

「表現論とその周辺」シンポジウム

報 告 集

1982年11月2日～5日

於 伊豆・筑波大学下田臨海実験センター

## 序

この報告集は1982年11月2日から5日まで、伊豆筑波大学下田臨海実験センターで“表現論とその周辺”と題し行われた代数研究集会における諸講演を講演者自身の原稿をもとに作成したものである。

プログラム責任者は東京大学岩堀長慶氏と筆者で、最近発展しつつあるいくつかのトピックスについて連続講演を企画したが、特に京都大学伊達悦郎、三輪哲二、神保道夫諸氏の解析専攻分野からの御参加はこの会を特色あるものとした。

講演者の旅費等シンポジウムの経費、ならびに報告集の出版費は、昭和57年度科学研究費総合研究A, No. 56340001に依存した。

なおこの会の企画実行にあたっては横沼健雄、宮田武彦、遠藤静男諸氏の御協力を得たのでここに感謝の意を表したい。

1983年2月

太 刀 川 弘 幸



# 目 次

1.	Schubert Calculus 入門	
	宇 澤 達 (東大・理) .....	1
2.	Kac - Moody Lie 環の代数的側面	
	(Kac - Peterson の論文の紹介)	
	I 小 池 和 彦 (青学大) .....	4 3
	II 徳 山 豪 (東大・理) .....	7 2
	III 田 中 洋 平 (名大・理) .....	9 4
3.	ソリトンと無限次元 Lie 環	
	I 伊 達 悦 朗 (京大・教養) .....	1 0 7
	II 三 輪 哲 二 (京大・数理研) .....	1 2 2
	III 神 保 道 夫 (京大・数理研) .....	1 4 1
4.	Brauer trees	
	奥 山 哲 郎 (阪市大・理) .....	1 6 3
5.	Auslander - Reiten quiver	
	I 大 竹 公 一 郎 (群馬大・教育) .....	1 8 6
	II 佐 藤 真 久 (山梨大・教育) .....	2 0 6
6.	BOCS'S 入門	
	I On representations of BOCS'S	
	山 形 邦 夫 (筑波大・数学) .....	2 2 5
	II ON THE REPRESENTATION TYPE OF	
	ALGEBRAS AND BOCS'S	
	Daniel Simson (N. Copernicus Univ.) .....	2 6 0
7.	ON EQUATIONS $x^p + y^q + z^r - xyz = 0$	
	中 村 郁 (北大・理) .....	2 8 4
8.	Kac - Moody Lie algebra の root lattice automorphism	
	について	
	小 林 善 司 (筑波大・数学) .....	3 2 4
9.	Peirce : Linear associative algebra	
	清 水 達 雄 (清水建設研) .....	3 3 5

# 目 次

1	Schubert's Calculus 入門	
	手 稿 (東大・理)	
	Kac-Moody Lie 理論の発展	
	(Kac-Peterson の論文集)	
43	I 小 題 冊 (東大)	
73	II 題 冊 (東大・理)	
94	III 題 冊 (東大・理)	
	大木 久太郎の論文集	
107	I 題 冊 (東大・理)	
133	II 題 冊 (東大・理)	
141	III 題 冊 (東大・理)	
	Fischer's notes	
163	I 題 冊 (東大・理)	
	Ashtekar-Ratner's paper	
186	I 大 冊 (東大・理)	
206	II 大 冊 (東大・理)	
	BOSS'S 入門	
	I On representations of BOSS'S	
235	II 題 冊 (東大・理)	
	ON THE REPRESENTATION TYPE OF	
	ALGEBRAS AND BOSS'S	
250	Daniel Simson (N. Copernicus Univ.)	
	ON EQUATIONS $x^2 + y^2 + z^2 = 0$	
284	中 冊 (東大・理)	
	Kac-Moody Lie algebra の root 理論	
	五巻	
334	小 冊 (東大・理)	
	On the linear association algebra	
335	大 冊 (東大・理)	

# Schubert Calculus 入門

東大・理 宇澤達

この Schubert Calculus とは, Schubert の本 "Kalkül der Abzählenden Geometrie" に展開された計算法のことである。

この本は 1879年に Teubner から出版され, 1979年に Springer から複製された。

ここでは, Schubert がどんな問題をとり扱っているかを紹介することを主目的とする。現代数学との関連は Kleiman [7], 又歴史的事実については Coolidge [2], Kleiman [8] がある。

数え上げの幾何 (Abzählenden Geometrie) とは, ある "条件" を満たす幾何的図形" を求める幾何である。例えば, Schubert の本には, 次の様な不思議な数が求められている。

1.  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  (=  $\mathbb{C}^4$ の中の1次元部分空間全体)  
の中の4つの直線と交わる直線の数  
----2 (P.13, P.23)

2. 5つの  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ 内の2次曲線と接する  
2次曲線の数 ----3264 (P.97)

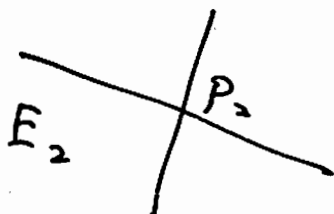
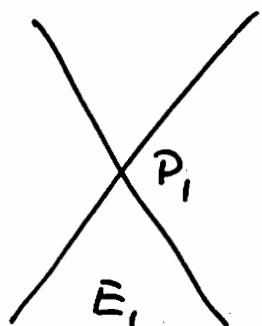
3.  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 内の9つの2次曲面と接する  
2次曲面の数 --- 666841048 (P.106)

4.  $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ 内の12の2次曲面に接する  
twisted cubics <sup>(註)</sup>の数 --- 5819539783  
680

Schubertが如何にして、上の数字を求めたか、特に1, 2について詳しく説明する。(証明では存10)

問題の1. 彼はこの問題を二つの方法で解いている。

第1の方法。4つの直線を連続的に動かして二つつづ組にする。



この4本の直線と交わるのは、交点  $P_1$  と  $P_2$  を結ぶもの1本、又平面  $E_1$  と  $E_2$  の交線1本である。この2本に限るとも見易い。

ここで、ここで問題が生ずる。連続的に条件を変化させても「数」が変わらないとすると、解には重複度が出てくる筈である。今のこの解の重複度が1であることは何故わかるか？

Schubert は、それに次の様に答えている。理由の説明はない。

次の「解」の重複度は1であることが、公理的に定まるとしている。(P. 89 §19)

ア. 2つの空間直線が交点をもてば、



その二つの直線は一つの平面を定める。

逆に 二つの直線が一つの平面上にあるならば、それは一つの交点を定める。

2. 二つの交点を含む直線は一つである。

3. 二つの平面に含まれる直線は一つである。

第2の方法。少し言葉を整理すれば次の様になる。 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ の中に直線を4本  $l_1, l_2, l_3, l_4$  とする。 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ の中の直線全体のなす代数体はグラスマン2-体様体  $G(2, 4)$  になる。 $l_i$  と交わる直線全体のなす  $G(2, 4)$  の部分多様体を  $V_i$  で表す。問題は、 $V_1 \cap \dots \cap V_4$  の交点の「個数」がいくつかということである。(  $l_1, \dots, l_4$  は「一般」にとる。)

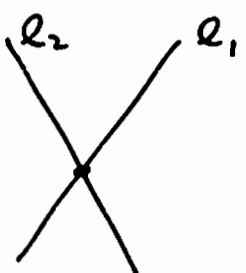
$V_1 \cap \dots \cap V_4$  が有限集合になることがわかれば、その個数(重複度をモロメロ)を定めるには、(現代数学の言葉では、)

次の表現が適当である。  $V_i$  の基本類を  $[V_i]$  とし,  $[V_i]$  の Poincaré dual を  $[V_i]^*$  で表わす。

$$V_1 \cap \dots \cap V_4 \text{ の個数} = [V_1]^* \cup \dots \cup [V_4]^*$$

Schubert は以下に見る様は,  $[V_1]^* \cup [V_1]^*$   
 $= [V_1]^*{}^2$ , etc を逐次求めたい。

$V_1 \cap V_2$  連続的に変形して,  $l_1$  と  $l_2$  を交わらせる。その時,



$V_1 \cap V_2 = \{l_1 \text{ と } l_2 \text{ の交点を通る直線}\} \cup \{l_1 \text{ と } l_2 \text{ が決まる平面上の直線}\}$   
 ----- (1)

となる。Schubert はこの式を次の様に表現する。

直線に対して, 「 $l_i$  と交わる」という条件を  $\sigma_i$  で表わす。又, ある点 (Punkt) を通るという条件を  $\sigma_p$ , ある平面内 (Ebene) にあるという条件を  $\sigma_e$  で表わす。

この時, 彼は (1) 式を次の様に表わす。

(論理学からの類推である。)

$$g_1 g_2 = g_p + g_e$$

$= 2$ 、 $g_1$  と  $g_2$  は「同じ」条件であるから、  
suffix を suppress し、

$$g^2 = g_p + g_e \quad \dots (2)$$

と置く。  $g_1, g_2 \in [V_1]^*, [V_2]^*$  とみれば、  
 $[V_1]^* = [V_2]^*$  であるから、この表現は自然  
である。(但、ホモロジ、2ホモロジの言葉  
が出てくるのは Schubert より随分後のこと  
である。)

Schubert はこの書き方について、 $g^2$  は、  
直線が「ある与えられた直線を二回通る」  
という条件ではなく、「二つの(一般の位置に  
あるように)与えられた直線を通る」という条  
件を表すのだ」と述べている。

例えば、 $g^2$ 、2次曲線が「ある与えら  
れた2次曲線に接する」という条件を表せば、  
 $g^5$  は、「5つの与えられた2次曲線と接  
する」という条件になる。

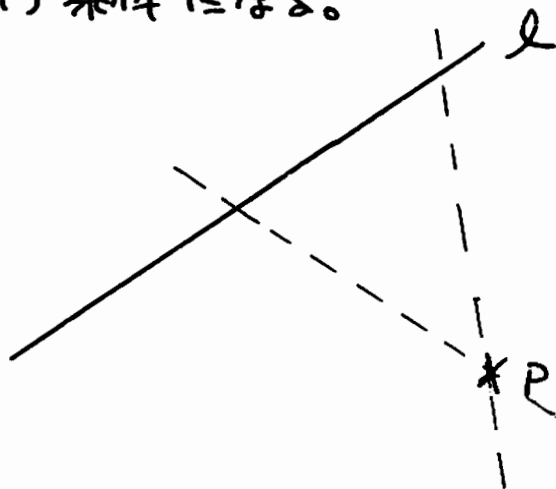
$V_1 \cap V_2 \cap V_3$  Schubert は (2) 式の  
両辺に  $\sigma$  を「掛ける」。

$$\sigma^3 = \sigma\sigma_p + \sigma\sigma_e. \dots (2)'$$

すなわち、右辺の  $\sigma\sigma_p$  と  $\sigma\sigma_e$  がどういう意味  
をもちかを考えるのである。(=これが彼の計算  
法の便利な所である。)

$\sigma\sigma_p$   $\left\{ \begin{array}{l} \sigma: \text{直線 } l \text{ と交わる。} \\ \sigma_p: \text{点 } P \text{ を通る。} \end{array} \right.$

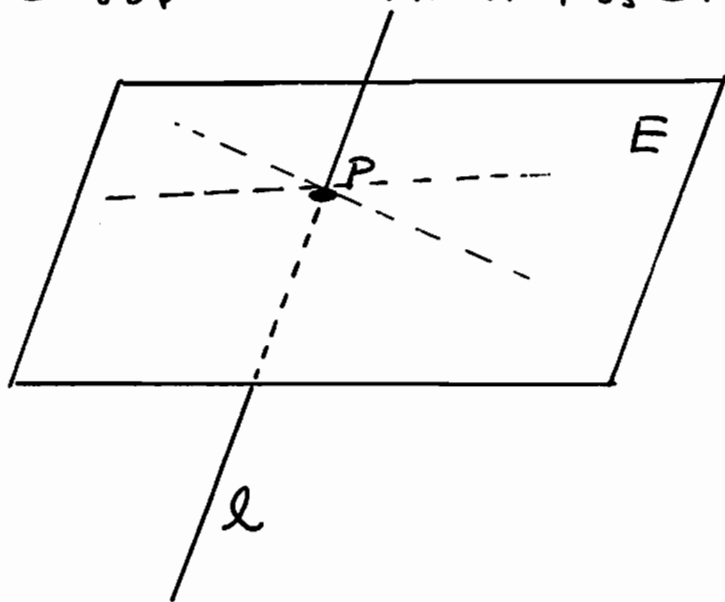
となっているとする。  $\sigma\sigma_p$  は「直線  $l$  と点  $P$   
を通る」という条件であるから、 $l$  と  $P$  が定まる  
平面  $\pi$  とする時、「 $\pi$  上にあり、点  $P$  を通る」という条件に  
なる。



平面上にあり、一点を通る直線全体の

なる図形 (configuration) は線叢  
 (Strahlenbüschel) と呼ばれる。「 $E$ 上  
 にあり、 $P$ を通る」という条件を Schubert は  
 $\sigma_5$  で表わした。従って、 $\sigma\sigma_p = \sigma_5$  と  
 なる。

$\sigma\sigma_e$   $\sigma$  の直線に  $\ell$ ,  $\sigma_e$  の平面を  $E$   
 とすれば,  $\ell$  と  $E$  の交点を  $P$  と置い  
 て  $\sigma\sigma_p$  と全く同様の条件  $\sigma_5$  を得る。



以上より, (2)' は,

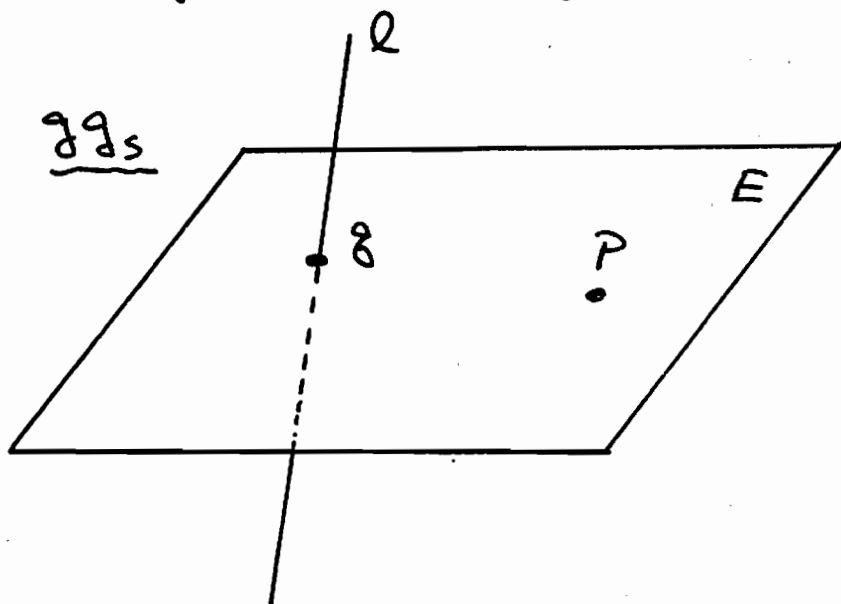
$$\sigma^3 = \sigma_5 + \sigma_5 = 2\sigma_5 \dots (3)$$

となる。

$$\underline{V_1 \wedge V_2 \wedge V_3 \wedge V_4}$$

二二でも、(3)の両辺に  $g$  を掛ける。

$$g^4 = g g_s + g g_s \quad \dots (3')$$



$g_s$  で定まる点と平面の組を  $(P, E)$  とし、 $g$  で定まる直線を  $l$  とする。  $l$  と  $E$  の交点  $g$  とすれば、  $g$  と  $g_s$  を満たす直線はすなわち  $P$  と  $g$  を通る直線である。 Schubert の公理 I より、  $l$  は重複度も二めで一本である。 従って、

$$g^4 = 2G \quad \dots (4)$$

( $G$ は直線が1本与えられているという条件  
がある。)

ここで、第2の方法でも、(これが  
Schubert Calculusの一端である) 4本の  
直線と交わる直線の「数」が2であること  
がわかった。

ここで興味深いのは、 $G(2,4)$ の  
(2)ホモロジ-環の構造が(怪しげな  
方法を使ってではあるが)わかってしまうこと  
である。

Schubertは後に、 $G(2,2)$ の<sup>等</sup>多様体の  
(2)ホモロジ-群の free base 互換条件の  
形で求めている。これが今 Schubert  
variety と呼ばれているものである。

以上で、多少「感じ」はわかって頂け  
たと思う。ここで、「彼が」というような  
'Calculus'を構想していたか説明  
したいと思う。

Schubertの本の第1章においては、条件を記号で表わすこと、そしてその記号の間の演算を導入している。言葉を整理し「言えは」、彼の言っていることは概略次の様になると思う。(これは大体 Severi の解釈である。)

考えられている幾何図形の全体がある代数多様体  $\Gamma$  でパラメトライズしているとする。

$\alpha$  が「条件」であるとは、次の事である。

●  $\alpha$  を満たす  $\Gamma$  の元が  $\Gamma$  の代数的部分多様体になる。

条件  $\alpha$  の次元とは、 $\Gamma$  の中での  $\alpha$  の複素余次元の事である。(彼は、条件  $\alpha$  と、その条件を満たす  $\Gamma$  の元からなる部分多様体を完全に混同して考えている。)

例えは、

$$g \text{ の次元} = 1$$

$$g_p \text{ の次元} = 2$$

$$g_e \text{ の次元} = 2$$



$g_s$  の次元 = 3

$G$  の次元 = 4

となる。

演算の定義は次の通りである。

積 彼は二つの条件の積  $\bar{\wedge}$ 、論理記号の積と同様に定義する。つまり、 $a, b$   $\bar{\wedge}$  条件とすると、 $ab$  とは、「 $a$  且  $b$ 」という条件である。但、注意事項として、 $a$  と  $b$  の積が  $ab$  で表わし得るのは、 $a$  の次元 +  $b$  の次元 = 「 $ab$ 」の次元 となる時である。Schubert は、 $a$  の次元 +  $b$  の次元  $>$  「 $ab$ 」の次元 となる時は、 $a$  と  $b$  は独立な条件ではないとしている。「 $ab$ 」は別の記号で表わさなければいけないのである。

和 これは簡単である。条件  $a, b$  の和  $a + b$  とは、「 $a$  又は  $b$  を満たす」という条件である。

等号 次元の等しい二つの条件  $a, b$  について定義すればよい。ある条件を満たす図形の数がいくつあるかに興味があるのだから、“数値的”に同じ条件は等しいとみる。つまり、 $a$  の次元を  $d$ 、 $b$  の次元を  $n$  とする。任意の次元  $n-d$  の条件  $c$  で、 $ac, bc$  が共に定義されるものに対し、 $ac = bc$  となるときは、 $a = b$  と定めるのである。

以上の説明は粗雑であるが、話の筋道をあらうには十分であると思う。次に、彼が七"のようにして、上の Calculus を問題 2 に応用したかを見とみることにする。

## 問題 2.

この問題で始めて、教え上げの幾何で重要な technique である“退化”の方法が登場してくる。Schubert はこれを、Charles-Zeuthen の方法と呼んでいる。非特異二次曲線の話を直線等の話

帰着させようというものである。

$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  内の 2 次曲線であるから, 単純に考えれば, parameter variety とし,  
 $\text{Sym}_3(\mathbb{C}) / \mathbb{C}^* = \mathbb{P}^5(\mathbb{C})$  を取りたい。しかしこれはうまくいかない。  $X \subset \mathbb{P}^5(\mathbb{C})$  を非特異 2 次曲線のなす部分多様体とする。  $X$  の元である 2 次曲線  $(S, X)$  と接するものの全体を  $X_0$  とおく。  $X_0$  の  $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$  の中での Zariski 閉包は 6 次超曲面になる。  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  の中に非特異 2 次曲線  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  をとり, それらに対応する  $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$  内の 6 次超曲面  $V_1, V_2, V_3, V_4, V_5$  とする。  $V_1 \cap \dots \cap V_5$  が有限集合であれば, その“個数”は Bezout の定理より,  
 $6^5 = 7776$  に等しい。これは Steiner が求めた数字である。しかしながら,  $V_1 \cap \dots \cap V_5$  は有限集合ではなく,  $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$  の中の Veronese surface (  $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$  の真を  $3 \times 3$  の対称行列  $(a_{ij})$  で表すと,  $(a_{ij})$  の 2 次 1 行 1 列式がすべて 0 になるような真の全体である。 )

直観的に言えば、次の様な事情がある。  
 Veronese surface 上の点は、二重直線に  
 対応する。直線は必ず2次曲線  $C_i$  と  
 交わるが、その交点では2重に交わり、 $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$   
 になつて、 $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$  を parameter variety と  
 見なし、 $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$  上の限りでは、 $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$  で「掃  
 り」るのである。つまり、すべての二重直線は  
 $C_i$  と「掃り」るのである。

$\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$  で、Chasles 等は 10次元空間を  
 $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$  ではなく、次の様にとる。非特異  
 2次曲線があれば、その掃線を合わせて考  
 えるのである。厳密には、 $C$  は非特異2次  
 曲線とすれば、その掃線からなる  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  ( $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$   
 の中の直線全体からなる射影平面) の  
 中の曲線も2次曲線となる。その対応は、  
 簡単な計算によつて、 $(a_{ij}) \mapsto (A_{ij})$   
 ( $A_{ij}$  は  $(a_{ij})$  の  $2 \times 2$  の小行列式) となること  
 がわかる。  $X$  は非特異2次曲線の全体と  
 して、

$$X \hookrightarrow \mathbb{P}^5(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^5(\mathbb{C})$$

を,

$$(a_{ij}) \mapsto ((a_{ij}), (A_{ij}))$$

で定める。パラメータ-空間  $\Gamma$  は、 $X$  の  $\mathbb{P}^5(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^5(\mathbb{C})$  の中での Zariski 閉包としてとる。(丁度  $\mathbb{P}^5(\mathbb{C})$  は Veronese surface で blow up したものである。)

自由度を大きくするために、空間二次曲線を考える。非特異空間二次曲線は、 $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$  内の平面上にのっていることに注意する。

$X$  を非特異空間二次曲線全体として、上と同様に  $\Gamma$  を、次の様にとる。

$$X \hookrightarrow \check{\mathbb{P}}^3(\mathbb{C}) \times (\text{二次曲線}) \times (\text{双対二次曲線}) \\ (\mathbb{P}^3(\mathbb{C}) \text{ 内の平面全体})$$

$\Gamma = X$  の像の Zariski 閉包。

$\Gamma - X$  は次の様になる。

$$ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 = 0 \text{ とすれば,}$$

$$bcx_0^2 + acx_1^2 + abx_2^2 = 0 \text{ が 2 の接}$$

線の存在する二次曲線である。  $a \rightarrow 0$  とすれば  $C$  として、二本の直線、( $bx_1^2 + cx_2^2 = 0$ )

$\vee$  としは、二重直線 ( $bcx_0^2=0$ )  
 ができくる。

逆に、 $C$  の方程式を、

$$bcx_0^2 + acx_1^2 + abx_2^2 = 0$$

とすれば、 $\vee$  の方程式は、

$$ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 = 0$$

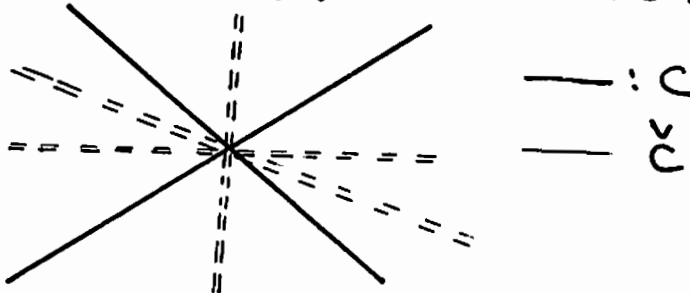
である。  $a \rightarrow 0$  とすれば、 $C$  は二重直線、  
 $\vee$  は2本の直線になる。

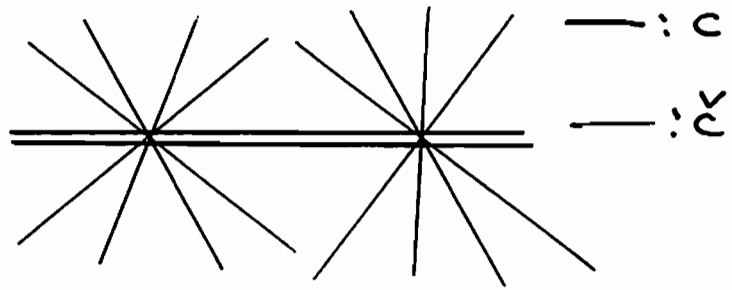
$17-X$  は以上で尽くされる = 七かゆか。

$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  上の図形としては、

最初のもの:  $C$  自体は2本の直線であり、  
 $C$  の接線と考えるべきものは、その2本の直線  
 を通る二重直線の全体である。

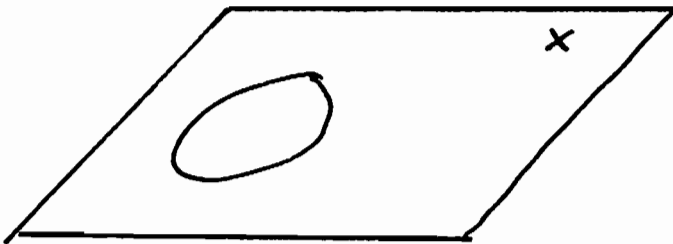
二番目のもの:  $C$  自体は二重直線で、  
 $C$  の接線系は、二重直線上のある2本の  
 いずれかを通る直線系の全体である。



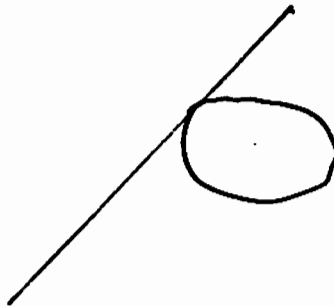


これで  $\Gamma$  は定義できた。Schubert は次の様な条件を考える。(2次曲線についての条件)

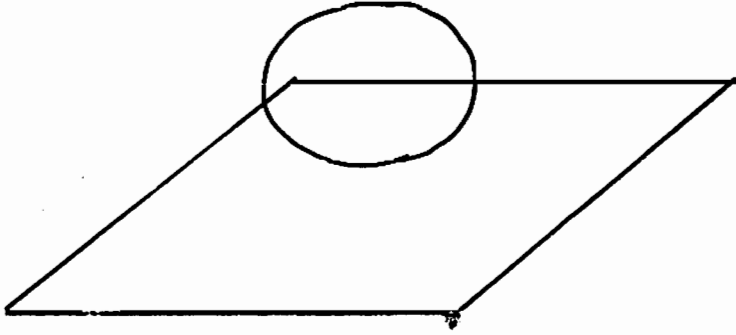
$\mu$ : 2次曲線  $C$  の定める平面がある点を通る。  
(given)



$\nu$ :  $C$  がある与えられた直線と交わる。



$P$ :  $C$ があるとき与えられた平面に接する。



$\delta$ : 第1番目の退化をする。



$\nu$ : 第2番目の退化をする。



第1段階として、 $\mu, \nu, P, \delta, \nu$ の直の関係式を出す。(いずれも1次元の条件である。)

二つある関係式の第1番目のものは次の通りである。



$$\nu + \nu = \rho + \eta + 2\mu.$$

等号の規約 (p. 13) により, この式の意味は次の通りである。T を曲線とし, T を  $10^4 \times 4 - 7 -$  とする 2 次曲線の族  $\{C_t\}_{t \in T}$  とする。  $\nu(T)$  が条件  $\nu$  を満たす t の「個数」を表す。  $\rho(T), \eta(T)$  etc も同様である。上の式は, 任意の (一般の) 2 次曲線の one parameter family について,

$$\nu(T) + \nu(T) = \rho(T) + \eta(T) + 2\mu(T)$$

と成るということである。

Schubert はこれを次の様にして示したと思われる。(Schubert の本には書いていないので確かなことはわからない。)

One parameter family  $\{C_t\}_{t \in T}$  を「一般」に与え, “どの  $C_t$  を含む平面に存在する” とを認める。

この時,  $C_t$  は 2 次曲線であるから,  $C_t$  は E と 2 点で交わる。E 上の点 P を通り, P を通る E 内の直線の全体を考える。これは

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  と同型な代数多様体になる。 $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  上の代数的対称、つまり  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  上の curve を次のように定める。

