくる。

1 G. Azumaya: Correction and supplementaries to my paper concerning Krull-Remak-Schmidts theorem, Nagoya Math. J. (1950)

2 H. Bass: Finitistic dimension and a homological generalrzation of semi-primary rings, Trans. Amer. Soc. 95, (1960).

3 P. Gabriel: DES categorie abeliennes, Bull. Soc. Math. France 90, (1962)

4 M. Harada, Y. Sai: On categories if indecomposable modules I, Osaka J. Math. 7, (1970).

5 M. Harada: On categories of indecomposable modules II , Osaka J. Math. 7, (1970).

6 M. Harada: Perfect categories I, I to appear.

7 M. Harada; H. Kanbara: On categoriea of projective modules, Osaka J. Math. 8, (1971).

8 E. Mares: Semi-perfect modules, Math. Z. 83, (1963).

9 B. Muller: ON semi-perfect rings, Ill. J. Math. 14, (1970).

10 B. Mitchel: Theory of categories, Academic Press, New York and London, (1965).

11 C. Nastasescu et N. Popescu: Anneaux semi-artiniens, Bull. Soc. Math. France, 96, (1968).

12 M. Weidenfeld , G. Weidenfeld: Ideaux d une categories preadditive, application aux categories semi-perfects, C. R. Acad. Sc. Paris, 270, (1970).

二次型式と高次K群

渡辺豊（奈女大理）小崎高太郎（阪大理）

二次型式の種々の不変量とその基本的性質についての現状を紹介する。

§1 二次型式

以下 F を標数≠2の体とする。V を F 上の有限次元ベクトル空間，q を V 上の二次型式とするとき，V と q の組のことをも二次型式といい以下 q と略記する。任意の非退化な二次型式 q は $\langle a_1\rangle \perp \cdots \perp \langle a_n\rangle = \langle a_1,\cdots,a_n\rangle$ の型の二次型式に同型である。これを q の対角化という。

F 上の有限次元の二次型式が直交和についてなす半群から作った Grothendieck 群を F の Witt-Grothendieck 群といい $\hat{W}(F)$ と書く。$\hat{W}(F)$ は $\otimes$ によって可換環になる。F 上のスス曲的型式の生成する $\hat{W}(F)$ の部分群 H は実はイデアルになっており $W(F)=\hat{W}(F)/H$ は可換環であるが，これを F の Witt 環と呼ぶ。

以下二次型式の古典的不変量を列挙する。

① dimension $\hat{W}\to\mathbb{Z}$ $(\langle a_1,\cdots,a_n\rangle \longmapsto n\in\mathbb{Z})$

$\hat{I}$ を dimension が偶数の元からなる $\hat{W}$ のイデアルとする。

② dimenion index $W\to\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ $(\langle a_1,\cdots,a_n\rangle \longmapsto \bar{n}\in\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$

③ determinant $\hat{W}\longrightarrow F^*/F^{*2}$ $(\langle a_1,\cdots,a_n\rangle \longmapsto \overline{a_1\cdots a_n}\in F^*/F^{*2})$

④ discriminant $W\longrightarrow F^*/F^{*2}$ $(\langle a_1,\cdots,a_n\rangle \longmapsto \overline{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_1\cdots a_n})$

⑤ Hasse algebra $h(\langle a_1,\cdots,a_n\rangle)=\otimes(a_i,a_j)$ $(i<j)$

但し (a,b) は quaternion algebra

⑥ Hasse invariant = Hasse algebra の $Br(F)$ での類。$h(q)$ と書く。

⑦ Clifford algebra $C(q)=T(V)/\{x\otimes x-q(x)$ で生成されるイデアル$\}$

但し $T(V)$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ で次数付けられた tensor algebra。すると $C(q)=C_0(q)\oplus C_1(q)$ となって q の次元が偶数なら $C(q)$ が，奇数なら $C_0(q)$ が中心的単純多元環となる。

⑧ Witt invariant $C(q)$（次元が偶数）乃至 $C_0(q)$（次元が奇数）の $Br(F)$ での類を q の Witt invariant といい $w(q)$ と書く。

これらの不変量は独立ではなく，$(\dim,\det,h)$ は $(d\text{-index},\mathrm{disc},w)$ を定め逆に $(\dim,\mathrm{disc},w)$ は $(\dim,\det,h)$ を定める。

§2 Brauer-Wall群

次に C.T.C. Wall の Brauer-Wall 群の理論がこれらの不変量 $(d\text{-index},\mathrm{disc},w)$ を一時に与えることを説明する。

以下次数付けはすべて $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ によるものとする。A を F 上の次数付多元環とする。A が次数付中心的単純とは，1) 有次両側イデアルが (0) 又は A 2) graded な中心 $=F$ (i.e. $a\cdot b=(-1)^{\partial a\partial b}ab$ による中心 $=F$) なるとき　そのとき A_0 又は A が中心的単純で且つ同時にはおこらない。それぞれ case 1，case 0 という。A と B が次数付中心的単純のときは $A\hat{\otimes}B$ もそうである（但し $a\hat{\otimes}b=(-1)^{\partial a\partial b}a\otimes b$）。$A$ が分解型とは $A\cong \mathrm{End}(V_0\oplus V_1)$（次数付けは標準的なもの）なること。そのとき $BW(F)=\{$次数付中心的単純多元環の同型類$\}/\{$分解型$\}$ は $\hat{\otimes}$ によってアーベル群となる。この群を Brauer-Wall 群という。

次にこの群の構造をみよう。A を次数付中心的単純とすると case 0 では $\exists u\neq 0\in A$ $u^2=d\in F$ s.t. $A_0=\{x\in A \mid xu=ux\}$ $A_1=\{x\in A\mid xu=-ux\}$，case 1 では $\exists u\neq 0\in F$ $u^2=d\in F$ s.t. $A_0u=A_1$。そうして $BW(F)$ の元 A は 1) case 0 か case 1，2) その時に応じて上の $d\in F^*/F^{*2}$，3) やはりその時に応じての A 乃至 A_0 の $Br(F)$ での類　で完全に定まりこの対応で

$$BW(F)\cong\{(\varepsilon,d,D)\mid \varepsilon=0,1,\ d\in F^*/F^{*2},\ D\in Br(F)\}$$

但し右辺の乗法は

$$(0,d,D)\times(0,d',D')=(0,dd',D\otimes D'\otimes(d,d'))$$
$$(0,d,D)\times(1,d',D')=(1,dd',D\otimes D'\otimes(d,-d'))$$
$$(1,d,D)\times(1,d',D')=(0,-dd',D\otimes D'\otimes(d,d'))$$

さて q，q' を非退化な二次型式とすると $C(q)$ は次数付中心的単純で $C(q\perp q')\cong C(q)\hat{\otimes}C(q')$。$q$ がスス曲的なら $C(q)$ は分解型。故に準同型 $\hat{W}(F)\longrightarrow BW(F)$，$W\longrightarrow BW(F)$ を得る。しかも $C(q)$ の $BW(F)$ での像は上の対応の下に $\{d\text{-index}(q),\mathrm{disc}(q),w(q)\}$ となっている。またこの対応とは別に $BW_0(F)$ を case 0 の多元環の作る $BW(F)$ の部分群とするとき $\hat{I}(F)\longrightarrow BW_0(F)$ $(q\longmapsto(0,\det q,h(q)))$ も準同型になっている。F 一般体では dim, disc, w 又は dim, det, h が決れば二次型式の

自明な類はきまる. つまり $\hat{I}(F) \to BW_0(F)$, $W(F) \to BW(F)$ は単射である.

§3 Stiefel Whitney 類

dim, d-index を0次の, det, disc を1次の, Hasse invariant, Witt invariant を2次の invariant とみなしもっと高い次数の invariant を求めることによって二次形式の理論を精密化しようとする試みの一つとして Stiefel Whitney 類の理論がある. Delzant の Galois コホモロジーによるものと Milnor の高次 K 群によるものである.

1° Delzant の Stiefel Whitney 類

$\bar{F}$ を F の分離的閉包, $G=Gal(\bar{F}/F)$ とする. 完全系列 $1 \to \{\pm 1\} \to \bar{F}^* \xrightarrow{2乗} \bar{F}^* \to$ より同型 $F^*/F^{*2} \overset{\delta}{\cong} H^1(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ を得る. $H^*(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ は cup 積によってコホモロジー環になっている. Delzant の S-W 類を $q \cong \langle a_1, \cdots, a_n \rangle$ に対して $w^P(q) = (1+\delta(a_1)) \cup \cdots \cup (1+\delta(a_n)) \in H^*(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ で定義する. (well defined つまり対角化によらない). すると準同型 $w^P : \hat{W} \to H^*(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ を得る. $\delta(a) \cup \delta(b) \in H^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ に $H^2(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \subset H^2(G, \bar{F}^*) \cong Br(F)$ で対応する $Br(F)$ の元は quaternion algebra (a, b) の類である. 故に $w^P(q)$ の1次の項は $\det(q)$, 2次の項は $h(q)$ となる. local な体及び global な体に対しては w^P は単射である (Delzant) が一般にはそうとはかぎらない (Scharlau)

2° Milnor の Stiefel Whitney 類

先ず体 F の高次 K 群を次のように定義する. $K_0(F)=\mathbb{Z}$, $K_1(F) \cong F^*$ (を加法的に書いたもの) $a \in F^*$ に対応する K_1F の元を $l(a)$ と書く.

$K_2F = K_1F \otimes K_1F / \{l(a) \otimes l(1-a)$ で生成される部分群$\}$. 以下同様に $K_nF = K_1F \otimes \cdots \otimes K_1F / \{l(a_1) \otimes \cdots \otimes l(a_n) \ \exists i \ a_i + a_{i+1} = 1\}$ で定義すると次数付環 $K_*F = \mathbb{Z} \oplus K_1F \oplus \cdots \oplus K_nF \oplus \cdots$ を得る. 更に $k_nF = K_nF/2K_nF$ と定義し $l(a_1) \otimes \cdots \otimes l(a_n)$ の k_nF での像を $l(a_1) \cdots l(a_n)$ と書く. (ここでは char(F) は任意)

例 1. 有限体 $K_nF = 0$ $(n \geq 2)$ $k_nF = 0$ $(n \geq 2)$

2. 実数体 $K_nF (n \geq 1) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus$ divisible な群 $k_nF \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

3. 局所体 $K_2F \cong$ (F に含まれる1の巾根の群) $\oplus$ divisible な群

$K_nF (n \geq 3)$ divisible $k_nF = 0$ $(n \geq 3)$

char $F \neq 2$ なら $k_2F \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (C. Moore)

4. global な体 F_v が F のすべての完備化をわたるとき標準的写像 $K_2F \to \oplus K_2F_v/\{$最大の divisible な部分群$\}$ の核は有限群 (Garland), 余核は F に含まれる1の巾根の群に同型 (C. Moore). また char $F \neq 2$ なら完全系列 $0 \to k_2F \to \oplus k_2F_v \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0$ が誘導され更に $k_nF \cong \oplus k_nF_v$ $(n \geq 3)$. (Bass-Tate)

さて q を F 上の非退化な二次形式とし $q \cong \langle a_1, \cdots, a_n \rangle$ をその一つの対角化とする. そのとき $(1+l(a_1)) \cdots (1+l(a_n)) \in k_*(F)$ は対角化のとり方によらないからこれを $w^M(q)$ とおく. すると $w^M(q)$ は $k_\pi F = \prod k_nF$ の可逆元で q' をもう一つの非退化な二次形式とすると $w^M(q \perp q') = w^M(q) w^M(q')$. 故に準同型 $w^M : \hat{W}(F) \to (k_\pi F)^*$ を得る. w^M を Milnor の S-W 類という. $w^M(q) = w_0(q) + w_1(q) + \cdots$ $w_i(q) \in k_iF$ とおく.

3° 両者の関係.

$l(a) \longmapsto \delta(a)$ は環準同型 $h_F : k_*F \to H^*(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ をひきおこし, 次の図式は可換.

$$\begin{tikzcd}
\hat{W}(F) \arrow[r, "w^P"] \arrow[dr, "w^M"'] & H^*(G, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \\
& k_*F \arrow[u, "h_F"']
\end{tikzcd}$$

次の場合に h_F は同型となる.

有限体, p 進体, 実閉体, global な体.

§4. Witt 環の構造

Witt 環の構造を $w^M = w$ を用いてしらべる. w は H を trivial にしないから W については不変量とはならない. しかし $I = \mathrm{Im}(\hat{I}F \to WF)$ とすると $\hat{I}^n/\hat{I}^{n+1} \cong I^n/I^{n+1}$ である. $\cap I^n = (0)$ (Arason-Pfister) であるので, $W(F)$ から作った次数付環 $W/I \oplus I/I^2 \oplus \cdots$ についてしらべる. $s_n : k_nF \to I^n/I^{n+1}$ を $s_n(l(a_1) \cdots l(a_n)) = \prod (\langle a_i \rangle - \langle 1 \rangle) \bmod I^{n+1}$ で定まる well defined な上への準同型とする. s_0 は明らかに同型. また $w_1(\hat{I}^2) = w_2(\hat{I}^3) = (0)$ より $w_1 : I/I^2 \to k_1F$, $w_2 : I^2/I^3 \to k_2F$ がひきおこされ s_1, s_2 の逆を与える. 故に s_1, s_2 も同型になる. $n \geq 3$ については $t = 2^{n-1}$ とおくと

$I^n \ni \xi = (\langle a_1\rangle - \langle 1\rangle)\cdots(\langle a_n\rangle - \langle 1\rangle)$ に対して

$$\omega(\xi) = \begin{cases} 1 + l(a_1)\cdots l(a_n)\, l(-1)^{t-n} & n\text{奇数} \\ (1 + l(a_1)\cdots l(a_n)\, l(-1)^{t-n})^{-1} & n\text{偶数} \end{cases}$$

故に $w_t : I^n/I^{n+1} \longrightarrow k_t F$ をひきおこし $w_t \circ s_n = l(-1)^{t-n}$倍. 故に $l(-1)^{t-n}$倍 ($k_n F \longrightarrow k_t F$) が単射のとき s_nは同型になる.

次の場合に s_nはすべて同型になる.

1) globalな体

2) $k_2 F = (0)$ 又は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ (例えば p進体, 実閉体, $F = F^2$な体)

3) Fが離散的付値に関して完備な体で、その剰余体の標数が2でなくそこで s_nが同型のとき.

参考文献

J. K. Arason und A. Pfister : Beweis des Krullschen Durchschnittsatzes für den Wittring. Inv. 12 (1971)

H. Bass : K_2 des corps globaux. Sém. Bourbaki (1971

A. Delzant : Définition des classes de Stiefel Whitney d'un module quadratique sur un corps de caractéristique différente de 2 C. R. Acad. Sci. Paris 255 (196

O. T. O'Meara : Introduction to quadratic forms. Springer

J. Milnor : Algebraic K-Theory and Quadratic Forms Inv. 9 (1970)

W. Scharlau : Quadratische Formen und Galois-Cohomologie Inv. 4 (1967)

: Quadratic Forms. Queen's Paper

C. T. C. Wall : Graded Brauer groups J. reine. angew. Math. 213 (1964)

On the quadratic extentions of a commutative ring.

神崎熙夫(阪市大)

1. $B \supset A$ を単位元を共有する拡大環とするとき、剰余加群 B/A が A-A-両側加群として可逆的、即ち、$B/A \otimes_A \mathrm{Hom}_A(B/A, A) \approx \mathrm{Hom}_A(B/A, A) \otimes_A B/A \approx A$ であるとき、B を A の quadratic extention とよぶ。(B, A が division ring の場合については、Dieudonné [3], Cohn [2] がある。) 例えば、A を任意の単位元をもつ環とし、G を位数 2 の群とするとき、[5] の意味での generalized crossed product $\Delta(f, A, \Phi, G)$ は、A の quadratic extension であることは容易に知られる。又、任意の単位元をもつ環 A に対して、A の位数2のガロア群 G をもつガロア拡大([4]の意味で) B が、$Tr_G(B)$ $(=\{\sum_{\sigma\in G}\sigma(x);\ x\in B\}) = A$ をみたすとき、B は A の quadratic extension となることも次の様に見られる。左右対称的であるから、B/A は A-左加群として忠実、B/A の A-左-準同型写像は A の元を右より乗ずることでひきおこされる事を示せば充分。$Tr_G(B)=A$ より、$0\to A\to B\to B/A\to 0$ は A-左加群として分解、従って、B/A は有限生成射影的 A-左加群。$B\supset A$ がガロア拡大より $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in B$ が存在して、$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 1$, $\sum_{i=1}^{n} \sigma(x_i) y_i = 0$ 但し $G=\{I,\sigma\}$。故に、$a\in A$, $a\cdot B/A = 0$ ならば、$a\cdot B\subset A$ 従って、$0=\sum\sigma(x_i)y_i = \sigma(a)\cdot\sum_i \sigma(x_i)y_i = \sum_i\sigma(ax_i)y_i = \sum_i a x_i y_i = a$。又、$\bar{f}: B/A\to B/A$ を任意の A-左-準同型写像とする。$B\xrightarrow{\varphi} B/A\to 0$ は split するから、$\varphi\circ\varphi' = I_{B/A}$ となる $\varphi': B/A\to B$; A-準同型写像が存在する。$f=\varphi'\circ\bar{f}\circ\varphi$ とおくとき、$f: B\to B$; A-左-準同型写像であり、$B\supset A$ のガロア拡大の定義から、$f(x) = xb_1 + \sigma(x)b_2$, $\forall x\in B$ となる $b_1, b_2\in B$ が存在する。$f(1)=0$ より $b_1=-b_2$ であり、$Tr_G(B) = (I+\sigma)(B)\subset A$ より

$$f(x)\equiv(I-\sigma)(x)b_1 + (I+\sigma)(x\cdot\sigma(b_1)) \equiv x\cdot(b_1+\sigma(b_1)) \pmod{A},\quad x\in B.$$

故に $\bar f(\bar x) = \bar x\cdot a$, $\forall\bar x\in B/A$, 但し $a = b_1+\sigma(b_1) = (I+\sigma)(b_1)\in A$。よって B は A の quadratic extension で且つ分離的拡大である。しかし、その逆はまだ不明である。(B が可換の場合は逆も成立する。)

2. 以下に於て、可換環の場合のみを考える。即ち、以後 B が A の quadratic extension であるとは、$B\supset A$ は共通単位元をもつ可換環で、B/A が可逆的 A-加群である場合のみを意味する。A を単位元をもつ可換環とし、A の quadratic extension の A-algebra としての同型類の集合を $Q(A)$、その中で A 上分離的な同型類の集合を $Q_s(A)$ とするとき、$Q_s(A)$ は積:$B*B' = (B\otimes_A B')^{\tau\times\tau'}$ 但し B (B') はガロア群 $G=\{I,\tau\}$ ($G'=\{I,\tau'\}$) をもつ A の分離的 quadratic extension, によって、アーベル群を作る事が知られている。([1], [9], [10] 参照)。

ここでは $Q(A)$ に或る乗法が入れられて、単位元をもつ可換半群をなし、$Q_s(A)$ がその中の可逆的な元からなるアーベル群であることを示す。アーベル群 $Q_s(A)$ の構造については、Micali, Villamayor [9], C. Small [11] がある。以下証明は略しますが、[7] を参照されたい。$Pic(A)$ によって、可逆的(有限生成射影的且つ階数1をもつ) A-加群とその同型写像からなるカテゴリーを表すとき、A の任意の quadratic extension B に対し、$B/A\approx U$, $B=A\oplus U$ なる $Pic(A)$ の中の U 及び、$x^2 = g(x)+g'(x)$, $x\in U$, $g(x)\in A$, $g'(x)\in U$ で定まる写像 $g: U\to A$, $g': U\to U$ が存在する。g, g' は quadratic form をなすことは容易に知られる。

補題1. quadratic form $g': U\to U$, U in $Pic(A)$, に対し、$g'(x) = f(x)x$, $x\in U$ をみたす A-準同型写像 $f: U\to A$ が存在し、唯一つ存在する。

一つの quadratic extension B が与えられると、$Pic(A)$ の中の U, linear map $f: U\to A$, quadratic form $g: U\to A$ が定まり、逆に、$Pic(A)$ の U, linear map $f: U\to A$, quadratic form $g: U\to A$ が与えられるとき、A の quadratic extension B が、$B=A\oplus U$, $x^2 = g(x)+f(x)x$, $x\in U$ によって一意的に定まる。事実、B は $T(U)/(x\otimes x - g(x) - f(x)x;\ x\in U)$, $T(U)$ は U で作られたテンソル algebra, によって与えられる。

このとき，B を (U, f, q) で表し，A-algebra としての同型類を $[B]=[U,f,q]$ で表すことにする。

定理 1．A の quadratic extension (U, f, q)，(U', f', q') について，
$[U, f, q] = [U', f', q']$ であるための必要且充分条件は，
次の等式をみたす A-同型写像 $\sigma : U \to U'$，linear map $g : U \to A$ が存在することである。

$$q' \circ \sigma = q + fg - g^2 \qquad (即ち,\ q'(\sigma(x)) = q(x) + f(x)g(x) - g(x)^2,\ x \in U)$$
$$f \circ \sigma = f - 2g \qquad (即ち\ f'(\sigma(x)) = f(x) - 2g(x) \quad x \in U)。$$

一般に quadratic form $q : U \to A$，$q' : U' \to A'$ のテンソル積は，$q \otimes q' : U \otimes_A U' \to A$；$q \otimes q'(\sum_i x_i \otimes x_i') = 2\sum_i q(x_i) q'(x_i') + \sum_{i<j} B_q(x_i, x_j) \cdot B_{q'}(x_i', x_j')$，$\sum x_i \otimes x_i' \in U \otimes_A U'$ によって定義されるが，linear map $f : U \to A$ に対し $f^2 : U \to A$ も一つの quadratic form であり，テンソル積 $f^2 \bar{\otimes} q' : U \otimes U' \to A$ を $f^2 \bar{\otimes} q'(\sum x_i \otimes x_i') = \sum_i q(x_i) q'(x_i') + \sum_{i<j} f(x_i) f(x_j) B_{q'}(x_i', x_j')$，$\sum x_i \otimes x_i' \in U \otimes_A U'$，によって定義する。即ち $f^2 \otimes q = 2 f \bar{\otimes} q$ である。

補題 2．(U, f, q)，(U', f', q') を A の quadratic extension とする。
$(U \otimes_A U',\ f \otimes f',\ f^2 \bar{\otimes} q' + q \bar{\otimes} f'^2 + 2 q \otimes q')$ も A の quadratic extension で A-algebra としての同型性で保存される。

定理 2．$Q(A)$ は，積
$$[U,f,q] \cdot [U',f',q'] = [U \otimes_A U',\ f \otimes f',\ f^2 \bar{\otimes} q' + q \bar{\otimes} f'^2 + 2 q \otimes q']$$
によって，単位元 $[A, I, 0]$ をもつ可換半群を作る。

A の quadratic extension (U, f, q) に対し，bilinear module $(U, D_{f,q})$，$D_{f,q} : U \times U \to A$，$D_{f,q}(x,y) = f(x)f(y) + 2B_q(x,y)$，を考える。これを (U, f, q) の discriminant とよぶ。

定理 3．A の quadratic extension (U, f, q) について次の条件は同値である。

1) (U, f, q) は分離的 A-~~algebra~~ algebra.
2) $(U, D_{f,q})$ は non-degenerate bilinear module.
3) $[U, f, q]^2 = [A, I, 0]$ （$Q(A)$ の元として）.