$\mathcal{P} = \{E \text{ 内にある, } 2 \text{ 点を通る直線の全体}\}$

$A = \{(l_1, l_2) \mid l_1, l_2 \in \mathcal{P}, l_1 \text{ と } l_2 \text{ はある } C \text{ と交わる。}\}$

$A$  と  $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$  の対角成分  $\Delta$  の交叉数を 2 通りの方法で求めたい。そのために、Chasles の原理と呼ばれる簡単な事実を使う。(Coincidence formula の一)

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  上の曲線は  $f(x_0, x_1; y_0, y_1) = 0$  と双斉次式で書ける。この曲線を  $A$  で表わす。 $A$  と  $\Delta$  ( $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  の対角成分) との交叉は丁度  $f(x_0, x_1; x_0, x_1)$  の次数になる。明らかに,

$f(x_0, x_1; x_0, x_1)$  の次数

||

$f$  の  $x_0, x_1$  に関する次数

+

$f$  の  $y_0, y_1$  に関する次数

となる。

$f$  の  $x_0, x_1$  に関する次数は,  $y_0 = \alpha, y_1 = \beta$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ) としたときの, (重複度も二めた)

$f(x_0, x_1; \alpha, \beta) = 0$  の根の数である。

これは  $A$  についてみれば,  $A$  と  $\mathbb{P}^1 \times \{(\alpha, \beta)\}$  の  
交叉である。同様にして,  $f$  の  $y_0, y_1$  に関  
する次数は  $A$  と  $\{(\alpha, \beta)\} \times \mathbb{P}^1$  の交叉数となる。

まとめれば, (標語的に)

$\# A \cap \Delta = \# A \cap \mathbb{P}^1 \times \{(\alpha, \beta)\} + \# A \cap \{(\alpha, \beta)\} \times \mathbb{P}^1$   
となる。

$A \subset \mathbb{P} \times \mathbb{P} \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  の, 我々の場合には  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$   
計算すれば次の様になる。

$$\# A \cap \mathbb{P}^1 \times \{l_2\} = \#\{C_t \mid C_t \text{ は } l_2 \text{ と交わる}\} = \nu(\tau)$$

$$\# A \cap \{l_1\} \times \mathbb{P}^1 = \#\{C_t \mid C_t \text{ は } l_1 \text{ と交わる}\} = \nu(\tau)$$

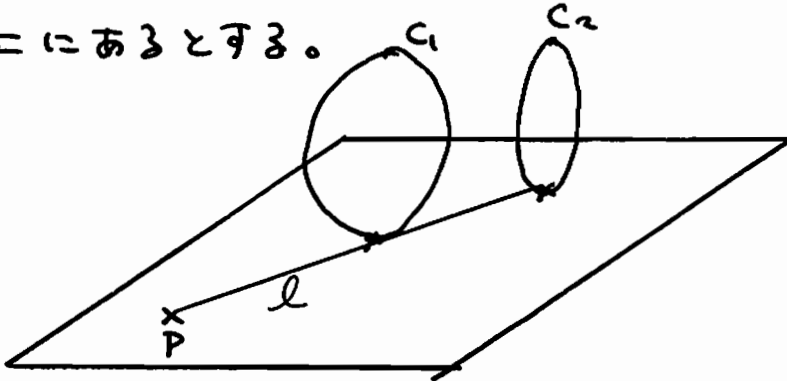
これで示すべき式の左辺が出た。次に  
 $\# A \cap \Delta$  を数える。

$A \cap \Delta \ni (l, l)$  とすれば,  $l$  と  $C_t$  の

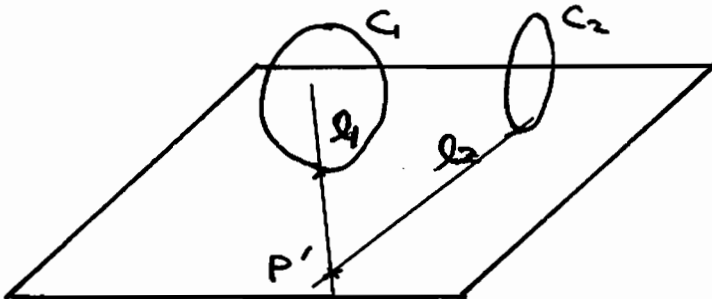
交わり方には次の場合が考えられる。

場合の1.  $l$ と $C_1$ は一点で交わる。

結局,  $E$ と一点のみで交わる $C_1$ の数を数えればよい。これは次の様にして説明出来る。 $C_1$ と $C_2$ が $E$ と一点のみで交わっており, その交点が $P$ の直線上にあるとする。



$P$ の位置を少し動かしてみれば,



$(l_1, l_1)$  と  $(l_2, l_2)$  と  $\Rightarrow$  出2くる。(解が)  
従って,  $(l, l)$  の重複度が2であると

考えるのが自然である。  $C_1, \dots, C_n$  の  $E$  との 唯一の交点 が  $P$  の 直線  $l$  上にあるときも 同様にして,  $(l, l)$  の重複度 が  $n$  であることがわかる。従って,  $E$  と  $n$  点のみで交わる  $C_t$  の数を数えればよい。

$C_t$  が 非特異の時。この時,  $C_t$  は  $E$  と接する。

$C_t$  が  $n$  直線の時。この時,  $E$  は  $n$  直線の交点を通らなければいけず。この時,  $C_t$  は  $E$  と接していることになる。

以上で  $P(T)$  になる。

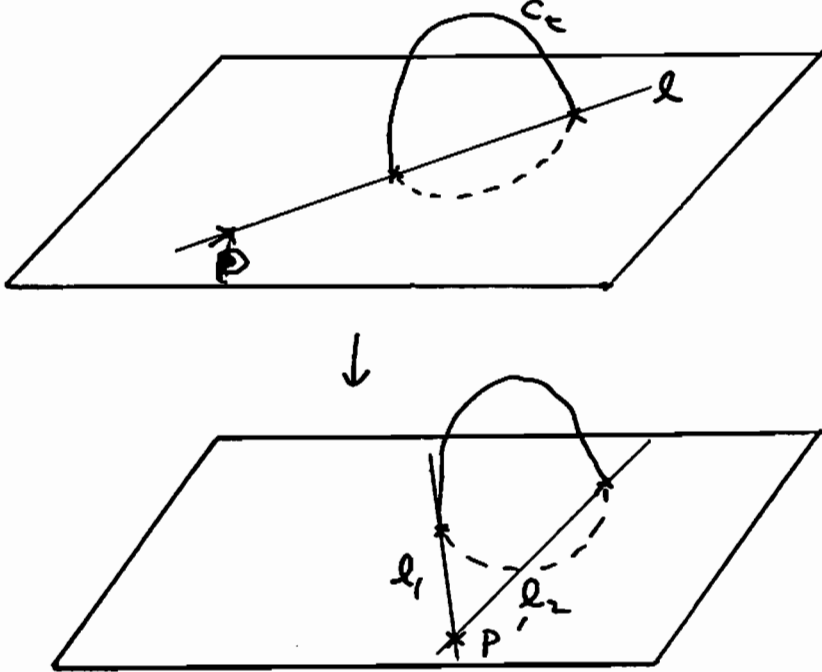
$C_t$  が  $n$  重直線の時。この時,  $C_t$  は常に  $E$  と  $n$  点のみで交わる。

以上合計して,  $P(T) + \mathcal{N}(T)$  となる。

場合の2.  $l$  と  $C_t$  は 2 点で交わる。

このことは,  $C_t$  の定める平面が  $P$  を通る時, ( $l$  上  $2$  点のみに) おこる。 $(l, l)$  での  $A$  と  $\Delta$  の交叉の重複度を定めるために,

又  $P$  を少し動かしてみる。



動かした後で,  $(l_1, l_2)$  と  $(l_2, l_1)$  と  
 二つの解が出てくる。従って, 二の時の  
 重複度は 2 だと考えるのが適当である。

従って 二の時の数は  $2\mu(T)$  となる。

場合 1 と場合 2 を合計すれば,  
 $\# A \cap \Delta = P(T) + 2\mu(T) + \eta(T)$   
 となる。Chasles の原理より,

$$\nu(T) + \nu(T) = P(T) + 2\mu(T) + \eta(T)$$

となる。これが求める式であった。

第2番目の式が、

$$\rho + \rho = \nu + \delta.$$

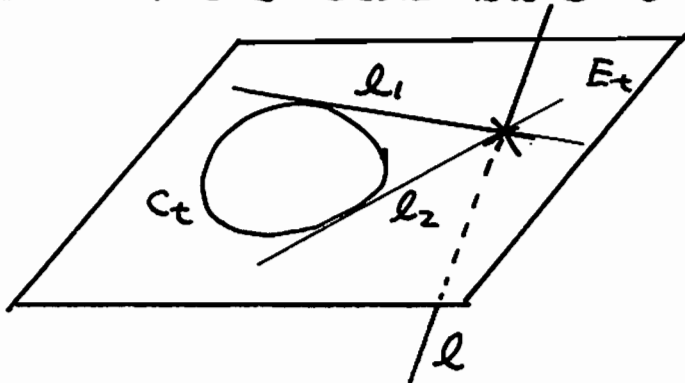
である。

第1式と同様、2次曲線の  
one parameter family  $\{C_t\}_{t \in T}$  に対して、

$$2\rho(t) = \nu(t) + \delta(t)$$

を示せばよい。

示すために又 Charles の原理を用いる  
のであるが、今度は  $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  とし、ある直線  $l$   
を通る平面の全体を  $E$  と考える。2次曲線  
 $C_t$  の定める平面を  $E_t$  とかく。  $E_t$  が  $l$  を含ま  
ないものとするが、その元で  $C_t$  と接するものは、  
下図の  $l_1$  を含む  $E$  の元と  $l_2$  を含む  $E$  の元と = である。



すべし2の  $t \in T$  について,  $E_t$  が 互れを含まないような直線  $\ell$  とする。  $\ell$  によって定まる平面叢を  $\mathcal{B} \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$  とする。  $\mathcal{B} \times \mathcal{B}$  上の代数的対応  $B$  を次の様に定める。

$$B = \{(E, E') \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}; E \text{ と } E' \text{ はある } C_t \text{ に接する。}\}$$

Charles の原理を用いて,  $\# B \cap \Delta$  を二通りの方法で数える。

$$\begin{aligned} \#(B \cap \mathbb{P}^1 \times \{E\}) &= \#(C_t \text{ で, } E' \text{ と接するもの}) \\ &= P(T) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \#(B \cap \{E\} \times \mathbb{P}^1) &= \#(C_t \text{ で, } E \text{ と接するもの}) \\ &= P(T) \end{aligned}$$

$\# B \cap \Delta$  自身は次の様になる。  $B \cap \Delta \ni (E, E)$  とすれば,  $E$  はある  $C_t$  と接する唯一の  $\mathcal{B}$  の平面となる。 次の場合を考える。

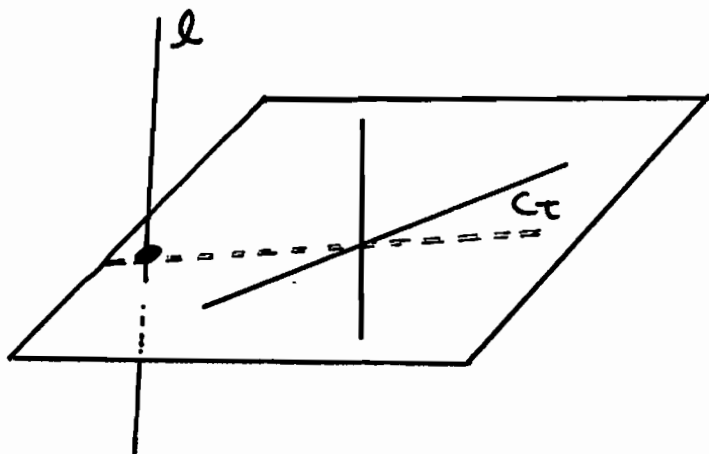
場合の 1.  $C_t$  は非特異である。



$C_t$  と接する  $E$  の元が  $E$  のみであるから、 $C_t$  は  $L$  と交わりなければならず、この場合の数は  $\nu(\tau)$  になる。

場合の2.  $C_t$  は退化している。

あり得るのは、 $\delta$  の場合である。3型に退化していれば、常に  $C_t$  に接する  $E$  の元は1つだけである。従って、数は  $\delta(\tau)$ 。



以上より求める式

$$\rho(\tau) + \rho(\tau) = \nu(\tau) + \delta(\tau)$$

を得る。

これより、 $\mu, \rho, \nu, \delta, \kappa$  の間の関係式が得

られたのであるが、245が問題の2とどういう関係にあるかを説明する。

準備が既に下部長くなったので、説明は後廻しにするが、ある平面上の5つの2次曲線と接するという条件は次の様にかける。

$$\mu^3(2\nu+2\rho)^5$$

この値を求めればよい。二項展開をすれば、 $\mu^3\nu^5\rho^0 + (5\nu^4\rho + 10\nu^3\rho^2 + 10\nu^2\rho^3 + 5\nu\rho^4 + \rho^5)$  という数かゆればよいことになる。例として、 $\mu^3\rho^5$  と  $\mu^3\rho^2\nu^3$  を求めて見る。

$$\underline{\mu^3\rho^5}$$

$$\nu + \nu = \rho + 2\mu + \eta$$

$$\rho + \rho = \nu + \delta$$

2"あったから、

$$\nu = \frac{2}{3}\eta + \frac{1}{3}\delta + \frac{4}{3}\mu \quad \dots (5)$$

$$\rho = \frac{1}{3}\eta + \frac{2}{3}\delta + \frac{2}{3}\mu \quad \dots (6)$$

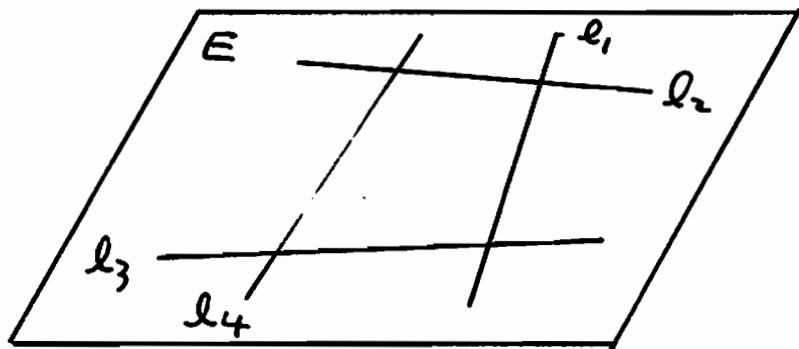
となる。

$$\mu^3\rho^5 = \mu^3\rho^4 \cdot \rho = \mu^3\rho^4 \left( \frac{1}{3}\eta + \frac{2}{3}\delta + \frac{2}{3}\mu \right) \\ \text{(6)式より)}$$

故に,  $\mu^3 p^5 = \frac{1}{3} \mu^3 p^4 \eta + \frac{2}{3} \mu^3 p^4 \delta + \frac{2}{3} \mu^4 p^4$ .  
 二二,  $\mu^4$  は  $C$  の定める平面が 4 つの一般  
 の位置にある真を通るという条件であるから,  
 明らかに,  $\mu^4 = 0$ . 従って,  $\mu^3 p^4 \eta$  と  $\mu^3 p^4 \delta$   
 を求めればよい。

$\mu^3 p^4 \eta$

$\mu^3 p^4$  という条件は, 2次曲線  $C$  がある  
 平面  $E$  の上にあって, 他の 4 つの平面に接する  
 という条件である。



$E$  上で見れば, 2次曲線  $C$  が  $E$  上の 4 つの直線  
 $l_1, l_2, l_3, l_4$  と接するという条件である。  $C$  が  
 $\eta$  の型に退化することを要請すれば,  $C$  の接線系は,  
 $l_1 \cap l_2$  と  $l_3 \cap l_4$  のように  $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$  を

2本づつに分けて作った2個の交点を通るものの全体でなければいけない。従って、 $\mu^3 p^4 \eta$ は  $\{l_1, l_2, l_3, l_4\}$ を2本づつの組に分ける分け方の数  $\frac{1}{2}(4) = 3$ となる。

$$\underline{\mu^3 p^4 \delta}$$

前項の例より明らかに0となる。

以上より、 $\mu^3 p^5 = \frac{1}{3} \times 3 + \frac{2}{3} \times 0 + \frac{2}{3} \times 0 = 1$ となる。

次の例は、解に重複度が出にくる。

$$\underline{\mu^3 p^2 v^3 = 4}$$

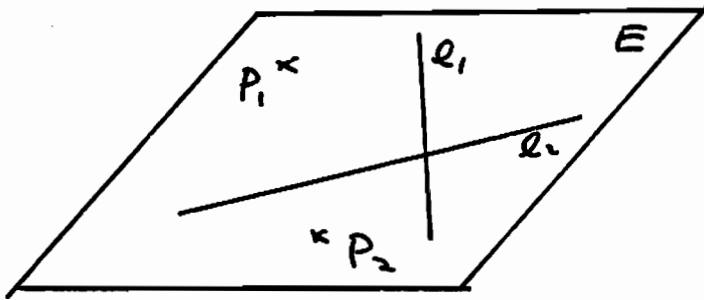
前例より従って、

$$\begin{aligned} \mu^3 p^2 v^2 v &= \frac{2}{3} \mu^3 p^2 v^3 \eta + \frac{1}{3} \mu^3 p^2 v^3 \delta + \frac{4}{3} \mu^4 p^2 v^2 \\ &= \frac{2}{3} \mu^3 p^2 v^3 \eta + \frac{1}{3} \mu^3 p^2 v^3 \delta \end{aligned}$$

とする。

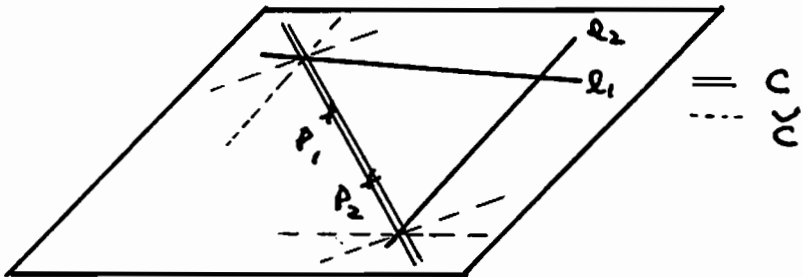
$\mu^3 p^2 v^2$ という条件は、 $\Gamma_2$ 双曲線Cが平面E上にある2直線 $l_1, l_2$ に接し、2点 $P_1, P_2$ を

通る, というもの2つある。



$$\mu^3 p^2 v^2 \eta$$

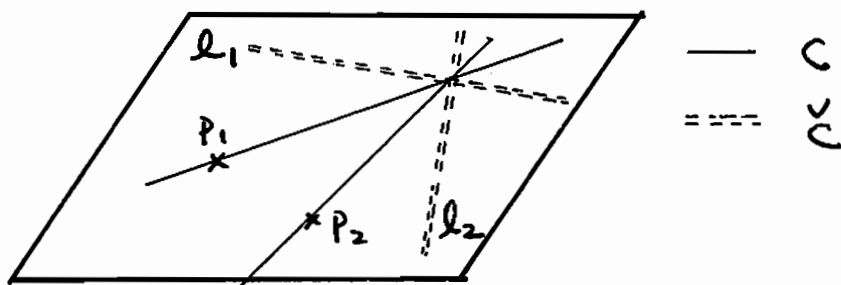
$\eta$  に退化した 2 次曲線  $C$  で,  $\mu^3 p^2 v^2 E$  満たすものは次の 1 つだけがある。



但, ここで注意しなければならないのは,  $C$  の本体は 2 重直線であるから, 条件  $\nu$  は「= 重<sup>\*</sup>」に満たされいる。従って,  $\mu^3 p^2 v^2 \eta = 2^2 \cdot 1 = 4$  となる。( \*  $C$  は点  $P_1, P_2$  を 2 回通る, 2 回とは 2 回通るとなる。)

$$\mu^3 p^2 v^2 \delta$$

$\delta$  型に退化した2次曲線  $C$  で、 $\mu^3 \rho^2 \nu^2$  を満たすものは、次のもの一つである。



ここで、接線が二重直線の集まりであるから、条件  $\rho$  は二重に満たされている。従って、重複度も考えに入れると、

$$\mu^3 \rho^2 \nu^2 \delta = 2^2 \cdot 1 = 4。$$

以上をまとめると、

$$\mu^3 \rho^2 \nu^3 = \frac{2}{3} \times 4 + \frac{1}{3} \times 4 = 4 \quad \text{となる。}$$

同様に(2)計算していくことにより、次の表を得る。(Schubertの本, p.95)

$$\mu^3 \nu^5 = 1 \quad \mu^3 \nu^4 \rho = 2 \quad \mu^3 \nu^3 \rho^2 = 4$$

$$\mu^3 \rho^5 = 1 \quad \mu^3 \nu \rho^4 = 2 \quad \mu^3 \nu^2 \rho^3 = 4$$

これにより、求める数字が得られる。

$$\begin{aligned}\mu^3(2\nu+2\rho)^5 &= 2^5 \left( 1 + \binom{5}{1}2 + \binom{5}{2}4 + \binom{5}{3}4 \right. \\ &\quad \left. + \binom{5}{4}2 + 1 \right) \\ &= 32 \times 102 = 3264.\end{aligned}$$

この数字は、Griffiths-Harris [4] pp. 749-756 に於いて厳密に示されている。ここでは、Schubertの方法を紹介することを主目的にしたので、その様な解説はしなかった。

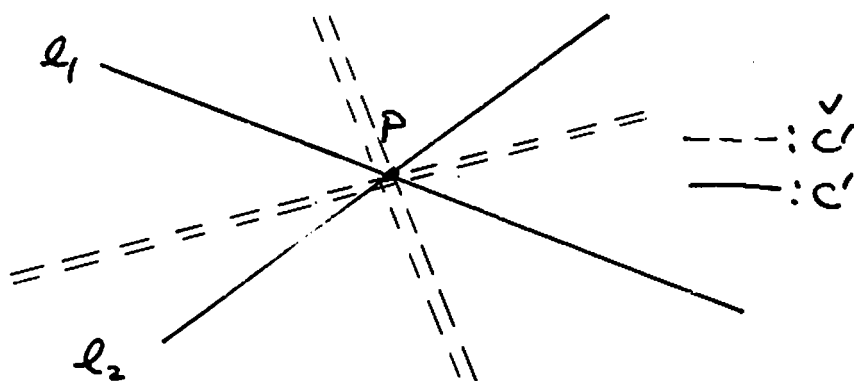
さて、残り残した次の事の説明をする。  
①「空間2次曲線がある平面上の5つの2次曲線と接する」という条件は、 $\mu^3(2\nu+2\rho)^5$  とかける。

Schubertは彼の本の中でこの量を、この方法で示している。

第一の法は、「定数不変の法則」あるいは、「特殊位置の原理」と呼ばれるものを使用するのである。 $\mu^3$  は、2次曲線Cの定める平面がある点を通る3点を通るという条件で

ある。その平面を  $E$  とする。  $\nu$  を  $E$  の上で  
見れば、  $C$  がある点  $P$  を通るという条件である。  
又、  $P$  を  $E$  の上で見れば、  $C$  がある直線  $Q$   
に接するという条件である。

$E$  上で、 2次曲系  $C'$  に接するのはどうい  
う条件であるかを見る。  $C'$  は 2本の直線に退化  
させると、 条件としては、 数値的関係で  
見れば限りは変わらないであろう。(=  $\mu$  が「定数  
不変の法則」である。)



$C'$  に  $C$  が接するための必要十分条件は、  
(  $C$  が  $Q_1$  又は  $Q_2$  に接する ) 又は (  $C$  が点  $P$   
を通る。但し、この時は接線が 2重直線である  
から、解の重複度は 2 )

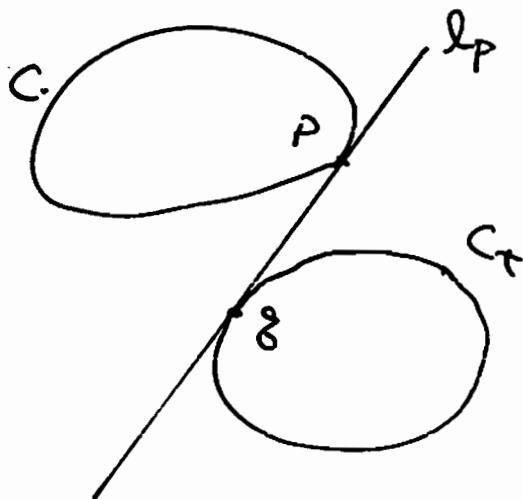
$$= 2\mu^3 P + 2\mu^3 \nu = \mu^3 (2P + 2\nu)$$



従って、求める条件は、 $u^3(2p+2v)^5$  と存在。

第2の方法. Charlesの原理に帰着させる。 $\{C_t\}_{t \in T}$  は2次曲線の one parameter family とする。(Tは射影曲線とする。)

Cを与えられた2次曲線とする。C上の各点Pについて、Pを通るCの接線 $l_P$ を考える。 $\{C_t\}_{t \in T}$  が constant family ではないければ、 $l_P$  と接する  $C_t$  は少なくとも一つあるであろう。



Schubertは、 $P=Q$  とする回数と数えるのである。この時、注意しなければいけないのは、 $P=Q$  である、つまり、PとQを結ぶ直線 (= 接線) が存在することである。すなわち、 $(P, Q)$

が走り空間は  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$  ではなく、 $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$  を対角成分で blow up した空間  $\widetilde{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2}$  である。

条件  $P_Q, \delta_Q \in \mathbb{R}$ , 「点  $P, \delta$  がある直線の  $L$  に  $\alpha, 2$  いる」という条件とする。

条件  $L_P \in \mathbb{R}$ , 「 $P$  と  $\delta$  を結ぶ直線がある直線を通る」というものにする。 $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$  の対角成分を  $\Delta$ ,  $\tilde{\Delta}$  を  $\widetilde{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2}$  内での  $\Delta$  の pull-back とする。この時, Divisors と考え、

$$P_Q + \delta_Q = L_P + \tilde{\Delta}$$

と存在。(Coincidence 公式)

この公式の Schubert の本での説明は以下の通りである。

$\widetilde{\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2}$  内の曲線  $T$  を考える。 $T$  が定まる  $\mathbb{P}^2$  上の点と一致しない点を一つとり  $P$  とおく。 $P$  で定まる線束を考える。

$$\mathcal{P} = \{ L \text{ 上の直線 } L \text{ で } P \text{ を通る } L \}$$

$\mathcal{P}$  上の対応  $D$  を次の様に与える。

$$D = \{ (L, L') \in \mathcal{P} \mid \exists t \in T \text{ s.t. } L \ni P_t, L' \ni \delta_t \}$$

$D$  に Chasles の原理を適用し、上の

Coincidence 公式を得る。

$n=2$ ,  $p=3$  とする回数  $n$  を数える。(P.36  
に拠る。)

$\tilde{\Delta} = C_t$  が  $C$  と交差する回数。

$$P_2 = 2p$$

$$g_2 = 2(v+p)$$

$$l_p = 2p.$$

故に,

$$\begin{aligned} C_t \text{ が } C \text{ と交差する回数} &= 2p + 2(v+p) - 2p \\ &= 2(v+p). \end{aligned}$$

§2, Schubert が "と" の様に 2 問題の  
3, 4 に approach (2 行, 3 行) の様に成る。

問題の 2 に於いては, 退化した 2 次曲線  
を考えることにより, 2 次曲線の問題を直線  
(及びその上の点) の問題にまで還元するこ  
とが可能であった。問題 3, 4 についても, 逐次  
より簡単な図形の問題に帰着させたい  
のである。例えば, Schubert によれば,  
次の様な退化図形が表わされる。

1.  $cusps$  を持つ平面3次曲線。  
真直線、 $\mathbb{P}^1$  2次曲線。

2. 二重点を持つ平面3次曲線。  
1の図形及び $\mathbb{P}^1$ ,  $cusps$  を持つ平面3次曲線。

3. *twisted cubics*.  
2及び $\mathbb{P}^1$ , 二重点をもつ平面3次曲線, 3点  
円錐。

4. 空間2次曲面。  
直線, 平面, 2次曲線, 円錐。

例えば, 空間3次曲線 (*twisted cubics*)  
について計算するには, 1及び $\mathbb{P}^1$  2についてを  
計算しなければならぬ。Schubertの本には,  
1については, 8種類の退化図形が, 又2  
については13種, 3については11種あげら  
れている。膨大な計算があって, Schubertの本  
にも, 計算結果が表になってのっているだけである。

(多少の説明もあるが。) (かくなる, 基本的な  
考えは, 2次曲線の場合に出ている。

## 文献

- [1] Baker, Principles of Geometry.
- [2] Coolidge, J., A History of Geometrical  
Methods, 1940, Oxford University Pr.
- [3] Grayson, Coincidence Formulas in Enumerative  
Geometry, Comm. in Alg., 7(16), 1979.
- [4] Griffiths, Harris, Principles of Algebraic  
Geometry, 1978, Wiley-Interscience.
- [5] Harris, Joe, Galois Groups of Enumerative  
Problems, Duke Math. J., 46(1979)
- [6] Hiller, H, Geometry of Coxeter Groups,  
1982, Pitman.
- [7] Kleiman, S, Problem 15. Rigorous foundation of  
Schubert's enumerative calculus, Amer. Math.  
Soc. Symposium on Hilbert's problems, De  
Kalb (1974), Ams Series PSPM 28.
- [8] Kleiman, S, Chasles's Enumerative Theory of Conics: A  
Conics: A Historical Introduction, in  
Studies in Algebraic Geometry, 1980,  
the Mathematical Association of America.