系．$Q_s(A)$ は $Q(A)$ の中で，exponent 2 のアーベル群を作る。

A の quadratic extension (U, f, q) は，$\tau_f(x) = f(x) - x$，$x \in U$ で定義された A-algebra 自己同型写像をもち，$\tau_f^2 = I$，をみたす。

定理 4．$B = (U, f, q)$，$B' = (U', f', q')$ を A の quadratic extension とする。
任意の A-algebra 同型写像 $\sigma : B \to B'$ に対して，

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\sigma} & B' \\ \downarrow \tau_f & \circlearrowleft & \downarrow \tau_{f'} \\ B & \xrightarrow{\sigma'} & B' \end{array}$$

を可換にする。

系．1) A の quadratic extension B が $B = (U, f, q) = (U', f', q')$ ならば $\tau_f = \tau_{f'}$ である。
2) A の quadratic extension $B = (U, f, q)$ が分離的ならば，τ_f は I と異なる唯一つの A-algebra 自己同型写像で，$B \supset A$ はガロア群 $G = \{I, \tau_f\}$ をもつガロア拡大である。

定理 5．$B = (U, f, q)$，$B' = (U', f', q')$ を A の分離的 quadratic extension とする。
$(B \otimes B')^{\tau_f \times \tau_{f'}}$ と $(U \otimes_A U',\ f \otimes f',\ f^2 \bar{\otimes} q' + q \bar{\otimes} f'^2 + 2 q \otimes q')$ は A-algebra 同型である。即ち，$Q_s(A)$ の元として
$[(B \otimes B')^{\tau_f \times \tau_{f'}}] = [B] \cdot [B']$ である。

尚，$Q_s(A)$ と Brauer 群との関係については，Micali, Villagmayor [9] 及び Small [11] がある

3. 単位元をもつ可換環A上の quadratic module, Witt ring を次の様に拡張してみる。 P を有限生成射影的 A-加群, $f : P \to A$ を A-linear map, $q : P \longrightarrow A$ を quadratic form とする。$\langle P, f, q \rangle$ を extended quadratic module とよぶ。 $\langle P, f, q \rangle$, $\langle P', f', q' \rangle$ に対して、 $q' \circ \sigma = q + 2fg - 2g^2$, $f' \circ \sigma = f - 2g$ をみたす A-同型写像 $\sigma : P \to P'$, A-linear map $g : P \longrightarrow A$ が存在するとき、$(\sigma, g) : \langle P, f, q \rangle \longrightarrow \langle P', f', q' \rangle$ と表し、これを同型写像とよぶ。簡単に $\langle P, f, q \rangle \approx \langle P', f', q' \rangle$ で表す。

bilinear module $(P, B_{f,q})$; $B_{f,q}(x, y) = f(x)f(y) + B_q(x, y)$, $x, y \in P$, を $\langle P, f, q \rangle$ に付属する bilinear module とよぶ。$(P, B_{f,q})$ が non-degenerate のときに $\langle P, f, q \rangle$ は non-degenerate とよぶ。non-degenerate extended quadratic module を object として、同型写像を morphism にもつカテゴリー $Qua^*(A)$ が作られる。実際 $(I, 0) : \langle P, f, q \rangle \longrightarrow \langle P, f, q \rangle$ は identity morphism, $(\sigma, g) : \langle P, f, q \rangle \longrightarrow \langle P', f', q' \rangle$, $(\sigma', g') : \langle P', f', q' \rangle \longrightarrow \langle P'', f'', q'' \rangle$ に対し $(\sigma' \circ \sigma, g + g' \circ \sigma) : \langle P, f, q \rangle \longrightarrow \langle P'', f'', q'' \rangle$ である。即ち $(\sigma', g') \circ (\sigma, g) = (\sigma' \circ \sigma, g + g' \circ \sigma)$ 又 $(\sigma^{-1}, -g \circ \sigma^{-1}) = (\sigma, g)^{-1}$。

定理 6. (σ, g) ; $\langle P, f, q \rangle \longrightarrow \langle P', f', q' \rangle$ ならば、σ は bilinear module の同型写像 $\sigma : (P, B_{f,q}) \longrightarrow (P', B_{f',q'})$, $B_{f,q}(x, y) = B_{f',q'}(\sigma(x), \sigma(y))$, $x, y \in P$, をひきおこす。

カテゴリー $Qua^*(A)$ の中に演算 $\perp$, $\otimes$ を次の様に定義することが出来る。

$$\langle P_1, f_1, q_1 \rangle \perp \langle P_2, f_2, q_2 \rangle = \langle P_1 \oplus P_2,\ f_1 \perp f_2,\ q_1 \perp q_2 - f_1 \times f_2 \rangle$$

$$\langle P_1, f_1, q_1 \rangle \otimes \langle P_2, f_2, q_2 \rangle = \langle P_1 \otimes_A P_2,\ f_1 \otimes f_2,\ f_1^2 \bar{\otimes} q_2 + q_1 \bar{\otimes} f_2^2 + q_1 \otimes q_2 \rangle$$

但し、$f_1 \perp f_2 : P_1 \oplus P_2 \longrightarrow A$; $f_1 \perp f_2(x_1 + x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$,
$f_1 \times f_2 : P_1 \oplus P_2 \longrightarrow A$; $f_1 \times f_2(x_1 + x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$,
$f_1 \otimes f_2 : P_1 \otimes P_2 \longrightarrow A$; $f_1 \otimes f_2(x_1 \otimes x_2) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2)$.

補題 2. $\langle P_1, f_1, q_1 \rangle \perp \langle P_2, f_2, q_2 \rangle$ に付属する bilinear module は各の bilinear module の直交和に一致する。即ち $B_{f_1 \perp f_2,\, q_1 \perp q_2 - f_1 \times f_2} = B_{f_1, q_1} \perp B_{f_2, q_2}$.
$\langle P_1, f_1, q_1 \rangle \otimes \langle P_2, f_2, q_2 \rangle$ に付属する bilinear module は、各の bilinear module のテンソル積に一致する。即ち $B_{f_1 \otimes f_2,\, f_1^2 \bar{\otimes} q_2 + q_1 \bar{\otimes} f_2^2 + q_1 \otimes q_2} = B_{f_1, q_1} \otimes B_{f_2, q_2}$。

定理 7. $Qua^*(A)$ の中に演算 $\perp$, $\otimes$ が定義され、この演算は $Qua^*(A)$ に於ける morphism で保存される。 又 $\perp$, $\otimes$ に関して、同型の意味で、結合則、分配則が成立する。

$Qua(A)$ を non-degenerate quadratic module (P, q), P は有限生成射影的 A-加群, 及び isometry σ からなるカテゴリーとする。$Qua(A)$ も演算 $\perp$, $\otimes$ をもつカテゴリーであるが、functor Φ ; $Qua(A) \longrightarrow Qua^*(A)$, $\Phi((P, q)) = \langle P, 0, q \rangle$, $\Phi(\sigma) = (\sigma, 0)$ について、

定理 8. functor $\Phi : Qua(A) \longrightarrow Qua^*(A)$ は演算 $\perp$, $\otimes$ を保存する。可換環 A がとくに 2 の逆元をもつとき、Φ は $Qua(A)$ と $Qua^*(A)$ の equivarent functor となり Φ の逆 functor $\Psi : Qua^*(A) \longrightarrow Qua(A)$ は $\Psi(\langle P, f, q \rangle) = (P, q + \frac{1}{2}f^2)$, $\Psi((\sigma, g)) = \sigma$ で与えられる。

演算 $\perp$ をもつカテゴリー $Qua^*(A)$ (及び $Qua(A)$) の Grothendieck group $K_0(Qua^*(A))$ (及び $K_0(Qua(A))$) は $\otimes$ で導入された積で可換環をなす。

定理 9. $K_0(Qua^*(A))$ は単位元 $[\langle A, I, 0 \rangle]$ をもつ可換環で、functor Φ は環準同型写像 $K_0(\Phi)$; $K_0(Qua(A)) \longrightarrow K_0(Qua^*(A))$ をひきおこし、$\mathrm{Im}\, K_0(\Phi)$ は $K_0(Qua^*(A))$ のイデアルをなす。
とくに A が 2 の逆元をもつとき、$K_0(\Phi)$ は同型写像となる。

$\langle P, f, q \rangle$ が、その bilinear module $(P, B_{f,q})$ について、P の直和因子である様な A-部分加群 N で $N^{\perp} = \{x \in P ; B_{f,q}(x, N) = 0\} = N$, $f(N) = q(N) = 0$ を満すものが存在するとき、$\langle P, f, q \rangle$ を

hyperbolic とよぶ。容易に、functor Φ は、$Qua(A)$ の hyperbolic を $Qua^*(A)$ の hyperbolic にうつすことが知られる。

定理 10. $Qua^*(A)$ の中の $\langle P, f, g \rangle$ について、

$\langle P, f, g \rangle \perp \langle P, -f, -g-f^2 \rangle$ は $Qua^*(P)$ に於ける hyperbolic である。

補題 3. $Qua^*(A)$ の中の hyperbolic の全体 $HQua^*(A)$ は、演算 $\perp$ で閉じ、

$\langle P, f, g \rangle$ in $Qua^*(A)$, $\langle P', f', g' \rangle$ in $HQua^*(A)$ に対し、

$\langle P, f, g \rangle \otimes \langle P', f', g' \rangle$ は $HQua^*(A)$ の object である。

$\mathrm{Coker}(K_0(HQua(A)) \longrightarrow K_0(Qua(A))) = W(A)$ が A の Witt ring である如く、$\mathrm{Coker}(K_0(HQua^*(A)) \longrightarrow K_0(Qua^*(A))) = W^*(A)$ を extended Witt ring と定義する。次の可換図式が得られる。

$$\begin{array}{ccccccc} K_0(HQua(A)) & \longrightarrow & K_0(Qua(A)) & \longrightarrow & W(A) & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow{\scriptstyle K_0(\Phi)} & & \downarrow{\scriptstyle K_0(\Phi)} & & \downarrow{\scriptstyle \omega} & & \\ K_0(HQua^*(A)) & \longrightarrow & K_0(Qua^*(A)) & \longrightarrow & W^*(A) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

定理 10. $W^*(A)$ は単位元をもつ可換環で $\omega : W(A) \longrightarrow W^*(A)$ は環準同型写像で $\mathrm{Im}\,\omega$ は $W^*(A)$ のイデアルをなす。
とくに A が 2 の逆元を持つとき $\omega : W(A) \longrightarrow W^*(A)$ は同型写像となる。

$W^*(A)$ の unit group $U(W^*(A))$ と $Q_s(A)$ の間に、

定理 11. group $Q_s(A)$ と group $U(W^*(A))$ の間に準同型写像

$\theta_Q ; Q_s(A) \longrightarrow U(W^*(A))$; $[U, f, g] \longmapsto [\langle U, f, 2g \rangle]$

をもつ。とくに A が標数 2 でない体のとき θ は同型写像、A が標数 2 の体ならば θ は零写像となる。

[1] H. Bass : Lecture on topics in algebraic K-theory, Tata Institute of Fundamental Reserch, Bombay, 1967.

[2] P. M. Cohn : Quadratic extension of skew fields, Proc. London Math. Soc. 11 (1961) 531 − 556.

[3] J. Dieudonné : Les extensions quadratiques des corps non commutatifs et leurs applications, Acta Math. 87 (1952) 175 − 242.

[4] T. Kanzaki : On commutor ring and Galois theory of separable algebras, Osaka J. Math. 1 (1964) 103 − 115.

[5] 〃 〃 : Generalized crossed product and Brauer group, Osaka J. Math. 5 (1968) 175 − 188

[6] 〃 〃 : On bilinear module and Witt ring over a commutative ring, Osaka J. Math. 8 (1971) 485 − 496.

[7] 〃 〃 : On the quadratic extension and the extended Witt ring of a commutative ring. (近刊予定)

[8] K. Kitamura : On free quadratic extensions of a commutative ring (近刊予定)

[9] P. A. Micali and O. E. Villamayor : Algebra de Clifford et groupe de Brauer, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. t.4 (1971) 285 − 310.

[10] P. P. Revoy : Sur les deux premiers invariants d'une forme quadratique, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. t.4 (1971) 311 − 319.

[11] C. Small : The group of quadratic extensions.

Tangent coalgebras and hyperalgebras

竹内光弘（都立大）

k を体とする．X を k-scheme, x をその1点とする．X の x における local ring O_x の Sweedler のいみでの dual coalgebra $(O_x)^\circ$ を，X の x における <u>tangent coalgebra</u> とよび $T_x(X)$ であらわそう．G を k-group とする（k-group とは k-group-scheme の略称）．G の単位元 e における tangent coalgebra $T_e(G) = (O_e)^\circ$ を考えよう．これは次のようにして Hopf algebra の構造を自然にもつ．G × G の (e,e) における local ring $O_{(e,e)}$ は $O_e \otimes O_e$ の一つの maximal ideal $M = m_e \otimes O_e + O_e \otimes m_e$ における localization である．しかるに M は $O_e \otimes O_e$ の <u>cofinite</u> な maximal ideal としては unique なものである．このことから

$$(O_{(e,e)})^\circ = (O_e \otimes O_e)^\circ = (O_e)^\circ \otimes (O_e)^\circ$$

が結論され，G の構造写像

$$p: G \times G \longrightarrow G \qquad (\text{乗法})$$

$$e: 1 \longrightarrow G \qquad (\text{単位元})$$

$$i: G \longrightarrow G \qquad (\text{逆元})$$

がそれぞれ coalgebra map

$$\mu: T_e(G) \otimes T_e(G) \longrightarrow T_e(G)$$

$$\eta: k \longrightarrow T_e(G)$$

$$S: T_e(G) \longrightarrow T_e(G)$$

を引起し，$(T_e(G), \mu, \eta, S)$ は Hopf algebra の公理を満足することがわかる．これを G の <u>hyperalgebra</u> とよび hy(G) であらわす．いわゆる G のリー環 Lie(G) は hy(G) の primitive elements P(hy(G)) に他ならない．これからして代数群のリー環論の自然な analogy として代数群の hyperalgebra theory を建設することが当然問題となる．それを実行したいのであるが，その場合上のような <u>幾何学的な</u> 定義では不都合なことが多いのである．たとえば H を G の sub-group としてその normalizer $N_G(H)$ の hyperalgebra をもとめようとしてみる．果して上の定義だけから計算できるだろうか．至難の業と思われる．本報告の目的は tangent coalgebras と hyperalgebra の <u>categorical</u> な定義を与え，その応用を二三示すことである．とくに $hy(N_G(H))$ がその考えで容易に計算できることを示す．

（文献）

M. Demazure et P. Gabriel: Groupes algebriques, tome I, North-Holland, Amsterdam, 1970

M. Sweedler: Hopf algebras, Benjamin, New York, 1969

M. Takeuchi: Tangent coalgebras and hyperalgebras I, to appear

§1. 準備

k を体，$\underline{M}_k$, $\underline{W}_k$ をそれぞれ commutative k-algebra, cocommutative k-coalgebra の category とする．category $\underline{W}$ を次のように定める：$\underline{W}$ の objects は (R,C) ($R \in \underline{M}_k$, $C \in \underline{W}_k$) の全体；(R,C) から (S,D) への $\underline{W}$-map は次の条件をみたす pair (ϕ, σ) の全体

(i) $\phi \in \underline{M}_k(S,R)$

(ii) $\sigma: R \otimes C \longrightarrow R \otimes D$ は R-coalgebra map such that

$$\sigma(R \otimes C_0) \subset R \otimes D_0$$

（ここで C_0, D_0 は C, D の coradical）．2つの $\underline{W}$-map

$$(R,C) \xrightarrow{(\phi,\sigma)} (S,D) \xrightarrow{(\psi,\tau)} (T,E)$$

の合成を $(\phi \circ \psi, (R \otimes_S \tau) \circ \sigma)$ とおけば W は category になる．

$\underline{E}$, $\underline{Gr}$ をそれぞれ set, group の category とする．$\underline{A}$ を category とする．$\underline{A}$ から $\underline{E}$(resp. $\underline{Gr}$) への contravariant functor を $\underline{A}$ 上の set-(resp. group-)functor という．たとえば G が $\underline{A}$ の object (resp. group object) ならば G の represent する functor $\underline{A}(-,G)$ は自然に A 上の set-(resp. group-)functor となる．

$\underline{W}_k$ は finite product をもつことが知られている．即ち C, D を $\underline{W}_k$ の object とすると

$$C \xleftarrow{1 \otimes \varepsilon} C \otimes D \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} D$$

が直積図形となり（ここで ε は構造写像），k が $\underline{W}_k$ の final object である．このこと

から，$\underline{W}_k$ の group object は cocommutative Hopf algebra に他ならないことがわかる．$\underline{W}_k^f$ を有限次元 cocommutative coalgebra からなる $\underline{W}_k$ の full subcategory とする．H を $\underline{W}_k$ の object (resp. group object) とせよ．H の represent する $\underline{W}_k$ 上の set-(resp. group-)functor を $\underline{W}_k^f$ に制限したものを θ_H であらわそう．H' をもう一つの $\underline{W}_k$ の object (resp. group object) とする．$\alpha:\theta_H \longrightarrow \theta_{H'}$ を natural transformation とせよ．このとき，任意の coalgebra がその有限次元 subcoalgebra の union であることから，ただ一つの coalgebra map (resp. Hopf algebra map) $\sigma: H \longrightarrow H'$ が存在して

$$\alpha(C) = \underline{W}_k(C,\sigma) \qquad \text{for } \forall C \in \underline{W}_k^f$$

となることが分る．いいかえれば functor:

$$H \longmapsto \theta_H$$

は fully faithfull である．

さて functor

$$\iota: \underline{W}_k \longrightarrow \underline{W},\ C \longmapsto (k,C)$$

を考える．これは fully faithful であるが finite product をたもたない．$\underline{W}_k$ の full subcategory $\underline{W}_k^{cn}$ を

$$C \in \underline{W}_k^{cn} \Longleftrightarrow C_0 \text{ が1次元}$$

で定義するとιの制限

$$\iota: \underline{W}_k^{cn} \longrightarrow \underline{W}$$

は finite product をたもつことがわかる．従って group object をたもつ．$\underline{W}_k^{cn}$ の group object を hyperalgebra とよぶことにしよう．これは irreducible cocommutative Hopf algebra といってもよい．$\underline{W}$ の full subcategory $\underline{W}^f$ を

$$(R,C) \in \underline{W}^f \Longleftrightarrow C: \text{有限次元}$$

で定める．H を $\underline{W}_k$ の object (resp. $\underline{W}_k^{cn}$ の group object) とせよ．このとき $\iota(H)$ は $\underline{W}$ の object (resp. group object) であるから，その represent する $\underline{W}$ 上の set-(resp. group-)functor の $\underline{W}^f$ への制限を θ_H^{st} とかくことにする．このとき前と同様の論法により，functor

$$H \longmapsto \theta_H^{st}$$

は fully faithful であることがわかる．

対応

$$\underline{W}^f \longrightarrow \underline{M}_k,\ (R,C) \longmapsto R\otimes C^*$$

を考えよう．これは $\underline{W}^f$-map $(\phi,\sigma): (R,C) \longrightarrow (S,D)$ に対し，合成

$$S\otimes D^* \xrightarrow{\phi\otimes 1} R\otimes D^* \xrightarrow{\underline{Mod}_R(\sigma,R)} R\otimes C^*$$

を対応させることにより contravariant functor になる．

§2. Basic concepts

$\underline{M}_k$ から $\underline{E}$ (resp. $\underline{Gr}$) への covariant functor を k-functor (resp. k-group-functor) という．Ⓧ (resp. Ⓖ) を k-functor (resp. k-group-functor) とせよ．$\underline{W}_k$ 上の set-functor: $C \longmapsto \textcircled{X}(C^*)$ (resp. group-functor: $C \longmapsto \textcircled{G}(C^*)$) が $\underline{W}_k$ のある object (resp. group object) H に対し，θ_H と同形のとき，(そのような H は存在すれば同形を除き unique ゆえ) H を Ⓧ (resp. Ⓖ) の <u>underlying coalgebra</u> (resp. <u>underlying Hopf algebra</u>) とよび，T(Ⓧ) (resp. T(Ⓖ)) であらわす．

$\underline{Fld}_k$ を k の体拡大全体よりなる $\underline{M}_k$ の full subcategory とする．k-functor Ⓧ の underlying set は

$$|\textcircled{X}| = \varinjlim (\textcircled{X}|\underline{Fld}_k)$$

で定義される．Ⓧの点とは |Ⓧ| の元のことである．$K \in \underline{Fld}_k$ のとき Ⓧ(K) の元 a の定める Ⓧ の点を [a] とかく．Ⓧ の点 x に対し Ⓧ の sub-functor $\textcircled{X}_x$ を

$$\textcircled{X}_x(R) = \{f \in \textcircled{X}(R) \mid [\textcircled{X}(\phi)(f)] = x \text{ for } \forall K \in \underline{Fld}_k \text{ and } \forall \phi \in \underline{M}_k(R,K)\}$$

で定める．$\textcircled{X}_x$ の underlying coalgebra を Ⓧ の x における <u>tangent coalgebra</u> とよび $T_x(\textcircled{X})$ であらわす．

とくに今Ⓧを k-functor, e を Ⓧ(k) の元として，$T_e(\textcircled{X})$ が存在するとする．$R \in \underline{M}_k$ に対し，Ⓧ(R) を e_R を original point としてもつ pointed set とみなす．そして $\underline{M}_k$-map $\phi: R \longrightarrow S$ に対し

$$\mathrm{Ker}(X(\phi)) = \{f \in X(R) \mid X(\phi)(f) = e_S\}$$

とおく．そのとき $H = T_e(X)$ は，θ_H が，$\underset{\sim}{W}_k^f$ 上の set-functor:

$$C \longmapsto \mathrm{Ker}(X(C^*) \longrightarrow X(C_0^*))$$

(右辺は自然な projection: $C^* \longrightarrow C_0^*$ に関してとる）と同形となるような $\underset{\sim}{W}_k$ の object として特徴づけられる．もっと一般に $\underset{\sim}{W}^f$ 上の set-functor:

$$(R,C) \longmapsto \mathrm{Ker}(X(R \otimes C^*) \longrightarrow X(R \otimes C_0^*))$$

を考えよう（これが set-functor となることは

$$(R,C) \longmapsto R \otimes C^*, \ (R,C) \longmapsto R \otimes C_0^*$$

が $\underset{\sim}{W}^f \longrightarrow \underset{\sim}{M}_k$ の contravariant functor であることより従う）．これが θ_H^{st} (for some $H \in \underset{\sim}{W}_k$) と同形のとき，H を X の e における tangent coalgebra in <u>the strong sense</u> とよび，$T_e^{st}(X)$ であらわす（そのような H は存在すれば unique up to isomorphism である）．

次に G を k-group-functor, $\epsilon \in G(k)$ を単位元とする．そのとき，$\underset{\sim}{W}_k^f$ (resp. $\underset{\sim}{W}^f$) 上の set-functor:

$$C \longmapsto \mathrm{Ker}(G(C^*) \longrightarrow G(C_0^*))$$

(resp.

$$(R,C) \longmapsto \mathrm{Ker}(G(R \otimes C^*) \longrightarrow G(R \otimes C_0^*)))$$

は group-functor である．これが θ_H (resp. θ_H^{st}) (for some hyperalgebra H) と同形のとき H を G の <u>hyperalgebra</u> (resp. hyperalgebra <u>in the strong sense</u>) とよび hy(G) (resp. $hy^{st}(G)$) であらわす．これらは，もし存在すれば，coalgebra としては $T_e(G)$ (resp. $T_e^{st}(G)$) と無論一致する．逆に $T_e(G)$ (resp. $T_e^{st}(G)$) が存在すれば，それに自然に Hopf algebra structure が入り (irreducible であることもわかり）hy(G) (resp. $hy^{st}(G)$) となることが分る．

以下 tangent coalgebra と underlying coalgebra について簡単な事実をまとめておこう．

Proposition. X を k-functor とする．

(i) T(X) が存在すれば，$T_x(X)$ がすべて存在して

$$T(X) = \bigoplus_{x \in |X|} T_x(X).$$

(ii) $T_x(X)$ がすべて存在して，X が finite product をたもてば T(X) は存在する．

(iii) X が k-scheme ならば $T_x(X) = (O_x)^\circ$ であり，$T(X) = \bigoplus_x (O_x)^\circ$ である．

(iv) $X = \mathrm{Sp}\, A$ $(= \underset{\sim}{M}_k(A,-))$ ならば $T(X) = A^\circ$.

(v) X を locally algebraic k-scheme, $e \in X(k)$ とすると，$T_e^{st}(X)$ が存在して，$(O_e)^\circ$ に等しい．

G を k-group-functor, X を k-functor, $u: G \times X \longrightarrow X$ を作用とする．X の sub-functor X^G を

$$X^G(R) = \{f \in X(R) \mid u(g, X(\phi)(f)) = X(\phi)(f) \text{ for } \forall\phi \in \underset{\sim}{M}_k(R,S), \forall g \in G(S)\}$$

で定義する．$e \in X^G(k)$ として $T_e^{st}(X)$ が存在したとする．自然な同形

$$\underset{\sim}{W}((R,C),(k,T_e^{st}(X))) \simeq \mathrm{Ker}(X(R \otimes C^*) \longrightarrow X(R \otimes C_0^*))$$

を

$$(\eta,\sigma) \longmapsto \exp(\sigma,R,C)$$

であらわそう（ここで $\eta: k \longrightarrow R$ は unique algebra map）．すると $\forall R \in \underset{\sim}{M}_k$, $g \in G(R)$ に対し，ただ一つの W-automorphism

$$(1,\alpha(g)): (R,T_e^{st}(X)) \xrightarrow{\simeq} (R,T_e^{st}(X))$$

が存在して，

$$u(g_{R \otimes C^*}, \exp(\sigma,R,C)) = \exp(\alpha(g)\circ\sigma,R,C)$$

を $\forall C \in \underset{\sim}{W}_k^f$, $\forall(\eta,\sigma) \in \underset{\sim}{W}((R,C),(k,T_e^{st}(X)))$ に対しみたすことがわかる．とくに $\alpha(g)$ は $R \otimes T_e^{st}(X)$ の R-linear automorphism であるゆえ，

$$g \longmapsto \alpha(g)$$

は G の $T_e^{st}(X)$ 上での linear representation を定める．そのとき $(T_e^{st}(X))^G$（これ自身は sub-coalgebra でない）にふくまれる $T_e^{st}(X)$ の最大の subcoalgebra は $T_e^{st}(X^G)$ としての公理をみたすことがわかる．これは tangent coalgebra in the strong sense を考える一つの理由でもある．

とくに k-group-functor G の sub-group H に対し、centralizer $C_G(H)$ の hyperalgebra は、inner automorphism による作用: $H \times G \longrightarrow G$ を考えることにより（もし $hy^{st}(G)$ が存在すれば）上の考え方で求まることになる。

§3. 例

V を vector space とする。W_k 上の group-functor:

$$C \longmapsto Mod_k(C,V)$$

は representable である (Sweedler). represent する cocommutative Hopf algebr を $C_a(V)$ であらわし、$C_a(V)$ の underlying coalgebra を $C(V)$ (= cofree cocommutative coalgebra on V) とかく。$C_a(V)$ の 1 をふくむ irreducible compone を $B_a(V)$ とかき、$B_a(V)$ の underlying coalgebra を $B(V)$ とする。$B_a(V)$ は W_k 上の group-functor: $C \longmapsto Mod_k(C/C_0,V)$ を represent するので、とくに Sweedler の定義した Birkhoff-Witt bialgebra と一致する。2 つの k-group-functor V_a, $D_a(V)$ を

$$V_a: R \longmapsto R \otimes V, \quad D_a(V): R \longmapsto Mod_k(V,R)$$

で定義すると

$$T(V_a) = C_a(V), \ T(D_a(V)) = C_a(V^*), \ hy^{st}(V_a) = B_a(V),$$
$$hy(D_a(V)) = B_a(V^*)$$

となる。

algebra A, coalgebra C に対し $Mod_k(C,A)$ は積

$$f*g = \mu\circ(f \otimes g)\circ\Delta$$

で algebra になる。$U(Mod_k(C,A))$ をその unit group とする。A を fix して W_k 上の group-functor: $C \longmapsto U(Mod_k(C,A))$ を考える。実はこれも representable なので、それを represent する cocommutative Hopf algebra を $C_m(A)$ であらわし その 1 の irreducible component を $B_m(A)$ とおく。$B_m(A)$ の underlying coalgebr は $B(A)$ と同形であり $B_m(A)$ は W_k 上の group-functor:

$$C \longmapsto \{f \in Mod_k(C,A) \mid f = \eta\circ\varepsilon \text{ on } C_0\}$$

represent する。k-group-functor μ^A を

$$\mu^A: R \longmapsto U(R \otimes A)$$

で定義すると、

$$T(\mu^A) = C_m(A), \ hy^{st}(\mu^A) = B_m(A)$$

である。今自然な同形

$$W_k(C,B_m(A)) = \{f \in Mod_k(C,A) \mid f = \eta\circ\varepsilon \text{ on } C_0\}$$

において $B_m(A)$ の identity に対応する $Mod_k(B_m(A),A)$ の元を π_A とする。すると π_A は algebra map であることがわかる。

再び V を vector space として、k-group-functor $GL(V)$ を

$$GL(V): R \longmapsto GL_R(R \otimes V)$$

で定義する。すると

$$T(GL(V)) = C_m(End_k(V)), \ hy(GL(V)) = B_m(End_k(V))$$

であることがわかる。さて k-group-functor G の V 上での linear representation は k-group-functor map $\rho: G \longrightarrow GL(V)$ に他ならない。今 $hy(G)$ が存在したとせよ。そのとき ρ は自然に hyperalgebra map

$$hy(\rho): hy(G) \longrightarrow hy(GL(V)) = B_m(End_k(V))$$

を引起す。しかるに

$$\pi: B_m(End_k(V)) \longrightarrow End_k(V)$$

なる canonic な algebra map があるから、合成

$$\pi\circ hy(\rho): hy(G) \longrightarrow End_k(V)$$

により、V は自然に左 $hy(G)$-module となる。

§4. $hy(N_G(H))$ と $hy(C_G(H))$ の計算

G を k-group-functor, H をその sub-group-functor とする。H の G における normalizer $N_G(H)$, centralizer $C_G(H)$ は次のように定義される G の sub-group-functor である。

$$N_G(H)(R) = \{g \in G(R) \mid g_S\cdot H(S)\cdot g_S^{-1} = H(S) \text{ for } \forall\phi \in M_k(R,S)\}$$

$\hat{C}_{\hat{G}}(\hat{H})(R) = \{g \in \hat{G}(R) \mid g_S \cdot x \cdot g_S^{-1} = x \text{ for } {}^{\forall}\phi \in \underline{M}_k(R,S),\ {}^{\forall}x \in \hat{H}(S)\}$.
但し $g_S = \hat{G}(\phi)(g)$ とおいた．この§での我々の目的は hy($N_{\hat{G}}(\hat{H})$) と hy($C_{\hat{G}}(\hat{H})$) とを求めることである．

$\hat{G}$ は hyperalgebra in the strong sense をもつとしよう．そのとき inner automorphism による作用

$$\hat{G} \times \hat{G} \longrightarrow \hat{G},\quad (g,x) \longmapsto gxg^{-1}$$

は，§2 で述べたように，$\hat{G}$ の $hy^{st}(\hat{G})$ 上への linear representation を自然に定める．これを

$$Ad: \hat{G} \longrightarrow \widehat{GL}(hy^{st}(\hat{G}))$$

とかき $\hat{G}$ の adjoint representation とよぶことにする．このとき計算により次の事実が成立つ．

Proposition. (i) 次の条件をみたす $hy^{st}(\hat{G})$ の subcoalgebra C の集合を X とする：

$$\sum \widehat{Ad}(h)(c_{(1)})S_{\hat{G}}(c_{(2)}) \in R \otimes k \text{ for } {}^{\forall}R \in \underline{M}_k,\ {}^{\forall}h \in \hat{H}(R),\ {}^{\forall}c \in C.$$

X は最大元をもち，それは $hy^{st}(\hat{G})$ の subhyperalgebra であり，$hy^{st}(C_{\hat{G}}(\hat{H}))$ としての公理をみたす．但し $S_{\hat{G}}$ は $hy^{st}(\hat{G})$ の antipode.

(ii) $hy^{st}(\hat{H})$ の存在を仮定する（このとき $hy^{st}(\hat{H})$ は自然に $hy^{st}(\hat{G})$ の hypersubalgebra とみなされる）．次の条件をみたす $hy^{st}(\hat{G})$ の subcoalgebra D の集合を Y とする：

$$\sum \widehat{Ad}(h)(d_{(1)})S_{\hat{G}}(d_{(2)}) \in R \otimes hy^{st}(\hat{H}) \text{ for } {}^{\forall}R \in \underline{M}_k,\ {}^{\forall}h \in \hat{H}(R),\ {}^{\forall}d \in D.$$

Y は最大元をもち，それは $hy^{st}(\hat{G})$ の subhyperalgebra で，$hy^{st}(N_{\hat{G}}(\hat{H}))$ としての公理をみたす．

I を hyperalgebra, ρ を $\hat{G}$ の I 上への linear representation とする．このとき (I,ρ) が k-$\hat{G}$-module hyperalgebra であるとは，ρ を通しての各 $\hat{G}(R)$ の $R \otimes I$ への作用が R-Hopf algebra automorphism としての作用であることをいう．たとえば上の状況で ($hy^{st}(G)$,Ad) は k-G-module hyperalgebra である．

(I,ρ) を k-$\hat{G}$-module hyperalgebra とする．$R \in M_k$, $a \in G(R)$, $x \in R \otimes I$ に対し

$$a \rightharpoonup x = \rho(a)(x),\quad [a,x] = \sum (a \rightharpoonup x)S_I(x_{(2)})$$

とおく．ここで S_I は I の antipode を示す．A を I の subalgebra, C を subcoalgebra として $A \cdot C \subset C$ とする．G の sub-functor $G_{A,C}$ を

$$G_{A,C}(R) = \{a \in G(R) \mid [a, R \otimes C] \subset R \otimes A\}$$

と定める．このとき $G_{A,C}$ は G の sub-monoid-functor であることがわかる．

上の Proposition のいみすることは次のことに他ならない．($hy^{st}(G)$,Ad) は k-G-module hyperalgebra ゆえ k-H-module hyperalgebra でもある．そのとき $H = H_{k,C}$ なる $hy^{st}(G)$ の subcoalgebra C の最大なものが $hy^{st}(C_G(H))$ であり，さらに $hy^{st}(H)$ の存在を仮定して $H = H_{hy^{st}(H),C}$ なる $hy^{st}(G)$ の subcoalgebra C（でかつ $hy^{st}(\hat{H}) \cdot C \subset C$ なるもの）の最大が $hy^{st}(N_G(H))$ である．

さて (I,ρ) を k-G-module hyperalgebra として，hy(G) の存在を仮定する．そのとき linear representation ρ は I 上に hy(G)-module の構造を induce することを §3 で我々はみた．しかるにこれは次のいみで hy(G)-module hyperalgebra になっていることがわかる．

I, J を2つの hyperalgebra とし，I は J-module であるとする．次の4条件をみたすとき，I は J-module hyperalgebra であるという．

(i) $a \cdot (xy) = \sum (a_{(1)} \cdot x)(a_{(2)} \cdot y)$

(ii) $a \cdot 1 = \varepsilon(a)1$

(iii) $\Delta(a \cdot x) = \sum a_{(1)} \cdot x_{(1)} \otimes a_{(2)} \cdot x_{(2)}$

(iv) $\varepsilon(a \cdot x) = \varepsilon(x)\varepsilon(a)$.

$a \in J$, x, $x \in I$. このとき

$$[a,x] = \sum (a \cdot x_{(1)})S_I(x_{(2)})$$

と記号を導入する．A を I の subalgebra, C を I の subcoalgebra とし $A \cdot C \subset C$ とする．J の subcoalgebra D で $[D,C] \subset A$ なるものの最大が存在し，それを [illegible] とおくと，J の subhyperalgebra であることがわかる．

Proposition. G を k-group-functor, $hy(G)$ の存在を仮定する. (I,ρ) を k-G-module hyperalgebra, A を I の subalgebra, C を I の subcoalgebra, $A\cdot C$
とする. このとき $hy(G_{A,C}) = hy(G)_{A,C}$ がなりたつ.

さて G を k-group-functor, $hy^{st}(G)$ の存在を仮定しよう. このとき

$$Ad: G \longrightarrow GL(hy^{st}(G))$$

は $hy^{st}(G)$ 上に $hy^{st}(G)$-module hyperalgebra の構造をひきおこすわけだが, その作用を '⇀' であらわすと

$$a \rightharpoonup x = \sum a_{(1)} x S_G(a_{(2)}) \qquad \text{for } a, x \in hy^{st}(G)$$

なる, いわゆる adjoint action であることがわかる. 従ってとくに

$$[a,x] = \sum a_{(1)} x_{(1)} S_G(a_{(2)}) S_G(x_{(2)})$$

である.

G を locally algebraic k-group とする. その 2 つの sub-group H, K に対

$$hy(H) \subset hy(K) \Leftrightarrow H^0 \subset K$$

(H^0 は H の 1 の連結成分) であることがわかる. そこで今 H を G の連結 subgroup としよう. そして $(hy^{st}(G), Ad)$ を k-H-module hyperalgebra とする. このとき, $hy^{st}(G)$ の subalgebra A, subcoalgebra C such that $A\cdot C \subset C$ に対し $H_{A,C}$ は H の closed subgroup であるので

$$H = H_{A,C} \Leftrightarrow hy(H) = hy(H_{A,C}) = hy(H)_{A,C}$$

である. こうして次の結果を得る.

Proposition. G を locally algebraic k-group. H をその連結 subgroup とする. $hy(G)$ の antipode を S_G とし, $a, b \in hy(G)$ に対し

$$[a,b] = \sum a_{(1)} b_{(1)} S_G(a_{(2)}) S_G(b_{(2)})$$

とおく.

(i) $hy(C_G(H))$ は $hy(G)$ の subcoalgebra C such that

$$[hy(H),C] \subset k$$

の最大である.

(ii) $hy(N_G(H))$ は $hy(G)$ の subcoalgebra D such that

$$[hy(H),D] \subset hy(H)$$

最大である.

ここで $S_G([a,b]) = [b,a]$ に注意すれば

$$hy(C_G(H)) = hy(G)_{k,hy(H)}, \quad hy(N_G(H)) = hy(G)_{hy(H),hy(H)}$$

両式の右辺は $hy(G)$ の adjoint action に関してとる) といい直すことも る. $hy(G)$ の subhyperalgebra J が normal (resp. central) とは

$$[hy(G),J] \subset k$$

sp.

$$[hy(G),J] \subset J)$$

ことをいう. 上の状況で G, H ともに連結とすれば,

$$G = C_G(H) \Leftrightarrow hy(G) = hy(C_G(H)) \qquad \text{etc.}$$

$$H \triangleleft G \Leftrightarrow hy(H) \subset hy(G) \quad \text{normal}$$

$$H \subset Z(G) \ (= \text{centre of } G) \Leftrightarrow hy(H) \subset hy(G) \quad \text{central}$$

が連結 algebraic k-group で "lisse" であるとする. このとき G の derived $D(G)$ が定義されるが, その hyperalgebra $hy(D(G))$ は $[hy(G),hy(G)]$ の $hy(G)$ の subalgebra であることを注意しておこう.

5. リー環

group-scheme G のリー環 $Lie(G)$ とはどのようなものであったか復習して これは (additive) group としては

$$Lie(G) = Ker(G(k(\varepsilon)) \longrightarrow G(k))$$

ここに $k(\varepsilon) = k + k\varepsilon$, $\varepsilon^2 = 0$ である. $\lambda \in k$ に対し

$$u_\lambda : k(\varepsilon) \longrightarrow k(\varepsilon), \ \varepsilon \longmapsto \lambda\varepsilon$$

とおくと，作用

$$k \times G(k(\varepsilon)) \longrightarrow G(k(\varepsilon)),\ (\lambda, x) \longmapsto G(u_\lambda)(x)$$

がLie(G) 上に k-vector space の構造を定義する．次にalgebra map

$$\iota,\ \iota_1,\ \iota_2 : k(\varepsilon) \longrightarrow k(\varepsilon) \otimes k(\varepsilon)$$

を

$$\iota(\varepsilon) = \varepsilon \otimes \varepsilon,\ \iota_1(\varepsilon) = \varepsilon \otimes 1,\ \iota_2(\varepsilon) = 1 \otimes \varepsilon$$

で定義すると $\exists_1\ \alpha$: Lie(G) × Lie(G) ⟶ Lie(G) such that

$$G(\iota)(\alpha(x,y)) = G(\iota_1)(x) \cdot G(\iota_2)(y) \cdot G(\iota_1)(x)^{-1} \cdot G(\iota_2)(y)^{-1}$$
$$\text{in } G(k(\varepsilon) \otimes k(\varepsilon)) \text{ for } \forall x,\ y \in \mathrm{Lie}(G)$$

であって，α を bracket product として Lie(G) はリー環になるのであった．

Proposition. G を k-group-functor とし hy(G) の存在を仮定する．そのとき

$$\mathrm{Lie}(G) = \mathrm{Ker}(G(k(\varepsilon)) \longrightarrow G(k))$$

は上の操作で k 上の Lie algebra となり，それは hy(G) の primitive element のなすリー環 P(hy(G)) と自然に同形である．

証明の概略を述べよう．B_1 を coalgebra on basis b_0, b_1 with

$$\Delta(b_0) = b_0 \otimes b_0,\ \varepsilon(b_0) = 1,$$
$$\Delta(b_1) = b_0 \otimes b_1 + b_1 \otimes b_0,\ \varepsilon(b_1) = 1$$

とすると，$B_1^* = k(\varepsilon)$ であるゆえ，

$$P(\mathrm{hy}(G)) \simeq W_k(B_1, \mathrm{hy}(G)) \simeq \mathrm{Ker}(G(B_1^*) \longrightarrow G(B_0^*)) = \mathrm{Lie}(G)$$

となる．一方 P(hy(G)) は bracket product

$$[x,y] = xy - yx$$

に関して hy(G) の Lie subalgebra である．だから P(hy(G)) 上の その Lie algebra structure を Lie(G) 上に，上の ≃ に沿って transport したものが，上に述べた操作で得られることをいえばよい．それは簡単な演習問題である．

有限アーベル群の Grothendieck 群について

阪市大 理　住岡　武

π を有限群，R を代数体 K の整数環とする．$\mathfrak{O}$ を $R\pi$ を含む $K\pi$ の大整環 とすると，$\mathfrak{O}$ 加群を作用の制限によって $R\pi$ 加群とみなすによって，準同型 $\psi : G(\mathfrak{O}) \longrightarrow G(R\pi)$ が得られる．ここに $G(\mathfrak{O})$ 等は 有限生成加群の Grothendieck 群を表わす．Swan[2] この ψ が全射であることを証明した．更に Heller, Reiner[1] て $\ker\psi$ の構造が求められたが，それは $\mathfrak{O}$ の中心のイデアル 及び π のモジュラー表現に依存する．その結果から直ちに が得られる．

R_i を $K\pi$ の単純成分 A_i ($i=1,\cdots,s$) の中心の極大整環とする．の位数を割る R_i の素イデアルがすべて $J(R_i)$ に含まれる ば，ψ は同型写像である．(記号 $J(R_i)$ については後述)．

では ある条件の下で この逆が成り立つことを示す．証明は には Swan[2] による．以下 π, K 及び R は上の通りとし，数は n とする．また加群はすべて有限生成左加群とする．

を K 上の中心的単純多元環 とし，$\mathfrak{O}$ を A の極大整環とする．を K の R イデアル の作る群とし，$J(R)$ をすべての xR ($x \in K$) る $I(R)$ の部分群とする．ただし x は A で分岐する K 限素点の各々で正なるものとする．
既約な $\mathfrak{O}$ 加群 としたとき，R の素イデアル $\mathfrak{p}$ で $\mathfrak{p}S = 0$ と のが一意的に定まる．したがって M をトーション $\mathfrak{O}$ 加群，S_i を M の組成剰余加群とし，それの 上の対応に デアルを $\mathfrak{p}_1, \cdots, \mathfrak{p}_k$ としたとき $\mathfrak{O}_r(M) = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_k$ と る．

次に L をトーションフリー $\mathcal{O}$ 加群で，$K\otimes L$ が既約な A 加群となるものとし，L を固定する．いま M をトーションフリー $\mathcal{O}$ 加群とすると，ある自然数 r と M の部分加群 N が存在して $K\otimes M\cong(K\otimes L)^r$（$r$ 個の直和），$N\cong L^r$ となる．よって $[M]=r[L]+[M/N]$，M/N はトーションとなる．このとき $\mathfrak{a}=\mathcal{O}_r(M/N)$ とおくと，写像

$$\eta: G(\mathcal{O})\longrightarrow \mathbb{Z}\oplus I(R)/J(R),\quad \eta([M])=(r,\bar{\mathfrak{a}})$$

は同型である．したがって次の補題を得る．

補題　$\mathfrak{a}$ を $\mathcal{O}$ の（零でない）イデアル，M を $\mathfrak{a}M=0$ なる $\mathcal{O}$ 加群とする．もし $\mathcal{O}_r(\mathcal{O}/\mathfrak{a})$ を割る R の素イデアルがすべて $J(R)$ に含まれるならば $G(\mathcal{O})$ において $[M]=0$ である．

次に $\mathcal{O}$ を $R\pi$ を含む $K\pi$ の極大整環とする．全準同型 $\psi: G(\mathcal{O})\to G(R\pi)$ が同型になる十分条件を考える．$K\pi$ の単純成分への分解を $A_1\oplus\cdots\oplus A_s$ とし，それによる $\mathcal{O}$ の分解を $\mathcal{O}_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{O}_s$ とする．A_i の中心を K_i，R_i を K_i の整数環とすると，各 $\mathcal{O}_i$ は R_i 極大整環である．$\mathcal{L}$ を $\mathcal{O}$ から $R\pi$ への導手とし，$\mathcal{L}=\mathcal{L}_1\oplus\cdots\oplus\mathcal{L}_s$ とする．