- [9] Piene, R., Degenerations of Complete Twisted Cubics, Preprint Series-Matematisk institutt, Universitetet i Oslo, 1982.
- [10] Schubert, H., Kalkül der abzählenden Geometrie, 1979, Springer.
- [11] Semple, J., Roth, L., Introduction to Algebraic Geometry, 1949, Oxford.
- [12] Zeuthen, Lehrbuch der abzählenden Methoden der Geometrie, 1914, Teubner.

Schubert Calculus 全般については,  
 [1], [2], [11], [12] がある。[1]は  
 線形空間, 又 [11]は二次曲面について書い  
 てある。[12]は Chasles の弟子である Zeuthen  
 による教科書である。

線形空間についての Schubert Calculus  
 ( $G/p$  の cohomology!) については, [6] に書い  
 てある。

Grayson [3] は coincidence の式につい  
 て, 証明つきで書いてある。

Pienc [9] は, twisted cubics の 11 の

退化図形については書いている。又, Schlesinger  
と共同で,  $\text{Hilb}^{3m+1}(\mathbb{P}^3)$  の既約成分で,  
twisted cubics を含むものが非特異になる  
ことを示したと序文にある。

(三三) twisted cubic とは, 空間3次曲  
系とも呼ばれるものである。「 $\mathbb{P}^3$  内の3次  
曲系で平面には含まれないもの, が定義  
である。twisted cubics はすなわち,  $GL(4)$   
の作用で互いに移り合う。

一つの代表は次の parameter 表示をもつ。

$$y_0 = t_2^3, \quad y_1 = t_1 t_2^2, \quad y_2 = t_1^2 t_2, \quad y_3 = t_1^3.$$

# Kac-Moody Lie 環の代数的側面 I (Kac-Peterson の論文の紹介)

青学大 小池 和彦

## 序文

Kac-Moody Lie 環は 1967 年頃 V.G. Kac と R.V. Moody により 独立に導入された。(ref.⑤ ⑩)  
この当時 既に Kac-Moody Lie 環中の重要な class である Euclid 型 Lie 環の概念も把握されていたが その応用が見出せず一般に広まるがた。  
Kac-Moody Lie 環が注目を浴び出したのは 1972 年の I.G. Macdonald による「Macdonald 恒等式」(ref.⑨) からである。Macdonald 自身は Affine root system のみ考え、Euclid 型 Lie 環と結びつけなかつたが、R.V. Moody 及び V.G. Kac は共にそれが Euclid 型 Lie 環の表現論から導かれる Weyl の分母公式に於いて変数を特殊化すれば得られることを示し特に一般の symmetrizable な Kac-Moody Lie 環



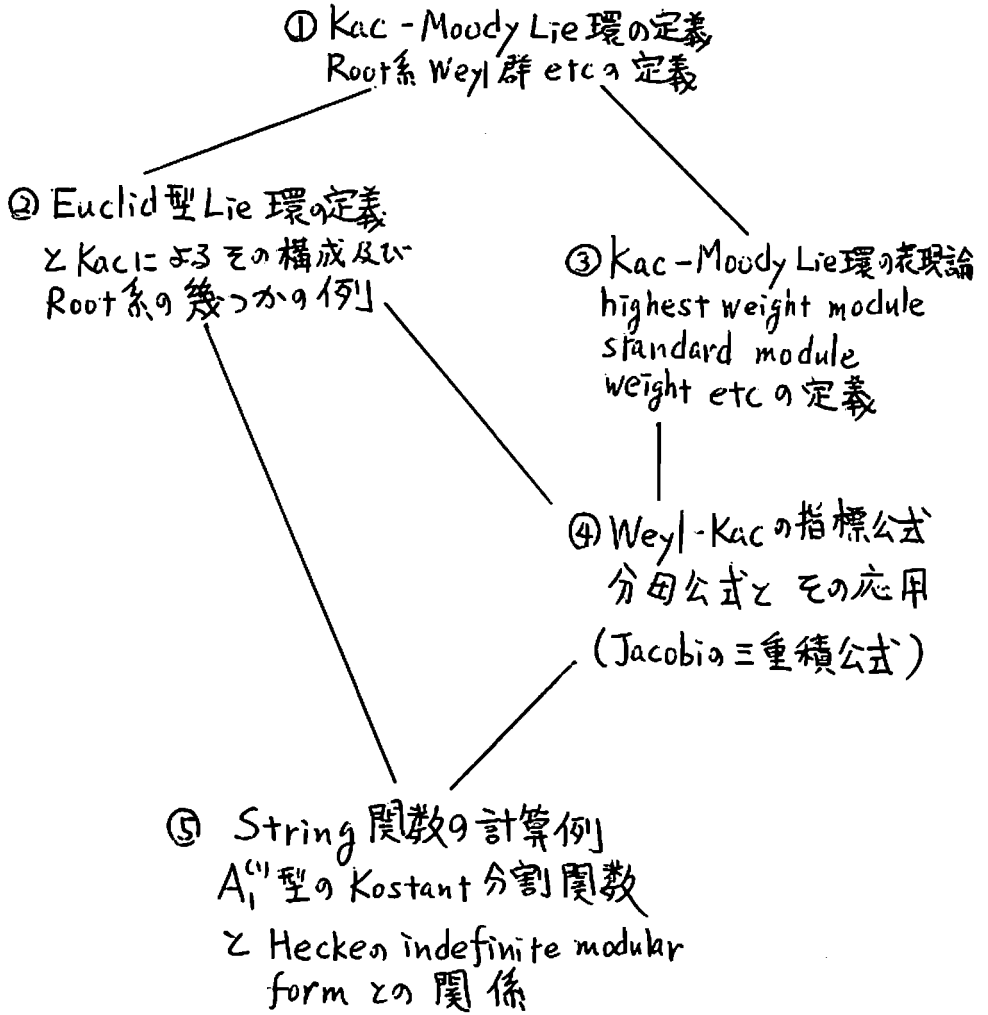
に対しても Weyl の分母公式及び指標公式に  
当るものを示した。(ref ⑥)

これ以後 Kac-Moody Lie 環の一つの流れと  
して Weyl の分母公式及び指標公式を用いた  
展開公式の証明及び Combinatorial Theory  
への応用が挙げられる。特に最近では展開公  
式の一端として Modular form との関係が  
close up されてきている。本稿は  $\theta$  級数の  
変換公式を用いて Euclid 型 Lie 環の  
或る種の既約表現 (有限次元の場合の類似)  
の weight の重複度を計算しその応用として  
 $A_n$  型の時に Hecke の indefinite modular form  
type の展開公式を与える Kac-Peterson の  
論文 (ref ①) の紹介である。三人の分担は  
次の通りである。

追伸 Kac-Peterson は最近  
「Infinite flag varieties and conjugacy  
theorems」  
を出した。この論文では symmetrizable G.C.M.A

$(A = (A_{ij}))$  から構成された Kac-Moody Lie 環  
の  $(A)$  の Cartan 部分環及び Borel 部分環の  
共役性定理を示し特に懸案であった  
「Kac-Moody Lie 環は (中心の部分を除けば)  
Cartan 行列により決定される」  
を symmetrizable の場合に証明している。  
これにより symmetrizable G.C.M. に対応  
する Kac-Moody Lie 環の構造論はほぼ  
終了することになる。

# 概念の関連図及び担当者の表



上図	① ②	小池 担当
"	③ ④	徳山 "
"	⑤	田中 "

# 文献表

この講演の内容は

① V.G. Kac and D. H. Peterson "Infinite-dimensional Lie algebra, theta functions and modular forms" (to appear in Adv. Math)

に依る。Kac-Moody Lie環の一般論及び

1981年4月頃までの主要な結果は

② 岩堀長慶, 横沼健雄 "Kac-Moody Lie環と Macdonald 恒等式" 岩波数学第33巻3号 1981年に詳しい。またそこには精密な文献表が附いていて便利である。

序文で触れた文献, 及び ②以降の文献, ④関数等については

③ O. Gabber, V.G. Kac "On defining relations of certain infinite-dimensional Lie algebras" Bull. Amer. Math. Soc 5 (1981) pp185-189

この論文では symmetrizable な Cartan 行列から構成された Kac-Moody Lie環の radical が 0 になることを証明している。これについては筑波大学の森田純氏による証明の簡略化がある。

- ④ E. Hecke "Über einen Zusammenhang zwischen elliptischen Modulfunctionen und indefiniten quadratischen Formen" Math. Werke. 1959 pp418-427
- ⑤ V.G. Kac "Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth" Math USSR Izvestija 2 (1968) 1271-1311
- ⑥ V.G. Kac "Infinite-dimensional algebras, Dedekind  $\eta$ -function, classical Möbius function and the very strange formula" Adv. in Math 30 (1978) 85-136
- ⑦ V.G. Kac and D.H. Peterson "Affine Lie algebras and Hecke modular forms" Bull of A.M.S. 3 (1980) 1057-1061
- ⑧ 小泉正二 "テ-タ函数" 紀伊國屋数学叢書22
- ⑨ I.G. Macdonald "Affine root systems and Dedekind's  $\eta$ -function" Inv. Math 15 (1972) 91-143
- ⑩ R.V. Moody "A new class of Lie algebra" J. of Alg. 10 (1968) 211-230
- ⑪ D. Mumford "Tata Lectures on the Theta functions" mimeographed notes
- ⑫ J. P. Serre "Cours d'Arithmetique" Presses Universitaires de France 1970  
最後に 最近出た論文として

⑬ A. J. Feingold, and I. B. Frenkel "A hyperbolic Kac-Moody Lie algebra and the theory of Siegel Modular forms of genus 2"

この論文では Cartan 行列  $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  に対応する hyperbolic type の Kac-Moody Lie 環を  $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$  に対応する Euclid 型 Lie 環  $F_0$  と  $F_0$  の基本表現の表現空間を用いて構成している。

## Kac-Moody Lie環, Root系, Weyl群の定義

有限次元半単純 Lie環の Cartan 行列の持つ形式的性質を抜き出し次の様に一般化する。

定義.  $l$  次正方行列  $A$  が一般化された Cartan 行列 (以下 G.C.M と略記) とは

- i)  $A_{\bar{i}\bar{j}} \in \mathbb{Z}$ , ii)  $A_{\bar{i}\bar{i}} = 2 \quad \bar{i} = 1, 2, \dots, l$
- iii)  $\bar{i} \neq \bar{j}$  なら  $A_{\bar{i}\bar{j}} \leq 0$
- iv)  $A_{\bar{i}\bar{j}} = 0 \iff A_{\bar{j}\bar{i}} = 0$  for  $\bar{i} \neq \bar{j}$   
を満すものを云う。

有限次元半単純 Lie環の生成元と基本関係による表示に於いて, Cartan 行列の代りに G.C.M を用いることにより

定義 (Kac-Moody Lie環)

$A \in M_l(\mathbb{Z})$  を G.C.M とし (但し  $A = (A_{\bar{i}\bar{j}})$ )

$f$ : 次元  $l + \text{corank } A$  の  $\mathbb{C}$  上の vector space

$f^*$ :  $f$  の dual space

とする。この時各  $l$  個の線型独立な元  $\{h_1, h_2, \dots, h_l\} \subset \mathfrak{g}$ ,  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\} \subset \mathfrak{g}^*$  で  $\alpha_i(h_j) = A_{ji}$  を満すものが存在する。

( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$  を単純 root と呼ぶ。)

$\mathfrak{g}(A)$  を  $\mathfrak{g}$  と symbol  $\{e_{\lambda}, f_{\lambda}\}_{\lambda=1}^l$  によって生成され次の表示を持つ複素 Lie 環とする。

$$\left\{ \begin{array}{l} [e_{\lambda}, f_{\bar{\lambda}}] = \delta_{\lambda\bar{\lambda}} h_{\lambda} \quad 1 \leq \lambda, \bar{\lambda} \leq l \\ [h, e_{\lambda}] = \alpha_{\lambda}(h) e_{\lambda} \quad 1 \leq \lambda \leq l \\ [h, f_{\lambda}] = -\alpha_{\lambda}(h) f_{\lambda} \quad 1 \leq \lambda \leq l \\ [h, h'] = 0 \\ (\text{ad } e_{\lambda})^{1-\alpha_{\lambda\bar{\lambda}}} e_{\bar{\lambda}} = 0, (\text{ad } f_{\lambda})^{1-\alpha_{\lambda\bar{\lambda}}} f_{\bar{\lambda}} = 0 \text{ for } \lambda \neq \bar{\lambda} \end{array} \right.$$

$\mathfrak{g}(A)$  を Kac-Moody Lie 環と呼び、 $A$  をその Cartan 行列と云う。 $\mathfrak{g}$  を  $\mathfrak{g}(A)$  の Cartan 部分環と云う。

勿論有限次元半単純 Lie 環の Cartan 行列から構成した Kac-Moody Lie 環は元の有限次元半単純 Lie 環と同型である。



また  $\mathfrak{g}(A)$  の derived algebra  $\mathfrak{g}'(A) \stackrel{\text{def}}{=} [\mathfrak{g}(A), \mathfrak{g}(A)]$  は  $\{e_i, f_i\}_{i=1}^l$  で生成された部分 Lie 環で

$$\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{f} + \mathfrak{g}'(A)$$

が成立している。この  $\mathfrak{g}'(A)$  及び  $\mathfrak{g}(A)$  をその中心で割った商 Lie 環もまた Kac-Moody Lie 環と呼ばれる。

$\mathfrak{n}_+ : \{e_i\}_{i=1}^l$  で生成された  $\mathfrak{g}(A)$  の部分 Lie 環

$\mathfrak{n}_- : \{f_i\}_{i=1}^l$                     "

とおくと 直和分解 (線型空間としての)

$$(1) \quad \mathfrak{g}(A) = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{f} \oplus \mathfrak{n}_-$$

が成立する。さらに  $\mathfrak{f}$  の  $\mathfrak{g}(A)$  上への Adjoint 作用による Root space 分解

$$\mathfrak{g}(A) = \bigoplus_{\alpha \in \mathfrak{f}^*} \mathfrak{g}_\alpha$$

但し  $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}(A); [h, X] = \alpha(h)X \text{ for } \forall h \in \mathfrak{f}\}$

で  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{f}$  である。

定義  $\dim \mathfrak{g}_\alpha \neq 0$  となる  $\alpha \in \mathfrak{f}^*$  を  $\mathfrak{g}(A)$  の root と呼ぶ。

注意  $\mathfrak{g}'(A)$  或いは  $\mathfrak{g}'(A)/\mathfrak{z}$  ( $\mathfrak{z}$  は  $\mathfrak{g}'(A)$  の中心) で表える時は root は常に  $\mathfrak{f}^*$  ( $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$  が一次独立になる様に Cartan 部分環を拡張した

の dual space) 中で考えているとする。

root の集合を  $\Delta$  で表わし 各 root  $\alpha \in \Delta$  の重複度を  $\dim \mathfrak{g}_\alpha$  で定義する。

この時単純 root  $\alpha_i$  ( $i=1, 2, \dots, l$ ) の重複度は常に 1 で  $\mathfrak{g}_{\alpha_i} = \{ce_i\}$ ,  $\mathfrak{g}_{-\alpha_i} = \{cf_i\}$  となる。

さらに (1) の分解より  $\Gamma = \sum_{i=1}^l \mathbb{Z}\alpha_i$  と置くと

$\Gamma \supset \Delta$ , かつ  $\Delta$  の任意の元を  $\alpha = \sum_{i=1}^l k_i \alpha_i$  とすると,  $k_1, k_2, \dots, k_l$  は全て非負か, 全て非正である。(同符号性) よって

$\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$  と分解できる。

但し  $\Delta^+ = \{ \alpha \in \Delta; \alpha = \sum_{i=1}^l k_i \alpha_i, k_i \geq 0 \text{ for all } i \}$

$\Delta^- = \{ \alpha \in \Delta; \quad \quad \quad k_i \leq 0 \quad \quad \}$

で  $-\Delta^+ = \Delta^-$  が成立している。

## Weyl 群の定義

Weyl 群  $W \subset GL(\mathfrak{g}^*)$  を次の基本鏡映達で生成される群として定義する。

$k_i(x) := x - x(k_i) \alpha_i \quad \text{for } x \in \mathfrak{g}^*$

$i=1, 2, \dots, l$

と置く。  $r_i$  を基本鏡映と云う。

定義  $W = \langle r_1, r_2, \dots, r_\ell \rangle \subset GL(\mathfrak{g}^*)$  を  $\mathfrak{g}(A)$  の Weyl 群と云う。

この時 定義から明らかに  $W \cdot \Gamma \subset \Gamma$  を得る。  
但し  $\Gamma = \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{Z} \alpha$  (root lattice)

定理  $(W, \{r_1, r_2, \dots, r_\ell\})$  は Coxeter 系をなす。即ち次の表示をもつ。

$$W = \langle r_1, r_2, \dots, r_\ell \mid r_i^2 = 1 \ (\lambda=1, 2, \dots, \ell) \\ (r_i r_j)^{m_{ij}} = 1 \ \text{for } i \neq j, \rangle$$

但し  $m_{ij}$  は Cartan 行列  $A$  の言葉で

$A_{ij} A_{ji}$	0	1	2	3	4以上
$m_{ij}$	2	3	4	6	$+\infty$

で与えられる。

また各  $\lambda$  ( $1 \leq \lambda \leq \ell$ ) に対して

$$\tilde{r}_\lambda := \exp(\text{ad } e_\lambda) \exp(-\text{ad } f_\lambda) \exp(\text{ad } e_\lambda) \in \text{Aut}(\mathfrak{g}(A))$$

が存在して

$$\tilde{r}_\lambda \mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{g}_{r_\lambda(\alpha)} \quad \text{for } \forall \alpha \in \Delta$$

よって 全ての  $w \in W$  に対して

$\alpha$  の重複度 =  $w(\alpha)$  の重複度 が成立し  
 $W(\Delta) \subset \Delta$  が成立している。

定義.  $\{w \cdot \alpha_1\} \cup \{w \cdot \alpha_2\} \cup \dots \cup \{w \cdot \alpha_\ell\}$  ( $\subset \Delta$ )  
を  $\Delta^R$  で表わし 実ルートと呼ぶ。

$\Delta_I := \Delta \setminus \Delta^R$  とおき 虚ルートと呼ぶ。

実ルートの重複度は常に 1 である。

## Euclid 型 Lie 環の定義と表

以下 Kac - Moody Lie 環中の最も重要な class  
である Euclid 型 Lie 環を定義する。

定義 Kac - Moody Lie 環  $\mathfrak{g}(A)$  が 中心に  
含まれない Ideal ( $\neq \mathfrak{g}(A)$ ) をもつ時 Euclid 型と呼ばれる。

上の定義を Cartan 行列  $A$  の言葉で書いてみよう。

まず その前に

定義 G.C.M  $A \in M_\ell(\mathbb{Z})$  が分解不能である  
とは どんな置換行列  $P$  に対しても  
 $PA P^{-1} = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$  の形にならないことを云う。

注意. G.C.M  $A$  が  $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$  の形ならば  
 $\mathcal{G}(A) \cong \mathcal{G}(A_1) \oplus \mathcal{G}(A_2)$  (Lie環としての直和)  
 が成立する. 従って實際上分解不能のもので十分である.

定義 G.C.M  $A \in M_{\ell}(\mathbb{Z})$  が Euclid 型であるとは

- i)  $A$  は分解不能
- ii)  $\det A = 0$  かつ全ての  $\lambda$  ( $1 \leq \lambda \leq \ell$ ) について  $A$  から  $\lambda$  行及び  $\lambda$  列を除いてできる行列  $A_{\lambda}$  は有限次元単純 Lie 環の Cartan 行列を満すものを云う.

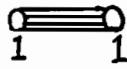
この時

定理  $\mathcal{G}(A)$  が Euclid 型  $\Leftrightarrow A$  が Euclid 型 G.C.M が成立する. 二つ Euclid 型 G.C.M を Dynkin 図形で表わすと次頁の Table I, II, III になる. 但し  $\ell$  次 Cartan 行列  $A$  に対応する Dynkin 図形とは  $\ell$  個の頂点を持つ有向グラフで,  $i \neq j$  の時 頂点  $j$  から頂点  $i$  へ  $|A_{ij}|$  重の矢を書く. 但し  $|A_{i\lambda}| = |A_{j\lambda}| = 1$  なる  $i$  と  $j$  を単に線分で結び,  $|A_{ij}| > 1$ ,  $|A_{j\lambda}| = 1$  の時は  $i$  から  $j$  の矢を省略する.

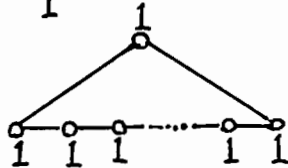
# Euclid 型 Lie 環の Dynkin 図形

## Table 1

$A_1^{(1)}$

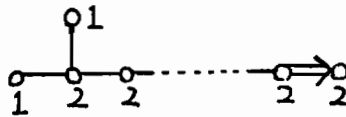


$A_l^{(1)} (l \geq 2)$



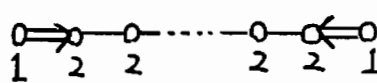
(頂点数  $l+1$  個)

$B_l^{(1)} (l \geq 3)$



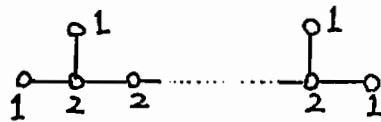
(頂点数  $l+1$  個)

$C_l^{(1)} (l \geq 2)$



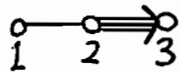
(頂点数  $l+1$  個)

$D_l^{(1)} (l \geq 4)$

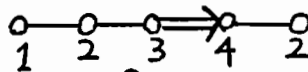


(頂点数  $l+1$  個)

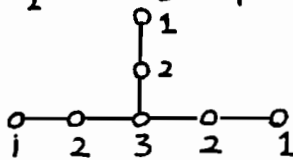
$G_2^{(1)}$



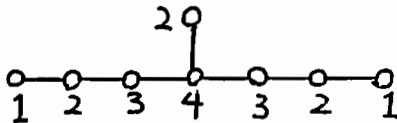
$F_4^{(1)}$



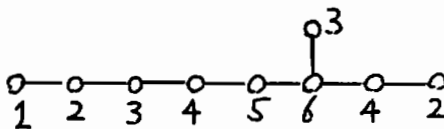
$E_6^{(1)}$



$E_7^{(1)}$



$E_8^{(1)}$



## Table II

$$A_2^{(2)} \quad \begin{array}{c} 1 \quad 2 \\ \circ \rightleftarrows \circ \end{array}$$

$$A_{2\ell}^{(2)} \quad (\ell \geq 2) \quad \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 2 \quad \dots \quad 2 \quad 2 \\ \circ \rightleftarrows \circ - \circ \dots - \circ \rightleftarrows \circ \end{array} \quad (\text{頂点数 } \ell+1 \text{ 個})$$

$$A_{2\ell-1}^{(2)} \quad (\ell \geq 3) \quad \begin{array}{c} \quad \quad 1 \\ \quad \quad \circ \\ \circ - \circ - \circ \dots - \circ \leftleftarrows \circ \\ 1 \quad 2 \quad 2 \quad \quad \quad 2 \quad 1 \end{array} \quad (\text{頂点数 } \ell+1 \text{ 個})$$

$$D_{\ell+1}^{(2)} \quad (\ell \geq 2) \quad \begin{array}{c} 1 \quad 1 \quad 1 \quad \dots \quad 1 \quad 1 \\ \circ \leftleftarrows \circ - \circ \dots - \circ \rightleftarrows \circ \end{array} \quad (\text{頂点数 } \ell+1 \text{ 個})$$

$$E_6^{(2)} \quad \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \\ \circ - \circ - \circ \leftleftarrows \circ - \circ \end{array}$$

## Table III

$$D_4^{(3)} \quad \begin{array}{c} 1 \quad 2 \quad 1 \\ \circ - \circ \leftleftarrows \circ \end{array}$$

Table I, II, III で 図形に書き込まれた数字は null root  $\delta$  の係数.  $\delta$  の係数は各図形に  
 対応する Cartan 行列を  $A$  とする時  $A \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_\ell \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\exists \lambda_i > 0$  for  $\forall \lambda$ , かつ  $G.C.D(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = 1$  を満す vector として一意的に定まる。

Table I, II, III で一番左端の頂点に対する単純 root を  $\alpha_0$  とし他の単純 root を  $\alpha_1, \dots, \alpha_k$  とすると Table I の図形は  $\alpha_0$  を取り除いた図形に対する有限次元単純 Lie 環の単純 Root 系  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k\}$  に  $\{-\text{highest root}\}$  を付け加えた図形である。Table II, III でも同様に  $A_{2l}^{(2)}$  型以外は  $\{-\text{highest root}\}$  の代りに  $\{-\text{short highest root}\}$  を付け加えた図形である。 $A_{2l}^{(2)}$  型のみは  $\{-2\text{倍の short highest root}\}$  を付け加えた図形である。

## Euclid 型 Lie 環 $X_k^{(k)}$ の Root 系 $\Delta$ について

虚 root は統一的に  $\{n\delta; n \in \mathbb{Z}\}$  で与えられる。但し  $\delta$  は null root. この時  $\dim \mathfrak{g}^{k\delta} = l$ , 及び  $m \equiv n \pmod{k}$  ならば  $\dim \mathfrak{g}^{m\delta} = \dim \mathfrak{g}^{n\delta}$  が成立している。(後節の kac による構成法を参照) 従ってルートの重複度を求めるには  $\dim \mathfrak{g}^{\lambda\delta}$   $1 \leq \lambda \leq k-1$  を求めれば良い。



$X_l^{(2)}$	$\dim \mathfrak{g}^{\delta}$	$X_l^{(2)}$	$\dim \mathfrak{g}^{\delta}$	$X_l^{(2)}$	$\dim \mathfrak{g}^{\delta}$	$\dim \mathfrak{g}^{2\delta}$
$A_2^{(2)}$	1	$A_{2l-1}^{(2)}$	$l-1$	$E_6^{(2)}$	2	/
$D_{2l+1}^{(2)}$	1	$A_{2l}^{(2)}$	$l$	$D_4^{(3)}$	1	

Euclid型Lie環の実rootは次の様に書ける。

$\mathfrak{g}^*$ 中の部分空間で  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l$  で張られた部分空間を  $\bar{\mathfrak{g}}^*$ とし  $\Delta \cap \bar{\mathfrak{g}}^* = \bar{\Delta}$  と置く。 $\bar{\Delta}$ は丁度  $\alpha_i$  を取り除いた図形に対応する単純Lie環のRoot系と同型である。

$\bar{\Delta}^s = \{\bar{\Delta} \text{中の short rootの全体}\}$  とおく。

$\bar{\Delta}^l = \{\bar{\Delta} \text{中の long rootの全体}\}$

$X_l^{(1)}$ 型の時 実ルート  $\Delta^R$ は

$$\Delta^R = \{\alpha + n\delta; \alpha \in \bar{\Delta}, n \in \mathbb{Z}\}$$

$A_{2l}^{(2)}$ 型以外の  $X_l^{(2)}$ 型の時

$$\Delta^R = \{\alpha + n\nu; \alpha \in \bar{\Delta}^s, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha + 2n\nu; \alpha \in \bar{\Delta}^l, n \in \mathbb{Z}\}$$

$D_4^{(3)}$ 型の時

$$\Delta^R = \{\alpha + n\nu; \alpha \in \bar{\Delta}^s, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{\alpha + 3n\nu; \alpha \in \bar{\Delta}^l, n \in \mathbb{Z}\}$$

$A_{2l}^{(2)}$ 型の時

$$\Delta^R = \{\alpha + n\nu; \alpha \in \bar{\Delta}, n \in \mathbb{Z}\} \cup \{2\alpha + (2n+1)\nu; \alpha \in \bar{\Delta}^s, n \in \mathbb{Z}\}$$

で与えられる。

# 有限次元 単純 Lie環の Dynkin 図形

		対応する Lie群	Weyl群
$A_l (l \geq 1)$		$SL(l+1, \mathbb{C})$	$S_n$ (対称群)
	Killing form $(x, y) = 2(l+1) \text{Tr}(xy)$		
$B_l (l \geq 2)$		$SO(2l+1, \mathbb{C})$	$\mathbb{Z}_2 \wr S_n$
	Killing form $(x, y) = (2l-1) \text{Tr}(xy)$		
$C_l (l \geq 2)$		$Sp(l, \mathbb{C})$	$\mathbb{Z}_2 \wr S_n$
	Killing form $(x, y) = 2l \text{Tr}(xy)$		
$D_l (l \geq 4)$		$SO(2l, \mathbb{C})$	$\mathbb{Z}_2 \wr S_n$ 中の 指数2の部分群
	Killing form $(x, y) = (2l-2) \text{Tr}(xy)$		
$E_6$			Weyl群の位数 $2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$
$E_7$			$2^{10} \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$
$E_8$			$2^{14} \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$
$F_4$			$2^7 \cdot 3^2$
$G_2$			位数12の 二面体群

## Kacによる Euclid型 Lie環の構成

$\mathfrak{g}$ :  $\mathbb{C}$ 上の単純 Lie環で type  $X_e$  のもの

$\sigma$ :  $\mathfrak{g}$ の自己同型で  $\sigma = \text{Id}$  又は  $\sigma$  は Dynkin 図形の  
自己同型から自然に決まる  $\mathfrak{g}$ の自己同型 (有限位数)

$\sigma$ の位数を  $l$  とする。  $i \in \sigma^l = 1$ 。

$\zeta$ : 1の原始  $l$ 乗根

とし  $\lambda \in \mathbb{Z}$  に対して

$\mathfrak{g}_\lambda := \{x \in \mathfrak{g}; \sigma x = \zeta^\lambda x\}$  と置く。

$\lambda \equiv j \pmod{l}$  なら  $\mathfrak{g}_\lambda = \mathfrak{g}_j$ , 更に  $[\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{\lambda+j}$

特に 各  $\mathfrak{g}_\lambda$  は  $\mathfrak{g}_0$ -module になる。 Killing form  
は  $\sigma$  に  $\pm 1$  不変  $\pm 1$   $\lambda + j \equiv 0 \pmod{l}$  の時のみ

$(\mathfrak{g}_\lambda, \mathfrak{g}_j) \neq 0$ 。よって  $[\ , \ ]_{\mathfrak{g}_0}$  は 非退化で  $\mathfrak{g}_0$  は  
reductive な Lie環になる。

$t$  を不定元とし  $t$  の  $\mathbb{C}$  係数の Laurent 多項式環  
を  $\mathbb{C}[t, t^{-1}]$  とし  $\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[t, t^{-1}]$  を

$[X \otimes t^k, Y \otimes t^l] = [X, Y] \otimes t^{k+l}$  (よ) Lie環

にする。  $\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$  の部分 Lie環  $\text{Cov}(\mathfrak{g}, \sigma)$  を

$$\text{Cov}(\mathfrak{g}, \sigma) := \sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} t^j \otimes \mathfrak{g}_j$$

と定義し  $\mathfrak{g}$  の被覆 Lie環と呼ぶ。

$\mathfrak{g}$  を  $\mathfrak{g}_0$  の Cartan 部分環とし

$\bar{\Delta}_0 = \{ \mathfrak{g}_0 \text{ の } \mathfrak{g} \text{ に関する Root 系} \} \subset \mathfrak{g}^*$  とおく。更に

$\bar{\Delta}_i = \{ \mathfrak{g}_i \text{ の } \mathfrak{g}_0 \text{ module としての } \mathfrak{g} \text{ に関する weight の集合} \}$

と置き  $\text{Cov}(\mathfrak{g}, \sigma)$  の Root 系  $\Delta$  を

$$\Delta = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{Z}} (\bar{\Delta}_i, \lambda) \subset \mathfrak{g}^* \times \mathbb{C} \quad \text{で定義する。}$$

$\alpha = (\varphi, \lambda) \in \Delta$  に対し  $\text{Cov}^\alpha(\mathfrak{g}, \sigma) = \mathbb{C} \mathfrak{h} \otimes \mathfrak{g}_i^\varphi$   
 (但し  $\mathfrak{g}_i^\varphi = \{ x \in \mathfrak{g}_i ; [h, x] = \varphi(h)x \text{ for } \forall h \in \mathfrak{g} \}$ ) とおく

$$\text{Cov}(\mathfrak{g}, \sigma) = \sum_{\alpha \in \Delta} \text{Cov}^\alpha(\mathfrak{g}, \sigma) \quad \text{が成立する。}$$

$\mathfrak{g}^*$  に辞書式順序を導入し  $\bar{\Delta}_0$  の正ルート  $\bar{\Delta}_0^+$  を定める。そこで  $\Delta$  の正ルートを

$$\Delta_+ = \{ (\bar{\alpha}, 0) ; \bar{\alpha} \in \bar{\Delta}_0^+ \} \cup \bigcup_{\lambda > 0} (\bar{\Delta}_i, \lambda)$$

により定義し 単純 Root  $\pi$  を正ルートの和で表わせぬ元と定義すると  $\#|\pi| < \infty$

しかも  $A_{ij} = \frac{2(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \quad \alpha_i, \alpha_j \in \pi$  (但し  $(,)$  は  $\mathfrak{g}^*$  の Killing form を  $\mathfrak{g}^* \times \mathbb{C}$  上に  $\mathbb{C}$  上 trivial に拡張したものを)

は Euclid 型 Lie 環の表で丁度  $X_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{g})}$  に対応する Cartan 行列に存る。しかもこの時

定理 (V.G. Kac)  $\text{Cov}(\mathfrak{g}, \sigma)$  は  $X_{\mathfrak{g}}^{(\mathfrak{g})}$  型の

Euclid 型 Lie 環  $\mathfrak{g}'(A)_{\mathfrak{g}}$  と (Lie 環と  $\mathbb{Z}$ ) 同型である。

が成立する。特に  $\sigma = Id$  の時は

$Cov(\mathfrak{g}, \sigma) = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$  であり  $\mathfrak{g}$  の  $f$  に関する  
Root 系を  $\bar{\Delta}$ , 単純 Root を  $\bar{\Pi} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$  とし  $\varphi$  を  
 $\bar{\Delta}$  の highest root とすると

$$\Delta = (\bar{\Delta} \cup \{0\}) \times \mathbb{Z}$$

$$\Pi = \{(\alpha_i, 0); 1 \leq i \leq \ell\} \cup \{(-\varphi, 1)\} \quad \text{となる。}$$

上の構成の Cor とし

Cor  $X_\ell^{(k)}$  型の Euclid 型 Lie 環の Root 系  $\Delta$  に対して  
 $\alpha \in \Delta \Rightarrow k\delta + \alpha \in \Delta$

定義  $\sigma$  の位数  $k$  を  $X_\ell^{(k)}$  型 Lie 環の  
tier number と云う。

後節の為  $\mathfrak{g}(A)$  の元の乗積表を作っておく。

$$Cov(\mathfrak{g}, \sigma) \cong \mathfrak{g}'(A) \otimes \mathbb{Z} \quad \text{及び } \dim \mathbb{Z} = \text{corank } A = 1 \text{ より}$$

$$\mathfrak{g}(A) = Cov(\mathfrak{g}, \sigma) \oplus \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}d \quad \text{の形をして置く。}$$

但し  $\mathbb{Z} = \mathbb{C}$  である。この時  $Cov(\mathfrak{g}, \sigma) \ni X \otimes t^m, Y \otimes t^n$

$(X \in \mathfrak{g}_m, Y \in \mathfrak{g}_n)$  に対して

$$[X \otimes t^m, Y \otimes t^n] = m \delta_{m, -n} \mathbb{C} + [X Y] \otimes t^{m+n}$$

$$[d_0, X \otimes t^m] = m(X \otimes t^m). \quad [c_0, \mathfrak{g}(A)] = 0$$

が乗積表である。但し  $\delta_{m, n}$  は Kronecker の  
デルタである。

# $A_1^{(1)}$ 型の Root 系と Weyl 群

$A_1^{(1)}$  の Cartan 行列  $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

$\mathfrak{g}(A)/\mathfrak{z}$  の標準的実現  $\tilde{\mathfrak{g}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[t, t^{-1}]$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  の Root 系  $\Delta = \{\alpha, -\alpha\}$   $\xleftrightarrow{-\alpha \quad 0 \quad \alpha}$

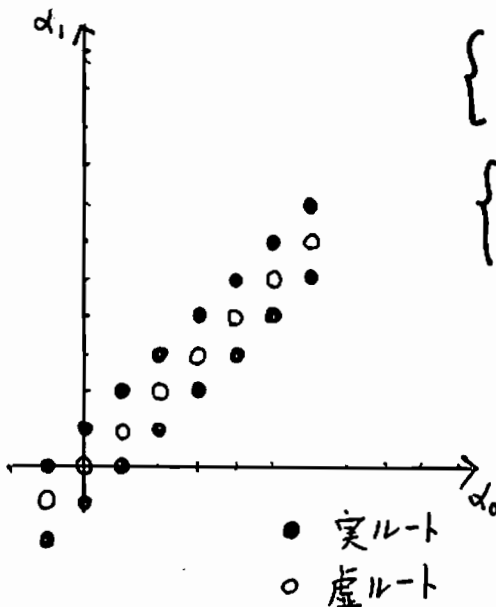
$\tilde{\mathfrak{g}}$  は  $\text{Cov}(\mathfrak{g}, \text{id})$  である。

$\mathfrak{g}(A)$  ( $\mathfrak{g}(A)$ ) の Root 系  $\tilde{\Delta} = (\Delta \cup \{0\}) \times \mathbb{Z}$

正 Root  $\tilde{\Delta}^+ = \Delta^+ \times \{0\} \cup \bigcup_{\lambda \geq 1} ((\Delta \cup \{0\}) \times \{\lambda\})$

単純 Root  $\alpha_0 = (-\alpha, 1)$ ,  $\alpha_1 = (\alpha, 0)$

null root  $\delta = \alpha_0 + \alpha_1$



Weyl 群  $W = \langle r_0, r_1 \rangle$

$$\begin{cases} r_0 \alpha_0 = -\alpha_0 \\ r_0 \alpha_1 = 2\alpha_0 + \alpha_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_1 \alpha_0 = \alpha_0 + 2\alpha_1 \\ r_1 \alpha_1 = -\alpha_1 \end{cases}$$

$W$  は位数  $\infty$  の二面体群

全ての root の重複度  
は 1 である。

## $A_2^{(2)}$ 型の Root 系

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$  の位数 2 の外部自己同型は

$\sigma: X \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) \rightarrow -{}^t X$  で与えられる。

$\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1$ , 但し  $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{sl}(3, \mathbb{C}) : \sigma X = (-1)^\alpha X\}$

i.e.  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$ ,

$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{array}{l} \text{3次の対称行列で} \\ \text{Trace} = 0 \text{ となるもの} \end{array} \right\}$  ( $= \text{Sym}_3$  とおく)

以下  $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$  による共役を  $\mathfrak{sl}(3, \mathbb{C})$  に施して考える。

$P \mathfrak{so}(3, \mathbb{C}) P^{-1} = \begin{pmatrix} h & 0 & a \\ 0 & -h & b \\ 0 & -b & -a \end{pmatrix}$  より Cartan 部分環  
として対角行列  $\begin{pmatrix} h & 0 & 0 \\ 0 & -h & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  を取るこができる。

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{-\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と置く  $[H, e_\alpha] = e_\alpha, [H, e_{-\alpha}] = -e_{-\alpha}$

$[e_\alpha, e_{-\alpha}] = H$  より  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$  は  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$  と同型である。

$$P \text{Sym}_3 P^{-1} = \begin{pmatrix} x & a & b \\ c & x & d \\ d & b & -2x \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ と置く } [H, v_2] = 2v_2$$

$\text{Sym}_3$  は 5次元より  $\mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$  の  $\mathfrak{g}_1$  上の Ad 表現

は 5次元の既約表現である。よて

$$\begin{array}{c} -\alpha \quad 0 \quad \alpha \\ \leftarrow \quad | \quad \rightarrow \end{array}$$

$\mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$  の Root 系  
 $\Delta = \{\alpha, -\alpha\}$

$$\begin{array}{c} -2\alpha \quad -\alpha \quad 0 \quad \alpha \quad 2\alpha \\ \leftarrow \quad \leftarrow \quad | \quad \rightarrow \quad \rightarrow \end{array}$$

$\mathfrak{so}(3, \mathbb{C})$  の  $\mathfrak{g}_2$  上への Adjoint 表現  
 の weight (各重複度は 1)  
 $\Delta' = \{2\alpha, \alpha, 0, -\alpha, -2\alpha\}$

$$\text{Cov}(\mathfrak{g}, \sigma) = \sum_n \mathfrak{g}_0 \otimes t^{2n} \oplus \sum_n \mathfrak{g}_1 \otimes t^{2n+1}$$

$\text{Cov}(\mathfrak{g}, \sigma)$  は Cartan 行列  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} (\Leftrightarrow 0)$

に対応する Kac-Moody Lie 環  $\mathfrak{g}(A)_{\mathbb{Z}}$  の  
 標準的実現である。従てその Root 系  $\tilde{\Delta}$  は

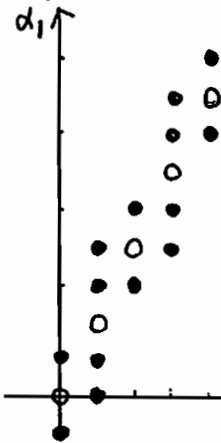
$$\tilde{\Delta} = \bigcup_{\lambda \in \mathbb{Z}} ((\Delta \cup \{0\}) \times \{2\lambda\}) \cup \bigcup_{\lambda \in \mathbb{Z}} (\Delta' \times \{2\lambda+1\})$$

正 Root は

$$\tilde{\Delta}^+ = \Delta^+ \times \{0\} \cup \bigcup_{\lambda \geq 1} ((\Delta \cup \{0\}) \times \{2\lambda\}) \cup \bigcup_{\lambda \geq 0} (\Delta' \times \{2\lambda+1\})$$

単純 root  $\alpha_1 = (\alpha, 0)$   $\alpha_0 = (-2\alpha, 1)$

null root  $\delta = \alpha_0 + 2\alpha_1$



Root は  $2n\delta + \Delta$  及び  $(2n+1)\delta + \Delta'$   
 $(n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)$

Weyl 群  $W = \langle r_0, r_1 \rangle$

$$\begin{cases} r_0 \alpha_0 = -\alpha_0 \\ r_0 \alpha_1 = \alpha_0 + \alpha_1 \end{cases} \quad \begin{cases} r_1 \alpha_0 = \alpha_0 + 4\alpha_1 \\ r_1 \alpha_1 = -\alpha_1 \end{cases}$$

全ての root の重複度は 1

● 実ルート ○ 虚ルート



## Kacによる(虚) Rootの特徴づけ定理

準備  $A$ : size  $l \times l$  の G.C.M で分解不能のもの

$\mathfrak{g}(A)$ :  $A$  から構成された Kac-Moody Lie 環

$\Delta$ :  $\mathfrak{g}(A)$  の Root 系

$\Delta \cap \Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$  単純 Root 系

$\Gamma := \sum_{i=1}^l \mathbb{Z} \alpha_i$  Root lattice

$V := \sum_{i=1}^l \mathbb{R} \alpha_i$  ( $\supset \Gamma$ ) とおく.  $V$  の部分集合

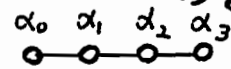
Cone  $C$  を

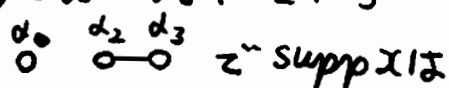
$$C = \left\{ x = \sum_{i=1}^l x_i \alpha_i \in V; \langle x, h_j \rangle \leq 0 \text{ for all } j \right\}$$

で定義する. さらに

定義  $V \ni x = \sum_{i=1}^l x_i \alpha_i$  に対し  $x$  の support とは  $A$  に対応する Dynkin 図形の部分図形であって  $x_i \neq 0$  となる頂点  $P_i$  とそれらを結ぶ全ての edge からなるものを云う。

$x$  の support が連結とは対応する部分図形が連結のことを云う。

例  $\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3$   


$V \ni x = \alpha_0 + \alpha_2 + \alpha_3$   

 $x$  に対応する図形は連結でない。

$C_{\text{conn}} := \{ X \in C : X \text{ の support は連結} \}$  とおく。

定理 (V. G. Kac)

$$\{0\} \cup \Delta_I^+ = \bigcup_{w \in W} w(\Gamma_+ \cap C_{\text{conn}})$$

但し  $\Delta_I^+ = \Delta^+ \cap \Delta_I$ ,  $\Gamma_+ = \sum_{\lambda=1}^l \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_\lambda$  である。

更に Cartan 行列  $A$  に条件を付けると次の良い定理が成立する。その前に少し言葉の準備をする。

定義 G.C.M  $A \in M_\ell(\mathbb{Z})$  が symmetrizable である

とは 対角行列  $\Lambda = \begin{pmatrix} \delta_1 & & 0 \\ & \delta_2 & \\ 0 & & \delta_\ell \end{pmatrix}$  但し  $\delta_i \in \mathbb{R}, \delta_i > 0 (i=1, 2, \dots, \ell)$  が存在して  $\Lambda A$  が対称行列になることを云う。

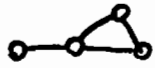
注 特に  $A$  が分解不能 G.C.M の時  $\Lambda$  として

$B = \Lambda A = (b_{ij})$  とおいた時  $b_{\lambda\lambda} \in \mathbb{N} \ \lambda=1, 2, \dots, \ell$   
 $b_{ij} \in \frac{1}{2} \mathbb{Z}_{\leq 0}$  かつ  $\text{G.C.D}(b_{11}, b_{22}, \dots, b_{\ell\ell}) = 1$  を  
 満す様に一意的にとれる。

単純 Root  $\alpha_i, \alpha_j$  に対して  $(\alpha_i, \alpha_j) = b_{ij}$  と  
 定義することにより  $\sum_{\lambda=1}^l \mathbb{R} \alpha_\lambda$  上に Weyl 群不変な  
 双一次形式が入る。この双一次形式は

$f^*$ 上  $W$  不変な内積に拡張できる。これより  
 $f$ に内積を導入し さらに その内積を  $g$ 上  
 $Ad g$  不変に一意的に拡張することができる。(有限  
次元の Killing form に対応)

- 定義 G.C.M  $A \in M_e(\mathbb{Z})$  が hyperbolic 型とは
- i)  $A$  は Euclid 型でも有限次元型でもない分解不能  
 な symmetrizable 行列
  - ii)  $A$  に対応する Dynkin 図形の真の部分図形は  
 有限次元型 又は Euclid 型である。

例 

この時 定理は

定理 (V.G. Kac)  $A$  を有限次元型, Euclid 型 又は  
 hyperbolic 型の symmetrizable Cartan 行列とする。

この時  $\alpha \in \mathcal{P}$  に対し

$$i) \alpha \in \Delta^I \Leftrightarrow (\alpha, \alpha) \leq 0 \quad ii) (\alpha, \alpha) = 1 \Rightarrow \alpha \in \Delta^R$$

特に  $A$  が 対称 Cartan 行列で 上記の型の  
 時には ii) の逆が成立する。即ち

$$\alpha \in \Delta^R \Leftrightarrow (\alpha, \alpha) = 1$$

但し 内積は上の 注で 構成した内積と  
 する。

# Hyperbolic type $\begin{pmatrix} 2 & -m \\ -m & 2 \end{pmatrix}$ の Root 系

Root 系  $\Delta \subset \mathbb{Z}\alpha_0 + \mathbb{Z}\alpha_1 = \Gamma$  である。  $\Gamma$  の点

$\alpha = k_0\alpha_0 + k_1\alpha_1$  に対して

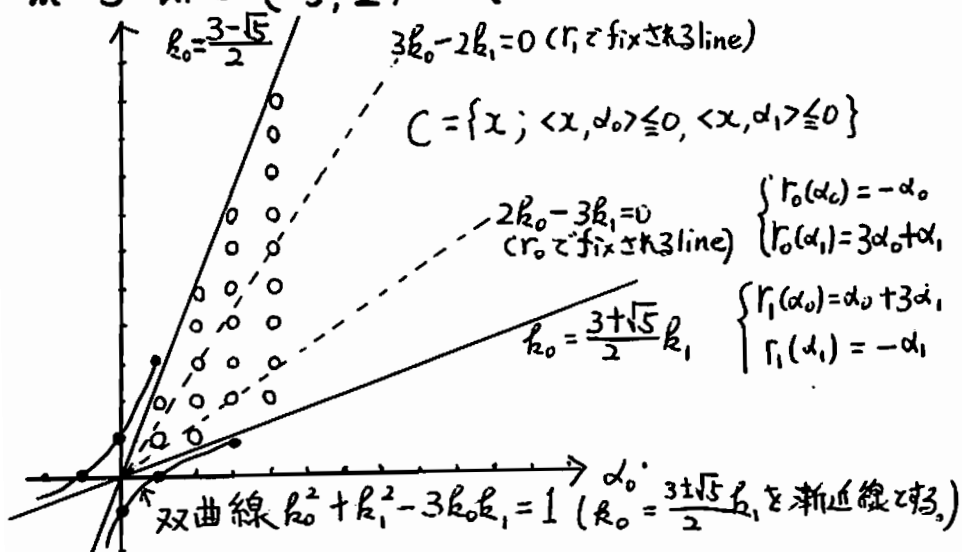
虚 root の集合は  $k_0 = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2} k_1$  と云う 2 本の直線によつて囲まれる Cone に含まれる  $\Gamma$  の点と一致する。

実 root の集合は  $k_0^2 + k_1^2 - m k_0 k_1 = 1$  の整数解と一致する。従つて

$$\pm 2 \left( \frac{m + \sqrt{m^2 - 4}}{2} \right)^n = (2k_0 - m k_1) + k_1 \sqrt{m^2 - 4}$$

よつて  $(k_0, k_1)$  を全ての  $n$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) について求めれば良い。

$m=3$  即ち  $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$  の時



# Kac-Moody Lie 環の代数的側面 (Kac-Peterson の論文の紹介) II.

東大. 理. 徳山豪

小池氏の報告を第一章として. ここでは. Kac-Moody Lie 環の Standard module 表現の表現論を紹介する. 更に. affine Lie 環に話を絞って. より詳しく表現の Character を調べ. 次の章の田中氏の報告の準備とする.

appendix として. affine Lie 環の表現に対する denominator formula から得られる Macdonald 恒等式についても言及する.

## §2. Kac-Moody Lie環の表現論

2.1.  $A$  を Cartan 行列,  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$  を対応する Kac-Moody Lie環 とする.  $\mathfrak{g}, \Delta, \Pi = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}, W = \langle \nu_{\alpha_0}, \nu_{\alpha_1}, \dots, \nu_{\alpha_\ell} \rangle$  など. §1 の記号を襲踏する.

有限次元半単純 Lie環の有限次元表現には. 古典的な美しい表現論が構成されている. それとほとんど同じ理論が. Kac-Moody Lie環の Standard Module と呼ばれる表現に適用できる.

### 定義 2.1

$$P = \{\lambda \in \mathfrak{g}^* \mid \lambda(h_i) \in \mathbb{Z} \quad i=0, 1, 2, \dots, \ell\}$$

$$P_+ = \{\lambda \in \mathfrak{g}^* \mid \lambda(h_i) \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \quad i=0, 1, 2, \dots, \ell\}$$

$P$  の元を.  $\mathfrak{g}$  の integral weight

$P_+$  の元を.  $\mathfrak{g}$  の dominant integral weight

と云う。

## 定義 2.2.

$\mathfrak{g}$ -module  $L(\lambda)$  が "highest weight  $\lambda$  の highest weight module" であるとは、次の (1) (2) (3) を満たすことを言う。

(1)  $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ , (2)  $L(\lambda)$  は既約

(3)  $L(\lambda)$  の元  $v_\lambda \neq 0$  があって、

$$\mathfrak{n}_+(v_\lambda) = 0$$

$$h(v_\lambda) = \lambda(h) v_\lambda \quad \text{for } \forall h \in \mathfrak{h}$$

となる。

更に  $\lambda \in P_+$  のとき、 $L(\lambda)$  を Standard module と言う。特に  $\mathfrak{g}$  が有限次元 Lie algebra ならば、Standard module は "有限次元表現" と同値な言葉となる。  
既約

以下紹介する  $L(\lambda)$  の性質は、 $\mathfrak{g}$  が古典有限次元 Lie algebra ならば古くから知られている基本理論である。

以下、 $L(\lambda)$  と書けば、Standard module である。

### 命題 2.3

dominant integral weight  $\lambda$  に対し、 $\lambda$  を highest weight に持つ standard module が唯一つ存在し、 $L(\lambda) \cong L(\lambda') \Leftrightarrow \lambda = \lambda'$ .

注).  $L(\lambda)$  は Verma module を用いて作る  
ことができる。

$L(\lambda)$  を  $\mathfrak{g}$  で固有分解する。

$$L(\lambda) = \bigoplus_{\lambda \in \mathfrak{g}^*} L(\lambda)_\lambda$$

$\lambda$ -固有空間  $L(\lambda)_\lambda$  が zero でない時、 $\lambda$  を  $L(\lambda)$  の weight と言い、 $\dim L(\lambda)_\lambda$  を  $\text{mult}_\lambda(\lambda)$  と書い、weight  $\lambda$  の重複度と言ふ。

$P(\lambda)$  を  $L(\lambda)$  の weight 全体の集合とする。

以下、 $P(\lambda)$  と  $\text{mult}_\lambda(\lambda)$  たちを求めることを  
当面の目標とする。

$W(\lambda)$  を  $\lambda$  の  $W$ -orbit,  $\overline{W(\lambda)}$  を  $\lambda$  の convex  
hull としよう。  $\Pi$  の元  $\alpha$  の非負整数結合を  $\mathbb{Z}_{\geq 0}(\Pi)$   
と書くと、次の定理が成り立つ。



定理 2.4.  $\lambda \in P_+$ .

このとき.

$$1) P(\lambda) = \overline{W(\lambda)} \cap \{\lambda \in P \mid \lambda - \mu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(\Pi)\}$$

$$2) \text{mult}_\lambda(\lambda) = 1$$

$$3) \text{mult}_\lambda(\alpha) = \text{mult}_\lambda(w\alpha) \text{ for } \forall w \in W$$

この定理により, weight の位置は完全に判った。  
±で.

$\text{ch}_{L(\lambda)} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\lambda \in P(\lambda)} \text{mult}_\lambda(\alpha) e^\alpha$  を  $L(\lambda)$   
の character と言う。形式的に定義した  
が、後で上の関数と見なすこともある。

$\text{ch}_{L(\lambda)}$  が何であるか計算できれば, weight  
の重複度が判ったことになる。これに関連して.

$$\prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})^{\text{mult } \alpha} = \sum_{\lambda \in \mathfrak{g}^*} k(\lambda) e^\lambda$$

を分割関数と言う。  $\text{mult } \alpha$  は,  $\text{root } \alpha$   
の重複度で, 左辺の積は,  $e^\lambda \cdot e^\mu = e^{\lambda+\mu}$   
で, 右辺に形式的に展開される。

以下, 全て  $\lambda \in P_+$  とする。

## 定理 2.5

$\mathfrak{g}$  を Symmetrizable とする。

今、 $\rho \in \mathfrak{f}^*$  と、 $\mathfrak{h}$  の  $h_i$  ( $i=0, \dots, l$ ) に対して、

$\rho(h_i) = 1$  になるように取り、fix する。

この時、分割関数と、 $\text{ch}_{\mathbb{Z}(\lambda)}$  に対し、

次の2つの重要な公式が成立する。

(A) Denominator formula.

$$\sum_{w \in W} (\det w) e^{w(\rho)} = e^{\rho} \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})^{\text{Mult } \alpha}$$

(B) Character formula (Weyl-Kac)

$$\left( \sum_{w \in W} (\det w) e^{w(\rho)} \right) \text{ch}_{\mathbb{Z}(\lambda)} = \sum (\det w) e^{w(\lambda + \rho)}$$

これらの公式から、weight の重複度を求め、inductive formula と、 $K(\lambda)$  から  $\text{Mult}_{\lambda}(\lambda)$  を求める formula (Kostant formula) が導き出される。すなわち、

系 2.6

$$1) \sum_{w \in W} (\det w) \text{mult}_\lambda(\lambda + \rho - w(\rho)) = 0 \\ \text{for } \forall \lambda \neq \Lambda$$

$$2) \text{Mult}_\lambda(\rho) = \sum_{w \in W} (\det w) K(w\rho + \rho) - (\rho + \rho)$$

注 1.