命題　各 i について $\mathcal{O}_r(\mathcal{O}/\mathcal{L}_i)$ を割る素イデアルがすべて $J(R_i)$ に含まれるとする．そのとき $\psi: G(\mathcal{O})\to G(R\pi)$ は同型である．

証明　M をトーションフリー $R\pi$ 加群とすると，$\mathcal{L}_i\subset R\pi$ であるから，$\mathcal{L}_iM$ は $x(\sum_t c_tm_t)=\sum_t(xc_t)m_t$　（$x\in\mathcal{O}_i$，$\sum_t c_tm_t\in\mathcal{L}_iM$）と定義することによって $\mathcal{O}_i$ 加群となる．したがって，写像

$$\varphi: G(R\pi)\longrightarrow G(\mathcal{O})$$

を $\varphi([M])=[\mathcal{L}M]$ によって定義することが出来る．実際 $0\to M'\to M\to M''\to 0$ をトーションフリー $R\pi$ 加群の完全列とすると $0\to\mathcal{L}M'\xrightarrow{\alpha}\mathcal{L}M\xrightarrow{\beta}\mathcal{L}M''\to 0$ が導かれるが，これは中間を除いて完全である．更に $\mathcal{L}(\ker\beta/\mathrm{im}\,\alpha)=0$ であり，各 i について $\mathcal{O}_r(\mathcal{O}_i/\mathcal{L}_i)$ を割る R_i の素イデアルはすべて $J(R_i)$ に含まれるから，補題より $G(\mathcal{O})$ において $[\ker\beta/\mathrm{im}\,\alpha]=0$ である．またトーションフリー $\mathcal{O}$ 加群 M に対しても同様に補題から $G(\mathcal{O})$ において $[M]=[\mathcal{L}M]$ となる．従って φ は ψ の逆写像となり ψ は同型となる．

以下 π をアーベル群とする．このとき A_i 及び $\mathcal{O}_i$ はそれぞれ K_i 及び R_i 一致する．更に $J(\mathcal{O}_i)$ は $\mathcal{O}_i$ の単項イデアル全体からなる群であり，$\mathcal{O}_r(\mathcal{L}_i)=\mathcal{L}_i$ である．

$\rho_i: R\pi\to\mathcal{O}_i$ を $K\pi$ から A_i への射影から導かれた写像とする．

定理　π を有限アーベル群とし，各 i について $\rho_i: R\pi\to\mathcal{O}_i$ は全射であるとする．このとき ψ が同型になる必要十分条件は $\mathcal{L}$ を割る $\mathcal{O}$ のすべての素イデアルが単項なることである．

証明　条件が十分なることは命題から明らかである．従って逆に ψ が同型であるとする．いま条件が成り立たないとする．即ち，ある i と $\mathcal{L}_i$ を割る $\mathcal{O}_i$ の単項でない素イデアル $\mathfrak{P}$ が存在したとする．$M=\mathcal{O}_i/\mathfrak{P}$ とおくと $[M]\neq 0$ である．ここで $\mathfrak{N}_i=\ker\rho_i$ とおくと $\prod_{j\neq i}\mathfrak{N}_j\subset\bigcap_{j\neq i}\mathfrak{N}_j=\mathcal{L}_i$ であるから，ある $j\neq i$ が存在して $\rho_i(\mathfrak{N}_j)\subset\mathfrak{P}$ となる．$\mathcal{O}_i$ 加群 M を自然な方法で $R\pi$ 加群とみなすと，$\mathfrak{N}_jM=\rho_i(\mathfrak{N}_j)M\subset\mathfrak{P}M=0$．よって $R\pi$ 加群 M は ρ_j を通して $\mathcal{O}_j$ 加群ともみなすことが出来る．即ち $\mathcal{O}_i$ 加群から得られる $R\pi$ 加群 M と $\mathcal{O}_j$ 加群から得られるそれとは一致する．したがって $G(R\pi)$ において，$[M]$ は $G(\mathcal{O}_i)$ からの像であると同時 $G(\mathcal{O}_j)$ からの像でもある．ところが ψ は同型

であるから これは矛盾である.

特に K が円分体であるとすると, ρ_i は全射であり, 更に $\mathcal{O}$ において n を割る素イデアルの全体は $\mathcal{L}$ を割るそれと一致するから, このとき上の定理は次のように言える.

系 π を有限アーベル群, K を円分体とする. このとき φ が同型になるためには, $\mathcal{O}$ において n を割る素イデアルが, すべて単項なることが必要十分である.

References

[1] A. Heller and I. Reiner: Grothendieck groups of integral group rings, Ill. J. Math. 9 (1965), 349-360.

[2] R. G. Swan: The Grothendieck ring of a finite group, Topology 2 (1963), 85-110.

有限群上の Quasi-permutation modules について.

遠遠 静男 (都立大)

宮田 武彦 (阪市大)

信州でお話ししたのは §1, §2 についてですが, その後発表されますので証明は略させていただきました. (§2 での巾零群に関しては少し良い結果になっています). また, 最近の J. Ritter の論文[8]に関する簡単な注意をこの機会を利用させていただいて書かせていただきました.

§1. π を有限群，M を π-加群で，$\mathbb{Z}$-加群としては rank n の自由加群とする。π は M の整数環の上の群環 $\mathbb{Z}[M]$ に自然に作用している。K/k をガロア群が π と同型になる拡大体とする。$K[M] = K \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[M]$ とおく。$K[M]$ は M の K 上の群環であるが，$\sigma \in \pi$ の作用を $\sigma(\alpha \otimes x) = \sigma\alpha \otimes \sigma x$ で定義すると σ は $K[M]$ の k-同型になる。$K[M]$ の商体を $K(M)$ と書くと，π の $K[M]$ 上の作用は自然に $K(M)$ の作用に拡張できる。$K(M)$ は K 上の次元 n の有理体である。

T を k で定義され K で分解する（代数的）トーラス群とする。T のキャラクター加群を M とすると，これはトーションをもたない π-加群であり，T の函数環 $k[T]$ は $K[M]^{\pi} = \{ x \in K[M] \mid \sigma x = x \quad \text{for } {}^{\forall}\sigma \in \pi \}$ に等しい，T の函数体は $K(M)^{\pi}$ の商体 $K(M)^{\pi}$ に等しい（$K[M]$ は UFD であることに注意すると，$K[M]^{\pi}$ の商体は $K(M)^{\pi}$ であることが証明できる）。逆に，トーションをもたず rank が有限の π-加群 M を与えると，k 上で定義され K で分解するトーラス T で $k[T] \cong K[M]^{\pi}$ となるものが k-同型を除き唯一つ存在する。従って，トーラスの性質を調べることとトーションをもたない π-加群の性質を調べることは同じになる。今後は双有理的性質をおもにホモロジー代数的に考えることにする。

rank が有限でトーションのない π-加群の同型類の集合を $\mathfrak{M}(\pi)$ とする。π がその上に置換を引き起こすような $\mathbb{Z}$-基をもつ $M \in \mathfrak{M}(\pi)$ を（π の）置換加群といい，置換加群の同型類の集合を $\mathfrak{S}(\pi)$ とする。$S \in \mathfrak{S}(\pi)$ ならばヒルベルトの定理90により $K(S)^{\pi}$ は k 上有理体である。$M \in \mathfrak{M}(\pi)$ ならば M は適当な自由 $\mathbb{Z}\pi$-加群の部分加群になるから $K(M)^{\pi}$ は k 上の有理体の部分体であるが，自分自身は有理体かどうか判らない。実際 $K(M)^{\pi}$ が有理体でない例は知られている（Chevalley）。

L, L' を k の拡大体とする。L, L' 上の不定元，$t_1, \cdots, t_m$；$s_1, \cdots, s_n$ を取り $L(t_1, \cdots, t_m)$ と $L'(s_1, \cdots, s_n)$ が k-同型になるようにできるとき，L と L' は k 上で stable に同型といい $L \overset{(k)}{—} L'$ と書くことにする。$M, N \in \mathfrak{M}(\pi)$ が $K(M)^{\pi} \overset{(k)}{—} K(N)^{\pi}$ を満たすとき，M と N は stable に同型といい $M — N$ と書くことにする。みかけには $M — N$ は体 k に依存する性質であるが，Swan の定理からわかるように，体 k にはよらずガロア群 π だけに依存する性質である。

［1.1］

Swan の定理　：　K/k をガロア群が π である有限次ガロア拡大とする。次の事は同値である；$M, N \in \mathfrak{M}(\pi)$ とすると，

(1) $K(M)^{\pi} \overset{(k)}{—} K(N)^{\pi}$，

(2) 次の完全列が存在する；

$$0 \to M \to L \to S \to 0$$

$$0 \to N \to L \to S' \to 0 \qquad L \in \mathfrak{M}(\pi),\ S, S' \in \mathfrak{S}(\pi).$$

(2) ⇒ (1) はヒルベルトの定理90から直ちに得られる。(1) ⇒ (2) は Swan [ ]。

$M \in \mathfrak{M}(\pi)$ が次の同値な条件を満たすとき，quasi-permutation module（略して q-p）と呼ぶことにする：(a) $M — 0$，(b) 完全列 $0 \to M \to S \to S' \to 0$，$S, S' \in \mathfrak{S}(\pi)$ が存在する，(c) $K(M)^{\pi}$ は stable に k 上有理的。特に任意の部分群 π' に π に対して $H^1(\pi', M) = 0$（例えば M が $\mathbb{Z}\pi$-加群として射影的）のときは，M が q-p であることと，$M \oplus S' \in \mathfrak{S}(\pi)$ となる置換加群 S' の存在とは同値である。このことは次の補題から従う。

補題1　$\mathbb{Z}\pi$-加群の完全列

$$0 \to M \to N \to S \to 0, \quad S \in \mathfrak{S}(\pi)$$

を考える。π の任意の部分群 π' に対し $H^1(\pi', M) = 0$ なら上の完全列は split する。特に $M \in \mathfrak{S}(\pi)$ ならば $N \in \mathfrak{S}(\pi)$ である。

この補題から容易に得られる系を記しておく。

系1．上の完全列において，S が置換加群の直和因子のときも，上の補題の前半は成り立つ。

系2（Ono-Lenstra）．完全列：$0 \to M \to N \to S \to 0$（$M \in \mathfrak{M}(\pi)$，$S$ は置換加群の直和因子）があると，

$$K(M \oplus S)^{\pi} = K(N)^{\pi}$$

$\mathfrak{M}(\pi)$ を — なる関係で同値類に分けて得られる集合を $T(\pi)$ と書くことにする。$M \in \mathfrak{M}(\pi)$ を含む同値類を $[M]$ と書こう。Swan の定理によると，$M — N$，$M' — N'$ ならば $M \oplus M' — N \oplus N'$ であるから $[M] + [N] = [M \oplus N]$ で和を定義すると $T(\pi)$ は半群になる。$T(\pi)$ はトーラスの双有理的分類を与えると考えられるし，また，π の整数表現の "stable" な分類を与えるので，興味がある。目下のところ残念ながら，これに関してはあまり判っていない。特殊な π について $T(\pi)$ が決定されているくらいである。

ここでは一，二の命題とそれに関する注意をまとめるにとどめる。

命題1.　次の事は同値である。

(i) π の各シロー群は巡回群である，

(ii) $T(\pi)$ は群である。

一般には，$T(\pi)$ で cancellation law が成り立つかどうか判らないので，$T(\pi)$ が有限集合であっても群であることはすぐには結論できない。しかし，$x \in T(\pi)$ に対し $\{x, 2x, \cdots\}$ が有限集合ならば，x は逆元をもつことが判るから，$T(\pi)$ が有限集合ならば群であることが判る。$T(\pi)$ が群ならば，すでに有限群になっているようであるが，このことは一般には正しいかどうか判らない（$T(\pi)$ が群なら有限生成であることは判っている）。

この命題の証明には，次の補題と後に述べる命題2が重要な働きをする。

補題2.　I を $Z\pi$ の augumentation ideal とし，$I^* = Hom_{Z}(I, Z)$ とおく。π が巡回群でないシロー群をもてば I^* は q-p でない。

お詫び：以前 "I^* は q-p $\Leftrightarrow$ π が巡回群" と云ったり書いたりしましたが，これは誤りでした（$\Leftarrow$ は正しい）。π のシロー群がすべて巡回群のときは，I^* が q-p であるかどうかは判定できていません。（π の位数が奇数ならば I^* が q-p なら π は巡回群）

さて q-p π-加群 M に対し $K(M)^{\pi}$ は有理体であるかどうかが問題になるが，この方向に関しては次の定理および命題がある。

定理　K/k は有限次ガロア拡大，$\pi = Gal(K/k)$ とする。π が素数巾位数の巡回群で，k が無限体なら，次の事は同値

(i) M は q-p π-加群，

(ii) $K(M)^{\pi}$ は k 上有理体。

k が有限体のときも成り立ちそうであるが証明されなかった。ただし π が 2-巾の巡回群のときは任意の体 k に関し成り立っている。

命題2.　$\pi = \langle \sigma \rangle$ を位数 p^l（p は素数）の巡回群とし，$\Phi(X, l)$ を p^l 次の円分多項式とすると，次の事は同値である。

(i) M は q-p π-加群，

(ii) $Hom_{Z\pi}\left(Z\pi/(\Phi(\sigma, l)), M\right)$ は自由 $Z\pi/(\Phi(\sigma, l))$ 加群。

§2. この節では おもに 射影 g-p π-加群について考える。

$M, N \in M(\pi)$ に対し、M と N が local に同型のとき $M \vee N$ と書き、$M \oplus L \cong N \oplus L$ となる $L \in M(\pi)$ が存在するとき $M \approx N$ と書く。$M \approx N$ ならば $M \vee N$ である。$\mathbb{Z}\pi$ を含む $\mathbb{Q}\pi$ の極大 order の一つを $\Omega_{\mathbb{Z}\pi}$ とする。$M \vee N$ と $M \oplus \Omega_{\mathbb{Z}\pi} \oplus \Omega_{\mathbb{Z}\pi} \cong N \oplus \Omega_{\mathbb{Z}\pi} \oplus \Omega_{\mathbb{Z}\pi}$ は同値である（$\mathbb{Z}\pi$ が Eichler の条件を満たせば $\Omega_{\mathbb{Z}\pi}$ は一つでよい）。

$C(\mathbb{Z}\pi)$ を $\mathbb{Z}\pi$ の reduced projective class group とすると、

$$C(\mathbb{Z}\pi) = \{[\mathfrak{a}] - [\mathbb{Z}\pi] \mid \mathfrak{a} \text{ は } \mathbb{Z}\pi \text{ の射影イデアル}\}$$

である。$\tilde{C}(\mathbb{Z}\pi)$ を

$$\tilde{C}(\mathbb{Z}\pi) = \{[\mathfrak{a}] - [\mathbb{Z}\pi] \mid \mathfrak{a} \approx \mathbb{Z}\pi\}$$

と定義すると $\tilde{C}(\mathbb{Z}\pi)$ は $C(\mathbb{Z}\pi)$ の部分群で完全列

$$0 \to \tilde{C}(\mathbb{Z}\pi) \to C(\mathbb{Z}\pi) \to C(\Omega_{\mathbb{Z}\pi}) \to 0$$

を得る。$C(\Omega_{\mathbb{Z}\pi})$ は決して極大 order の取り方によらない。

$C(\mathbb{Z}\pi)$ の部分群 $C^{g}(\mathbb{Z}\pi)$, $\tilde{C}^{g}(\mathbb{Z}\pi)$ を

$$C^{g}(\mathbb{Z}\pi) = \{[\mathfrak{a}] - [\mathbb{Z}\pi] \mid \mathfrak{a} \oplus S = T,\ S, T \in \mathfrak{S}(\pi) \text{ が存在}\}$$

$$\tilde{C}^{g}(\mathbb{Z}\pi) = \{[\mathfrak{a}] - [\mathbb{Z}\pi] \mid \mathfrak{a} \oplus S = \mathbb{Z}\pi \oplus S,\ S \in \mathfrak{S}(\pi) \text{ が存在}\}$$

と定義する。これらが群になることは §0 の Swan の定理および射影 $\mathbb{Z}\pi$-加群は自由加群と $\mathbb{Z}\pi$ のイデアルの直和であることから、これまた Swan の結果から判る。$\tilde{C}^{g}(\mathbb{Z}\pi) \subset \tilde{C}(\mathbb{Z}\pi)$ は明らか。

問題：　$\tilde{C}^{g}(\mathbb{Z}\pi) = \tilde{C}(\mathbb{Z}\pi) = C^{g}(\mathbb{Z}\pi)$　　？

一般の群の場合は正しいかどうか全然判らないが、次の場合には成り立っていることが証明できる。

(1) π は巾零群で split type のもの、特に可換群。（π が split type とは、$\mathbb{Q}\pi$ の各単純成分が可換体上の全行列環になっていることをいう。例えば奇数位数の巾零群は split type である）。split type でない巾零群についても、位数8の4元数群、またこれと位数3の巡回群の直積では問題は正しい。

(2) 正規な巡回部分群 π' で π/π' が square free 位数の巡回群となるもの。

(3) $\pi = PSL(2, q) = SL(2, F)/\text{center}$　F は q 個の元からなる有限体。特に A_4, A_5, A_6（A_n は n 文字の交代群）。

（次の同型がある：

$$PSL(2,3) \cong A_4$$
$$PSL(2,4) \cong PSL(2,5) \cong A_5$$
$$PSL(2,9) \cong A_6$$

）。

これらの計算を実行する上での基本になる結果を以下で述べよう。

π を hyperelementary group とする。すなわち正規な巡回部分群 $\langle\sigma\rangle$ と、σ の位数を割らない素数巾位数の部分群 π' があり $\pi = \langle\sigma\rangle\pi'$ と書ける。$n = |\langle\sigma\rangle|$, ω を原始 m 乗根 $(m|n)$、$M = \mathbb{Z}[\omega]$ とおく。$\sigma x = \omega x$ とおくと M は $\mathbb{Z}\langle\sigma\rangle$-加群になる。conjugation により準同型 $\pi' \to \mathrm{Aut}\langle\sigma\rangle$ が得られるが、これにより $\mathbb{Z}\langle\sigma\rangle$ は自然に $\mathbb{Z}\pi$-加群とみなせる（しかも $\mathbb{Z}\langle\sigma\rangle \in \mathfrak{S}(\pi)$）。$\Phi(X)$ を m 次の円分方程式とすると $\mathbb{Z}\langle\sigma\rangle$ のイデアル $(\Phi(\sigma))$ は π-stable になり $M = \mathbb{Z}[\omega] = \mathbb{Z}\langle\sigma\rangle/(\Phi(\sigma))$ は $\mathbb{Z}\pi$-加群になる。

基本補題．上で定義した M は g-p である。また $M^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Z})$ も g-p である。

証明は §0 にある巡回群の場合と同じにできる。

π を任意の有限群とし、$R(\pi)$ を $\mathbb{Q}$ 上の表現環とする。$R(\pi)$ は Frobenius 環で $C(\pi)$ は Frobenius R-加群である（Swan [ ], [ ], Bass [ ], Lam [ ] 等）。$\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} S$, $S \in \mathfrak{S}(\pi)$ なる元で生成される $R(\pi)$ の部分環を $B_{\mathbb{Q}}(\pi)$ と書くと、$B_{\mathbb{Q}}(\pi)$ は Frobenius 環になる。

補題．$\tilde{C}^{g}(\mathbb{Z}\pi)$, $C^{g}(\mathbb{Z}\pi)$, $\tilde{C}(\mathbb{Z}\pi)$, $C(\mathbb{Z}\pi)$, $C(\Omega_{\mathbb{Z}\pi})$ は Frobenius $B_{\mathbb{Q}}$-加群である。

証明は $C(\mathbb{Z}\pi)$ が R-加群になることと、$C^{g}(\mathbb{Z}\pi)$ 等々の定義から明らか。

π の hyperelementary 部分群の集合を $\mathcal{H}$、巡回部分群の集合を $\mathcal{C}$ とする。π' を π の部分群とするとき $i_{\pi'} : B_{\mathbb{Q}}(\pi') \to B_{\mathbb{Q}}(\pi)$ を $i_{\pi'}(M) = \mathbb{Q}\pi \otimes_{\mathbb{Q}\pi'} M$ で定義する。

$$B_{\mathbb{Q}}^{HI}(\pi) = \sum_{\rho \in HI} \mathrm{Im}(i_\rho)$$

と定義すると, $B_{\mathbb{Q}}^{HI}(\pi)$ は $B_{\mathbb{Q}}(\pi)$ のイデアルである。同様に $B_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{C}}(\pi)$ も定義する。

Induction Theorem (Artin-Swan)

(1) $|\pi|\, B_{\mathbb{Q}}(\pi) \subset B_{\mathbb{Q}}^{\mathbb{C}}(\pi)$

(2) $B_{\mathbb{Q}}^{HI}(\pi) = B_{\mathbb{Q}}(\pi)$.

Swan [ ] での IT の証明を, 基本補題をとりいれて follow すると, 実は $R(\pi)$ についてだけではなく $B_{\mathbb{Q}}(\pi)$ についても証明できていることが容易に知られる。

定理1. π が p-群なら $\tilde{C}^{s}(\mathbb{Z}\pi)$, $C^{s}(\mathbb{Z}\pi)$, $\tilde{C}^{s}(\mathbb{Z}\pi)$ は また p-群である。

証明. π が p-群かつ巡回群のときは上の三つの群は等しく, $\tilde{C}(\mathbb{Z}\pi)$ は p-群 (Bass [ ]) だから IT (1) を使えばよい。

正規な p-群 p-部分群で割ると巡回群となる群を p-巡回群とよぼう。π のこのような部分群の conjugate classes を W とする。

Conlon の定理. $M, N \in \mathfrak{M}(\pi)$ で $M \sim N$ とする,

$$M \oplus \Big(\sum_{\rho \in W} \oplus \big(\mathbb{Z}\pi/\rho\big)^{m(\rho)}\Big) \cong N \oplus \Big(\sum_{\rho \in W} \oplus \big(\mathbb{Z}\pi/\rho\big)^{n(\rho)}\Big)$$

ならば すべての $\rho \in W$ に対して $m(\rho) = n(\rho)$

証明は Conlon [2].

系. π が p-巡回群ならば $\tilde{C}^{s}(\mathbb{Z}\pi) = C^{s}(\mathbb{Z}\pi)$.

π が巾零群の時は, hyperelementary な部分群は p-巡回部分群であるし逆も成り立つから, 上の系と IT(2) から次の定理が得られる。

定理2. π が巾零群ならば $\tilde{C}^{s}(\mathbb{Z}\pi) = C^{s}(\mathbb{Z}\pi)$.

定理3. π が可換群なら $\tilde{C}^{s}(\mathbb{Z}\pi) = C^{s}(\mathbb{Z}\pi) = \tilde{C}(\mathbb{Z}\pi)$.