のが "半単純有限次元 Lie algebra ならば".

$W$  は有限群?  $P(\lambda)$  は有限集合なの?

上の公式から  $L(\lambda)$  の weight の重複度は完全に判る。

注 2. 定理 2.5 において, Symmetrizable の仮定を取りのぞけるのではないかと予想されている。

さて, 以下では  $\mathfrak{g}$  を Affine type に限る. 更に深い議論で  $ChLW$  を追いつめていこう。

記号の確認の為, §1 の表 1, 表 2, 表 3 を使う。

総称して表 I と書こう。

2.2 . Affine Lie algebra  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$  において.

$\Pi = \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ . ここで  $\alpha_0, \dots, \alpha_\ell$  は表 I にあるように並べ、左端が  $\alpha_0$  である。  $a_i$  を表 I の頂点  $\alpha_i$  の下に書かれた数とする。  $\alpha_i^\vee, a_i^\vee$  はそれぞれ  $\mathfrak{g}(A)$  に対して同様に定義されたものとする。 ( $\alpha_i^\vee$  は  $h_j$  と同じ中に取り。 §1 参照。)

今  $\delta = \sum_{i=0}^{\ell} a_i \alpha_i$  は null root.

$\theta = \delta - a_0 \alpha_0$  とおこう。

$\mathfrak{g}^*$  の元  $\Lambda_i$  を  $\begin{cases} \Lambda_i(h_j) = \delta_{ij} & j=0, \dots, \ell. \\ \Lambda_i(d) = 0 \end{cases}$

で定義する。これは基本 weight と呼ばれる。

$\mathfrak{g}^*$  に normalized standard metric と呼ばれる  $W$  不変で symmetric,

non-degenerate な内積をよこす。

今  $\Lambda_0$  と  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\ell$  が  $\mathfrak{g}^*$  の base になり。

内積  $(,)$  は次で定義される。

$$\left\{ \begin{array}{l} (\alpha_i, \alpha_j) = a_i^{-1} a_i^{\vee} a_{ij} \\ (\alpha_i, \Lambda_0) = 0 \quad \text{for } i \neq 0 \\ (\alpha_0, \Lambda_0) = a_0^{-1} \\ (\Lambda_0, \Lambda_0) = 0 \end{array} \right.$$

2.3 ここで、 $W$  の  $f^*$  の作用を調べておく。  
 $f$  の元  $c$  を、 $c = \sum_{i=0}^l a_i^{\vee} h_i$  で定義すると、 $c$  は  $f$  の center を張っている。

このとき、

$$f_m^* = \{ \lambda \in f^* \mid \lambda(c) = m \} \text{ とおく。}$$

すると、 $f_m^*$  は  $W$ -不変である。また、

$$\lambda \in f_m^* \Leftrightarrow \lambda = m \Lambda_0 + \sum_{i=0}^l k_i \alpha_i$$

$$\Leftrightarrow (\lambda, \delta) = m$$

であることに注意。± したい。

$\overline{f^*} = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l \rangle$  の  $f^*$  の元  $\lambda$  の projection の像を  $\overline{\lambda}$  とする。定義から、  
 $\lambda = \overline{\lambda} + \lambda(c) \Lambda_0 + (2\lambda(c))^{-1} (|\lambda|^2 - |\overline{\lambda}|^2) \delta$

$\mathfrak{g}_m^*$  の Weyl 群  $W$  の作用を調べる. ( $m \in \mathbb{Z}_{>0}$ )

今、内積  $(,)$  により、 $\mathfrak{g}$  と  $\mathfrak{g}^*$  を同一視する。すると、dual root  $\alpha_i^\vee$  は  $\mathfrak{g}^*$  の元として、 $\alpha_i^\vee = \frac{a_i}{a_i^\vee} \alpha_i$  と見なせる。  $\alpha = W(\alpha_i)$  なる  $\alpha^\vee = W(\alpha_i^\vee)$  として、 $\alpha^\vee \in \mathfrak{g}^*$  としてもよい。

今、 $\bar{W} = \langle \bar{\nu}_{\alpha_1}, \bar{\nu}_{\alpha_2}, \dots, \bar{\nu}_{\alpha_\ell} \rangle$  は有限 Weyl 群 (root 系  $\Delta$  の) である。  $\mathcal{O}^\vee$  の  $\bar{W}$ -orbit  $\bar{W}(\mathcal{O}^\vee)$  の  $\mathbb{Z}$ -span を  $M$  とする。

$\lambda \in \mathfrak{g}_m^*$  とすると、 $i = 1, 2, \dots, \ell$  ならば、

$$\bar{\nu}_{\alpha_i}(\lambda) = \bar{\nu}_{\alpha_i}(\bar{\lambda}) + (\lambda - \bar{\lambda}) \text{ であり.}$$

よって、 $\overline{\bar{\nu}_{\alpha_i}(\lambda)} = \bar{\nu}_{\alpha_i}(\bar{\lambda})$  となる。しかし、 $\bar{\nu}_{\alpha_0}$

ではこうはならない。  $t_{\mathcal{O}^\vee} = \bar{\nu}_{\alpha_0} \bar{\nu}_{\mathcal{O}}$  として、

$\alpha = W(\mathcal{O}^\vee)$  なる  $\alpha$  に対しては、 $t_\alpha = w t_{\mathcal{O}^\vee} w^{-1}$

とある。すると、

$$t_\alpha(\alpha) = m \lambda_0 + \frac{1}{2m} (|\lambda|^2 - |\bar{\lambda}|^2 + m|\alpha|^2) \mathcal{O} + (\bar{\lambda} + m\alpha)$$

であり、

$$\overline{t_\alpha(\alpha)} = \bar{\lambda} + m\alpha \text{ となる.}$$

明らかに  $W$  は  $\overline{W}$  と  $\alpha_0$  で生成されているので. 次のようにして.  $W$  を  $\Delta, \overline{\mathfrak{g}}^*$  に関して.  $\overline{W}$  と  $T_m = \{mM \text{ による平行移動}\}$  の半直積. いわゆる affine Weyl 群と見なせる.

$\lambda \in \mathfrak{g}_m^*$  に対し.

$af_m(w)(\lambda) = \overline{w(\lambda)}$  と定義する.

projection  $\mathfrak{g}_m^* \longrightarrow \overline{\mathfrak{g}}^*$  の性質から.

$af_m(w)$  は well defined だ.

$af_m : W \longrightarrow W_{af_m} = \{af_m w \mid w \in W\}$  は同型写像となる. (ちなみに!)  $\overline{\mathfrak{g}}^*$  上の変換群として. 我々は  $W$  を  $\overline{W}$  と  $T = \{\tau_\alpha \mid \alpha \in M\}$  の半直積と見なせる.

特に  $m=1$ .  $\mathfrak{g}$  が tier number 1 のとき.  $W_{af_1}$  は. (狭い意味で)  $\Delta$  の affine Weyl 群となっている.

2.4

諸元にて

of a dominant integral weight  $\lambda$  に対し.

$(\lambda(R_0), \lambda(R_2), \dots, \lambda(R_n)) \in \lambda$  level

とす。  $\lambda \in \lambda'$  同 level を持つ。

$\lambda' = \lambda + m\delta$  とある。 :  $n$  時.

$\lambda \in P(\lambda) \iff \lambda' = \lambda + m\delta \in P(\lambda)$  。

$mult_{\lambda}(\lambda) = mult_{\lambda'}(\lambda')$  .  $\lambda \in \lambda'$  level

の等しい表現は weight を  $m\delta$  だけ

たつのにある。  $\lambda$  を考えた時には  $\lambda$  level

別 (存在しない) 以下  $\lambda(d) = 0$  となる。

(注.  $d$  は  $\rho$  の dual base.)

$\lambda$  に対し  $\lambda(c) \in \lambda$  level とす。 2.3

にあるように level は表現の性質に重要

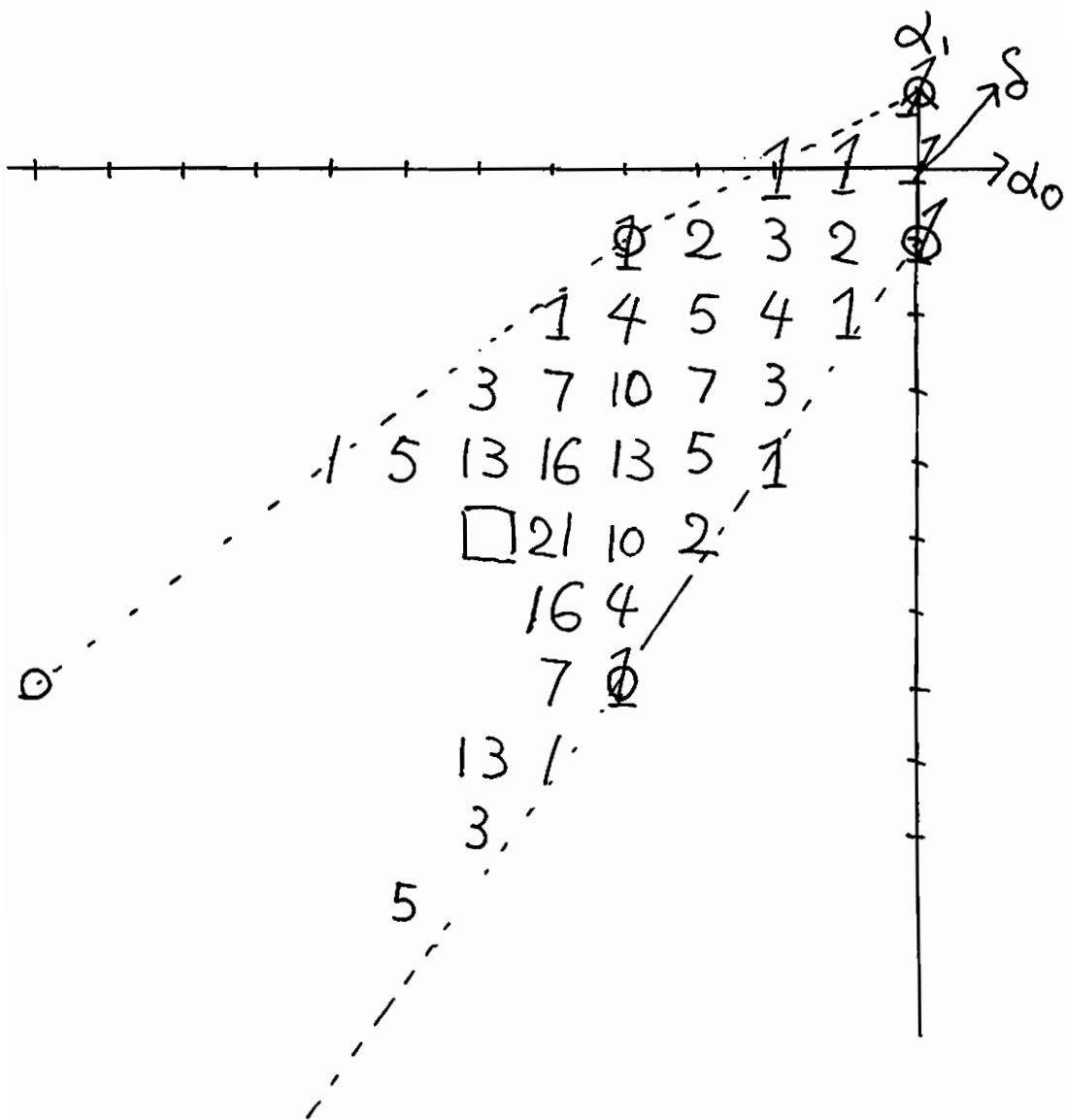
な役割を持つ。 level の表現は trivial

表現である。

実例として  $P(\lambda)$  と重複度を見てもよい。



例2.7.  $\sigma = A_1^{(1)}$ ,  $\Lambda = 2\Lambda_0 + \alpha_1 = 2\Lambda_1$  に対し.  
 $L(\Lambda)$  の weight と重複度を見よう。便宜上,  
 $2\Lambda_0$  だけ translate し,  $\{\lambda - 2\Lambda_0 \mid \lambda \in P(\Lambda)\} \subset \mathfrak{g}_0^*$   
 を図示する。図の見方は次頁。



★ 図の見方。

座標は、 $\phi^*$  中、 $\alpha_0$  を横、 $\alpha_1$  を縦にとった。

$\Lambda$  は、 $\alpha_1$  で示される点。○は、 $\Lambda$  の  $W$ -  
-のびて  $W(\Lambda)$  の点を示し、点線は、 $W(\Lambda)$   
の張る convex を示す。

weight は、その convex 中の格子点で、

各格子点に書いた数字が「重複度」である。

(但し、一部にしか書いていない。)

★ 重複度の求め方。

系 2.6 の 1) を使う。  $A_1^{(1)}$  では、この式は、

$$\begin{aligned} & \text{Mult}_\Lambda(\lambda) - \text{Mult}(\lambda - \alpha_0) - \text{Mult}(\lambda - \alpha_1) \\ & + \text{Mult}(\lambda - \alpha_0 - 3\alpha_1) + \text{Mult}(\lambda - 3\alpha_0 - \alpha_1) \\ & - \text{Mult}(\lambda - 3\alpha_0 - 6\alpha_1) - \text{Mult}(\lambda - 6\alpha_0 - 3\alpha_1) \\ & + \dots = 0 \end{aligned}$$

となる。そこで、図中の

□ の重複度は、□ の weight を  $\lambda$  とすると、

$$\text{Mult}_\Lambda(\lambda) - 21 - 13 + 5 + 1 = 0$$

より、28 であることが判る。

さて、例 2.7 で、次の事に気付かれるであろう。重複度を各方向の数列と見て、

1.  $\alpha_0$  方向, もしくは  $\alpha_1$  方向には、対称な数列が並ぶ。そして“真ん中”が最も大きい。

2.  $-\delta$  方向には、単調非減少な数列となる。

3.  $-\delta$  方向の数列  $1, 1, 3, 5, 10, \dots$   
と  $1, 2, 4, 7, 13, \dots$  を交互に並べる  
ことにより、例 2.7 の重複度の図が描き  
あがる。

又、

4.  $W(n)$  は、放物線の上に乗っているように見える。

これは以下の命題によって起る現象である。

命題 2.8 (1 に対応)

$\lambda \in P_+$ ,  $\lambda \in P(\lambda)$ ,  $\alpha \in \Delta^{\text{re}}$  (real root)  
とする:

$$N = \{t \in \mathbb{Z} \mid \lambda + t\alpha \in P(\lambda)\}$$

$$m_t = \text{Mult}_\lambda(\lambda + t\alpha) \text{ とする.}$$

(i)  $N = [-p, q]$ ,  $p - q = \lambda(\alpha^\vee)$   
(区間)

(ii) 関数  $t \rightarrow m_t$  は  $[-p, \frac{1}{2}(q-p)]$   
で増加,  $[\frac{1}{2}(q-p), q]$  で減少.

(iii)  $m_{-p+u} = m_{q-u}$ . ( $u \in \mathbb{Z}$ ).

(注) この命題は一般の Kac-Moody で成立する.

命題 2.9 (4 に対応)

$$\lambda \in P(\lambda) \iff \begin{cases} |\lambda|^2 \leq |\lambda|^2 \\ \lambda - \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq 0}(\pi) \end{cases}$$

かつ、右辺で等号が成立すれば、

$$\lambda \in W(\lambda).$$

命題 2.10 (2 に対応.)

$\lambda \in P_+$ ,  $\lambda(c) > 0$ ,  $\lambda \in P(\lambda)$ .

$\alpha$  を Positive imaginary root とする。

(i.e.  $\alpha = \sum s_i \delta_i$ ,  $s_i \in \mathbb{Z}_{>0}$ ).

この時.

a).  $\{\lambda \in \mathbb{Z} \mid \lambda - \lambda\alpha \in P(\lambda)\} = [-p, \infty]$   
for  $\exists p \geq 0$

b).  $x \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$  なる non-0 な  $x$  をとると.

$x : L(\lambda) \rightarrow L(\lambda)$  は injective で  
 $v \rightarrow x \cdot v$

ある。

$x$  は  $L(\lambda)_\lambda$  を  $L(\lambda)_{\lambda-\alpha}$  にうつすので。

よって  $\text{mult}_\lambda(\lambda - \lambda\alpha)$  は  $[-p, \infty]$  で "非減少".

定義 2.11

今  $L(\lambda)$  の weight  $\lambda$  で  $\lambda + \delta \notin P(\lambda)$

なるものを  $L(\lambda)$  の maximal weight と呼ぶ。

$\text{Max}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \{\text{max weight of } L(\lambda)\}$

命題 2.10 により,  $L(\lambda)$  の weight  $\mu$  に対し, '必ず', maximal weight  $\lambda$  が  $\mu = -\gamma$  に存在して,  $\mu = \lambda + \sum m_i \delta_i$   $m_i \geq 0$ , となる。

$\text{Max}(\lambda)$  は  $W$ -不変集合で,  $\lambda$  の  $W$ -orbit は有限個である。例 2.77" は,  $W$ -orbit は 2 個で, orbit の代表元として,  $2\lambda_0 + \alpha_1$  と  $2\lambda_0$  が取れる。これが性質 3 に対応している。(  $\text{Mult}_\lambda(\alpha)$  は  $W$ -不変なことに注意。)

さて, 今,  $\text{Ch} L(\lambda)$  を調べるには,

a)  $\text{Max}(\lambda)$  の代表元, 即ち, dominant integral な maximal weight を全て求める。

b) 各 maximal weight  $\lambda$  から伸びる,  $-\delta$  方向の数列 ( $\delta$ -string) の母関数

$$b_\lambda^1 = \sum_{m=0}^{\infty} \text{Mult}_\lambda(\lambda - m\delta) e^{-m\delta}$$

を求める。

という 2 つの事ができればよいことが判った。

a) は次の命題で解決される。

命題 2.12. (maximal weight の決定)

$\lambda \in P_+$  を level  $m$  の weight とし.  $\lambda(d) = 0$  とする.

$\lambda \in \mathfrak{f}^*$  に対し.  $\mathfrak{f}^*$  の直交射影  $\bar{\lambda}$  が

$$\star \left\{ \begin{array}{l} \bar{\lambda} \in \bar{\lambda} + \bar{Q}, \quad (\bar{\lambda}, \alpha_i) \geq 0 \quad i=1, \dots, l \\ (\bar{\lambda}, \theta) \leq m \end{array} \right.$$

とす.  $\bar{Q}$  は root lattice とある.

このとき. 自然数  $m_0$  があつ.

$m\lambda_0 + \bar{\lambda} - a_0^{-1}m_0\theta$  が dominant integral maximal weight とする.

又.  $\mathfrak{f}^*$  の dominant integral maximal weight はこのようにして得られる.

注)  $\star$  を満たす  $\bar{\lambda} \in \mathfrak{f}^*$  は有限個であり. dominant integral max weight と 1対1 に対応している. よつ. level が同じ表現存す. dominant integral max weight の数は同一.

b) については、次の章で研究する。  
(田中洋平氏の報告)

## 2.5.

本論からは少し外れるが、appendixとして、Macdonald 恒等式について言述べる。

tier number 1 の Affine Lie algebra の denominator formula (定理 2.5(A)) を Macdonald 恒等式と言う。この式を specialize する事により、Dedekind の  $\eta$  函数  $\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)$  の巾乗の展開公式が得られる。但し、巾は、 $\alpha$  を、有限次元 simple Lie algebra の  $\mathbb{C}[\alpha, \frac{1}{\alpha}]$  をテンソルして得られる Kac-Moody Lie algebra (すなわち、tier number 1) とすると、(§1 の構成の項参照) その時、 $\eta(\tau)^{d_{\text{dim}} \alpha}$  が展開できるのである。

注) denominator formula をもう少し変形した形を、Macdonald 恒等式と言うこともある。



Specialized, Jacobi's triple identity  
 $\therefore e^{-\alpha_0} = -2\delta, e^{-\alpha_1} = -2\delta$

$$\text{右辺} = \prod_{m=0}^{\infty} (1 - e^{-\alpha_0 - m\delta}) (1 - e^{-\alpha_1 - m\delta}) (1 - e^{-(m-1)\delta})$$

$$- \sum_{k=0}^{\infty} e^{(-2k^2 + k)\delta - (2k+1)\alpha_0} - \sum_{k=0}^{\infty} e^{(-2k^2 + k)\delta - (2k+1)\alpha_1}$$

$$\text{左辺} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{(-2k^2 + k)\delta - 2k\alpha_0} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{(-2k^2 + k)\delta - 2k\alpha_1}$$

左辺と等しい

$$\Delta = \{ \alpha_0 + m\delta, \alpha_1 + m\delta \mid \delta = \alpha_0 + \alpha_1, m \in \mathbb{Z} \}$$

$$\mathbb{Z} \cdot W = \mathbb{Z} \cdot \langle \alpha_0 \rangle + \mathbb{Z} \cdot \langle \alpha_1 \rangle$$

free product

$$\star: \sum_{w \in W} (\det w) e^{w(P)} = \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha})$$

∴ 9時, denominator formula is.

$$\alpha_0 = s(\alpha, \alpha) \cdot \delta, \dim \mathfrak{g}_0 = 37$$

基底  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = A_1$  の基底である。

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} q^{m^2} z^m = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{2m}) (1 + z q^{2m-1}) (1 + z^{-1} q^{2m-1})$$

更にこの式を特殊化すると.

$$\left\{ \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^m) \right\}^3 = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+1) q^{m(m+1)/2}$$

よって  $\eta(q)^3$  の展開公式が導かれた。

$\eta(q)$  は  $q = e^{2\pi i z}$  とすると、上半平面

$H = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im} z > 0\}$  上の正則関数となり、これは有名な保型関数である。

Affine Lie algebra と保型形式の関係は、次の章でも述べられるように、大変興味深い結果を、いろいろとまたしてくれる。

# Kac-Moody Lie環の代数的理論

(Kac-Peterson の論文の紹介) III

田中洋平

ここでは ユークリッド リー環の 最高ウェイト  
を持つ既約加群 に対し、ウェイトの重複度  
の null root 方向の "母函数" (= string function)  
を考える。その保型性を用いて いくつかの例  
を計算する。次に  $A_n$  型 リー環の Kostant の  
分割関数を求め、前の結果とあわせて、Hecke  
の indefinite modular form 型の展開式  
が得られる事を述べる。

## §1 String function

$\mathfrak{g}$ : affine lie algebra

$$\mathfrak{g} = \mathbb{C}h_0 + \dots + \mathbb{C}h_r + \mathbb{C}d$$

$L_\lambda$ : 最高ウェイト  $\lambda \in P_+$  の既約加群

とする。  $e(\lambda)$  ( $\lambda \in \mathfrak{g}^*$ ) を  $\mathfrak{g}$  上の関数

$H \mapsto e^{\lambda(H)}$  と同一視すると、これらの形式

知である  $ch L_\lambda$  は  $Y = \{h \in \mathfrak{g} \mid \text{Re} \delta(h) > 0\}$

で 糸色対収束して、 $Y$  上の正則関数になる。

$\Lambda \neq \Lambda'$  なら  $Y$  上の関数として  $chL_\Lambda \neq chL_{\Lambda'}$  である。  
 $Y$  の座標系を次の様に定める。

$$(*) \quad \mathbb{H}_+ \times \underbrace{\bar{f}^*}_{\psi} \times \mathbb{C} \xrightarrow{\sim} Y$$

$$(\tau, z, t) \longleftrightarrow -2\pi i \left( \frac{z}{a_0} d + z + t c \right)$$

$$\text{ここで } f^* \supset \bar{f}^* = \sum_{i=1}^l \mathbb{C} \alpha_i$$

$f^*$  上の normalized metric  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  により  
 $f^*$  と  $\bar{f}$  とを同一視している。

$$\mathbb{H}_+ = \{ \tau \in \mathbb{C} \mid \text{Im} \tau > 0 \}$$

Def. 1  $\lambda(\mathbb{C}) = m$  ( $m$ : 正整数) となる  $\lambda \in f^*$  に  
 対し  $Y$  上の関数  $\theta_\lambda$  を

$$\theta_\lambda = \theta_\lambda(\tau, z, t)$$

$$\stackrel{\text{def.}}{=} e^{-2\pi i m t} \sum_{\gamma \in M + \frac{\lambda}{m}} e^{\pi i m |\gamma|^2 \tau} e^{-2\pi i m \langle \gamma, z \rangle}$$

$$= \sum_{\gamma \in M + \frac{\lambda}{m}} e \left( m \left( \lambda_0 + \gamma - \frac{|\gamma|^2}{2} \delta \right) \right)$$

と定める。ここで  $\lambda \in f^*$  の  $\bar{f}^*$  への直交射影を  $\lambda$  と書く。

$\theta_\lambda$  は degree  $m$  の classical theta function  
 と呼ばれているものである。

Def 2  $\Lambda \in P_+$ ,  $\lambda \in \mathfrak{f}^*$ ,  $\Lambda(\zeta) = \lambda(\zeta) = m$

に対し 数  $S_\Lambda, S_\Lambda(\lambda)$  を

$$S_\Lambda \stackrel{\text{def.}}{=} \frac{|\Lambda + \rho|^2}{2(m+g)} - \frac{|\rho|^2}{2g}$$

$$S_\Lambda(\lambda) \stackrel{\text{def.}}{=} S_\Lambda - \frac{|\lambda|^2}{2m}$$

と置く。

ここで  $g = \sum_{i=0}^l a_i^\vee$  : dual Coxeter number

$\Upsilon$  上の正則関数  $C_\lambda^\Lambda$  を

$$C_\lambda^\Lambda \stackrel{\text{def.}}{=} \begin{cases} e^{(-S_\Lambda(\lambda)\delta)} b_\lambda^\Lambda & \lambda \in \max(\Lambda) \\ 0 & \lambda \notin \max(\Lambda) \end{cases}$$

と定める。

$C_\lambda^\Lambda$  を  $\lambda$  の string function と呼ぶ。  
 座標系  $(\star)$  であらわすと、 $C_\lambda^\Lambda$  は  $\mathfrak{f}^* \times \mathbb{C}$  に  
 よって  $\mathbb{Z} \in \mathfrak{f}_+$  の正則関数になり、

$$q = e^{2\pi i \tau} \quad \text{とおいて}$$

$$C_\lambda^\Lambda(\tau) = q^{S_\Lambda(\lambda)} \sum_{n=0}^{\infty} m_\Lambda(\lambda - n\delta) q^n$$

となる。

$w \in W, \lambda \in f^*$  に対し  $C_w^\Lambda = C_\lambda^\Lambda$  である。

指標公式を  $\theta_\lambda, C_\lambda^\Lambda$  を用いて書き直す

と, level  $m$  の  $\Lambda$  に対して

$$\frac{\sum_{w \in W} (\det w) \theta_{w(\Lambda+\rho)}(\tau, z, t)}{\sum_{w \in W} (\det w) \theta_{w(\rho)}(\tau, z, t)} \quad (= q^{S_\Lambda} \text{ch } L_\Lambda)$$

$$= \sum_{\substack{\lambda \in P_{\text{mod } m\Lambda} + \mathbb{C}\delta \\ \lambda(\mathbb{C}) = m}} C_\lambda^\Lambda(\tau) \theta_\lambda(\tau, z, t)$$