証明. 定理2によれば $\tilde{C}(\mathbb{Z}\pi) \subset \tilde{C}^{s}(\mathbb{Z}\pi)$ をいえばよい。特殊の場合はもっと強いことがいえる。

命題. $T = \sum_{\rho} \oplus \mathbb{Z}\pi/\rho$ (ρ は π/ρ が巡回群となるものすべてにわたる) とおくと, $\mathfrak{a}$ が $\mathbb{Z}\pi$ の射影イデアルで $[\mathfrak{a}] - [\mathbb{Z}\pi] \in \tilde{C}(\mathbb{Z}\pi)$, すなわち $\mathfrak{a} \sim \mathbb{Z}\pi$ なら

$$\mathfrak{a} \oplus T \cong \mathbb{Z}\pi \oplus T.$$

実際 $\Lambda = \Omega_{\mathbb{Z}\pi}$ を $\mathbb{Q}\pi$ の $\mathbb{Z}\pi$ を含む極大 order とすると, 基本補題により, 完全列

$$0 \to \Lambda \to S \to S' \to 0$$

で $S = \sum_{\pi/\rho\ \mathrm{cyclic}} \oplus \big(\mathbb{Z}\pi/\rho\big)^{m(\rho)}$, S' も S と同じ型となるものが存在する。

一方 $\mathfrak{a} \oplus \Lambda \cong \mathbb{Z}\pi \oplus \Lambda$ だから完全列

$$0 \to \mathfrak{a} \oplus \Lambda \to \mathfrak{a} \oplus S \to S' \to 0$$

$$0 \to \mathfrak{a} \oplus \Lambda \to \mathbb{Z}\pi \oplus S \to S' \to 0$$

を得る。push out diagram を作ると $\mathfrak{a} \oplus S \oplus S' \cong \mathbb{Z}\pi \oplus S \oplus S'$. 両辺に T を加えて Jacobinski の cancellation theorem ([7]) により $\mathfrak{a} \oplus T \cong \mathbb{Z}\pi \oplus T$.

(1), (2) を証明するには $\Omega_{\mathbb{Z}\pi}$ のくわしい性質が必要なので証明を略させていただきます。(3) は Dickson により π の部分群がすべて知られるので, (1), (2) および IT から証明できる。

§3. J. Ritter [8] は π が巾零群なら B(Qπ) = R(π) だと主張しているようであるが (Satz 2), 証明に少し飛躍があるようです (Serre [9]).
この機会をかりてどんな時 B(Qπ) = R(π) になるかを論じておくことにする.

§1 の基本補題をこの節で必要なように変型する.

補題. ω を 1 の原始 n 乗根, π を位数 nm の巡回群で生成元を σ とする. σ ↦ ω で Q(ω) は π の表現になる. これは B(Qπ) の元である.

(この E との関係はよく知られたことのようである).

π を可換群とする. π/π′ が位数 n の巡回群になるよう π′ を取り, ω を原始 n 乗根とすると Q(ω) は π/π′ の表現になる. π の Q 上の既約表現はすべてこのようにして得られる. 補題から B(Qπ) = R(π).

定理. 次の場合は B(Qπ) = R(π) である.
1. π は p-群
2. π は巾零で split type.

略証. Feit [6] (14.3) によれば, π の non-linear な絶対既約指標 χ は p が奇数なら巡回部分群の指標 λ で Q(χ) = Q(λ) を満たすものから induce される. λ の Schur index は 1 だから λ を指標とする有理既約指標は B(Qπ) の元. このことから直ちに B(Qπ) = R(π). p = 2 のときは χ は巡回部分群で割ると位数 2 の群になる部分群 π′ の指標 λ で Q(χ) = Q(λ) を満たすものから induce される. λ とその Schur index が等しいことが判るから, 上の性質をもつ π′ について B(Qπ′) = R(π′) が成り立つことをいえばよい. この場合は直接計算.
2. J. Ritter [8] (6.2) の論法が使える.

§2 の 1, 7 を利用すると, π = PSL(2, 8) のとき B(Qπ) = R(π) であることが判る.

[1] H. Bass : Algebraic K-theory. Benjamin.
[2] S.D. Conlon : Monomial representations under integral similarity, J. Algebra, 13 (1969), 496-508.
[3] S. Endo and T. Miyata : Invariants of finite groups. To appear.
[4] Quasi-permutation modules over finite groups, (to appear. QP と略記).
[5] Private correspondences between E and M.
[6] W. Feit : Characters of finite groups. Benjamin.
[7] H. Jacobinski : Genera and decompositions of lattices over orders. Acta Math. 121 (1968), 1-29.
[8] J. Ritter : Ein Induktionsatz für rationale Charaktere von nilpotenten Gruppen. Crelle. 254 (1972) 133-151.
[9] J-P. Serre : Représentations linéaires des groupes finis (2ed). Hermann.
[10] R.G. Swan : Induced representations and projective modules. Ann. of Math. 71 (1960), 552-578.
[11] Invariant rational functions and a problem of Steenrod, Invent. Math., 7 (1969), 148-158.
[12] R.G. Swan and E.G. Evans : K-theory of finite groups and orders. Springer.

分離多項式と分離拡大　I

永原賢（岡山大）

ここで環はすべて単位元をもつ可換環とする。Janusz は[15]において，直既約な環上の分離多項式を定義し，その特徴づけ等について若干の結果を得た。それは環のガロア理論の応用にすぎないともいえるが，体の分離拡大とのつながりを示すものとしてとらえることもできる。その後この方面の研究には DeMeyer [9], Elkins [11], 宮下[17], 永原[19]-[21]がある。これらは任意の(直既約とは限らない)環上の分離多項式を対象としている，特に[9]では直既約な環の一つの一般化と見られるユニフォーム環について，体の分離閉包にあたるものを研究している。ここでは，それらの結果を体の多項式論の部分的一般化としての見地から整理して紹介する。

以下 B は一つの環をあらわすものとする。また，拡大環の単位元は基礎環に含まれるとし，環準同型は単位元を単位元にうつすものを考える。いま，A/B を一つの拡大環とし，G を A の自己同型よりなる一つの群とするとき，A における G の不変部分環を $A(G)$ であらわし，B の元をすべて不変にする G の元全体のなす群を $G(B)$ であらわし，G の B への制限を $G|B$ であらわす。また，A/B が[3, 定義1.4]のいみで，G をガロア群とするガロア拡大であるとき，A/B を G-ガロア拡大とよぶ。さらに B の元を係数とする不定元 X の多項式環を $B[X]$ であらわし，$B[X]$ の元 f で，$\deg f \geq 1$ かつ f の最高次係数が B の単位元であるものを $B[X]$ の単形多項式とよぶ，但し $\deg f$ は f の次数をあらわす。

§1.　単形多項式の分解環

定義.　f を $B[X]$ の単形多項式とする。B の拡大環 A で $A=B[a_1,\cdots,a_n]$，$f(X)=(X-a_1)\cdots(X-a_n)$ となるものを f の分解環とよぶ。また，$B[x_1,\cdots,x_n]$ が f の一つの分解環であって，f の任意の分解環 $B[a_1,\cdots,a_n]$ に対して，$B[x_1,\cdots,x_n]\longrightarrow B[a_1,\cdots,a_n]$，$x_i\rightarrow a_i$ なる B-準同型が存在するとき，$B[x_1,\cdots,x_n]$ を f の自由分解環とよぶ。

さて，$\theta: B\longrightarrow C$ を環準同型，$c_1,\cdots,c_n$ を C の元，$X_1,\cdots,X_n$ を独立な不定元とする。多項式環 $B[X_1,\cdots,X_n]$ の元 $h(X_1,\cdots,X_n)=\sum b_{k_1,\cdots,k_n}X_1^{k_1}\cdots X_n^{k_n}$ に対して $\sum\theta(b_{k_1,\cdots,k_n})c_1^{k_1}\cdots c_n^{k_n}$ なる C の元を

$h^\theta(c_1,\cdots,c_n)$ であらわす。明らかに写像 $h(X_1,\cdots,X_n)\longrightarrow h^\theta(c_1,\cdots,c_n)$ は $B[X_1,\cdots,X_n]$ から C への環準同型である。

定理 1.1.　f を $B[X]$ の単形多項式とするとき，その自由分解環は存在し，B-環同型を除いて一意的であり，さらに，それを $B[x_1,\cdots,x_n]$ とすれば，任意の環準同型 $\theta: B\rightarrow B_0$ 及び $f^\theta(X)$ の任意の分解環 $B_0[c_1,\cdots,c_n]$ に対して，$h(x_1,\cdots,x_n)\longrightarrow h^\theta(c_1,\cdots,c_n)$ なる如き $B[x_1,\cdots,x_n]$ から $B_0[c_1,\cdots,c_n]$ への環準同型が存在する。

証明.　単形多項式が1次のときは明らかに成り立つから，$n-1\ (\geq 1)$ 次のときは成立を仮定し，$\deg f=n$ のときに成り立つことを示そう。剰余環 $B[X]/(f)$ の元 $X+(f)$ を x_1 であらわせば，$f=(X-x_1)g$，$g\in B[x_1][X]$ が成り立ち，$\deg g=n-1$ である。仮定より g は自由分解環をもつ，それを $B[x_1][x_2,\cdots,x_n]$ とする。いま，環準同型 $\theta: B\rightarrow B_0$ に対して，$B_0[c_1,\cdots,c_n]$ を $f^\theta(X)$ の一つの分解環とすれば，$f^\theta(c_1)=0$ であるから環準同型 $\varphi: B[x_1]\rightarrow B_0[c_1]$，$h(x_1)\rightarrow h^\theta(c_1)$ が存在する。この φ を $f(X)$ にほどこして $f^\varphi(X)=f^\theta(X)=(X-c_1)g^\varphi(X)$，よって $g^\varphi(X)=(X-c_2)\cdots(X-c_n)$ を得る。故に $B_0[c_1][c_2,\cdots,c_n]$ は $g^\varphi(X)$ の分解環となる。したがって，仮定より $h(x_1,x_2,\cdots,x_n)\longrightarrow h^\theta(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ なる如き $B[x_1,\cdots,x_n]$ から $B_0[c_1,\cdots,c_n]$ への環準同型が存在する。

この証明から次の系を得る。

系 1.2.　f を $B[X]$ の単形多項式とし，$B[x_1,\cdots,x_n]$ を f の自由分解環とするとき次の事柄がいえる。

(1)　$f_m=(X-x_{m+1})\cdots(X-x_n)\in B[x_1,\cdots,x_m][X]$ であり，$B[x_1,\cdots,x_m][x_{m+1},\cdots,x_n]$ は f_m の自由分解環である，但し $m=1,\cdots,n-1$。

(2)　$B[x_m]\cong B[X]/(f)$（B-環同型；$x_m\rightarrow X+(f)$），但し $m=1,\cdots,n$。

(3)　$B[x_1,\cdots,x_n]$ は $\{x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n};\ 0\leq k_i\leq n-i,\ i=1,\cdots,n\}$ を基とする自由 B-加群である。

(4)　n 次の対称群 S_n の各元 π に対して，$x_i\rightarrow x_{\pi(i)}$ なる如き $B[x_1,\cdots,x_n]$ の B-環自己同型が存在する。

系 1.3.　f を $B[X]$ の単形多項式とし，$f=X^n-b_1X^{n-1}+\cdots+(-1)^n b_n$ とする。また，$X_1,\cdots,X_n$ を独立な不定元とし，$s_1,\cdots,s_n$ を $X_1,\cdots,X_n$ の基本対称式（$\deg s_i=i$）とする。このとき，$\{s_1-b_1,\cdots,s_n-b_n\}$ で生成された $B[X_1,\cdots,X_n]$ のイデアル N に対して，剰余環 $B[X_1,\cdots,X_n]/N$ は f の自由分解環である。すなわち，$B\cong B+N/N$ であり，$\overline{X}_i=X_i+N$ とおくとき $f=(X-\overline{X}_1)\cdots(X-\overline{X}_n)$ が成り立つ。

証明. fの自由分解環$B[x_1,\cdots,x_n]$に対し, B-環同型$B[\bar{X}_1,\cdots,\bar{X}_n]\to B[x_1,\cdots,x_n]$が存在することは見やすい。

さて, fを$B[X]$のn次の単形多項式とするとき, $B[X]/(f)$は$\{1, x=X+(f), x^2,\cdots,x^{n-1}\}$を基とする自由$B$-加群である。この$B$-加群のトレース写像を$t$とするとき, 行列式$\det\|t(x^k x^l)\|$ $(0\leq k,l<n)$をfの判別式とよび, $\delta(f)$であらわす。

定理 1.4. fを$B[X]$の単形多項式とし, $B[a_1,\cdots,a_n]$をその分解環とするとき, $\delta(f)=\prod_{i<j}(a_i-a_j)^2$が成り立つ。

証明. $B[x_1,\cdots,x_n]$をfの自由分解環とするとき, 定理1.1及び系1.2より$\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2=\prod_{i<j}(a_i-a_j)^2$, $\det\|t(x_1^k x_1^l)\|=\det\|t(x^k x^l)\|$が成り立つ。よって$\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2=\det\|t(x_1^k x_1^l)\|$が成り立つことをいえばよい。さて, $X, X_1,\cdots,X_n$を独立な不定元, $s_1,\cdots,s_n$を$X_1,\cdots,X_n$の基本対称式$(\deg s_i=i)$とし, B_0をB上$s_1,\cdots,s_n$で生成された部分環とするとき,

$$\varphi:\ B[X_1,\cdots,X_n][X]\to B[x_1,\cdots,x_n][X]\ ;\quad h(X_1,\cdots,X_n)X^k\longrightarrow h(x_1,\cdots,x_n)X^k$$

なるB-環準同型を考えれば, $B_0[X_1]=\sum_{k=0}^{n-1}B_0X_1^k$, $\varphi(B_0)=B$, $\varphi(X_1)=x_1$となる。次に任意の整数$m>0$に対して,

$$(1)\quad X_1^m\cdot X_1^k=\sum_{l=0}^{n-1}b_{kl}X^l\quad(b_{kl}\in B_0,\ 0\leq k<n),\quad g(X)=\det(XI-\|b_{kl}\|)$$

とおく, 但しIはn次の単位行列である。これにφをほどこして

$$(2)\quad x_1^m\cdot x_1^k=\sum_{l=0}^{n-1}\varphi(b_{kl})x_1^l\quad(\varphi(b_{kl})\in B),\quad \varphi(g(X))=\det(XI-\|\varphi(b_{kl})\|)$$

を得る。(1)より$g(X_1^m)=0$, よって系1.2から, すべてのiに対して, $g(X_i^m)=0$が成り立つ。ここに, $i\neq j$ならば$X_i^m-X_j^m$が$B[X_1,\cdots,X_n]$の零因子でないことは見やすい。これより$g(X)=(X-X_1^m)\cdots(X-X_n^m)$, よって$\varphi(g(X))=(X-x_1^m)\cdots(X-x_n^m)$が成り立つ。故に(2)から$t(x_1^m)=\sum_{i=1}^n x_i^m$, これを用いて

$$\det\|t(x_1^k x_1^l)\|=\det\|\sum_i x_i^k x_i^l\|=\det\|x_i^k\|^2=\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2$$

を得る。

系 1.5. fが$B[X]$の単形多項式, $\theta: B\to B_0$が環準同型ならば$\theta(\delta(f))=\delta(f^\theta(X))$が成り立つ。

証明. $B[x_1,\cdots,x_n]$をfの自由分解環, $B_0[c_1,\cdots,c_n]$を$f^\theta(X)$の分解環とするとき, 環準同型

$$B[x_1,\cdots,x_n]\to B_0[c_1,\cdots,c_n]\ ;\quad h(x_1,\cdots,x_n)\to h^\theta(c_1,\cdots,c_n)$$

が存在する。これを用いて$\theta(\delta(f))=\theta(\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2)=\prod_{i<j}(c_i-c_j)^2=\delta(f^\theta(X))$を得る。

さて, fを$B[X]$の単形多項式とし, $B[x_1,\cdots,x_n]$をfの自由分解環とする。このとき, 系1.2の(4)における如きn次の対称群S_nから$B[x_1,\cdots,x_n]$のB-自己同型全体のなす群への対応は群準同型となる。その像を$S_{\{x_1,\cdots,x_n\}}$であらわす。ここに, $n>2$ならば$S_n\cong S_{\{x_1,\cdots,x_n\}}$である。また, $n=2$のときは, fの微分式が0でなければ$S_2\cong S_{\{x_1,x_2\}}$が成り立つ。以下f'でfの微分式をあらわす。

定理 1.6. fを$B[X]$の単形多項式, $B[x_1,\cdots,x_n]$をその自由分解環とするとき, 次の3条件は同値である。

(a) x_1-x_2は$B[x_1,\cdots,x_n]$の非零因子である。

(b) $f'(x_1)$は$B[x_1]$の非零因子である。

(c) $\delta(f)$はBの非零因子である。

さらに, この条件がみたされるならば$B[x_1,\cdots,x_n](S_{\{x_1,\cdots,x_n\}})=B$, $B[x_1,\cdots,x_n](S_{\{x_1,\cdots,x_n\}}(B[x_1]))=B[x_1]$が成り立つ。

証明. $f'(x_1)=\prod_{j\neq 1}(x_1-x_j)$, $\prod_i f'(x_i)=-\delta(f)$であることと, $B[x_1,\cdots,x_n]$がB及び$B[x_1]$上の自由加群であることに注意すれば(a), (b), (c)の同値は見やすい。そこで, この条件を仮定して$B[x_1,\cdots,x_n](S_{\{x_1,\cdots,x_n\}})=B$を示そう。次数$n-1$以下の単形多項式については成り立つと仮定し, fの次数が$n\,(>1)$である場合について考える。系1.2より$B[x_1,\cdots,x_n]$は$g(X)=\prod_{i\neq 1}(X-x_i)$の$B[x_1]$上の自由分解環であり, また, $\delta(g)$は$B[x_1]$の非零因子である。故に$B\subset B[x_1,\cdots,x_n](S_{\{x_1,\cdots,x_n\}})\subset B[x_1]$が成り立つ。いま$B[x_1,\cdots,x_n](S_{\{x_1,\cdots,x_n\}})\ni a=\sum_{k=0}^{n-1}x_1^k b_k$, $b_k\in B$とする。Iをn次の単位行列とするとき, 行列$\|x_i^k\|$ $(0<i\leq n,\ 0\leq k<n)$の余因子行列$\overline{\|x_i^k\|}$に対して, $\overline{\|x_i^k\|}\cdot\|x_i^k\|=(\det\|x_i^k\|)I=(\pm\prod_{i<j}(x_i-x_j))I$であるから, n個の連立方程式$\sum_{k=1}^{n-1}x_i^k b_k+x_i^0(b_0-a)=0$ $(i=1,\cdots,n)$の係数b_0-aと$\prod_{i<j}(x_i-x_j)$の積は0である。これは$b_0-a=0$すなわち$a=b_0\in B$を示す。かくして$B[x_1,\cdots,x_n](S_{\{x_1,\cdots,x_n\}})=B$が成り立つ。また, $B[x_1,\cdots,x_n](S_{\{x_1,\cdots,x_n\}}(B[x_1]))=B[x_1]$を見るには, $B[x_1,\cdots,x_n]$が$g=\prod_{i\neq j}(X-x_i)$の$B[x_1]$上の自由分解環であることに注意すればよい。

§2. 分離多項式

f が $B[X]$ の単形多項式であるとき，剰余環 $B[X]/(f)$ が B 上分離的ならば，f を B 上の分離多項式（又は $B[X]$ の分離多項式）とよぶ。まず，次の定理を証明する。

定理 2.1. f を $B[X]$ の単形多項式，$B[x_1,\cdots,x_n]$ を f の自由分解環とするとき，次の4条件は同値である。

(a) x_1-x_2 は $B[x_1,\cdots,x_n]$ の単元である。

(b) $f'(x_1)$ は $B[x_1]$ の単元である。

(c) $\delta(f)$ は B の単元である。

(d) f は B 上分離的である。

さらに，この条件がみたされるならば，$B[x_1,\cdots,x_n]$ は B の $S_{\{x_1,\cdots,x_n\}}$-ガロア拡大である。

証明. $B[x_1,\cdots,x_n]$ が B 及び $B[x_1]$ 上の自由加群であることに注意すれば (a), (b), (c) の同値は見やすい。そこで，まず (c) を仮定して (d) を示そう。定理1.6より $B[x_1,\cdots,x_n](S_{\{x_1,\cdots,x_n\}})=B$ が成り立ち，またすべての $\sigma\in S_{\{x_1,\cdots,x_n\}}$ に対して，$(\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2)^{-1}\prod_{i<j}(x_i-\sigma(x_j))^2=\delta_{1,\sigma}$，左辺を展開して $\sum_i u_i\sigma(v_i)=\delta_{1,\sigma}$ なる式を得る。よって $B[x_1,\cdots,x_n]$ は B の $S_{\{x_1,\cdots,x_n\}}$-ガロア拡大，したがって定理1.6及び [3, 定理2.2] より，$B[x_1]$ は B 上分離的である。ここに $B[x_1]$ は剰余環 $B[X]/(f)$ と B-同型である（系1.2）。故に f は $B[X]$ の分離多項式となり (d) を得る。次に (d) を仮定する。M を B の任意の極大イデアル，θ を B から剰余環 $B/M=K$ への自然準同型とするとき，K の代数閉包 $\overline{K}$ に対して，$\overline{K}[X]/(f^\theta(X))\cong\overline{K}\otimes_B(B[X]/(f))$ なる $\overline{K}$-環同型を得る。この環は $\overline{K}$ 上分離的であるから半単純環となり，よって $f^\theta(X)$ は $\overline{K}$ で重根をもたない。故に $0\neq\delta(f^\theta(X))=\theta(\delta(f))$（系1.5）となり，$\delta(f)\notin M$ を得る。これは $\delta(f)$ が B の単元であることを示す。

この定理と定理1.4から次の定理を得る。

定理 2.2. f を $B[X]$ の単形多項式，$B[a_1,\cdots,a_n]$ を f の分解環とするとき，f が B 上分離的であるための必十条件は $\prod_{i<j}(a_i-a_j)^2$ が B の単元になることである。

さて，次の定理を証明しよう。

定理 2.3. $B[X]$ の単形多項式 f に対して，次の7条件は同値である。

(i) f は B 上分離的である。

(ii) 剰余環 $B[X]/(f)$ において，$x=X+(f)$ とおけば，$f'(x)$ は単元である，すなわち $(f)+(f')=B[X]$ である。

(iii) $\delta(f)$ は B の単元である。

(iv) f の分解環 $B[a_1,\cdots,a_n]$ で，$\prod_{i<j}(a_i-a_j)^2$ が B の単元となるようなものがある。

(v) f の分解環 $B[x_1,\cdots,x_n]$ で，$B[x_1,\cdots,x_n]$ が G-ガロア拡大，$\{\sigma(x_i);\sigma\in G,1\leq i\leq n\}=\{x_1,\cdots,x_n\}$，$\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2$ が単元となるようなものがある。

(vi) B から，B の任意の極大イデアル M を法とする剰余環 B/M への自然準同型 θ に対して，$f^\theta(X)$ は B/M の代数閉包において重根をもたない。

(vii) B から，B の任意の極大イデアル M における局所化 B_M への自然準同型 η に対して，$f^\eta(X)$ は B_M 上分離的である。

証明. 定理1.1, 2.1及び2.2は (i) から (v) までの5条件が同値であることを示す。さて，B の任意の極大イデアル M_θ に対して，$\theta:B\to B/M_\theta$ を自然準同型とするとき，(vi) が成り立つための必十条件はすべての M_θ に対して $0\neq\delta(f^\theta(X))=\theta(\delta(f))$，これは $\delta(f)\notin M_\theta$ と同値である。故に条件 (iii), (vi) は同値である。同様にして，(iii), (vii) の同値が示される（この定理の部分的結果と証明については [11], [15], [17], [19]-[21] 参照）。

系 2.4. A を B の拡大環，B に属する A の単元はすべて B の単元であるとする（例えば，B が A の直和因子，あるいは A が B の整拡大の場合 [21, 補題1.2], [17, 命題3.3] 参照）。f が $B[X]$ の多項式であるとき，f が $A[X]$ の分離多項式ならば f は $B[X]$ の分離多項式である，逆も成り立つ。

証明. 定理2.3における条件 (i), (iii) に注意すればよい。

さて，A を環，T を部分環，G を A の自己同型よりなる一つの群とするとき，任意の $\sigma|T\neq1\in G|T$ 及び任意の巾等元 $e^2=e\neq0\in A$ に対して，$(t-\sigma(t))e\neq0$ なる如き T の元 t が存在するならば，T を A の G-strong 部分環とよぶ。

定理 2.5. A を B の G-ガロア拡大とする。A の元 a の G による像の全体を $a_1, \cdots, a_m$ とし、$f = \prod_i (X - a_i)$ とするとき、f は $B[X]$ の単形多項式となり、次の3条件は同値である。

(a) $i \neq j$ ならば $a_i - a_j$ は A の単元である。

(b) f は B 上分離的である。

(c) $B[a]$ は A の B 上分離的な G-strong 部分環である。

証明. $f \in B[X]$ は見やすい、(a) $\Rightarrow$ (b) は定理2.2による、また (b) $\Rightarrow$ (c) は容易にわかる。そこで、(c) を仮定して (a) を示そう。$H = G(B[a])$ とおけば、[3, 定理2.2] より $A(H) = B[a]$、よって A の任意の元 x に対し $t_H(x) = \sum_{\sigma \in H} \sigma(x) \in B[a]$ が成り立つ。いま、G の一元 τ に対して $a - \tau(a) \neq 0$ とし、$N = (a - \tau(a))A$ とおけば、任意の $g(X) \in B[X]$ に対して、$g(a) - \tau(g(a)) = g(a) - g(\tau(a)) = (a - \tau(a))c \in N$、すなわちすべての元 $x \in B[a]$ に対して、$x - \tau(x) \in N$ である。A は B の G-ガロア拡大であるから、$\sum_i u_i \sigma(v_i) = \delta_{1,\sigma}$ $(\sigma \in G)$ なる如き A の元 $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$ が存在する。このとき、$1 = \sum_i u_i t_H(v_i) = \sum_i u_i (t_H(v_i) - \tau(t_H(v_i))) \in N$ が成り立つ。よって $a - \tau(a)$ は A の単元となり、(a) を得る。

定理 2.6. 環拡大 $B[a]/B$ に対して、次の3条件は同値である。

(a) $B[a] \cong B[X]/(f)$ (B-環同型, $a \to X + (f)$) なる如き $B[X]$ の分離多項式 f が存在する。

(b) $B[a]$ は、$B[a]$ を B 上分離的な G-strong 部分環とする B の G-ガロア拡大に埋め込める。

(c) $B[a]$ は B 上射影的, 分離的であり、階数をもつ、但し階数は [2, 定義 2.5.1] の意味である。

証明. (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) は定理2.1, 2.5 及び [3] による。(c) $\Rightarrow$ (a) についてみる。$A = B[a]$ とおき、A の B 上の階数を n とすると、B の任意の極大イデアル M に対して、[2, 命題2.5.4] より A/MA の B/MB 上の階数は n、したがって $\{1, a, \cdots, a^{n-1}\}$ は MA を法として B/MB 上の自由基をなし、$B + Ba + \cdots + Ba^{n-1} + MA = A$ が成り立つ。よって [25, 補題 9.1] から $B + Ba + \cdots + Ba^{n-1} = A$ を得る。ここに、$a^n = c_0 + c_1 a + \cdots + c_{n-1} a^{n-1}$, $c_i \in B$, $f = $

$a^n - c_{n-1} a^{n-1} - \cdots - c_1 a - c_0$ とおけば、$B[X]/(f)$ は $X + (f) \to a$ なる対応で、$B[a]$ に B-同型である。

補題 2.7. f を単形多項式とする。$g \in B[X]$ の最高次係数が巾等元であって、$(g) = (f)$ ならば $g = f$ である。

証明. g の最高次係数を $e = e^2$ とし、$gB[X] = fB[X]$ とすれば、$f = gh$, $g = fk$ なる $B[X]$ の元 h, k が存在する。これよりまず $\deg g \geq \deg f$ がわかる。また、$ef = egek$ から $\deg f = \deg ef \geq \deg eg = \deg g$ である。よって $\deg f = \deg g = \deg ef = \deg eg$, $ek = e$ が成り立つ。故に、$k = lX + t$, $t \in B$ とおけば、$e(lX) = 0$, $et = e$ となり、$f = gh$ より $et = 1$、かくして $e = 1$ となり $k = 1$ 即ち $f = g$ を得る。

補題 2.8. ([17, 定理1.2]). I を $B[X]$ のイデアルとする。剰余環 $B[X]/I$ が B-加群として、有限生成, 射影的であり、階数 ≥ 1 をもつならば $I = (f)$ なる如き $B[X]$ の単形多項式が存在する。

証明. 定理2.6の証明方法と同じ。

さて、$B[X]$ の多項式 f, g に対して、$(f) + (g) = B[X]$ が成り立つとき、f と g は互に素であるとよぶ。また、単形多項式 f が互に素な単形多項式の積としてあらわせないとき、f は既約であるとよぶ。

定理 2.9. ([17, 命題3.4, 3.5]). B が直既約な環ならば、$B[X]$ の単形多項式は互に素かつ既約な単形多項式の積として一意的にあらわされる。また、$B[X]$ の単形多項式 f が既約であるための必十条件は剰余環 $B[X]/(f)$ が直既約になることである。

証明. f を $B[X]$ の単形多項式とする。f が既約でないならば、明らかに $B[X]/(f)$ は直既約でない。逆に $B[X]/(f)$ が直既約でないと仮定する。$B[X]/(f)$ は自由 B-加群であるから、有限個の直既約な部分環への直和分解 $B[X]/(f) = I_1/(f) \oplus \cdots \oplus I_n/(f)$ が得られる、但し I_i は f を含む $B[X]$ のイデアルである。この分解が一意的であることは明らかである。ここに、$F_j = \sum_{i \neq j} I_i$ とおくと、$\bigcap_{j \neq k} F_j + F_k = B[X]$, $\bigcap_j F_j = (f)$ であるから $(f) = \prod_j F_j$ が成り立つ。$B[X]/F_j \cong I_j/(f)$ は B 上有限生成, 射影的であるから階数 ≥ 1 をもち、したがって補題2.8から $F_j = (f_j)$ となるような $B[X]$ の単形多項式 f_j が存在する。よって $(f) = (\prod_j f_j)$ となり、補題2.7から $f = \prod_j f_j$ を得る。

§3. 有限生成，射影的環拡大 $B[a]/B$ とフロベニウス拡大

$f \in B[X]$ に対し，互に直交して和が 1 である B の 0 でない巾等元 $e_1, \cdots, e_m$ で，各 $e_i f$ の最高次係数が e_i となるようなものが存在するとき，f を $B[X]$ の（$\{e_1, \cdots, e_m\}$ に関する）擬単形多項式とよぶ。ここでは [17] における擬単形多項式に関する結果を環拡大の立場から述べる。さて，f を $B[X]$ の擬単形多項式とする。容易にわかるように，互に直交して和が 1 である B の 0 でない巾等元 $u_1, \cdots, u_m$ で，各 $u_i f$ の最高次係数が u_i となり，かつ $\deg f = \deg u_1 f > \deg u_2 f > \cdots > \deg u_n f$ となるようなものが存在する。また，f が $\{e_1, \cdots, e_m\}$ に関して擬単形ならば，B-多元環として，$B[X]/(f) \cong e_1 B[X]/(e_1 f) \oplus \cdots \oplus e_m B[X]/(e_m f)$ である。よって，$B[X]/(f)$ が忠実 B-加群（即ち B の環拡大）になるための必十条件はすべての i に対して $\deg e_i f > 0$ が成り立つことである。この条件をみたす多項式を強擬単形多項式とよぶ。

次に，環拡大 A/B が，B-加群として有限生成，射影的であり，A-加群として $\mathrm{Hom}_B(A, B)$ に同型であるとき，A/B をフロベニウス拡大とよぶ。A/B がフロベニウス拡大ならば，A のすべての元 x に対して，$x = \sum_i h(x r_i) l_i = \sum_i r_i \cdot h(l_i x)$ なる如き $\mathrm{Hom}_B(A, B)$ の元 h と A の元 r_i, l_i $(i = 1, \cdots, s)$ が存在する，逆も成り立つ。このような h をフロベニウス準同型とよぶ（[16]，[26] 参照）。

定理 3.1.（[17, 定理 1.3, 定理 2.1]）. 環拡大 $B[a]/B$ が，B-加群として，有限生成，射影的ならば，$B[X]/(f) \cong B[a]$（B-環同型，$X + (f) \to a$）なるような強擬単形多項式 $f \in B[X]$ が存在する，逆も成り立つ。また，強擬単形多項式 $f, g \in B[X]$ に対して，$(f) = (g)$ ならば $f = g$ である，さらに $B[X]/(f)$ は B のフロベニウス拡大である。

証明. 環拡大 $B[a]/B$ は B-加群として，有限生成，射影的であるとする。しからば，[2, 命題 2.4.15, 定理 2.5.1] より，互に直交して和が 1 である B の巾等元 $e_1, \cdots, e_r$ で，各 $B[a]e_i$ が Be_i-加群として有限生成，射影的かつ階数 > 0 をもつようなものが存在する。よって補題 2.8 から $Be_i[X]/(f_i) \cong B[a]e_i$ なる如き $Be_i[X]$ の単形多項式 f_i が存在する。このとき，$f = f_1 + \cdots + f_r$ とおけば f は $B[X]$ の強擬単形多項式となり，$B[a] \cong B[X]/(f)$ を得る。この逆は見やすい。さて，g が $B[X]$ の強擬単形多項式で，$(g) = (f)$ ならば，任意の i に対して，$e_i f e_i B[X] = e_i g e_i B[X]$ となり，$e_i g$ の最高次係数は巾等元である。故に，補題 2.7 より $e_i f = e_i g$ となり，$f = \sum_i e_i f = \sum_i e_i g = g$ を得る。次に $B[X]/(f)$ が B のフロベニウス拡大であることを示そう。B-多元環として，$B[X]/(f) \cong e_1 B[X]/(e_1 f) \oplus \cdots \oplus e_r B[X]/(e_r f)$ であるから，各 $e_i B[X]/(e_i f)$ が $e_i B$ のフロベニウス拡大であることをいえばよい。そこで，f が単形である場合について考える。$f = \sum_{i=0}^{n} b_i X^i$，$b_i \in B$，$b_n = 1$ とおき，$B[u] = B[X]/(f)$ とおく，但し $u = X + (f)$。$n = 1$ のときは自明であるから $n \geqq 2$ とする。明らかに，$\{1, u, \cdots, u^{n-1}\}$ は $B[u]$ の B 上の自由基である。そこで，$B[u]$ の任意の元 $a = \sum_{i=0}^{n-1} c_i u^i$ $(c_i \in B)$ に対して一意的に定まる B の元 c_{n-1} を $h(a)$ であらわせば，h は $B[u]$ から B への B 準同型となる。さらに，$\{v_{n-i} = \sum_{k=0}^{i-1} b_{n-k} u^{i-(k+1)}; i = 1, \cdots, \}$ も $B[u]$ の B 上の自由基をなす。ここに，$0 \leqq s < n-i$ ならば $u^s v_{n-i} = \sum_{k=0}^{i-1} b_{n-k} u^{i-(k+1)+s}$，$i-(k+1)+s < n-1$，$u^{n-i} v_{n-i} = \sum_{k=0}^{i-1} b_{n-k} u^{n-(k+1)}$，また $0 < t \leqq i-2$ ならば $u^{n-i+1} u^t v_{n-i} = (\sum_{k=0}^{i-1} b_{n-k} u^{n-k}) u^t = (-\sum_{j=0}^{n-i} b_j u^j) u^t$，$j + t < n-1$。よって $h(u^r v_{n-i}) = \delta_{r, n-i}$，$r = 0, 1, \cdots, n-1$，故に h はフロベニウス準同型となり，$B[u]$ は B のフロベニウス拡大である。

系 3.2.（[17, 命題 3.1]）. f を $B[X]$ の単形多項式とする。このとき，f の分解環で，B のフロベニウス拡大となるものが存在する。さらに，B が直既約な環ならば，f の直既約な分解環で，B のフロベニウス拡大となるものがある。

証明. 定理 1.1 より，f は B 上の自由分解環をもつ，それを A とすれば，系 1.1 とフロベニウス拡大の可移性より A は B のフロベニウス拡大であることがわかる。また，A は自由 B-加群であるから $h(u_i v_j) = \delta_{ij}$ なる如きフロベニウス準同型 h と，A の B 上の２組

の生成元 $u_1,\cdots,u_t$; $v_1,\cdots,v_t$ が存在する。 B が直既約な環ならば，A は有限個の直既約な部分環の直和であるからその直和因子の一つ Ae，$e^2=e$ とする。しからば，$u_1e,\cdots,u_te$; $v_1e,\cdots,v_te$ は Ae の Be 上の２組の生成元となり，Ae から Be への Be-準同型 he に対して，$he(u_ie\,v_je)=\delta_{ij}e$ が成り立つ。故に Ae は Be のフロベニウス拡大である。ここに，$B\cong Be$（環同型，$b\to be$）であるから，Ae は B のフロベニウス拡大であり，f の直既約な分解環である。

定理 3.3.（[17, 系]）. f を $B[X]$ の強擬単形多項式とする。$B[X]/(f)$ が B の分離拡大になるための必十条件は f と f' が互に素になることである。

証明. f は $\{e_1,\cdots,e_r\}$ に関して強擬単形であるとする。しからば，$B[X]/(f)\cong e_1B[X]/(e_1f)\oplus\cdots\oplus e_rB[X]/(e_rf)$ となり，$f'=e_1f'+\cdots+e_rf'$，$(e_if)'=e_if'$ である。ここに，$B[X]/(f)$ が B の分離拡大になるための必十条件は $e_iB[X]/(e_if)$ が e_iB の分離拡大になることである。　定理2.3より，この条件は f と f' が互に素になることと同値である。

定理 3.4.（[17, 命題3.2]）. $f=g_1\cdots g_n$ とし，各 g_i は $B[X]$ の強擬単形多項式とする。このとき，f は $B[X]$ の強擬単形多項式である。また，$B[X]/(f)$ が B の分離拡大になるための必十条件は，各 $i\neq j$ に対して g_i,g_j が互に素になり，$B[X]/(g_i)$ が B の分離拡大になることである。

証明. $n=2$ すなわち $f=g_1g_2$ のときに示せばよい。ここに g_1 は $\{e_1,\cdots,e_r\}$ に関して強擬単形，g_2 は $\{u_1,\cdots,u_s\}$ に関して強擬単形とする。明らかに，e_iu_j $(1\leq i\leq r,\ 1\leq j\leq s)$ は巾等元で，それらは互に直交し，$\sum_{i,j}e_iu_j=1$ である。$e_iu_j\neq 0$ ならば，$e_iu_jf=(e_iu_jg_1)(e_iu_jg_2)$ から e_iu_jf の最高次係数は e_iu_j であり，$\deg e_iu_jf>\deg e_if>0$ である。故に f は強擬単形となる。次に $f'=g_1'g_2+g_1g_2'$ に対し，$(f)+(f')=B[X]$ ならば $B[X]=(f)+(f')=(g_1)+(g_2)=(g_i)+(g_i')$ $(i=1,2)$，逆に $B[X]=(g_1)+(g_2)=(g_i)+(g_i')$ $(i=1,2)$ ならば $(f')+(g_1)=(f')+(g_2)=B[X]=(f')+(g_1g_2)=(f')+(f)$ が成り立つ。

故に，定理3.3よりこの定理の後半を得る。

定理 3.5. A を B の拡大環，B に属する A の単元はすべて B の単元であるとする（例えば，B が A の直和因子，あるいは A が B の整拡大の場合 [17, 命題3.3] 参照）。f を $B[X]$ の強擬単形多項式とするとき，$A[X]/(f)$ が A の分離拡大ならば $B[X]/(f)$ は B の分離拡大である，逆も成り立つ。

証明. f は $\{e_1,\cdots,e_r\}$ に関して強擬単形であるとする。$A=Ae_1\oplus\cdots\oplus Ae_r$ から各 Be_i に属する Ae_i の単元は Be_i の単元となる。ここに，$A[X]/(f)\cong e_1A[X]/(e_1f)\oplus\cdots\oplus e_rA[X]/(e_rf)$ が A の分離拡大ならば，各 $e_iA[X]/(e_if)$ が e_iA の分離拡大，したがって，系 2.4 より各 $e_iB[X]/(e_if)$ が e_iB の分離拡大となり，$B[X]/(f)$ は B の分離拡大である。逆は明らかである。

注意. この節で述べたことは系3.2を除き，環拡大を多元環で，強擬単形多項式を擬単形多項式（但し次数は１以上）でおきかえることによっても成立している。また，$f=gh$，$g,h\in B[X]$，g が擬単形であるとき，f が擬単形になるための必十条件は h が擬単形になることである。何となれば，f が $\{e_1,\cdots,e_r\}$ に関して擬単形，g が $\{u_1,\cdots,u_s\}$ に関して擬単形ならば，任意の $e_iu_j\neq 0$ に対し，$e_iu_jf=(e_iu_jg)(e_iu_jh)$ より e_iu_jh の最高次係数は e_iu_j になることがわかり，h は擬単形となる。同様にして逆も示される。（[17] 参照）

§4. ユニフォーム分離多項式とユニフォーム環

ここでは[9]における結果の部分的紹介をし，定理等の証明はしない。 Bの巾等元全体のなす集合を$\mathcal{B}(B)$であらわすとき，$\mathcal{B}(B)$は $e\cup f=e+f-ef$, $e\cap f=ef$ なる算法によってブール代数をなす。このブール代数の素イデアル全体のなすスペクトラムを $\mathrm{Spec}\,\mathcal{B}(B)$ であらわす，但し $x\in\mathrm{Spec}\,\mathcal{B}(B)$ の近傍の基は $U_e=\{y\in\mathrm{Spec}\,\mathcal{B}(B);\, e\in y\}$, $e\in x$ である([29],[30])。 さて，$x\in\mathrm{Spec}\,\mathcal{B}(B)$ とする。 [30,(2.13)]より，剰余環 B/Bx は直既約である。これを B_x であらわし，自然準同型 $B[X]\to B_x[X]$ による $f\in B[X]$ の像を f_x であらわす。いま，f を $B[X]$ の分離多項式とする。このとき，f_x は B_x上射影的，かつ直既約な分解環をもち，それは B_x-環同型を除いて一意的にきまり，また B_x のガロア拡大である([15,§2])。このガロア拡大のガロア群は x のえらび方によってかわる。このガロア群が，$\mathrm{Spec}\,\mathcal{B}(B)$ の各元に対し，その適当な近傍の上で同型になるとき，f はユニフォームであるということにする。

定理4.1.([9,定理2.1,2.2]). f が $B[X]$ のユニフォーム分離多項式ならば，f の B上射影的な分解環 N で，$\mathcal{B}(N)=\mathcal{B}(B)$ をみたすものがある。この分解環は B-環同型を除いて一意的である。

さて，任意の元 $b\in B$ に対して，各元 $x\in\mathrm{Spec}\,\mathcal{B}(B)$ のある近傍の上で $\varphi^x_y(b_y)=b_x$ が成り立つような環同型の集合 $\{\varphi^x_y;\, x,y\in\mathrm{Spec}\,\mathcal{B}(B)\}$ が存在する，B をユニフォーム環とよぶ。 また，有限個のユニフォーム環の直和を弱ユニフォーム環とよぶ。

定理4.2.([9,定理2.3]). B が弱ユニフォーム環であるための必要十分条件はある全不連結，完閉，ハウスドルフ位相空間 X_i $(i=1,\dots,n)$ とある直既約な環 B_i $(i=1,\dots,n)$ が存在して，$B\cong C(X_1,B_1)\oplus\cdots\oplus C(X_n,B_n)$ が成り立つことである，但し B_i は離散位相をもつ位相空間で，$C(X_i,B_i)$ は X_i から B_i への連続

写像全体のなす環である。

定理4.3.([9,命題2.4,2.5]). B が弱ユニフォーム環ならば，$B[X]$の任意の分離多項式はユニフォームであり，それのB上射影的な分解環 N で，$\mathcal{B}(N)=\mathcal{B}(B)$ をみたすものは弱ユニフォーム環である。

環拡大 Γ/B において，Γの有限個の元 $a_1,\dots,a_n$ を任意に与えたとき，B上有限生成，射影的な分離部分多元環で $a_1,\dots,a_n$ を含むものが存在するとき，Γ/B を局所分離的環拡大とよぶ。次の定理からユニフォーム環には体の分離閉包にあたるものが存在することがわかる。

定理4.4.([9,定理2.6]). B がユニフォーム環ならば，次の条件をみたす環拡大 Γ/B が存在する。

(1) Γ/B は局所分離的である。

(2) Γ はユニフォーム環であり，$\mathcal{B}(\Gamma)=\mathcal{B}(B)$ である。

(3) Γ の有限個の元 $a_1,\dots,a_n$ を任意に与えたとき，$a_1,\dots,a_n$ を含む部分環 $B[c_1,\dots,c_m]$ で，各 c_i が $B[c_1,\dots,c_{i-1}][X]$ の分離多項式の根となるようなものが存在する。

(4) $\Gamma[X]$ の分離多項式はすべて一次式の積に分解する。

さらに，このような拡大環 Γ/B は B-同型を除いて一意的である。

注意. B, Γ/B を定理4.4における如きものとし，Γの B-自己同型全体のなす群を G とする。このとき，$\Gamma(G)=B$ は一般にわからないが，B が直既約な環ならば，Γ は B の([15]のいみにおける)分離閉包の一つの部分環と B-同型になり，$\Gamma(G)=B$ が成り立つ，さらに G は，有限位相に関して，完閉，ハウスドルフ位相群となる([9,定理1.1,1.2])

分離多項式と分離拡大 II

中島 惇（岡山大）

R を単位元 1 をもつ可換環，G を有限アーベル群とする．[3] の意味での G をガロア群とする R のガロア拡大全体を，ガロア拡大として同型なもので類別した集合を $E(GR)$ とする．$E(GR)$ はある演算のもとで群となるが，このような群の構造は R の可換な拡大については Harrison [14] によって考察され，より一般には Chase [4], [6], Orzech [27], [28] で考察されている．ここでは Janusz [15] において導入された R 上の分離多項式についての最近の結果（Nagahara [19]）を用いて，R の巡回拡大の構造について述べ，R が直既約の場合，p 次の巡回拡大のなす群と R の [15] の意味での分離閉包の自己同型群及び 2 次の Harrison コホモロジー群との関係を述べ，最後に Chase [4], Harrison [14], Orzech [27], [28] らの結果の概略を述べる．

以下，R は単位元 1 をもつ可換環とし，特にことわらない限り，R の環拡大はすべて可換で R と共通の単位元をもち，環準同型は単位元を単位元にうつし，加群はすべて固有であるとする．

1. 巡回 p^m-拡大．

以下しばらくの間，R は $GF(p)$ $(p \neq 0)$ 上の多元環とする．

定義． A を R の環拡大とする（これを A/R とかく）．A/R が位数 p^m の巡回群 (σ) をもつガロア拡大のとき，A/R を巡回 p^m-拡大という．

はじめに巡回 p-拡大を構成する．

補題 1.1（[19, 系 4]）．任意の $r \in R$ に対して，$X^p - X - r$ は $R[X]$ の分離多項式である．

補題 1.2（[22, 補題 0]）．A を任意の環，σ を A の有限位数の環自己同型写像とする．もしも $t_G(a) (= \sum_{\tau \in G} \tau(a)) = 1$，$t_G(b) = 0$ $(G = (\sigma))$ なる元 $a, b \in A$ が存在すれば，$\sigma(c) = c + b$ となる元 $c \in A$ がある．

定理 1.3. $f(X) = X^p - X - r \in R[X]$ とする．このとき $R[X]/(f(X))$ は $\tau : R[X]/(f(X)) \ni x \longmapsto x + 1 \in R[X]/(f(X))$ $(x = X + (f(X)))$ によって生成されるガロア群をもつ R の巡回 p-拡大である．逆に A/R をガロア群 (σ) をもつ巡回 p-拡大とすれば，$\sigma(u) = u + 1$ となる元 $u \in A$ が存在する．このとき $u^p - u \in R$，$R[u] = A$ である．さらにガロア拡大として $R[X]/(X^p - X - (u^p - u)) \cong A$ である．

証明．補題 1.1 から $R[X]/(f(X))$ は R の分離拡大である．τ は位数 p の自己同型で x が $R[X]/(f(X))$ の基底だから前半は容易．逆は，[3, 補題 1.6] と補題 1.2 から $\sigma(u) = u + 1$ となる元 $u \in A$ をとれば，$R[u]$ はガロア群 $(\sigma | R[u])$ をもつ巡回

p-拡大だから, ガロア coordinate を使って $R[u]=A$ を得る. その他は明らかである.