ウェイトの重複度を矢印には  $b_{\lambda(\mathbb{C})}$  がわかれば  
 よいが,  $q$  の適当な分数巾をかけた  $C_\lambda^\Lambda(\tau)$   
 は  $\tau$ - $z$  関数のつくる algebra の "構造定数"  
 としてあらわれている。  $\tau$ - $z$  関数の  
 変換公式より  $C_\lambda^\Lambda(\tau)$  が  $SL(2, \mathbb{Z})$  の  
 ある部分群に関する (cusp で極をもつ  
 かも知れない) modular form になる事が  
 示される。 即ち

Th.1 (string function の変換公式)

$\Lambda \in P_+, \text{ level } m > 0$  とする。

$$(1) C_{\lambda}^{\Lambda}(-\frac{1}{2}) = (-iz)^{-\frac{g}{2}} \sum b(\Lambda, \lambda; \Lambda', \lambda') C_{\lambda'}^{\Lambda'}(z)$$

和は  $\Lambda' \in P_+ \text{ mod } \mathcal{O}_S$ ,  $\lambda' \in P \text{ mod } mM + \mathcal{O}_S$

$\Lambda'(\mathcal{O}) = \lambda'(\mathcal{O}) = m$  なる  $\bar{\rho}$  所を動かして  $\sqrt{-iz}$  は

$i\mathbb{R}_+$  上正となる分枝をとる。元々定数  $b(\Lambda, \lambda; \Lambda', \lambda')$  は

$$i^{|\bar{\Lambda}+1|} \frac{e^{\frac{2\pi i}{m} \langle \bar{\lambda}, \bar{\lambda}' \rangle}}{|\bar{\rho}/M| m^{\frac{g}{2}} (m+g)^{\frac{1}{2}}} \sum_{w \in W} (\det w) e^{-\frac{2\pi i \langle \bar{\Lambda} + \bar{\rho}, \bar{\Lambda}' + \bar{\rho} \rangle}{m+g}}$$

$$(2) C_{\lambda}^{\Lambda}(z+1) = \varepsilon(\Lambda, \lambda) C_{\lambda}^{\Lambda}(z)$$

$$\varepsilon(\Lambda, \lambda) = \begin{cases} e^{\pi i \left( \frac{|\bar{\Lambda} + \bar{\rho}|^2}{m+g} - \frac{|\bar{\lambda}|^2}{m} - \frac{|\bar{\rho}|^2}{g} + |\bar{\lambda} - \bar{\lambda}'|^2 \right)} & (A_{2g}^{(2)}) \\ e^{\pi i \left( \frac{|\bar{\Lambda} + \bar{\rho}|^2}{m+g} - \frac{|\bar{\lambda}|^2}{m} - \frac{|\bar{\rho}|^2}{g} \right)} & (A_{2g}^{(2)} \text{ 以外}) \end{cases}$$

Cor.  $C_{\lambda}^{\Lambda}(z)$  は適当な合同部分群  $\Gamma(W)$  に関する cusp 極をもつような modular form である。

$N$  のような  $cusp$  の位数は  $N$ -乗を用いて具体的に書ける。詳しくは Kac-Peterson の論文を参照

## §2 string function の計算例

以下の例では、両辺が同じ変換則を満たし cusp での主要部が等しい事を確かめ、一致する事が証明される。

( $C_\lambda^1(\tau)$  の統一的な計算方法は今のところないようである。) 次の Prop. は  $C_\lambda^1$  の計算に役立つ。

Prop. 1  $\sigma_g: \text{type } X_\ell^{(k)}$

$$G(\tau) = e^{2\pi i R \tau} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau})^{m_n \delta}$$

とおく。ここで

$$R = \begin{cases} \frac{|\bar{P}|^2}{2g(h+1)} & (k=1) \\ \frac{|\bar{P}|^2}{2g(g+1)} & (k \neq 1) \end{cases} \quad h = \sum_{i=0}^{\ell} a_i : \text{Coxeter number}$$

$m$ : 正整数 に対し  $P_+(m) = \{\lambda \in P_+ \mid \lambda(\tau) = m\}$

とすると

$$\det (C_\lambda^1(\tau))_{\lambda \in P_+(m)} = G(\tau)^{-|P_+(m)|}$$



$G(\tau)$  の表

$\mathfrak{g}$	$G(\tau)$
$X_e^{(1)}$ or $A_{2\ell}^{(1)}$	$\eta(\tau)^\ell$
$A_{2\ell-1}^{(2)}$	$\eta(\tau)^{\ell-1} \eta(2\tau)$
$D_{\ell+1}^{(2)}$	$\eta(\tau) \eta(2\tau)^{\ell-1}$
$E_6^{(2)}$	$\eta(\tau) \eta(2\tau)^2$
$D_4^{(3)}$	$\eta(\tau) \eta(3\tau)$

$$\eta(\tau) = e^{\frac{\pi i}{12}\tau} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - e^{2\pi i n \tau})$$

Dedekind の  $\eta$ -函数.

例1 type  $X_\ell^{(1)}$  level 1

$$C_\lambda^\Lambda \neq 0 \text{ となるのは } C_{\Lambda_j}^{\Lambda_j} \quad (j \in J)$$

$$J = \{j \mid j = \exists \sigma(0), \sigma: \text{Dynkin 図型の自己同型}\}$$

$$P_+(1) = \{\Lambda_j\}, \quad C_{\Lambda_j}^{\Lambda_j}(\tau) = C_{\Lambda_0}^{\Lambda_0}(\tau) = C(\tau)$$

$$\text{Prop. 1 より } C(\tau)^{|J|} = \eta(\tau)^{-\ell|J|}$$

$$i\infty \text{ での展開の初項を比べて } C(\tau) = \eta(\tau)^{-\ell}$$

$$\text{従って } b(\mathfrak{g}) = b_{\Lambda_0}^{\Lambda_0}(\mathfrak{g}) = \varphi(\mathfrak{g})^{-\ell}$$

$$\varphi(\mathfrak{g}) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \mathfrak{g}^n)$$

$$(\mathfrak{g} = e^{2\pi i \tau})^{n=1}$$

よって level 1 の  $\Delta$  に対し

$$\text{chL}_\Delta = \frac{\sum_{r \in M+\lambda} e(\lambda - \bar{\lambda} + r - \frac{1}{2}|r|^2\delta)}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - e(-n\delta))^{\ell}}$$

例2 type  $A_1^{(1)}$

$$C_\lambda^\mu = C_{\lambda(h_0) \lambda(h_1)}^{\mu(h_0) \mu(h_1)} \text{ である。}$$

$$C_{mn}^{MN} = C_{nm}^{NM} \text{ である。}$$

(1) level 1 例1の特殊な場合  $C_{01}^{10} = 0$

$$C_{10}^{10}(\tau) = \eta(\tau)^{-1}$$

(2) level 2

non-zero なもの  $C_{20}^{20}, C_{02}^{20}, C_{11}^{11}$

$$C_{11}^{11}(\tau) = \frac{\eta(2\tau)}{\eta(\tau)^2} \quad \dots (7)$$

$$A(\tau) = C_{11}^{11}(\tau) \eta(\tau)^2 / \eta(2\tau) \text{ とおく. Th.1 と}$$

$\eta$  の変換公式から  $\Gamma(2)$  に属する modular function  $\tau$  cusp  $i\infty, 0$   $\tau$  も holomorphic

よって  $A(\tau) = \text{const.}$   $i\infty$   $\tau$  の展開を比べ

$$\tau \quad A(\tau) \equiv 1$$

(7) を  $\tau \mapsto -\frac{1}{\tau}$  と変換. Th.1 と  $\eta$  の変換公式より

$$C_{20}^{20}(\tau) - C_{02}^{20}(\tau) = \eta\left(\frac{\tau}{2}\right) / \eta(\tau)^2 \quad \dots (8)$$

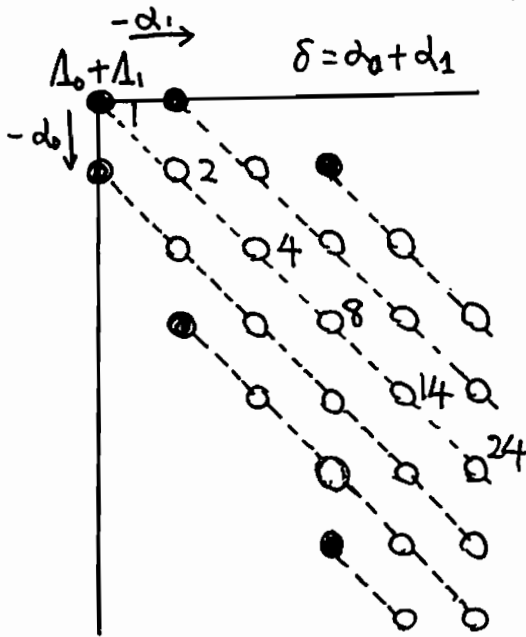
Prop. 157

$$C_{11}^{11} (C_{20}^{20} - C_{02}^{20}) (C_{20}^{20} + C_{02}^{20}) = \eta(z)^{-3} \dots (b)$$

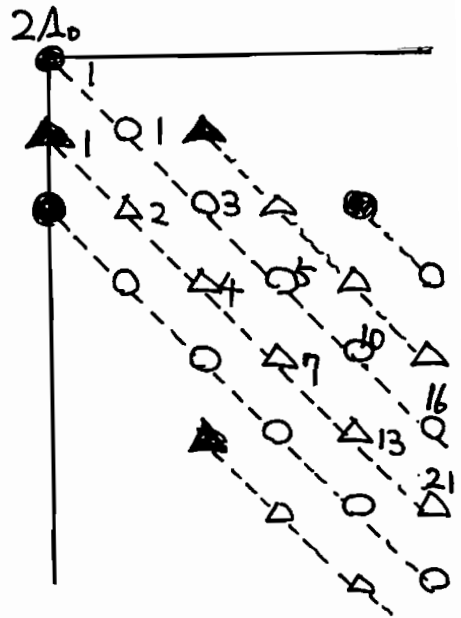
(a), (b), (c) から

$$C_{11}^{11}(z) = \frac{\eta(z)}{\eta(z)^2}, \quad C_{20}^{20}(z) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\eta(z)}{\eta(\frac{z}{2})\eta(2z)} + \frac{\eta(\frac{z}{2})}{\eta(z)} \right\}$$

$$C_{02}^{20}(z) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\eta(z)}{\eta(\frac{z}{2})\eta(2z)} - \frac{\eta(\frac{z}{2})}{\eta(z)^2} \right\}$$



$$b_{11}^{11} \bullet \cdots \circ \cdots$$



$$b_{20}^{20} \bullet \cdots \circ \cdots$$

$$b_{02}^{20} \blacktriangle \cdots \triangle \cdots$$

§3  $A_1^{(1)}$  の分割関数と Hecke の "indefinite modular form"

$A_1^{(1)}$  の Kostant の partition function を  $K(n_0, n_1) = K(n_0, n_1)$  と  $\varphi(q)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty} p^{(3)}(n) q^n$  とする。

Prop. 2

$$K(n_0, n_1) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k p^{(3)}\left((k+1)n_0 - kn_1 - \frac{k(k+1)}{2}\right)$$

$$= - \sum_{k < 0} (-1)^k p^{(3)}\left((k+1)n_0 - kn_1 - \frac{k(k+1)}{2}\right)$$

Prop. 2 は 次の Lemma を用いて induction によって証明される。

Lemma  $K(n_0, n_1) = p^{(3)}(n_0) - K(n_0, 2n_0 - n_1)$   
 $K(n_0, n_1) = p^{(3)}(n_1) - K(2n_1 - n_0, n_1)$

Lemma は

$$\sum K(n_0, n_1) x^{n_0} y^{n_1}$$

$$= \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n y^n)(1 - x^{n-1} y^n)(1 - x^n y^{n-1})}$$

を変形して得られる。

Def. 3  $U$ : 実 2次元 vector space

$L$ : lattice

$B$ : indefinite sym. bilinear form

s.t.  $0 \neq \forall \gamma \in L, B(\gamma, \gamma) \in 2\mathbb{Z} - \{0\}$

$L^*$ :  $B$ に関する  $L$  の dual lattice

$G_0 = \{g \in SO(U, B) \mid gL = L, g \text{ on } L^*/L = \text{id}\}$

とする。  $\mu \in L^*$  に對し

$$\theta_{L, \mu}(z) \stackrel{\text{def.}}{=} \sum_{\substack{\delta \in L + \mu \\ B(\delta, \delta) > 0 \\ \delta \bmod G_0}} \text{sgn}(\delta) e^{\pi i z B(\delta, \delta)}$$

こゝで  $\text{sgn}(\delta)$  は  $B(x, x) = l_1(x)l_2(x)$  (各  $l_i$  は linear form) と分解を一つ固定して、

$$\text{sgn}(\delta) = \text{sgn} l_1(\delta)$$

$\theta_{L, \mu}(z)$  は weight 1 の cusp form になる。

Hecke は  $U = K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$   $K$ : 実 2次元体

$L = K$  の order  $C \subset K \subset U$ ,  $B$ : norm 形式の偶数倍の場合を研究した。Hecke の定義を少し拡張した。

ここで  $L = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_2 \subset U = \mathbb{R}\alpha_1 \oplus \mathbb{R}\alpha_2$   
 $U \ni r = {}^t(x\alpha_1, y\alpha_2)$ ,  $B(r, r) = 2(m+2)x^2 - 2my^2$   
 による。この時  $G_0 = \langle A^2 \rangle$ ,  $A = \begin{pmatrix} m+1 & m \\ m+2 & m+1 \end{pmatrix}$

Prop. 2 の結果より,  $m_\Lambda(\lambda) = \sum_{w \in W} (\det w) K(w(\lambda + \rho) - \lambda + \rho)$   
 と string function の定義から

Th. 2  $\Lambda \in P_+$ , level  $m$ ,  $\lambda \in \max(\Lambda)$   
 のとき

$$\eta(\tau)^3 C_\lambda^\Lambda(\tau) = \theta_L, \left( \frac{\bar{\Lambda} + \bar{\rho}}{m+2}, \frac{\bar{\Lambda}}{m} \right) \quad (7)$$

前 § 例 2 の  $C_{10}^{10}(\tau)$ ,  $C_{11}^{11}(\tau)$  に対して  
 Th. 2 を書き下すと

Cor.  $\eta(\tau)^2 = \sum_{\substack{k, l \in \mathbb{Z} \\ k \geq 2|l|}} (-1)^{k+l} q^{\frac{3(2k+1)^2 - (6l+1)^2}{2}} \dots \textcircled{1}$

$$\eta(\tau) \eta(6\tau) = \sum_{\substack{k, l \in \mathbb{Z} \\ k \geq 3|l|}} (-1)^k q^{(2k+1)^2 - 32l^2} \dots \textcircled{2}$$

平松豊一氏(神戸大)によると、 $\eta(12\tau)^2$ に  
 関する Hecke の結果は

$$\eta(12\tau)^2 = \psi_+(12\tau; 1, \sqrt{2})$$

であり、 $6x^2 - 2y^2$  は実2次体のノルム  
 形式ではなく、Cor. ①式は新しい結果  
 らしい。②式の右辺は少し変形して  
 $\psi_+(8\tau; 2 + \sqrt{2}, 4\sqrt{2})$  である事がわか  
 るようです。ここで

$$\psi_+(\tau; \mu, Q\sqrt{D}) = \theta_{L, \mu}(\tau)$$

$$K = \mathbb{Q}(\sqrt{D}) \quad (D > 0), \quad \mu \in \mathcal{O}_K, \quad Q \in \mathbb{Z}_+$$

$$U = K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}, \quad L = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}Q\sqrt{D}$$

$$L^* \cap \mathcal{O}_K \ni \mu, \quad B(x, y) = \frac{2N\chi_Q(x)}{QD} \quad (x, y \in L)$$

とおいたもの。

# ソリトンと無限次元 Lie 環 I

京大 教養 伊達 悦朗

ここでは、II, III. において対象とする非線型方程式の説明、すなわちソリトン理論の概略、その解説を試みる。

## 1. ソリトン方程式

ソリトン理論の出发点となる、 $n=2$  の、現在 Korteweg-de Vries (KdV) 方程式と呼ばれる、次の非線型偏微分方程式である。

$$u_t = \frac{3}{2} u u_x + u_{xxx} \quad , \quad u = u(x, t) \quad (u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \text{etc.})$$

この方程式は、運河等の水の波を記述する方程式として 19 世紀末頃に Korteweg と de Vries により導かれたものである。また KdV 方程式に少し先立って Boussinesq により導かれた方程式

$$\frac{3}{4} u u_y = -\frac{3}{2} (u u_x)_x - \frac{1}{4} u_{xxxx}$$

もソリトン理論に登場する。 $n=3$  の方程式は、Scott Russell にて運河に於ける孤立波の観察から、 $n=1$  とより導かれた。この進行波解



は 次式  $z \rightarrow \lambda$  になった (KdV の場合)

$$u(x,t) = 2a \operatorname{sech}^2(\sqrt{a}(x+at) + \delta), \quad a, \delta \text{ 定数.}$$

この波形は下図のように右向きに  $z$  軸から孤立波 (solitary wave) 解とも呼ばれる



この波は速度が高さには比例している。

1960年代の半ば頃には、KdV方程式  $z$ -プロ  
ット中の粒子現象も言及して粒子性がある。

KdV方程式が再び注目される。これは数値実  
験により、この孤立波解が粒子の性質を持つこ  
とが確かになった。よって soliton (solitary wave +  
-ton (粒子にかけた接尾語)) といふ言葉が生まれた。  
(Zabusky - Kruskal)

## 2. 逆散乱法

引玉的として、この事実の背後にある数学的構造  
の説明をして。1967年には Gardner - Greene -  
Kruskal - Miura は逆散乱法 (inverse  
scattering method) と呼ばれる  $KdV$  方程式の

解法を提出した。

この解法の要点は KdV 方程式が 1 次元の保型方程式系が可積分条件として表わされた点にある。

$$\begin{cases} w_{xx} + u w = \lambda w \\ w_t = w_{xxx} + \frac{3}{2} u w_x + \frac{3}{4} u_x w \end{cases}$$

( $\lambda$  は  $10^3 \times -2$ )  $= \lambda$  とおす。  $u(x, t)$  は KdV 方程式の解とするとす。この  $u$  はポテンシャルと見做す。1次元の Schrödinger 作用素  $L_2(t) = \partial_x^2 + u(x, t)$  のスペクトルは  $t$ -不変であることが知られる。

17 百葉の逆散乱法とは、この事実を基礎として、1次元 Schrödinger 作用素の散乱理論を用いて、散乱データ  $u$  の空間変換  $L$ ,  $r = r(t)$  は  $t$ -dependence が異なる  $\alpha = \alpha(t)$ ,  $r(t) = r(t)$  を用いて、KdV 方程式の初期値問題を解くことができる。

$$\begin{array}{ccc} u(x, 0) & & u(x, t) \\ \downarrow & & \uparrow \text{ 逆散乱問題} \\ \text{散乱データ} & \longrightarrow & \delta(t) \\ \sqrt{\lambda} = \{r(\lambda, 0), \eta_j(0), \zeta_j(\lambda)\} & \longrightarrow & \delta(t) \\ r(\lambda, t) = r(\lambda, 0) e^{-2i\lambda^3 t} & \cdot & \eta_j(t) = \eta_j(0) \\ & & \zeta_j(t) = \zeta_j(0) e^{-2\eta_j^2 t} \quad \triangle \end{array}$$

### 3. Lax 表示. の一般化.

Lax は スペクトル保存 という事実に着目し, 次のような一般解を定式化させた.  $L_2(t)$  の スペクトルが保存されることであるから, ある unitary 作用素  $U(t)$  が存在して

$$L_2(t) = U(t) L_2(0) U(t)^{-1}$$

とかけた. この関係式を  $t$  について微分し,  $B = \frac{dU}{dt} U^{-1}$  とかければ

$$\frac{dL_2}{dt} = [B, L_2] = B L_2 - L_2 B$$

が成り立つ. この関係式は, 線型作用素  $L_2$  の スペクトルが保存されるという状況では成り立つ式である. したがって  $Lax$  表示  $A$  は  $L_2$  である.

Lax 表示と KdV 方程式との関係は次を記す:

$$B = \partial_x^3 + \frac{3}{4}(u \partial_x + \partial_x \cdot u) \quad \text{と } [B, L_2] \text{ は}$$

$$\frac{3}{2} u u_x + \frac{1}{4} u_{xxx} \text{ を掛けた作用素となる. この } B \text{ は}$$

である. この Lax 表示は KdV 方程式を表す.

このように定式化に基づいて, 逆散乱法で解く

る方程式の枠組を拓ける可能性が示された.

事実, この KdV 方程式の場合には,  $B$  は

3 階の微分作用素と見たことができる.  $B$  は

もの 高階の作用素  $L_2$  の交換子積が一般化作用素  $L$  の (半可換) が存在する。  $L$  は  $L_2$  を用いて  $L u_x$  を表示する非線形方程式の高次 KdV 方程式と呼ばれる (  $u$  は  $L_2$  の  $L u_x = F(u)$  である ) 方程式である。  $L_2$  の半可換作用素を求めるという問題は、1920 年代 (即ち Burchall-Chandry にて知られた)。 更に  $L_2$  も一般化する =  $L$  は  $L_2$  による Bousinesq 方程式。 更に  $L$  は sine-Gordon 方程式。 非線形 Schrödinger 方程式も逆散乱法で知られる。

Zakharov-Shabat は  $L u_x$  を  $L$  を一般化した。  $L$  は  $L_2$  による。  $L$  の形に表わすことができる方程式

$$[L - \partial_y, M - \partial_t] = 0, \quad L = \sum_{j=0}^m u_j(x, y, t) \partial_x^j,$$

$$M = \sum_{j=0}^n v_j(x, y, t) \partial_x^j \quad (u_j, v_j \text{ は } L \text{ の方程式) の逆}$$

散乱法の一般化で解けることを示した。

$$\text{特に } L = \partial_x^2 + u, \quad M = \partial_x^3 + \frac{3}{2} u \partial_x + v$$

とおけば、

$$\frac{3}{4} u_{yy} = (u_t - \frac{3}{2} u u_x - \frac{1}{4} u_{xxx})_x$$

なる非線形方程式が得られる。  $L$  の方程式は、1970

年頃に Kadomtsev と Petviashvili 由.  $\tau$  ラス<sup>2</sup> 中  
 の両子現象を記述する方程式として導いた。これら  
 を略して KP 方程式と呼ぶのはよく多し。この KP  
 方程式で  $u$  が  $y$  に依存するとして  $u(x, y, t)$  とし  
 KdV 方程式とする。又  $u$  が  $x$  に依存するとして  $u(x, t)$   
 とし Boussinesq 方程式とする。この点から  
 KP 方程式は (少なくとも超平面的には) 5<sup>7</sup>  
 universal な方程式と考へた。

以上が、我々が Linearization (線型化) と  
 呼んでいる。ヤリトと理論に連なる方程式 (ヤリ  
 トと方程式と呼ぶ) とはもう一方の手段を招き  
 寄せた。その要旨は、係数に  $t$  を含めば、ある種の  
 非線形方程式を線形方程式系に変換する条件を  
 与える。線形方程式系には既知の知識を用いて  
 非線形方程式を  $t \rightarrow 0$  とする立場がある。

#### 4. 広田の方法, bilinearization

とこそで". ソリト方程式を扱う手法には, これまで述べてきた linearization とは別の手法もある. そのうちの一つ, 広田の広田教授により提出された方法について以下述べる.

これは, KdV 方程式の  $N$ -ソリト解 (1 次元のソリト解を  $N$  個 '重ね合わせた' ような解) の形

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \Delta(x,t)$$

$$\Delta(x,t) = \det \left( \delta_{jk} + \frac{c_j e^{-(\lambda_j + \lambda_k)x}}{\lambda_j + \lambda_k} \right)$$

$$c_j = c_j e^{2\lambda_j t}$$

(=  $u$  は逆散乱法から正しく導かれた) に示唆されたものかもしない. あるいは KdV 方程式に '似た' Burgers 方程式を線型化する Cole-Hopf の変換が類似ともいえるかもしれない.

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log f$$

と仮定して KdV 方程式を  $f$  の方程式に書き直すとおかしな発点となる. この式を KdV 方程式に代入すると

$$2x \partial_t \log f - \frac{3}{4} (\partial_x^2 \log f)^2 - \partial_x^4 \log f = 0$$

となる。この式は、次の広義の bilinear operator

$$P(D_x, D_t) f(x, t) \cdot g(x, t) \quad P \in \mathbb{C}[x, t]$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} P(x', t') f(x+x', t+t') g(x-x', t-t') \Big|_{\substack{x'=0 \\ t'=0}}$$

と等しくなる。

$$P(D) f \cdot f = (D_x^4 - 4D_x D_t) f \cdot f = 0$$

と表わされる。この方程式は次のように振動的に解かれた。

$$f = 1 + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots \quad \epsilon: \text{パラメータ}$$

と仮定。上の方程式に代入し、 $\epsilon^n$  の係数を比較する。

$$P(D) f^{(n)} \cdot 1 = - \sum_{j=1}^{n-1} P(D) f^{(j)} \cdot f^{(n-j)}$$

となる。左辺は bilinear operator の定義から

$P(D) f^{(n)}$  は通常の微分になる。特に  $n=1$  のとき  $f^{(1)}$  に対する方程式は

$$(\partial_x^4 - 4\partial_x \partial_t) f^{(1)} = 0$$

となる。以下順に  $n=2, 3, \dots$  の再型方程式を解く。

$n=2$  のとき  $f^{(2)}$  が求まり、特に  $f^{(2)} = a e^{2px+2p^2t}$

( $a, p$  は定数) とする。 ( $\epsilon=1$  とする)

$$f = 1 + a e^{2px+2p^2t}$$

となる。これは元の方程式を満足する。

1.  $z$  についてのソリト = 解 = あり =  $z$  がある。

$$\text{又. } f^{(1)} = \sum_{j=1}^N a_j e^{2p_j x + 2p_j^3 t} \quad z \text{ あり.}$$

$$f = 1 + \sum_{j=1}^N a_j e^{\xi_j} + \sum_{1 \leq j < k \leq N} a_j a_k \frac{(p_j - p_k)^2}{(p_j + p_k)^2} e^{\xi_j + \xi_k} + \dots$$

$$= \sum_{0 \leq r \leq N} \prod_{\mu=1}^r a_{j_\mu} \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq r} c_{j_\mu j_\nu} e^{\sum_{\mu=1}^r \xi_{j_\mu}}$$

$$\xi_j = 2p_j x + 2p_j^3 t, \quad c_{j,k} = \frac{(p_j - p_k)^2}{(p_j + p_k)^2} \quad z \text{ あり.}$$

= a 式 について  $N$ -ソリト = 解  $\xi$  を取り替えて =

$z$  あり =  $z$  あり. = a 式に. 変数  $f = z$  あり

if. ソリト = 解 a '重なる場合'  $B$  あり a 'correction a'

規則が 体系的に あり =  $z$  あり.

KP 方程式も 同様 =  $1$   $z$  bilinear equation

a 形に 書き直せる.  $u = 2 \partial_x^2 \log f \quad z$  あり.

方程式は

$$(D_x^4 + 3D_y^2 - 4D_x D_t) f \cdot f = 0$$

$z$  あり.  $z$  a  $N$ -ソリト = 解は.  $z$  a KdV 方程式 a

$N$ -ソリト = 解 a 式  $z$

$$\xi_j, t \rightarrow (p_j - \delta_j)x + (p_j^2 - \delta_j^2)y + (p_j^3 - \delta_j^3)t \quad p_j, \delta_j \text{ 定数}$$

$$c_{j,k} \rightarrow \frac{(p_j - p_k)(\delta_j - \delta_k)}{(p_j - \delta_k)(\delta_j - p_k)}$$

$z$  あり  $z$  あり.



このように、元の非線型方程式の従属変数  
(未知関数)に適宜な変換を施し、この変数に関  
する bilinear な方程式に直して解く手法を  
bilinearization と呼ぶ。

### 5. KdV 方程式系

前回は 3.2" 高次 KdV 方程式の定義を述べ  
たが、 $\int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx < \infty$   $B \geq 1$  は  
 $L_2^{\frac{2n+1}{2}}$

の擬微分作用素、微分作用素部分  $u^2$  は  
=  $u^2$  の後、研究を続け、また、N-リットル  
解に関しても、 $\int_{-\infty}^{\infty} u dx$  上の KdV 方程式は対称式  
で  $\int_{-\infty}^{\infty} u dx \rightarrow 2p_1 x + 2p_2 x^{2n+1} t$  とおくと得らる =  
か、 $u^2$  である。このように KdV 方程式も高次 KdV  
方程式も似た性質を持つ。又 linearization の  
立場からは、一次元 Schrödinger 作用素  $L_2 =$   
 $\partial_x^2 + u$  の  $n$  次定義  $u^2$  は、 $u^2$  は一括  
して扱う =  $u^2$  が便利である。このために、高次 KdV  
方程式の時間変数  $t$  区別して  $x(2n+1) t$  とおき  
 $u^2$  は一括して扱う =  $t$  (KdV 方程式) の  $t$  は

$\lambda$  を任意に選ぶ (  $\lambda = 0$  とする )。つまり、KdV 方程式系は、  
 次  $n$  無限個の線形方程式系  $n$  可積分条件  $\geq 1$   $\geq 3$  である。

$$L_2 w = (\partial_x^2 + u)w = \lambda w \quad \lambda = \text{パラメータ}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x_{2m+1}} = \left( L_2^{\frac{2m+1}{2}} \right)_+ w$$

$\left( L_2^{\frac{2m+1}{2}} \right)_+$  は 擬微分作用素  $L_2^{\frac{2m+1}{2}}$  の微分作用素部分  
 を表す。

$\Rightarrow$  KdV 方程式系  $n$  の  $N$ -リットル解。上は等しい  
 KdV 方程式  $n$  の  $N$ -リットル解  $\Rightarrow$

$$\xi_j \rightarrow 2p_j x_1 + 2p_j^3 x_3 + 2p_j^5 x_5 + \dots$$

$\geq 1 \geq 5$  とする。

### 4. KP 方程式系

前回は  $z$  を含むように 元来の KP 方程式  
 は KdV 方程式の一般化と看做した。今前節で  
 KdV 方程式  $\geq$  一般化して KdV 方程式系  $\geq 1 \geq$   
 一括して取り扱うことにした。従って KP 方程式も  
 $\Rightarrow$  KdV 方程式系  $\geq$  含む形に一般化するに  $\geq$  が望ましい。  
 以下は  $n$  次  $n$  以上  $\geq 1 \geq$  とする

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots) \geq \text{無限個の独立変数と}$$

$$L = \partial + u_2 \partial^2 + u_3 \partial^3 + \dots \quad \partial = \partial/\partial x_1$$

与了 - 階の微分作用素を考えた。  $u_2, u_3$  は  $x$  の関数とした。

次の線型方程式系

$$\begin{cases} L w = k w & k = 1/\partial x^{-2} \\ \frac{\partial w}{\partial x_n} = B_n w & n = 2, 3, \dots \quad B_n = (L^n)_+ \end{cases}$$

$$(B_1 = \partial, B_2 = \partial^2 + 2u_2, B_3 = \partial^3 + 3u_2 \partial + 3(u_3 + u_2^2)) \text{ etc. } )$$

を考えた。その可積分条件として表す方程式 ( $u_{m,k}$  対して) は KP 方程式系と呼ばれる。

symbolical 1.18.

$$\frac{\partial L}{\partial x_n} = [B_n, L], \quad \frac{\partial B_m}{\partial x_m} - \frac{\partial B_m}{\partial x_n} = [B_m, B_n]$$

とした。特に  $m=2, m=3$  の場合、  $u = 2u_2,$

$y = x_2, t = x_3$  の場合により、与えられた KP 方程式を

独立変数  $x, y, t$  として、KP 方程式の

bilinear equation は与えられた KP 方程式に

対応する。

$$(D_x^3 D_y + 2D_x D_y^2 - 3D_x D_t) \tau \cdot \tau = 0$$

$\tau = \tau(x, y, t) = \sum u_2 = \partial_x^2 \log \tau$  とおくと新しい方程式

$\tau_N(x; p_j, \delta_j; \dots; q_N, \delta_N)$   
 $N$ -yrit to 解は  $\bar{p}_N = a \dots$  KDF 方程式の  $N$ -yrit to  
 解は  $\tau_N \rightarrow (p_1 - \delta_j)x_1 + (p_1^2 - \delta_j^2)x_2 + (p_1^3 - \delta_j^3)x_3 + \dots$   
 $\geq 12$  得  $\geq 43$ .

$$\tau_N(x; p_1, \delta_1; \dots; q_N, \delta_N)$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^N a_j e^{\tau_j} + \sum_{1 \leq j < k \leq N} a_j a_k \cdot c_{jk} e^{\tau_j + \tau_k} + \dots$$

$$= \sum_{r=0}^N \prod_{\mu=1}^r a_{j_\mu} \prod_{1 \leq \mu < \nu \leq r} c_{j_\mu j_\nu} e^{\sum_{\mu=1}^r \tau_{j_\mu}}$$

$$\tau_j = (p_j - \delta_j)x_1 + (p_j^2 - \delta_j^2)x_2 + \dots$$

$$= \tau(x, p_j) - \tau(x, \delta_j) \quad \tau(x, p) = \sum_{j=1}^n x_j p^j$$

$$c_{jk} = \frac{(p_j - p_k)(\delta_j - \delta_k)}{(p_j - \delta_k)(\delta_j - p_k)}$$

$\tau_N$  定義した KDF 方程式系が KdV 方程式  
 系を回復するに  $L^2$  が微分作用素と存在する  
 条件を付加する ( $L^2$  は一般には擬微分作用素  
 とする  $\tau_N$  への  $\tau_N$  の係数  $a_j$  は対称条件).  $\tau_N$   
 条件は  $\tau_N$  の  $\tau_N$  係数  $a_n$  及び  $\tau_N$  上に定義  
 した  $\tau_N$  の  $\tau_N$  係数  $a_n$  (  $j=1, 2, \dots$  ) 変換に  
 依存する  $\tau_N$  条件  $\tau_N$ ,  $\tau_N$  である.

上  $a$   $N$ - $\gamma$  リットル 解の形では  $\omega \delta_j$ .  $\rho_j \delta_j$ .  
 $\exists \rho_j = -\delta_j$  と特殊化  $\omega^3 = 1$  となる。

又. Boussinesq 方程式系  $\omega^3 = 1$  において  $a$  も考慮する  
 3 組.  $\omega^3 = 1$   $K$  上 方程式系  $\omega^3 = 1$   $L^3$  上の微分作用素  
 上の条件を加えた  $a$ .  $\omega^3 = 1$ . 係数  $\omega_j$  として  
 $x_{3j}$  ( $j=1, 2, \dots$ ) 3 組変数による  $\omega^3 = 1$  となる。

$\exists a$   $N$ - $\gamma$  リットル 解  $\omega^3 = 1$ .  $\rho_j = \omega \delta_j$   $\omega^3 = 1$  と特殊化  
 して得られた。

II. III には  $\omega^3 = 1$   $K$  上の方程式系  $a$  解の交  
 換群に  $\omega^3 = 1$  である。図式は  $\omega^3 = 1$   $a$  による

$$\begin{array}{ccc}
 \text{方程式系} & & \text{交換群} \\
 K \mathbb{P} & \longleftrightarrow & \text{gl}(n) \\
 \downarrow \text{reduction} & & \cup \\
 KdV & \longleftrightarrow & A_1''
 \end{array}$$

注.  $\omega^3 = 1$ .  $\omega^3 = 1$   $K$  上の方程式  $a$  解  $\omega^3 = 1$ .  $N$ - $\gamma$  リットル  
 解  $\omega^3 = 1$   $K$  上の方程式  $a$  解  $\omega^3 = 1$  である。

$\omega^3 = 1$  以外の  $\omega^3 = 1$  連関解.  $\omega^3 = 1$  方程式系  $\omega^3 = 1$   
 $\omega^3 = 1$  構造解  $\omega^3 = 1$  である。

$\omega^3 = 1$   $\omega^3 = 1$  解集合  $\omega^3 = 1$  'dense' である  $\omega^3 = 1$   
 存在性  $\omega^3 = 1$  結果  $\omega^3 = 1$  である。

参考文献として、次に示した文献及び、その中の文献表を引く下さい。

ソリトンの由来、逆散乱法の変態に関するものは

戸田盛和：非線形波動とソリトン

数学セミナー (1980~1982)

広田の方法については、

広田良吾：非線形発展方程式の解法

数理研講究録 255 (1975)

又

田中俊一・伊達悦朗：KdV方程式

紀伊國屋書店 (1979)

柏原正樹・神保道夫・伊達悦朗・三輪哲二：

ソリトン方程式とKac-Moody リー環

数学 34巻 1号 (1982)

を引く下さい。

## ソリトンと無限次元リー環 II

京大数理研

三輪 哲二

話の主題は、ソリトン方程式と呼ばれる一連の非線型偏微分方程式の解空間と、無限次元リー環の既約表現の群軌道をつなぐ事である。

ソリトン方程式として、次のKadomtsev - Petviashvili 方程式を例に考えましょう。

$$\frac{3}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{3}{2} u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{4} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \quad (1)$$

ソリトン方程式の解法は、線型化(主流派)と双線型化(反主流派)の二つがあります。線型化は(1)について言えば、次の線型方程式を考えます。

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + u \right) w \quad (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \left( \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \frac{3}{2} u \frac{\partial}{\partial x} + v \right) w$$

ここで  $u, v$  は  $x, y, t$  の函数ですが、方程式系 (2) が解けるための条件として  $u$  に対して方程式 (1) が課されるというのが、線型化の基本的な考えです。解けるための条件というのは、例えば  $u$  も  $v$  も恒等的に 0 ならば"解は指数函数  $e^{kx+k^2y+k^3t}$  の線型結合"というのが"一般形"です。そこで、恒等的に 0 ではない  $u, v$  に対して (2) が  $k = \infty$  の近くで"

$$w(k) = \left( 1 + \frac{w_1}{k} + \frac{w_2}{k^2} + \dots \right) e^{kx+k^2y+k^3t} \quad (3)$$

なるパラメタ  $k$  を許す形の解を持つ事を要求します。ここで  $w_1, w_2, \dots$  は  $x, y, t$  の函数で  $k$  は含まないとします。



(3) を (2) に代入して少し計算しますと

$$u = -2 \frac{\partial w_1}{\partial x} \quad (4)$$

という関係式と共に (1) が出てきます。

双線型化は (4) をもう一度積分した形で

$$u = 2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \tau \quad (5)$$

によって新しい函数  $\tau$  を導入します。こうすると  $\tau$  に対する方程式として次のいわゆる広田型の双線型方程式が出てきます。

$$(D_x^4 + 3D_y^2 - 4D_x D_t) \tau \cdot \tau = 0 \quad (6)$$

この式の左辺は  $\tau$  二つの積を微分した形に書かれています。その意味は

普通と異なり，右側の $\tau$ を微分する毎に $-1$ をつけるという規則です。普通の微分を $\partial_x, \partial_y, \dots$ と書いて，例えば

$$\begin{aligned}D_x f \cdot g &= (\partial_x f) \cdot g - f \cdot (\partial_x g) \\D_x D_y f \cdot g &= (\partial_x \partial_y f) \cdot g + f \cdot (\partial_x \partial_y g) \\&\quad - (\partial_x f) \cdot (\partial_y g) - (\partial_y f) \cdot (\partial_x g)\end{aligned}$$

などとなります。(6)の解を逐次近似で作る事ができます。まず $\tau = 1$ は解です。そこで $\tau_1, \tau_2, \dots$ を順次微小量として

$$\tau = 1 + \tau_1 + \tau_2 + \dots$$

の形の解を求めますと， $\tau_1, \tau_2, \dots$ を決める式は線型になります。例えば $\tau_1$ は

$$(\partial_x^4 + 3\partial_y^2 - 4\partial_x \partial_t) \tau_1 = 0$$

解は指数函数  $e^{(p-q)x + (p^2 - q^2)y + (p^3 - q^3)t}$  の線型結合となります。最も簡単に

$$\tau_1 = a e^{(p-q)x + (p^2 - q^2)y + (p^3 - q^3)t}$$

としますと  $\tau = 1 + \tau_1$  が (6) の解になります。これを 1 ソリトン解と呼びます。

$$\tau_1 = \sum_{j=1}^N a_j e^{(p_j - q_j)x + (p_j^2 - q_j^2)y + (p_j^3 - q_j^3)t}$$

と取った時は,  $\tau_{N+1}$  から先は 0 でよくて次の  $N$  ソリトン解が作れます。

$$\tau = 1 + \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_N$$

$$\tau_M = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_M \leq N} \left( \prod_{j=j_1, \dots, j_M} a_j \right) \times$$

$$\times \left( \prod_{\substack{j, j' = j_1, \dots, j_M \\ j < j'}} c_{jj'} \right) \times$$

$$\times \exp \left( \sum_{j=j_1, \dots, j_M} (p_j - q_j)x + (p_j^2 - q_j^2)y + (p_j^3 - q_j^3)t \right)$$

$$c_{jj'} = \frac{(p_j - p_{j'})(q_j - q_{j'})}{(p_j - q_{j'})(q_j - p_{j'})} \quad (7)$$

解空間と群軌道の同一性という主張を  $N$  ソリトン解に~~変~~<sup>即</sup>した形で述べてみます。そのためにひとつトリックが必要です。今まで、方程式の独立変数として  $x, y, t$  の三つを考えてきましたが、これを一挙に無限個に増やします。その動機を線型化の式(2)を使って説明しましょう。

微分の階数を考えて  $x, y, t$  をそれぞれ齊次 1, 2, 3 次と勘定し、記法も  $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = t$  と改めます。こうなると  $x_4, x_5, \dots$  も導入したくなるのが人情です。(以下  $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$  と使う事にします。) 各  $n \geq 4$  に対して

$$\frac{\partial w}{\partial x_n} = \left( \frac{\partial^n}{\partial x_1^n} + \frac{n}{2} u \frac{\partial^{n-2}}{\partial x_1^{n-2}} + \dots \right) w \quad (8)$$

無限小変換の生成子を導入する事です。

ホ2の準備は、解空間に作用する

です。

を考えれば"正しい。以上が"ホ1の準備

$$\sum_j \left( \xi(x, p_j) - \eta(x, q_j) \right)$$

は指数部として

増減'ありません。実際 N ヲ1つ解

変数も増えているので"解空間には

呼びます。方程式が"増えますが"

方程式系を KP 系列の方程式系と

が"無限個"でできます。こうして得られる

(1) の他に  $x^q$  微分以下を言んだ"方程式

に与えた解を考えれば", 可解条件として

$$\xi(x, k) = \sum_{j=1}^{\infty} k^j x_j \quad (9)$$

指数部を

の形の線型方程式'を追加して, (3) で"

$$X(p, q) = \exp(\xi(x, p) - \xi(x, q)) \times \exp(-\xi(\tilde{\sigma}, p^{-1}) + \xi(\tilde{\sigma}, q^{-1})) \quad (10)$$

とします。但し  $\tilde{\sigma} = (\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_3}, \dots)$  です。  $X(p, q)$  は  $f(x)$  に次のように作用します。

$$X(p, q) f(x) = e^{\xi(x, p) - \xi(x, q)} f(x_1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q}, x_2 - \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{2q^2}, x_3 - \frac{1}{3p^3} + \frac{1}{3q^3}, \dots)$$

$f(x)$  として特に  $e^{\xi(x, p_1) - \xi(x, q_1)}$  を取りますと

$$-\sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_1^j}{j p^j} = \log\left(1 - \frac{p_1}{p}\right)$$

という公式などを使う事により

$$X(p, q) e^{\xi(x, p_1) - \xi(x, q_1)} = \frac{(p - p_1)(q - q_1)}{(p - q_1)(q - p_1)} e^{\xi(x, p) + \xi(x, p_1) - \xi(x, q) - \xi(x, q_1)}$$

となります。特に  $P = P_1$  または  $q = q_1$  ならば右辺は 0 ですから一般に

$$X(P, q)^2 = 0$$

です。これで 1 ソリトンが

$$e^{aX(P, q)} \cdot 1$$

となる事がわかります。

準備はすみました。主張は次の通りです。

(A)  $X(P, q)$  の作用は リー環をなす。

$$\begin{aligned} & [X(P_1, q_1), X(P_2, q_2)] \\ = & \frac{(1 - q_1/P_1)(1 - q_2/P_2)}{1 - q_2/P_1} X(P_1, q_2) \delta(P_2/q_1) \\ & - \frac{(1 - q_1/P_1)(1 - q_2/P_2)}{1 - q_1/P_2} X(P_2, q_1) \delta(P_1/q_2) \end{aligned}$$

但し  $\delta(P/q) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} (P/q)^j$

(B)  $\exp\left(\sum_{j=1}^N a_j X(p_j, q_j)\right) \cdot 1$  は  $N$  ソリトン解である。

(B) については今までの説明で十分でしょう。(A)の説明には、場の量子論における自由フェルミ場と自由ボース場を使うと便利です。

自由ボース場というのは例えば生成元  $\varphi_n, \varphi_n^*$  ( $n=1, 2, 3, \dots$ ) と基本関係式

$$\begin{aligned} [\varphi_m, \varphi_n] &= 0, [\varphi_m^*, \varphi_n^*] = 0 \\ [\varphi_m^*, \varphi_n] &= \delta_{mn} \end{aligned} \quad (11)$$

で定義される非可換代数  $B$  を考えます。独立変数  $x_1, x_2, x_3, \dots$  を用意して

$$\varphi_n^* \longleftrightarrow \frac{\partial}{\partial x_n}, \quad \varphi_n \longleftrightarrow x_n \quad (12)$$

と読み代えてやりますと、 $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \dots]$  を表現空間とする、 $B$  の既約表現が



できます。 $\mathbb{C}[x_1, x_2, x_3, \dots]$  の元  $1$  は

$$\frac{\partial}{\partial x_n} 1 = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で特徴づけられます。言い換えると

$$\varphi_n^* |vac\rangle = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (13)$$

を満たすベクトル  $|vac\rangle$  から生成される左加群による表現が (12) であります。こうした抽象的な設定は、自由フェルミ場を考えると役に立ちます。自由フェルミ場とは、今の場合  $\psi_n, \psi_n^* (n \in \mathbb{Z})$  と基本関係式

$$\begin{aligned} [\psi_m, \psi_n]_+ &= 0, \quad [\psi_m^*, \psi_n^*]_+ = 0 \\ [\psi_m^*, \psi_n]_+ &= \delta_{mn} \end{aligned} \quad (14)$$

で定義された非可換代数  $F$  です。

$$[A, B]_+ = AB + BA$$

Fの表現を

$$\begin{aligned}\psi_n |vac\rangle &= 0 & (n < 0) \\ \psi_n^* |vac\rangle &= 0 & (n \geq 0)\end{aligned} \quad (15)$$

で与えます。(14)を使うと、表現空間の基底として

$$\begin{aligned}\psi_{m_1}^* \cdots \psi_{m_s}^* \psi_{n_t} \cdots \psi_{n_1} |vac\rangle & \quad (16) \\ (m_1 < \cdots < m_s < 0 \leq n_t < \cdots < n_1)\end{aligned}$$

が取れます。Bの場合の(12)に当たる具体的な表示を求める事が目標です。

(13)から出発して(12)を得るには、

ハミルトニアン

$$H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n^* \quad (17)$$

と、

$$\langle vac | \varphi_n = 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (18)$$

$$a = \langle \psi | \psi \rangle = 0$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 \leftarrow \text{ (19) (20) } \psi \neq 0$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle = 1 \leftarrow \text{ (19) (20) } \psi \neq 0$$

から  $\langle \psi | \psi \rangle = 0$  従って

$\langle \psi | \psi \rangle$  は  $\langle \psi | \psi \rangle \neq 0$  (13) と (17)

実例で示します。  $a = 1$  の時

に対応せよと、  $\psi$  は  $\psi$  である

$$\langle \psi | \psi \rangle = a \langle \psi | \psi \rangle \quad (20)$$

表現空間の元

$\psi$   $\langle \psi | \psi \rangle$  に対して、具体的な

で与えます。抽象的な表現空間の

$$\langle \psi | \psi \rangle = 1 \quad (19)$$

物理的表記法に従って

$\langle \psi | \psi \rangle$  と  $\langle \psi | \psi \rangle$  の間の内積を

定義される  $B$  の右表現加群を導入

$$\begin{aligned}
& \langle \text{vac} | e^{\mathcal{H}(x)} \varphi_1 | \text{vac} \rangle \\
&= \langle \text{vac} | (1 + \sum x_n \varphi_n^* + \frac{1}{2} (\sum x_n \varphi_n)^2 + \\
&+ \dots) \varphi_1 | \text{vac} \rangle \\
&= \langle \text{vac} | \varphi_1 | \text{vac} \rangle + \sum x_n \langle \text{vac} | \varphi_n^* \varphi_1 | \text{vac} \rangle \\
&+ \frac{1}{2} \sum x_n^2 \langle \text{vac} | \varphi_n^{*2} \varphi_1 | \text{vac} \rangle + \dots
\end{aligned}$$

となりますが (11), (13), (18), (19) を使って  $\langle \text{vac} | \varphi_1^* \varphi_1 | \text{vac} \rangle = 1$  だけが生き残る事がわかり, 結果は (12) から期待される通り)

$$\langle \text{vac} | e^{\mathcal{H}(x)} \varphi_1 | \text{vac} \rangle = x_1$$

です。

自由フェルミ場の表現 (15) を扱うために,

$$\varphi_n^* = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_l \psi_{l+n}^*, \quad \varphi_n = \frac{1}{n} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi_{l+n} \psi_l$$

(21)

同じ  $\langle (14), (22) \rangle$  である

$$\langle \psi_n^* | \text{vac} \rangle = 0$$

$$\langle \psi_n | \text{vac} \rangle = (\psi_{n-1}^* + \psi_{n-1} + \dots + \psi_0^*) | \text{vac} \rangle$$

又  $(14), (15)$  を使えば

定義され、内積は  $(19)$  で与えられます。

$$\begin{aligned} \langle \psi_n | \psi_n \rangle &= 0 & (n \geq 0) \\ \langle \text{vac} | \psi_n^* \rangle &= 0 & (n < 0) \end{aligned} \quad (22)$$

これは、ここで  $\langle \text{vac} |$  は

$$\langle \text{vac} | [\psi_n^*, \psi_n] | \text{vac} \rangle \text{ を計算して}$$

$$[\psi_n^*, \psi_n] = 1 \text{ の check として}$$

さて計算する事は、例えは

(15) で与えられる表現空間に作用

決めたいといけません。安全な方法は

無限和か、 $\langle \psi_n | \psi_n \rangle$  計算の仕方

とか、(11) が成り立ちます。ここで

$$\langle \text{vac} | \varphi_n = 0$$

$$\langle \text{vac} | \varphi_n^* = \langle \text{vac} | (\psi_{-1} \psi_{n-1}^* + \dots + \psi_{-n} \psi_0^*)$$

✗

ですから, もう一度 (14), (15), (19), (22) より

$$\langle \text{vac} | [\varphi_n^*, \varphi_n] | \text{vac} \rangle = n$$

となります。

ベクトル  $a | \text{vac} \rangle$  に対して <sup>17</sup>~~(17)~~, <sup>21</sup>~~(21)~~ で定義されるハミルトニアン  $\mathcal{H}(x)$  を使い (20) の多項式を対応させます。これによって (16) のベクトルのうち  $s = t$  のものについては, 1対1の実現ができます。 $s \neq t$  の時は (20) は 0 なので, 右加群のベクトル  $\langle m |$  を

$$\langle m | = \begin{cases} \langle \text{vac} | \psi_{-1} \dots \psi_{-n} & (n < 0) \\ \langle \text{vac} | & (n = 0) \\ \langle \text{vac} | \psi_0^* \dots \psi_{n-1}^* & (n > 0) \end{cases} \quad (23)$$

で定義すると

$$F|vac\rangle \longrightarrow \mathbb{C}[x, u, u^{-1}]$$

↓

$$a|vac\rangle \longmapsto \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle m | e^{H(x)} a | vac \rangle u^m \quad (24)$$

が同型になります。(12)に対応して、自由フェルミ場の作用を  $\mathbb{C}[x, u, u^{-1}]$  で実現するために

$$\psi(k) = \sum k^n \psi_n, \quad \psi^*(k) = \sum k^n \psi_{-n}^* \quad (25)$$

を使うと、 $f(x, u) \in \mathbb{C}[x, u, u^{-1}]$  に対して  $\psi(k)$  の作用は

$$e^{\xi(x, k)} u f(x_1 - \frac{1}{k}, x_2 - \frac{1}{2k^2}, \dots, ku)$$

$\psi^*(k)$  の作用は

$$e^{-\xi(x, k)} k u^{-1} f(x_1 + \frac{1}{k}, x_2 + \frac{1}{2k^2}, \dots, k^{-1}u) \quad (26)$$

が答です。

(16) で "  $S = t$  の部分空間  $Z$ ", (26) を使って  $\psi(P)\psi^*(Q)$  の作用を計算すると  $X(P, Q)$  になる事がわかります。

(14) から,  $\psi(P)\psi^*(Q)$  あるいは  $\psi_m\psi_n^*$  の形の 2 次式の線型結合が, リー環を成す事が従いますか,  $X(P, Q)$  は, このリー環の実現を与えているわけです。

このリー環を  $g(\infty)$  と呼ぶ事にします。KP 方程式の解空間と  $g(\infty)$  の  $|vac\rangle$  による表現の群軌道との対応は 次の形にまとめられます。

$g \in \exp g(\infty)$  とする。

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \langle vac | e^{H(x)} g | vac \rangle \\ w(x, k) &= \langle 1 | e^{H(x)} \psi(k) g | vac \rangle / \tau(x) \end{aligned} \quad (27)$$

は, それぞれ KP 方程式の  $\tau$  函数, 波動函数を与える。



参考文献 (I, IIIの参考文献に追加)

J. L. Verdier

Les représentations des algèbres de  
Lie affines : Applications à quelques  
problèmes de physique ( d'après  
E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara,  
T. Miwa )

Seminaire N. Bourbaki Vol 1981/82

## ソリトンと無限次元リー環 III

京大数理研 神保道夫

I, II において, ソリトン方程式の主要な解法に (1) 線型化 (2) 双線型化 の二つがあること, そして 後者に登場する 広田の従属変数 ( $\tau$  函数) が, 表現論的には 群  $GL(\infty)$  による highest weight vector の軌道の元に他ならないこと, が解説された。本稿では, 上記 2 方法が 表現論の立場から如何に統一されるかを説明することと目標にする。また, 表現を適当な部分リー環へ制限することによって, 知られている多くの ソリトン方程式が Euclid リー環と関係づけられることを合わせて述べたい。

## §1. $\mathfrak{sl}(\infty)$ の Vertex 表現

はじめに、リ-環  $\mathfrak{sl}(\infty)$  を改めて定義しておこう。

symbol  $E_{ij}$  ( $i, j \in \mathbb{Z}$ ) を用意し、次の条件を満たす無限-次結合  $\sum_{i, j \in \mathbb{Z}} a_{ij} E_{ij}$  を考える:

$$a_{ij} = 0 \quad \text{if} \quad |i-j| \gg 0 \quad (1)$$

これらの元全体に、center  $z$  を添加したリ-環を  $\mathfrak{sl}(\infty)$  と定義する。

$$\mathfrak{sl}(\infty) := \left\{ \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} a_{ij} E_{ij} + cz \mid c \in \mathbb{C}, a_{ij} \in \mathbb{C} \text{ は (1) を満たす} \right\}$$

ここに交換子積は

$$\left[ \sum a_{ij} E_{ij} + cz, \sum a'_{ij} E_{ij} + c'z \right] = \sum a''_{ij} E_{ij} + c''z$$

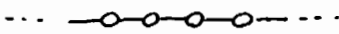
$$a''_{ij} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_{ik} a'_{kj} - \sum_{k \in \mathbb{Z}} a'_{ik} a_{kj}$$

$$c'' = \sum_{i < 0, j \geq 0} a_{ij} a'_{ji} - \sum_{i \geq 0, j < 0} a'_{ij} a_{ji}$$

と設定する。(条件(1)により、これらはすべて有限和であることに注意) 式(1)の意味の無限-次結合まで許すならば、 $\mathfrak{sl}(\infty)$  は "Chevalley 基"

$$e_n = E_{n+1, n}, \quad f_n = E_{n, n-1}, \quad h_n = [e_n, f_n] = E_{n+1, n-1} - E_{n, n} + \delta_{n0} z$$

により生成され, Dynkin 図形は  $\infty$ -chain となる.