定理 1.4. A/R をガロア群 (σ) をもつ巡回 p^e-拡大とすれば $t_{(\sigma)}(u)=1$, $\sigma(b)-b=u^p-u$ となる元 $u, b\in A$ が存在する. さらに $A[x]/(x^p-x-b)$ は $\tau: \sum_i c_i x^i \longmapsto \sum_i \sigma(c_i)(x+u)^i$ から生成されるガロア群をもつ巡回 p^{e+1}-拡大である. 逆に A_*/R をガロア群 (ρ) をもつ巡回 p^{e+1}-拡大とし, $A=A_*^{(\rho^{p^e})}$ とすると, A/R は $\rho|A=\sigma$ をガロア群とする巡回 p^e-拡大である. さらに $t_{(\sigma)}(u)=1$, $\sigma(b)-b=u^p-u$ となる元 $u, b\in A$ が存在し, ガロア拡大として $A[x]/(x^p-x-b)\cong A_*$ である.

証明. 前半: 条件をみたす元 $a, b\in A$ が存在することは [3, 補題 1.6] と補題 1.2 から明らか. そこで $A[\bar{x}]=A[x]/(x^p-x-b)$ とかくと, A/R, $A[\bar{x}]/A$ はそれぞれガロア群 $(\tau|A)$, (τ^{p^e}) をもつ巡回 p^e-, p-拡大であるから, ガロア coordinate を使って計算すれば, $A[\bar{x}]$ は求めるものである. 後半: はじめの部分は明らか. $t_{(\sigma)}(u)=1$ となる元 $u\in A$ があるから, $t_{(\rho)}(u)=0$ に注意すれば, $\rho^{p^e}(x)=x+1$ なる元 x の存在することがわかる. $b=x^p-x$ とおけば, 定理 1.3 の後半から $A[x]/(x^p-x-b)\cong A[\bar{x}]=A_*$ である.

次に R が 0, 1 以外に巾等元をもたない場合, すなわち, R が直既約な場合を考えてみる.

補題 1.5 ([22, 補題 1.2]). R を直既約とし $f(x)=x^p-x-a\in R[x]$ とする. このとき $f(x)$ が既約であるための必要十分条件は任意の $r\in R$ に対して $f(r)\neq 0$ となることである.

この補題から

定理 1.6. R, $f(x)$ を補題 1.5 におけるものとする. このとき $R[x]/(f(x))$ が直既約であるための必要十分条件は, 任意の $r\in R$ に対して $f(r)\neq 0$ となることである.

従ってこれより

定理 1.7. R を直既約とする. このとき R の直既約な巡回 p-拡大が存在するための必要十分条件は任意の $r\in R$ に対して $r^p-r-a\neq 0$ となる元 $a\in R$ が存在することである.

補題 1.8 ([22, 補題 1.3]). A/R をガロア群 (σ) をもつ直既約な巡回 p^e-拡大とする. このとき $t_{(\sigma)}(a)=1$, $\sigma(b)-b=a^p-a$ となる元 $a, b\in A$ に対して, $A[x]/(x^p-x-b)$ は直既約である.

この補題と定理 1.4 から

定理 1.9. A/R をガロア群 (σ) をもつ巡回 p^e-拡大とし, $B=A^{(\sigma^p)}$ とおく. このとき A が直既約であるための必要十分条件は B が直既約になることである.

ガロア群 G が, $G=(\sigma_1)\times(\sigma_2)\times\cdots\times(\sigma_n)$, (σ_i) は位数 p^{e_i} の巡回群, の場合, 上記のいくつかの結果の拡張が得られるが, これらについては[22]を参照されたい.

R が 1 の原始 n 乗根 ζ を含み, $1-\zeta^i$ $(i=1,2,\cdots,n-1)$ が R の単元であるとし, $\Gamma=\{1,\zeta,\cdots,\zeta^{n-1}\}$ とおく. A/R を環拡大とし, m を n の約数とする. さらに次の条件をみたす元 $a\in A$ と A の自己同型 σ が存在するとする.

(1) σ の位数は m である.

(2) $A^{(\sigma)}=R$.

(3) $\sigma(a)=\eta$ となる 1 の原始 m 乗根 η が Γ に存在する.

このとき A/R はガロア群 (σ) をもつガロア拡大であるが, A/R を強巡回 m-拡大ということにする.

X^n-u (u は R の単元) は分離多項式である([23], 補題1.1). 従って強巡回 n-拡大について今までに述べた定理に対応する結果が得られるが, これらについては[23]を参照されたい.

2. 巡回 p-拡大のなす群. Harrison[14] は可換なガロア拡大のなす群 $T(G,R)$ ($E(G,R)$ の部分群) について functorial な立場から研究している. Chase[4] は $T(G,R)$ と2次の Harrison コホモロジー群との関係を与え, さらに[6]では $T(G,R)$ をもっと一般の圏で議論している.

ここでは[6]を可換な R-多元環の圏にいいかえて述べ第一節における巡回 p-拡大のなす群の構造を与える. 以下 $\otimes=\otimes_R$, 多元環は R-多元環を意味するものとする. また H は structure maps $(\mu,\eta,\Delta,\varepsilon)$, antipode λ をもつ可換な Hopf R-多元環で, R-加群として有限生成射影的であるとし, 以下 Hopf 多元環といえば, このようなものとする.

定義. A が H-object であるとは, A が可換な多元環で次の図式を可換にする多元環準同型 $\alpha: A\longrightarrow A\otimes H$ が存在するときをいう.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\ \alpha\ } & A\otimes H \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\Delta} \\ A\otimes H & \xrightarrow{\ \alpha\otimes 1\ } & A\otimes H\otimes H \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\ \alpha\ } & A\otimes H \\ & {\scriptstyle\cong}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle 1\otimes\varepsilon} & \\ & A\otimes R=A & \end{array}$$

(α を A の structure map ということにする). A がガロア H-object であるとは, A が H-object で, 次の条件をみたすときをいう.

(1) A は faithfully flat な R-加群.

(2) $\gamma: A\otimes A\ni x\otimes y\longmapsto(x\otimes1)\alpha(y)\in A\otimes H$ が多元環同型.

A, B を H-object とする. $f: A\longrightarrow B$ が H-object の準同型であるとは, f が多元環準同型で, $(f\otimes1)\alpha=\beta f$ (α, β はそれぞれ A, B の structure map) が成り立つときをいう.

$f: H\longrightarrow H'$ を Hopf 多元環準同型, A をガロア H'-object とする. このとき

$$\tilde{f}(A) \longrightarrow A\otimes H \underset{(1\otimes t\otimes 1)(1\otimes \Delta)}{\overset{\alpha\otimes 1}{\rightrightarrows}} A\otimes H'\otimes H$$

($\tilde{f}(A) \longrightarrow A\otimes H$ は inclusion map) は equalizer diagram であり，$\tilde{f}(A)$ はガロア H-object である([6，定理 2.20])．とくに A, B をガロア H-object とすると，$A\otimes B$ は自然にガロア $H\otimes H$-object であるから $\tilde{\Delta}(A\otimes B)$ を使ってガロア H-object の同型類の集合 $E(H)$ に次のようにして和を定義することができる．

$$(A)+(B)=(\tilde{\Delta}(A\otimes B)) \quad ((A),(B)\in E(H)).$$

この演算に関して $E(H)$ はアーベル群となり，(H) は $E(H)$ の零元である([6，定理 3.1])．

G を有限群とするとき，群多元環 RG に対して $GR=\mathrm{Hom}_R(RG, R)$ は有限生成射影的な R-加群であり，さらに antipode をもつ可換な Hopf 多元環となる．この場合 A がガロア GR-object であることと A/R がガロア群 G をもつガロア拡大であることとは同等である([6，p.59])．

以下しばらくの間，$G=(\sigma)$ を位数 p の有限巡回群，R を $GF(p)$ 上の多元環とする（R の巡回多元環拡大はすべて可換であることを注意しておく([5，定理 5.3] 又は [8，定理 11])．定理 1.3 をいいなおせば

補題 2.1. 任意の $r\in R$ に対して $[x, r]=R[X]/(X^p-X-r)$ はガロア GR-object で，その structure map は $\alpha: [x, r]\ni x$

$\longmapsto \sum_i (x+i)\otimes v_i \in [x, r]\otimes GR$ である．ここで v_i は $v_i(\sigma^j)=\delta_{ij}$ となる GR の基底である．逆に A がガロア GR-object ならば GR-object として $A\cong[x, r]$ となる元 $r\in R$ が存在する．

定理 2.2. $A=[x, r]$，$B=[y, s]$ をガロア GR-object とすれば，$\tilde{\Delta}(A\otimes B)=[z, r+s]$ である．

証明．$z=x\otimes 1\otimes 1+1\otimes y\otimes 1+\sum_{i=0}^{p-1} i(1\otimes 1\otimes v_i)$ とおくと $z\in\tilde{\Delta}(A\otimes B)$ であり，α^* を $\tilde{\Delta}(A\otimes B)$ の structure map とすれば，$\alpha^*(z)=\sum_{i=0}^{p-1}(z+i)\otimes v_i$ であることから補題 2.1 を使えばよい．

この定理から $(GR)=([x, 0])$，すなわち $GR\cong[x, 0]$．故に $[x, s]\cong GR$ となるための必要十分条件は $s=r^p-r$ となる元 $r\in R$ が存在することである．従って

定理 2.3. $E(GR)\cong R^+/\{r^p-r \mid r\in R\}$（群として）．ここで R^+ は R の加法群とする．

R を直既約とする．Ω を [15] の意味で R の分離閉包，Π を Ω の多元環自己同型全体のなす群とし，A/R を巡回 p-拡大で，そのガロア群を G とする．$\mathfrak{S}=\{S \mid S/R$ が G をガロア群とするガロア拡大であるような Ω の部分環$\}$ とおけば，定理 2.3，定理 1.7 から次のことは同値

である.

(i) $A \ncong GR$.

(ii) A が自己双対.

(iii) $A \cong$ [illegible] となる $S \in$ [illegible] が存在する.

いま Π から G への連続写像 $\varphi \in Hom_c(\Pi, G)$ に対して $(\Omega^{ker(\varphi)}) \in E(GR)$ だから, この対応 $\varphi \longmapsto (\Omega^{ker(\varphi)})$ によって

定理 2.4. $Hom_c(\Pi, G) \cong E(GR)$ (群として).

Harrison コホモロジー群との関係を調べるためには正規底について調べなければならないが, いまの場合は簡単な計算で正規底をもつことがわかる(もっと一般には[27, 定理4.1]を参照のこと). 従って[27, 定理2.2]から

定理 2.5. $Hom_c(\Pi, G) \cong E(GR) \cong H^2(R, G) \cong R^+/\{r^p - r \mid r \in R\}$ (群として). ここで $H^2(R, G)$ は2次の Harrison コホモロジー群であ

R が1の原始 n 乗根 ζ を含み, $1 - \zeta^i$ $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ と n が R の単元のとき, R のガロア拡大で強巡回 n-拡大だけを考え, その同型類を $\mathcal{S}E(GR)$ とすれば, 次のことが成りたつ.

(1) $\mathcal{S}E(GR)$ は $E(GR)$ の部分群である.

(2) $\mathcal{S}E(GR) \cong U(R)/U(R)^n$ (群として). ここで $U(R)$ は

R の単元全体のなす乗法群である.

強巡回 n-拡大も正規底をもつが, 一般には $\mathcal{S}E(GR) \subsetneq E(GR)$ であるから, 巡回 p-拡大に対応する同型(定理2.5)はすべての巡回 n-拡大が正規底をもつ場合, 例えば R が半局所環のときには得ることができる.

3. Harrison コホモロジー群と関手 E. 一般に E は R-加群として有限生成射影的で, 可換, かつ antipode をもつ Hopf 多元環の圏からアーベル群の圏への加法的な関手である([6, 定理3.11]). $E(GR)$ は R の非可換な拡大まで含めた形で群となるが, その場合は加法的でない([12, p.249]). これは Harrison が定義 $T(G, R)$ ([14, p.3]) の拡張である. R の巡回多元環拡大はすべて可換であるから (強)巡回 p-(n-)拡大においては $T(G, R) \cong E(GR)$ である. G をアーベル群とするとき関手 $T(-,-)$ については以下のことが知られている([14]).

定理 3.1([14, 定理3]). $1 \longrightarrow J \xrightarrow{i} G \xrightarrow{j} G/J \longrightarrow 1$ とアーベル群の完全系列とすれば

$$0 \longrightarrow T(J, R) \xrightarrow{T(i, R)} T(G, R) \xrightarrow{T(j, R)} T(G/J, R)$$

はアーベル群の完全系列である.

$f: R \to S$ を環準同型（S は可換とする）とすると

$$T(G, f): T(G,R) \ni A \mapsto A \otimes S \in T(G,S)$$

なる群準同型が得られるが

定理3.2（[14, 定理6]）. R を直既約, H を有限群, $S \in T(H,R)$ を直既約とすれば, $\ker(T(G,f)) \cong Hom(H,G)$ である.

定理3.3（[14, 定理7]）. R は直既約とする. 任意の $B \in T(G,R)$ に対して, G の部分群 H と $A \in T(H,R)$ で次の条件をみたすものが存在する.

(1) A は直既約,

(2) $T(i,R)(A) = B$. ここで $i: H \to G$ は inclusion map.

定理3.4（[14, 定理8]）. Z_n を位数 n の巡回群とし $T(Q/Z, R) = \varinjlim T(Z_n, R)$ とおく. このとき R の有限アーベル拡大と $T(Q/Z, R)$ の有限部分群の間に1対1の対応がある.

Harrison コホモロジー群と Kummer 理論については [4], [5] を参照されたい.

Orzech [27], [28] は R の非可換な拡大とも含めて E と関手圏のコホモロジー論との関係, E と Harrison

コホモロジー群及び Amitsur コホモロジー群との関係を研究しているが, 正規底をもたない場合, 結果は複雑である. 正規底をもつ場合には次のことが知られている.

定理3.5（[27, 定理2.2]）. G をアーベル群, $N(GR) = \{(A) \in E(GR) \mid A$ は正規底をもつ$\}$ とすれば, $N(GR) \cong H^2(R, G)$ である.

定理3.6（[4, 定理3.8]）. R を直既約, R のガロア拡大はすべて正規底をもつとする. J を有限巡回群, Π を Grothendieck の意味の R の基本群とすれば, $Hom_c(\Pi, J) \cong E(JR) \cong H^2(R, J)$ である.

最後に強巡回拡大について Childs は次の結果を得ている.

定理3.7（[7, 定理7]）. $G = \prod_{i=1}^{k} G_i$, G_i は位数 e_i の巡回群, G の exponent を n, R は1の原始 n 乗根と $1/n$ を含むとする. さらに $E(GR)$, $N(GR)$ を定理3.5におけるものとし, それぞれの可換な拡大の強巡回全体のなす部分群を $E_c(GR)$, $N_c(GR)$ と表わすことにすれば

$$E(GR)/N(GR) \cong E_c(GR)/N_c(GR) \cong \prod_{i=1}^{k} Pic(R)(e_i)$$

が成り立つ. ここで $Pic(e_i) = \{x \in Pic(R) \mid e_i x = 0\}$ である.

この定理において $U(R) \ni 1-\zeta^i$ $(i=1,2,\ldots,n-1)$, $G=G_1$, $e_1=n$ である場合を考えれば, R の巡回拡大で強巡回拡大でないものは強巡回拡大を法として $\mathrm{Pic}(R)(n)$ だけ存在することがわかる.

文　献

[1] M. Auslander and O. Goldman: The Brauer group of a commutative ring, Trans. Amer. Math. Soc., 97(1960), 367-409.

[2] N. Bourbaki: Algèbre commutative, Chapitres I-II, Actualites Sci. Ind. No. 1920, Hermann, Paris, 1962.

[3] S. U. Chase, D. K. Harrison and A. Rosenberg: Galois theory and Galois cohomology of commutative rings, Mem. Amer. Math. Soc., No. 52(1965), 15-33.

[4] S. U. Chase: Abelian extensions and a cohomology theory of Harrison, Proceedings of the conference on categorical algebra, La Jolla (1965), Springer-Verlag, New York, 1966, 375-403.

[5] S. U. Chase and A. Rosenberg: A theorem of Harrison, Kummer theory, and Galois algebras, Nagoya Math. J. 27(1966), 663-685.

[6] S. U. Chase and M. E. Sweedler: Hopf algebras and Galois theory, Lecture notes in Mathematics, No. 97, Springer-Verlag, Berlin (1969).

[7] L. N. Childs: Abelian Galois extensions of rings containing roots of unity, Illinois J. Math. 15(1971), 273-280.

[8] F. DeMeyer: Some notes on the general Galois theory of rings, Osaka J. Math. 2(1965), 117-127.

[9] F. DeMeyer: Separable polynomials over a commutative ring, Rocky Mountain J. Math. 2(1972), 299-310.

[10] F. DeMeyer and E. Ingraham: Separable algebras over commutative rings, Lecture notes in Mathematics, No. 181, Springer-Verlag, Berlin (1971).

[11] R. L. Elkins: Characterization of separable ideals, Pacific J. Math., 34(1970), 45-49.

[12] G. S. Garfinkel and M. Orzech: Galois extensions as modules over the group ring, Canadian J. Math. 22(1970), 242-248.

[13] O. Goldman: Determinants in projective modules, Nagoya Math. J., 18 (1961), 27-36.

[14] D. K. Harrison: Abelian extensions of commutative rings, Mem. Amer. Math. Soc., No. 52(1965), 1-14.

[15] G. J. Janusz: Separable algebras over commutative rings, Trans. Amer. Math. Soc., 122(1966), 461-479.

[16] F. Kasch: Projektive Frobenius-Erweiterungen, Sitzungsber. Heidelberger Akad. (1960/61), 89-109.

[17] Y. Miyashita: Commutative Frobenius algebras generated by a single element, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I, 21(1971), 166-176.

[18] T. Nagahara: A note on Galois theory of commutative rings, Proc. Amer. Math. Soc., 18(1967), 334-340.

[19] T. Nagahara: On separable polynomials over a commutative rings, Math. J. of Okayama Univ., 14(1970), 175-181.

[20] T. Nagahara: Characterization of separable polynomials over commutative ring, Proc. Japan Acad., 46(1970), 1011-1015.

[21] T. Nagahara: On separable polynomials over a commutative ring II, Math. J. of Okayama Univ., 15(1972), 149-162.

[22] T. Nagahara and A. Nakajima: On cyclic extensions of commutative rings, Math. J. of Okayama Univ., 15(1971), 81-90.

[23] T. Nagahara and A. Nakajima: On strongly cyclic extensions of commutative rings, Math. J. of Okayama Univ., 15(1971), 91-100.

[24] A. Nakajima: On a group of cyclic extensions over commutative rings, Math. J. of Okayama Univ., 15(1972), 163-172.

[25] D. G. Northcott: An Introduction to Homological Algebra, Cambridge, 1960.

[26] T. Onodera: Some studies on projective Frobenius extensions, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I, 18(1964), 89-107.

[27] M. Orzech: A cohomological description of abelian extensions, Trans. Amer. Math. Soc., 137(1969), 481-499.

[28] M. Orzech: A cohomology theory for commutative Galois extensions, Math. Zeitschrift, 105(1968), 128-140.

[29] R. S. Pierce: Modules over commutative regular rings, Mem. Amer. Math. Soc., No. 70(1967).

[30] O. E. Villamayor and D. Zelinsky: Galois theory with infinitely many idempotents, Nagoya Math. J., 35(1969), 83-98.

環の巡回拡大について

信州大学　岸本量夫

Bを単位元1を持つ直既約な環，$G=(\sigma)$ を σ を生成元に持つ有限巡回群とする。Gをガロア群とするBのガロア拡大で (i) 直既約 (ii) 左B-加群とみた場合，Bを直和因子として含む環 A について考察する。

以下，Bのガロア拡大とは (i),(ii) を満たすガロア拡大を意味するものとする。特にGとして内部自己同型群がとれる場合，内部ガロア拡大と呼ぶことにする。

環 S の元 t に対して I_t で t に依る内部微分，$U(S)$ で S の正則元の全体を，$U(S)\ni t$ に対して $\tilde{t}$ で t に依る内部自己同型をそれぞれ示すものとする。

1° B上の多項式環

ρ を B の自己準同型，D を B の $(1,\rho)$-微分，すなわち，Bの任意の元 a, b に対して

$$D(a+b)=D(a)+D(b)$$
$$D(ab)=D(a)\rho(b)+aD(b)$$

を満たす写像とする。

$B[X;\rho,D]=\{\sum X^i b_i \mid b_i\in B\}$ とし，Bの元 b に対して $bX = X\rho(b)+D(b)$ と定義し，分配律を仮定すれば $B[X;\rho,D]$ は結合律を満たす環となる。これを B上の多項式環という。

$f(X)$ を $B[X;\rho,D]$ の多項式とする。$f(X)$ から生成された両側イデアルに依る $B[X;\rho,D]$ の剰余環が直既約となるとき，$f(X)$ を直既約多項式と呼ぶ。

以下 $\rho=1$ または $D=0$ の場合を考察するが，その場合，それ等多項式環をそれぞれ $B[X;D]$，$B[X;\rho]$ と記すことにする。

2° GF(p)上の多元環の場合

Bを素標数 p の素体 $GF(p)$ 上の多元環，$G=(\sigma)$ を位数 p の巡回群とする。

定理 1. BがG-ガロア拡大を有するための必要十分条件は

(1) $D^p - D = I_b$，$D(b)=0$

(2) $X^p - X - b$ が $B[X;D]$ で直既約多項式

となる $b\in B$ と Bの微分 D が存在することである。より詳細には A が B の G-ガロア拡大なるとき，Aの元 x で (i) $I_x|B=D$，$x^p-x\in B$ (ii) $A=B\oplus xB\oplus x^2B\oplus\cdots\oplus x^{p-1}B$ (iii) $\sigma(x)=x+1$ を満たす A の B-基底 $\{1, x, x^2, \dots, x^{p-1}\}$ が存在する。

逆に (1),(2) を満たす b，D が存在すれば (i) X^p-X-b が $B[X;D]$ の中心に属する(直既約)多項式，(ii) $A^*=B\oplus x^*B\oplus x^{*2}B\oplus\cdots\oplus x^{*p-1}B = B[X;D]/(X^p-X-b)B[X;D]$ (x^* は $(X^p-X-b)B[X;D]$ を法とするXの剰余類) が $\sigma^*(x^*)=x^*+1$ で定義される $G^*=(\sigma^*)$ をガロア群とするガロア拡大となる。更に $\varphi: x\longrightarrow x^*$ が $\varphi\sigma=\sigma^*\varphi$ を満たす A から A^* への B-同型写像を与える。

証明　必要性：[[4], P65] から，A に $\sigma(x)=x+1$ を満たす x が存在することが知られる。$I_x|B=D$ が Bの微分，$x^p-x\in B$ なることは容易に知られる。$b=x^p-x$ とすれば D，b は(1)を満たす。$T=B+xB+x^2B+\cdots+x^{p-1}B$ は A の部分環となるが T の元 t に対して $t_1=\sigma(t)-t$，$t_k=\sigma(t_{k-1})-t_{k-1}$ の操作を繰り返して $\{1, x, x^2, \dots, x^{p-1}\}$ が B上一次独立なること，$T^\sigma = B$ なることが知られる。

$1\leq j\leq p-1$ に対して $t_j=x+j$，$u_j=j^{-1}$，$t'_j=-(j^{-1})$，$u'_j=x$ とすれば $t_ju_j+t'_ju'_j=1$，$t_j\sigma^j(u_j)+t'_j\sigma^j(u'_j)=0$ で，各 j に対して t_j, t'_j, u_j, u'_j は T の元であるから $\sum_{i=1}^{n} x_i\sigma^k(y_i)=\delta_{1,\sigma^k}$ を満たす元 $\{x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n\}$ が存在する。したがって [[3] 定理2.3] より $T=A$ で A は $B[X;D]/(X^p-X-b)B[X;D]$ と同型となるから X^p-X-b は $B[X;D]$ で直既約多項式となる。

十分性：(1) から $X^p - X - b$ が $B[X;D]$ の中心に属することが知られる。したがって $X^p - X - b$ から生成される右イデアル $(X^p - X - b)B[X;D]$ は $B[X;D]$ の両側イデアルである。

Φ を $\Phi(f(X)) = f(X+1)$ で定義される $B[X;D]$ の対応とすれば Φ は $X^p - X - b$ を変えない $B[X;D]$ の B-自己同型で $\Phi^p = 1$ となる。このことから Φ は $A^* = \oplus_{i=0}^{p-1} x^{*i} B = B[X;D]/(X^p - X - b)B[X;D]$ の B-自己同型 σ^* を誘導し、$\sigma^*(x^*) = x^* + 1$ となる。A^*/B が (σ^*)-ガロア拡大であることは、必要性の部分と同様の方法で証明できる。

系 1. B が G-内部ガロア拡大 A を有するための必要十分条件は

(1) $D^p - D = I_b$, $D(b) = 0$

(2) $X^p - X - b$ が $B[X;D]$ の直既約多項式

(3) $D(z) = z$

となる $b \in B$, $z \in U(Z)$ (Z は B の中心) と B の微分 D が存在することである。

証明 必要性：定理 1 から $A = \oplus_{i=0}^{p-1} x^i B$, $\sigma(x) = x + 1$ となる x が存在する。$\sigma = \tilde{z} \in \tilde{V}$ (V は B の A における可換子環) とすれば $z \in V^{\tilde{z}} = V \cap B = Z$ から $z \in V = Z$ となる。$\sigma(x) = z x z^{-1} = x + 1$ から $D(z) = zx - xz = z$ となる。

十分性：定理 1 から G^*-ガロア拡大 $A^* = \oplus_{i=0}^{p-1} x^{*i} B$, $\sigma^*(x^*) = x^* + 1$ が存在するが $z = D(z) = z x^* - x^* z$ から $z x^* z^{-1} = x^* + 1$ となり $z^p x^* z^{-p} = x^* + p = x^*$ から $\sigma^* = \tilde{z}$ としてよい。

3° 1 の巾根を含む場合

以下、B の中心 Z は 1 の原始 n 乗根 ζ を含み、n, $1 - \zeta^i$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ は $U(Z)$ の元、$G = (\sigma)$ の位数は n とする。

B の G-ガロア拡大 A が (i) その中心に ζ を含み (ii) $\{\sum_{i=0}^{n-1} \zeta^i \sigma^i(a) \mid a \in A\} \cap U(A) \neq \phi$ のとき 強 G-ガロア拡大と呼ぶ。

定理 2 B が強 G-ガロア拡大 A を有するための必要十分条件は

(1) $\rho^n = \tilde{b}^{-1}$, $\rho(b) = b$, $\rho(\zeta) = \zeta$

(2) $X^n - b$ が $B[X;\rho]$ の直既約多項式

となる $b \in U(B)$ と B の自己同型 ρ が存在することである。より詳細には、A が強 G-ガロア拡大とすれば $U(A)$ の元 x で (i) $\tilde{x}^{-1} | B = \rho$, $x^n \in U(B)$ (ii) $A = B \oplus xB \oplus x^2 B \oplus \cdots \oplus x^{n-1} B$ (iii) $\sigma(x) = x\zeta^{-1}$ を満たす A の B-基底 $\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$ が存在する。

逆に (1), (2) を満たす b, ρ が存在すれば：(i) $X^n b^{-1} - 1$ が $B[X;\rho]$ に属する直既約多項式 (ii) $A^* = B \oplus x^* B \oplus x^{*2} B \oplus \cdots \oplus x^{*n-1} B = B[X;\rho]/(X^n - b)B[X;\rho]$ (x^* は $(X^n - b)B[X;\rho]$ を法とする X の剰余類) が $\sigma^*(x^*) = x^* \zeta^{-1}$ で定義される $G^* = (\sigma^*)$ をガロア群とする強 G^*-ガロア拡大となる。更に $\varphi : x \longrightarrow x^*$ が $\varphi\sigma = \sigma^*\varphi$ を満たす A から A^* への B-同型写像を与える。

証明 必要性：A の元 a に対して $f(a) = a + \sigma(a)\zeta + \sigma^2(a)\zeta^2 + \cdots + \sigma^{n-1}(a)\zeta^{n-1}$ とすれば $\sigma(f(a)) = f(a)\zeta^{-1}$ であるから、A が B 上強 G-ガロア拡大であることに注意すれば $\sigma(x) = x\zeta^{-1}$ となる x が $U(A)$ に存在する。$\tilde{x}^{-1}|B = \rho$ が B の自己同型、$x^n \in U(B)$ なることは容易に知られる。$x^n = b$ とすれば、b, ρ は (1) を満たす。$T = B + xB + x^2 B + \cdots + x^{n-1} B$ とすれば、定理 1 における証明と同様の方法で、$\{1, x, x^2, \ldots, x^{n-1}\}$ が B 上一次独立、$T^\sigma = B$ が知られる。

$1 \leqq j \leqq n-1$ に対して $t_j = (\zeta^{-j} - 1)^{-1} x^{-1} \sigma^j(x)$, $t_j' = (\zeta^{-j} - 1)^{-1} x^{-1}$, $u_j = 1$, $u_j' = x$ とすれば $t_j u_j + t_j' u_j' = 1$, $t_j \sigma^j(u_j) + t_j' \sigma^j(u_j') = 0$ で t_j, t_j', u_j, u_j' は各 j に関してそれぞれ可換であるから $\sum_{i=1}^{n} x_i \sigma^j(y_i) = \delta_{1,\sigma^j}$ を満たす $\{x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ が T に存在する。以下は定理 1 の証明と全く同様である。

十分性：(1) から $X^n b^{-1} - 1$ が $B[X;\rho]$ の中心に属することが知られる。したがって $(X^n b^{-1} - 1)B[X;\rho] = (X^n - b)B[X;\rho]$ は $B[X;\rho]$ の両側イデアルとなる。

Φ を $\Phi(f(X)) = f(X\zeta^{-1})$ で定義される $B[X;\rho]$ の対応とすれば Φ は $X^n - b$ を変えない $B[X;\rho]$ の B-自己同型で $\Phi^n = 1$ となる。

このことから、Φ は $A^*=\oplus_{i=0}^{n-1} x^{*i}B=B[X;\rho]/(X^n-b)B[X;\rho]$ の B−自己同型 σ^* を誘導し、$\sigma^*(x^*)=x^*\zeta^{-1}$ となる。A^*/B が強σ^*-ガロア拡大であることは必要性の部分と同様の方法で証明できる。最後に $\sum_{i=0}^{n-1}\sigma^{*i}(x^*)\zeta^i=nx^*\in U(A^*)$ かつ $n\in U(A^*)$ であるから、強(σ^*)-ガロア拡大であることが知られる。

系 2. B が強 G−内部ガロア拡大 A を有するための必要十分条件は
(1) $\rho^n=\tilde{b}^{-1}$, $\rho(b)=b$ $\rho(\zeta)=\zeta$
(2) X^n-b が $B[X;\rho]$ の直既約多項式
(3) $\rho(\mathfrak{z})=\mathfrak{z}\zeta^{-1}$
となる $b\in U(B)$, $\mathfrak{z}\in U(Z)$ と B の自己同型 ρ が存在することである。

証明　必要性：定理2から $A=\oplus_{i=0}^{n-1}x^iB$, $\sigma(x)=x\zeta^{-1}$ となる x が $U(A)$ に存在する。$\sigma=\tilde{\mathfrak{z}}$ とすれば系1の証明と同様の方法で $\mathfrak{z}\in U(Z)$ が得られる。$\sigma(x)=\mathfrak{z}x\mathfrak{z}^{-1}=x\zeta^{-1}$ であるから $\rho(\mathfrak{z})=x^{-1}\mathfrak{z}x=\mathfrak{z}\zeta^{-1}$ となる。
十分性：定理2から強σ^*-ガロア拡大 $A^*=\oplus_{i=0}^{n-1}x^{*i}B$, $\sigma^*(x^*)=x^*\zeta^{-1}$, $x^*\in U(A^*)$ が存在するが $\rho(\mathfrak{z})=x^{*-1}\mathfrak{z}x^*=\mathfrak{z}\zeta^{-1}$ から $\mathfrak{z}x^*\mathfrak{z}^{-1}=x^*\zeta^{-1}$ となり $\mathfrak{z}^nx^*\mathfrak{z}^{-n}=x^*\zeta^{-n}=x^*$ から $\sigma=\tilde{\mathfrak{z}}$ としてよい。

詳細については [1], [2] を参照されたい。

文献

[1] K. Kishimoto : On abelian extensions of rings I Math. J. of Okayama Univ., 14 (1970), 159-174.

[2] K. Kishimoto : On abelian extensions of rings II Math. J. of Okayama Univ., 15 (1971), 57-70.

[3] Y. Miyashita : Finite outer Galois theory of non-commutative rings. J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., 19 (1966), 114-134.

[4] H. Tominaga and T. Nagahara : Galois theory of simple rings, Okayama Math. Lecture, Dept. of Math, Okayama Univ., (1970)

接合積について

宮下庸一（東京教育大学）

以下の話の目的は、一般的な接合積に関する7項完全系列について述べる事です。それは チェイス、ハリスン、ローゼンバーグ[1] が与えた、可換環の有限次元ガロア拡大に対してきまる7項完全系列定理の一般化になっています。この試みに際して 7項完全系列定理の直接証明を与えた神崎[2]から多くの示唆を受けました。

先ず[1]の7項完全系列の説明をします。L/k を有限次元 G−ガロア拡大とし、L を可換環としますと 次の完全系列が成り立ちます。

$$(*)\quad 1\longrightarrow H^1(G,U(L))\longrightarrow P(k)\longrightarrow P(L)^G\longrightarrow H^2(G,U(L))$$
$$\longrightarrow B(L/k)\longrightarrow H^1(G,P(L))\longrightarrow H^3(G,U(L))$$

ここで、$U(L)$ は L の可逆元のなす群、$P(L)$ は L 上の rank 1 の有限生成射影加群より群、$P(L)^G$ は、その部分群で、全ての $\sigma\in G$ に対して $Lu_\sigma\otimes_L P\otimes_L Lu_{\sigma^{-1}}\cong P$ が成り立つ元 $[P]$ よりなります。ただし、Lu_σ は u_σ を基底とする自由 L−加群で、$u_\sigma a=\sigma(a)u_\sigma$ $(a\in L)$ によって両側 L−加群とみたもの。$B(L/k)$ は k 上のブラウァー群の部分群で、L/k で分解する k 上の東屋多元環全体よりなります。特に、L が体のときには $(*)$ は、良く知られた2つの事、$H^1(G,U(L))=\{1\}$ と、$H^2(G,U(L))\cong B(L/k)$ とを意味します。さて、直和 $\oplus Lu_\sigma$ に、$u_\sigma u_\tau=u_{\sigma\tau}$ $(\sigma,\tau\in G)$ によって乗法を定義すれば G と L との接合積が得られます。見方を変えれば完全系列 $(*)$ は、接合積 $\oplus Lu_\sigma$ によってきまるものと考えることもできます。これが、一般化を試みる際の我々の立場です。事実、これによって、無限群をも区別せずに同様に扱う事ができますし、又、より直接的証明が得られます。

$(*)$ を一般化するのに際しては、$P(k)$ と $B(L/k)$ の所とを新しく導入した2つの群でおきかえる事が主要な点です。その場合に重要なのは森田理論であり、我々の得る完全系列に対して森田不変性が証明されなければなりません。又、その事の内に、我々は非可換環を扱う事に対する1つの理由を見い出せます。

先ずこつの環拡大 A/B と A^*/B^* とが森田同値であるとは次のように定義します（[3] 参照）。こつの森田加群 ${}_BP_{B^*}$ と ${}_AM_{A^*}$、それに B-B^*-準同型 $\varphi: P \longrightarrow M$ があって $A \otimes_B P \longrightarrow M$; $a \otimes p \longmapsto a\cdot\varphi(p)$ が同型。ここに ${}_BP_{B^*}$ が森田加群であるとは、${}_BP$、P_{B^*} 共に有限生成射影的であり、B と B^* とは互いに他の準同型環になっている事です。この定義は左右対称的であることが証明されます。この場合 A の B-自己同型群 $\mathrm{Aut}(A/B)$ と $\mathrm{Aut}(A^*/B^*)$ とは自然に同型になり、又 A の可逆な B-B-部分加群全体よりなる群 $I(A/B)$ と $I(A^*/B^*)$ とは自然に同型になります。後者の同型は、$X\cdot\varphi(P) = \varphi(P)\cdot X^*$ なる対応 $X \longmapsto X^*$ です。ここに A の B-B-部分加群 X が可逆とは $XY = YX = B$ なる A の B-B-部分加群 Y が存在することをいいます。G を（有限又は無限な）群とし、G より $I(A/B)$ への準同型 J を1つ固定します。もし $A = \sum_{\sigma\in G} \oplus J_\sigma$ ならば、群準同型 J を G と B との（一般）接合積といいます。（神崎 [2] 参照）。容易に分るように、$A = \sum \oplus J_\sigma$ なら、$A^* = \sum \oplus J_\sigma^*$ となります。ただし $J_\sigma \longmapsto J_\sigma^*$
このようなこつの接合積は P（と M）によって同値であるといいます。以下、1つの接合積 $\Delta = \oplus_{\sigma\in G} J_\sigma$ を固定して Δ/B を Δ/B へ接合積として同値に移すような B-B-準同型 $\varphi: {}_BP_B \longrightarrow {}_\Delta M_\Delta$ の同型類全体を $P(\Delta/B)^{(G)}$ とかきます。ここで φ と $\psi: {}_BQ_B \longrightarrow {}_\Delta N_\Delta$ とが同型であるとは、B-B-同型 α と Δ-Δ-同型 β があって

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\varphi} & M \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\beta} \\ Q & \xrightarrow[\psi]{} & N \end{array}$$

上図が可換図式になることをいいます。$P(\Delta/B)^{(G)}$ は、テンソル積 $\otimes_B$ と $\otimes_\Delta$ とによって群になります。

$$: \varphi \otimes \varphi' : \quad P \otimes_B P' \longrightarrow M \otimes_\Delta M'$$

B の中心を K として P を特に $aP = Pa$ が全ての $p \in P$ と $a \in K$ に対して成り立つものに限定して得る部分群を $P_K(\Delta/B)^{(G)}$ とかきますと、これが最初に述べたように $P(k)$ の代りの役目を

果たします。再びいいますが、以下も1つの接合積 $\Delta = \oplus_{\sigma\in G} J_\sigma$ を固定します。$C(\Delta/B)$ によって G と B との接合積 $\Omega = \oplus U_\sigma$ で全ての $\sigma \in G$ について $U_\sigma \sim J_\sigma$ が成り立つものの、接合積としての同型類全体をあらわします。ここに、$U_\sigma \sim J_\sigma$ とは、${}_BU_{\sigma B}$ は、${}_BJ_{\sigma B}$ の有限個の直和の直和因子であり、又、逆も成り立つことをいいます。又、Ω/B より Ω'/B への B-環同型 f が接合積としての同型であるとは、$f(U_\sigma) = U'_\sigma$ が全ての $\sigma \in G$ に対して成り立つことをいいます。すると、$C(\Delta/B)$ は、以下に述べる積によってアーベル群になります。$\Omega = \oplus U_\sigma$ と $\Omega'' = \oplus U''_\sigma$ との積の σ-成分は、$U_\sigma \otimes_B J_{\sigma^{-1}} \otimes_B U''_\sigma$ とし、乗法は $U_\sigma \otimes J_{\sigma^{-1}} \otimes U''_\sigma \otimes U_\tau \otimes J_{\tau^{-1}} \otimes U''_\tau \xrightarrow{t}$ $U_\sigma \otimes U_\tau \otimes J_{\tau^{-1}} \otimes J_{\sigma^{-1}} \otimes U''_\sigma \otimes U''_\tau \xrightarrow{*} U_{\sigma\tau} \otimes J_{(\sigma\tau)^{-1}} \otimes U''_{\sigma\tau}$ によって定義します。ここで、$*$ は Ω、Δ、Ω''、それぞれの乗法より導かれる同型であり、t は、$J_{\sigma^{-1}} \otimes U''_\sigma$ と $U_\tau \otimes J_{\tau^{-1}}$ との"入れかえ"です。t の意味をもっと説明しますと、一般にこつの両側 B-加群 X と Y があって、${}_BX_B \sim {}_BB_B \sim {}_BY_B$（$\sim$ の意味は、先の $U_\sigma \sim J_\sigma$ と同じ）としますと、次のような両側 B-同型 t が一意にきまります。

$$; X \otimes_B Y \cong Y \otimes_B X \;;\; t(x \otimes y) = y \otimes x.$$

ただし x は X の元で、$bx = xb$ が全ての $b \in B$ について成り立つもの、y は Y の同様な元とします。

一意にきまるというのは、$x \otimes y$ のような元が左 B-加群 $X \otimes Y$ を生成するからです。今の場合 $J_\sigma \sim U_\sigma \sim U''_\sigma$ より、${}_BJ_{\sigma^{-1}} \otimes_B U''_{\sigma B} \sim {}_BB_B \sim {}_BU_\tau \otimes_B J_{\tau^{-1}}$ です。このアーベル群 $C(\Delta/B)$ を"接合積として同値"という関係で割った群を $B(\Delta/B)$ としますと、これが丁度 $B(L/k)$ の役目を果します。すると次の定理が成り立ちます。

定理 接合積 $\Delta/B = \oplus_{\sigma\in G} J_\sigma$ に対して、次の7項完全系列が成り立ちます。

$$1 \longrightarrow H^1(G, U(K)) \longrightarrow P_K(\Delta/B)^{(G)} \longrightarrow \mathrm{Pic}_K(B)^G$$
$$\longrightarrow H^2(G, U(K)) \longrightarrow B(\Delta/B) \longrightarrow \overline{H}_1(G, P(K)) \longrightarrow H^3(G, U(K))$$

ここで、K は B の中心で、$U(K)$ は K の可逆元全体の群、$\mathrm{Pic}_K(B)^G$ は B-B-森田加群 W の同型類 $[W]$ の全体よりなる群の部分群で、特に W が全ての $\sigma \in G$ に対して $[J_\sigma][W][J_{\sigma^{-1}}] = [W]$ を

満足し、さらに $aw=wa$ が全ての $w\in\overline{W}$ と、$a\in K$ に対して成り立つものの全体よりなります。又、$\overline{H}^1(G, P(K))$ は $H^1(G, P(K))$ のある準同型像で、特に $B=K$（即ち B が可換環）の時には $H^1(G, P(K))$ に一致します。

定理の森田不変性が証明されます。又、注意すべき点として、これと $C(\oplus_{\sigma\in G} Ku_\sigma / K)$ とは同型になります。接合積 $\oplus Ku_\sigma / K$ の説明を加えますと、各 J_σ $(\sigma\in G)$ より K の自己同型 $\tilde{\sigma}$ が導かれます。: $xa=\tilde{\sigma}(a)x$ $(x\in J_\sigma,\ a\in K)$
これによって、K は左 G－加群となり、これより自明な因子団をもつ接合積 $\oplus Ku_\sigma$, $u_\sigma u_\tau = u_{\sigma\tau}$ が得られます。その他種々の議論すべき事もありますが、それについては "An exact sequence associated with a generalized crossed product, to appear in Nagoya Math. J." を参照下さい。又、その後の得られた結果の発表も現在準備中です。以下、参考文献は本文中で直接に引用したもののみを上げます。くわしくは以下の[4]を参照ください。

文献

[1] S.U.Case, D.K.Harrison and A.Rosenberg: Galois theory and Galois cohomology of commutative rings, Mem.Amer. Math. Soc., 52(1965).

[2] T.Kanzaki: On generalized crossed product and Brauer group, Osaka J.Math., 5(1968), 175-188.

[3] Y.Miyashita: On Galois extensions and crossed Products, J.Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I, 21(1970), 97-121.

[4] Y.Miyashita: An exact sequence associated with a generalized crossed product, to appear in Nagoya Math. J.