以下に この リー環 の 表現 を, 多項式環  $\mathbb{C}[x]$  ( $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$ ) 上に構成する.

記号

$$\xi(x, k) = x_1 k + x_2 k^2 + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} x_j k^j$$

$$\xi(\tilde{\alpha}, k^{-1}) = \frac{\partial}{\partial x_1} k^{-1} + \frac{\partial}{\partial x_2} k^{-2} + \dots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j} \frac{\partial}{\partial x_j} k^{-j}$$

と導入しよう. 複素パラメタ  $p, q$  を含む次の作用素を Vertex operator とよぶ.

$$Z(p, q) := \frac{q}{p-q} \left( e^{\xi(x, p) - \xi(x, q)} e^{-\xi(\tilde{\alpha}, p^{-1}) + \xi(\tilde{\alpha}, q^{-1})} \right) \quad (2)$$

ただし,  $\exp \xi(\tilde{\alpha}, k^{-1})$  は shift

$$(e^{\xi(\tilde{\alpha}, k^{-1})} f)(x) = f(x_1 - \frac{1}{k}, x_2 - \frac{1}{2k^2}, \dots)$$

として作用するものとする.  $Z(p, q)$  自身は, 多項式を多項式にうつす作用素ではないが, その Laurent 展開

$$Z(p, q) = \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} Z_{ij}(x, \frac{\partial}{\partial x}) p^i q^{-j} \quad (3)$$

の各係数  $Z_{ij}(x, \frac{\partial}{\partial x})$  は  $\mathbb{C}[x]$  上の線型作用素として確定した意味をもつ. その作用を具体的に記述するため, 都合のよい  $\mathbb{C}[x]$  の基底を導入しよう.

型  $(f_1, \dots, f_m)$  ( $f_1 \geq \dots \geq f_m$ ) のヤング図形  $Y$  に対して,

$$\chi_Y(x) := \begin{vmatrix} p_{f_1}(x) & p_{f_1+1}(x) & \dots & p_{f_1+m-1}(x) \\ p_{f_2-1}(x) & p_{f_2}(x) & \dots & p_{f_2+m-2}(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{f_m-m+1}(x) & p_{f_m-m+2}(x) & \dots & p_{f_m}(x) \end{vmatrix}$$

ただし

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} p_j(x) k^j := \exp\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j k^j\right)$$

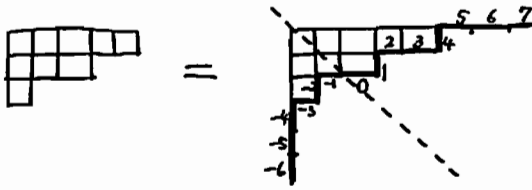
$$Y = \begin{array}{c} \overbrace{\left[ \begin{array}{c} \xrightarrow{f_1} \\ \xrightarrow{f_2} \\ \vdots \\ \xrightarrow{f_m} \end{array} \right]} \end{array}$$

を,  $Y$  に付随する Schur 多項式 とよぶ。  $Y$  がすべてのヤング図形をわたるとき  $\chi_Y(x)$  は  $\mathbb{C}[x]$  の基底をなす。 良く知られているように,  $GL(N, \mathbb{C})$  ( $N \geq m$ ) の  $Y$  に対応する既約表現  $\rho_Y$  の指標は, 次の意味で  $\chi_Y(x)$  により与えられる:

$$\text{tr } \rho_Y(g) = \chi_Y(x)$$

$$g \in GL(N, \mathbb{C}), \quad \nu x_\nu = \text{tr } g^\nu \quad (\nu = 1, 2, \dots).$$

以下 ヤング図形の辺を図のように延長しておいて,  $\mathbb{Z}$  による番号づけを行なうものとする。 このとき,  $Z_{ij}(x, \frac{\partial}{\partial x})$  の  $\chi_Y(x)$  に対する作用は次の規則で与えられる。



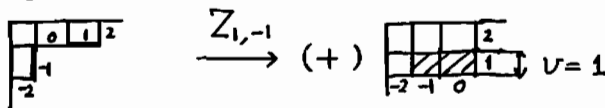
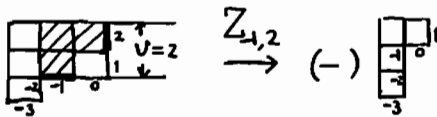
$i=j$  のとき

$$Z_{ii}(x, \frac{\partial}{\partial x}) \chi_Y(x) = \begin{cases} +1 & (i \geq 0 \text{ で 辺 } i \text{ は 右向き}) \\ -1 & (i < 0 \text{ で 辺 } i \text{ は 下向き}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \chi_Y(x)$$

$i \neq j$  のとき

$$Z_{ij}(x, \frac{\partial}{\partial x}) \chi_Y(x) = \begin{cases} (-1)^{v-1} \chi_{Y'}(x) & (\text{辺 } i \text{ は 下向き, かつ} \\ & \text{辺 } j \text{ は 右向き}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

ただし,  $Y'$  は 辺の組  $(i, j)$  に 応じた hook を ひき 抜く ( $i < j$ ) か 挿入 ( $i > j$ ) する こと によって 得られる 図形,  $v$  は hook の 下側の 長さ と する。



$Z_{ij}(x, \frac{\partial}{\partial x})$  は, コマの 数を  $i-j$  増やす 働き があり, 次数づけ

$$\deg x_v = v, \quad \deg \frac{\partial}{\partial x_v} = -v$$

により  $(i-j)$  次の 微分作用素 になっている。

特に, (2) で  $p=q$  とおけば

$$\nu x_\nu = \sum_{i \in \mathbb{Z}} Z_{i\nu, i} \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (\nu > 0)$$

$$0 = \sum_{i \in \mathbb{Z}} Z_{ii} \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} Z_{i-\nu, i} \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \quad (\nu > 0)$$

なる関係が導かれる。

Vertex operator を用いて, 各整数  $n$  に対し,  $\mathfrak{gl}(\infty)$  の既約表現  $\rho_n$  が次のように定義される。

$$\begin{aligned} \rho_n : \mathfrak{gl}(\infty) &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathbb{C}[x]) \\ E_{ij} &\longmapsto Z_{i+n, j+n} \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right) + \delta_{ij} \theta_n(i) \\ \mathbb{Z} &\longmapsto 1 \end{aligned}$$

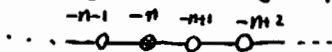
ここに

$$\theta_n(i) = \begin{cases} 1 & (0 \leq i \leq -n-1 \text{ のとき}) \\ -1 & (-n \leq i \leq -1 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

容易にわかるように,  $1 \in \mathbb{C}[x]$  が highest weight vector となる:

$$\rho_n(e_i) \cdot 1 = 0, \quad \rho_n(h_i) \cdot 1 = \delta_{i, -n} \cdot 1 \quad (i \in \mathbb{Z}).$$

これら  $\rho_n$  は  $\mathfrak{gl}(\infty)$  の表現としてすべて互いに同値になり, してしまうが, 微分方程式を考える際,  $n$  の違いは意味を持つ。



## §2. 波動関数と bilinear identity

われわれは "群  $GL(\infty)$ " を定義することはしないが、それによる highest weight vector の軌道にあたるものを直接考察の対象とする。

$\mathfrak{gl}(\infty)$  の元  $X$  が表現  $\rho_n$  に関して locally nilpotent であるとは、任意の  $f \in \mathbb{C}[x]$  に対し  $N \geq 0$  が存在して  $\rho_n(X)^N f = 0$  が成立することと云う。

例:  $X = e_i$  or  $f_i$  (§1),  $X = \sum_{\substack{i > 0 > j \\ \text{有限和}}} a_{ij} E_{ij}$ ,

$X = \sum_{i \in \mathbb{Z}} E_{i, i+\nu}$  ( $\nu > 0$ ),  $X = \sum_{i \in \mathbb{Z}} E_{2i+1, 2i}$  など。

( $X = \sum_{i \in \mathbb{Z}} E_{i+1, i}$  は locally nilpotent に反らぬ)

多項式  $\tau(x) \in \mathbb{C}[x]$  が有限個の locally nilpotent elements  $X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{gl}(\infty)$  を用いて

$$\tau(x) = e^{\rho_n(X_1)} \dots e^{\rho_n(X_k)} \cdot 1$$

と表わされるとき、 $\tau(x)$  を  $\tau$  函数 とよぶことにしよう (この定義は  $n$  に無関係)。

大雑把に言えば

$$\{\tau \text{ 函数} \} \cong GL(\infty) \cdot 1$$



であるが、1 の isotropy は  $\begin{array}{|c|c|} \hline \text{斜線} & \text{斜線} \\ \hline 0 & \text{斜線} \\ \hline \end{array}$  の形の元からなるので、結局

$$\{\tau\text{函数}\} \cong GL(\infty) / \begin{array}{|c|c|} \hline \text{斜線} & \text{斜線} \\ \hline 0 & \text{斜線} \\ \hline \end{array} \\ \cong (\text{無限次元}) \text{Grassmann 多様体}$$

となっている (佐藤先生の基本定理)。周知のように、有限次元の Grassmann 多様体は、Plücker の関係式により、射影空間の quadrics の交わりとして実現される。その類似をたどって、 $\tau$  函数全体の定義方程式を書き下すと、それが広田型双線型方程式に他ならないことを以下に示そう。

定理  $\tau(x) \in \mathbb{C}[[x]]$  が  $\tau$  函数であるための必要+分条件は、任意の  $x, x'$  に対し次の等式が成立することである：

$$\oint e^{\xi(x-x', k)} \tau(x - \epsilon(k^{-1})) \tau(x' + \epsilon(k^{-1})) dk = 0 \\ \epsilon(k^{-1}) := \left( \frac{1}{k}, \frac{1}{2k^2}, \frac{1}{3k^3}, \dots \right) \quad (4)$$

ここに、積分路は  $k = \infty$  の近傍の小円とする。

もう少し一般に, 異なる  $n$  ( $X_i \in \text{ojl}(\infty)$  は共通) に応じた  $\tau$  函数

$$\tau_n(x) = e^{P_n(X_1)} \dots e^{P_n(X_k)} \cdot 1 \quad (5)$$

$$\tau_{n'}(x) = e^{P_{n'}(X_1)} \dots e^{P_{n'}(X_k)} \cdot 1$$

の間, 次の式が成立つ:

$$\oint e^{\xi(x-x',k)} k^{n-n'} \tau_n(x-\epsilon(k^{-1})) \tau_{n'}(x'+\epsilon(k^{-1})) = 0$$

(4)<sub>n</sub>

$x, x', n, n'$  は任意

これらの bilinear identity (4), (4)<sub>n</sub> は, 無限個の 広田双線型微分方程式に言い換えられる。たとえば, (4) で  $x=x'$  とおくと,  $k^{-1}$  の係数を捨て直ちに

$$0 = -\frac{\partial \tau}{\partial x_1} \tau + \tau \frac{\partial \tau}{\partial x_1} = -D_1 \tau \cdot \tau$$

を得る。これ自身は trivial な式であるが, 確かに広田微分の形に書けている。一般に  $x-x'$  について展開すれば nontrivial な式が次々に得られ, 実際 4 次のところから KP 方程式

$$(D_1^4 + 3D_2^2 - 4D_1 D_3) \tau \cdot \tau = 0$$

が出てくる。(4) は KP ヒエラルヒーの生成方程式を与えているわけである。

また (4) は, Dynkin 図形の任意の 2 頂点  
 に対応して方程式のヒエラルヒ-があることを  
 示している。最も簡単な

$$(D_1^2 - D_2) \tau_{n+1} \cdot \tau_n = 0$$

と modified KP equation とよぶこともある。

註 KPヒエラルヒ-の場合, 次数  $n$  の一次  
 独立な広田方程式の個数は (上のような自明な  
 もの数えて)  $p(n-1) \equiv n-1$  の分割数, に  
 等しいことが知られている。

bilinear identity は, 双線型化のみならず  
 線型化とも含んでいることを示そう。いま,  
波動函数  $w, w^*$  を次式で導入する。

$$w(x, k) = e^{\xi(x, k)} \tau(x - \epsilon(k)) / \tau(x) \quad (6)$$

$$w^*(x, k) = e^{-\xi(x, k)} \tau(x + \epsilon(k)) / \tau(x).$$

このとき (4) は

$$\oint w(x, k) w^*(x', k) dk = 0 \quad (7).$$

と書き直せる。

定理.  $w, w^*$  を

$$w(x, k) = e^{\xi(x, k)} \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} w_j(x) k^{-j} \right)$$

$$w^*(x, k) = e^{-\xi(x, k)} \left( 1 + \sum_{j=1}^{\infty} w_j^*(x) k^{-j} \right)$$

の形の形式級数とし、任意の  $x, x'$  について (7) が成立つものと仮定する。このとき

(i) ある  $\tau(x)$  が定数倍を除き一意的に存在し、(6) の形の表示が成立つ、

(ii)  $\tau(x)$  は KP ヒエラルヒーの解、

(iii) 各  $\nu \geq 1$  に対して

$$B_\nu(x, \frac{\partial}{\partial x_1}) = \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^\nu + u_{\nu 2}(x) \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\nu-2} + \dots + u_{\nu \nu}(x)$$

の形の微分作用素が一意に定まり、線型方程式系

$$\frac{\partial w}{\partial x_\nu} = B_\nu w, \quad -\frac{\partial w^*}{\partial x_\nu} = B_\nu^* w^*$$

が成立つ。ここに  $B_\nu^*$  は  $B_\nu$  の形式共役

$$B_\nu^*(x, \frac{\partial}{\partial x}) = \left( -\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^\nu + \left( -\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\nu-2} u_{\nu 2}(x) + \dots + u_{\nu \nu}(x).$$

(iii) に言う  $B_\nu$  の決り方だけ説明しておこう。微分の実行によつて、 $\frac{\partial w}{\partial x_\nu}, \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^\nu w$  は共に  $(k^\nu + O(k^{\nu-2})) e^{\xi(x, k)}$  の形となるので

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_\nu} - \left( \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^\nu \right) w = O(k^{\nu-2}) e^{\xi(x, k)}$$

以下、順に係数を合わせて引算していくと、

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_0} - B_0(x, \frac{\partial}{\partial x_1})\right)w = O(k^{-1})e^{\xi(x, k)} \quad (8)$$

となる  $B_0$  がただ一つ定まる。ところが、いま (7) の両辺に  $\frac{\partial}{\partial x_0} - B_0$  を施して  $x=x'$  とおけば、(8) の右辺の  $k^{-1}$  の係数は実は 0 であることがわかる。同様に  $x_1$  で何回か微分したのちこの論法を繰り返していくことにより、結局  $(\frac{\partial}{\partial x_0} - B_0)w = 0$  が導かれる。

こうして、線型化・双線型化の2つの方法は、bilinear identity (7) に統一された。

少し例を述べる。

例 1. 一般に。

$\tau(x)$  が KP ヒエラルヒ-の齊次多項式解

$$\Leftrightarrow \tau(x) = \text{const. } \chi_\gamma(x) \quad \exists \gamma$$

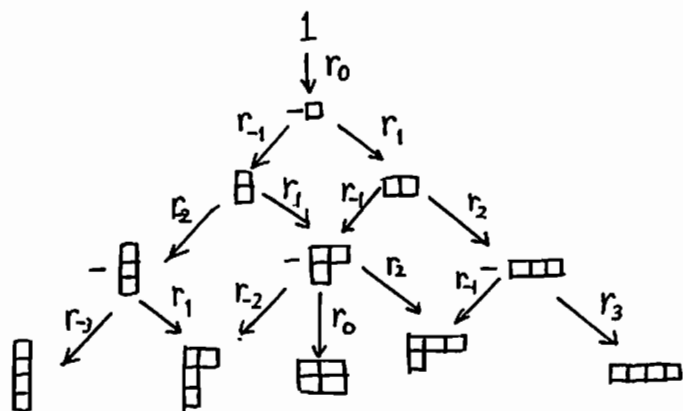
が知られている。定義に基づいて齊次解を作ってみよう。§1 の "Chevalley 基" を用い、

$$r_i := e^{\rho_0(e_i)} e^{-\rho_0(f_i)} e^{\rho_0(e_i)}, \quad i \in \mathbb{Z}$$

とおく。このとき、Vertex operator の作用の規則により、

$$r_i \left( \begin{array}{c} \square \\ \vdots \\ \square \\ \vdots \\ \square \end{array} \right) = - \begin{array}{c} \square \\ \vdots \\ \square \\ \vdots \\ \square \end{array}$$

が確かめられる。従って、 $r_i$ たちを繰り返して施すことによりあべこの Schur 多項式が生成される。



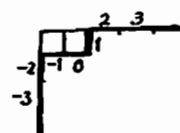
例2. 斉次解  $\tau(x) = x_2 + \frac{1}{2}x_1^2 = \chi_{\square}(x)$  に対する波動函数を作ってみよう。定義により

$$\begin{aligned} \tau(x)w(x, k) &= \left(x_2 - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2}\left(x_1 - \frac{1}{k}\right)^2\right) e^{x_1 k + x_2 k^2 + \dots} \\ &= \left(-\frac{1}{k}x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_1^2\right) (1 + p_1(x)k + p_2(x)k^2 + \dots) \\ &= -\chi_{\square}(x)k^{-1} + \chi_{\square}(x)k^0 + 0 \cdot k \\ &\quad + \chi_{\square}(x) \cdot k^2 + \dots + \chi_{\begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}}(x)k^j + \dots \end{aligned}$$

となる。これを見ると、 $k=0$ でのローラン展開係数が nonzero かどうかは、もとのヤング図形  $\square$  より簡単に判別できる：

$$\begin{array}{cccccccc} \dots & k^{-3} & k^{-2} & k^{-1} & k^0 & k^1 & k^2 & k^3 & \dots \\ \dots & X & X & O & O & X & O & O & \dots \end{array} \leftrightarrow$$

(X ... zero, O ... nonzero)



簡単な計算により,  $\tau w$  と  $\tau$  が modified KP equation

$$(D_1^2 - D_2)(\tau w) \cdot \tau = 0 \quad (9)$$

を満たすことが示される。左辺を  $\tau^2$  で割ると, 普通の微分の形に書き直せば, この式は

$$\frac{\partial w}{\partial x_2} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + 2 \frac{\partial^2 \log \tau}{\partial x_1^2} \right) w$$

すなわち 線型方程式 そのものに他ならない。(9) は任意の  $k$  に対して成立つから, とくに展開の各係数をとって

$$(D_1^2 - D_2) \chi_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{smallmatrix}}^j \cdot \chi_{\square} = 0 \quad (j \geq 2)$$

であることがわかる。実は逆に,  $\tau(x) = \chi_{\square}(x)$  と決めたとき,  $(D_1^2 - D_2)\tau \cdot \tau = 0$  の一般解  $\tau$  は,  $\tau w$  の展開係数  $\chi_{\square}, \chi_{\square}, \chi_{\begin{smallmatrix} \square \\ \square \end{smallmatrix}}$  の一次結合に限られる。(例2の諸事実は,  $\chi_{\square}$  に限らず一般の  $\tau(x) = \chi_{\gamma}(x)$  に対しても成立する)

### §3. Reduction

$\mathfrak{sl}(\infty)$  は種々の無限次元リー環を部分環にもつ "universal" なリー環である。Euclid型リー環は原理的にはすべて  $\mathfrak{sl}(\infty)$  の部分リー環であり、その埋め込み方も一通りではない。ここでは、自己同型の不変元として直ちに得られる型の Euclidリー環の構成を紹介したい。(ABCD型 Euclidリー環の実現とソリトン方程式の関係は [2] に述べられている)

整数  $l \geq 2$  を固定し、 $\mathfrak{sl}(\infty)$  の自己同型  $\sigma_l$  を次のように定める。

$$\sigma_l(E_{ij}) = E_{i+l, j+l} + \delta_{ij} \theta_l(i) \cdot z \quad (\text{p. 6 参照})$$

$$\sigma_l(z) = z.$$

記号  $\mathfrak{sl}(\infty)_l$  で不変元全体  $\{X \in \mathfrak{sl}(\infty) \mid \sigma_l(X) = X\}$  を表わす。 $\mathfrak{sl}(\infty)_l$  は、Heisenberg 部分環  $\mathcal{H}_l = \text{span of } (\{\Lambda_{\nu} \mid \nu \in \mathbb{Z}\} \cup \mathbb{C}z)$  (但し、 $\Lambda_{\nu} := \sum_{i \in \mathbb{Z}} E_{i+\nu, i}$ ) を含む。その中心化環が、Dynkin 図形を周期  $l$  で折畳んだリー環  $A_{l-1}^{(l)}$  に同型となる：



$$\{X \in \mathfrak{so}(\infty)_\ell \mid [X, H_\ell] = 0\} \cong A_{\ell-1}^{(1)} \quad \text{⦿}$$

Vertex 表現  $P_n$  を  $A_{\ell-1}^{(1)}$  に制限したものは ( $H_\ell$  を "捨てた" ことにより) 自然に  $\mathbb{C}[x_j; j \neq 0 \pmod{\ell}]$  上の表現とみなせる。Vertex operator の母函数形 (2) において  $p = \omega q$ ,  $\omega^\ell = 1$ , とおけば, 対応する Vertex operator が得られる。こうして得られた  $A_{\ell-1}^{(1)}$  の表現 (実は既約表現)

$$P_n \mid : A_{\ell-1}^{(1)} \rightarrow \mathfrak{so}(\mathbb{C}[x_j; j \neq 0 \pmod{\ell}])$$

は Lepowsky-Wilson, Kac-Kazhdan-Lepowsky-Wilson らの構成した基本表現に一致する。

以上のことと  $P_n \circ \sigma_\ell = P_{n+\ell}$  に注意すれば,  $A_{\ell-1}^{(1)}$  に対応する (i.e. (5) で  $X_i \in A_{\ell-1}^{(1)}$  とした)  $\tau$  函数は次の条件を満たすことがわかる。

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \tau_n(x) = 0 & (\nu \equiv 0 \pmod{\ell}) \\ \tau_{n+\ell}(x) = \tau_n(x) \end{cases} \quad (10)$$

KP 方程式のヒエラルヒーに, 条件 (10) を課して得られるものを  $\ell$ -reduced KP hierarchy とよぶ。

$\ell$ -reduced hierarchy の広田方程式を得るには, KP のそれぞれにおいて  $D_{\ell\nu}$  ( $\nu \in \mathbb{Z}$ ) を捨てればよい。たとえば:

$$\begin{array}{ccc}
 (D_1^4 + 3D_2^2 - 4D_1D_3)\tau\tau = 0 & \xrightarrow{\ell=2} & (D_1^4 - 4D_1D_3)\tau\tau = 0 \\
 \text{(KP)} & & \text{(KdV)} \\
 & \searrow \ell=3 & \\
 & & (D_1^4 + 3D_2^2)\tau\tau = 0 \\
 & & \text{(Boussinesq)}
 \end{array}$$

$A_{\ell-1}^{(1)}$  の Dynkin 図形の対称性から、これを更に折畳んで異なる型の Euclid リー環が得られる。

$\sigma_{\ell}(\infty)$  の自己同型  $\sigma_B, \sigma_C$  をそれぞれ

$$\sigma_B(E_{ij}) = (-)^{i+j+1} E_{-j, -i} + \delta_{i0}\delta_{j0}z, \quad \sigma_B(z) = z$$

$$\sigma_C(E_{ij}) = (-)^{i+j} E_{-j, -i-1}, \quad \sigma_C(z) = z$$

で定める。これらは involution であり、その不変元全体はそれぞれ無限次元直交 (or Symplectic) リー環と呼ぶべきものになる。

$$\sigma_{\ell}(\infty)^{\sigma_B} \cong \mathfrak{o}(\infty)$$

$$\sigma_{\ell}(\infty)^{\sigma_C} \cong \mathfrak{sp}(\infty)$$

対応して、 $\tau$  函数には対称性

$$\begin{cases}
 \sigma_B : \tau_{-n-1}(x_1, x_2, \dots) = \tau_n(x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots) \\
 \sigma_C : \tau_{-n}(x_1, x_2, \dots) = \tau_n(x_1, -x_2, x_3, -x_4, \dots)
 \end{cases} \quad (11)$$

が課される。 $\mathfrak{o}(\infty)$  又は  $\mathfrak{sp}(\infty)$  に更に  $\sigma_{\ell}$  の不変性をおけば、次の三種のリー環が生じる。

$$\begin{aligned}
 O(\infty)_{2l+2} &\cong D_{l+1}^{(2)} & \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} &\supset & \begin{array}{c} \leftarrow \circ \text{---} \rightarrow \\ \leftarrow \circ \text{---} \rightarrow \end{array} \\
 \hat{f}_p(\infty)_{2l} &\cong C_l^{(1)} & \begin{array}{c} \circ \text{---} \circ \\ | \quad | \\ \circ \text{---} \circ \end{array} &\supset & \begin{array}{c} \leftarrow \circ \text{---} \rightarrow \\ \leftarrow \circ \text{---} \rightarrow \end{array} \\
 O(\infty)_{2l+1} &\cong \hat{f}_p(\infty)_{2l+1} \cong A_{2l}^{(2)} & \begin{array}{c} \text{---} \circ \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \circ \text{---} \end{array} &\supset & \begin{array}{c} \leftarrow \circ \text{---} \rightarrow \\ \leftarrow \circ \text{---} \rightarrow \end{array}
 \end{aligned}$$

(正確には,  $A_{l-1}^{(1)}$  の時同様, Heisenberg を除去する)

KP ヒエラルヒーに (11) を課したものと BKP, CKP ヒエラルヒーとよぶ。これらの  $l$ -reduction の Vertex 表現  $p_n$  も, 多項式環  $\mathbb{C}[x_j; j \neq 0 \pmod{l}]$  上に実現されるが, 一般に既約表現とは分らない。しかし,  $n$  を変えることにより, 1 を含む既約成分として  $D_{l+1}^{(2)}, C_l^{(1)}, A_{2l}^{(2)}$  のすべての fundamental representation が得られることに注意しておく。(  $D_{l+1}^{(2)}, A_{2l}^{(2)}$  の端点に対応した basic representation は例外で, スピン表現的構成を要する。 [2] 参照 )

例 3. (3-reduced CKP hierarchy)

$$u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 \log \tau_0 \Big|_{x_2=x_4=\dots=0}$$

$$v = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^2 \log \tau_1 \Big|_{x_2=x_4=\dots=0}$$

とにおいて方程式を書き下してみると, 次のようになる ( $x=x_1, t=x_5$ ).

$$\triangleleft \supset \begin{matrix} u \\ \rightleftharpoons \\ v \end{matrix}$$

$$9 u_t + (u_{xxxx} + \frac{45}{4} u_x^2 + 15 u u_x + 15 u^3)_x = 0$$

(Kaup)

$$9 v_t + (v_{xxxx} + 15 v v_x + 15 v^3)_x = 0$$

(沢田-小寺)

これらは, Lax の 5 次 KdV 方程式 (2-reduced KP hierarchy) の親戚として知られて来た。

更に

$$\mu = \frac{\partial}{\partial x_1} \log \frac{\tau_1}{\tau_0} \Big|_{x_2=x_4=\dots=0}$$

とおくと

$$u = -\frac{1}{3}(\mu^2 + 2\mu_x), \quad v = -\frac{1}{3}(\mu^2 - \mu_x)$$

$$9 \mu_t + (\mu_{xxxx} - 5\mu_x \mu_{xx} - 5\mu^2 \mu_{xx} - 5\mu \mu_x^2 + \mu^3)_x = 0$$

が成立つ。

最後に, bilinear identity についての注意を述べておく。有限次元半単純複素リ-環  $\mathfrak{g}$  の, highest weight  $\lambda$  をもつ表現に対して, その highest weight vector  $v_\lambda$  の  $G$ -orbit ( $G = \mathfrak{g}$  に対応する連結リ-群) の定義方程式は次のように explicit に与えられることが知られ

Z113 (W. Lichtenstein, Proc. Amer. Math. Soc. 84  
 (1982)605):

$$v \in Gv_\lambda \Leftrightarrow \Omega(v \otimes v) = (k\lambda + \rho^2 - l\rho^2)(v \otimes v) \quad (12)$$

ここに

$$\Omega = 2H_\rho + \sum_{i=1}^l H_i^2 + 2 \sum_{\alpha \in \Delta_+} X_{-\alpha} X_\alpha$$

$$H_i, H_\rho \in \mathfrak{g}, (H_i, H_j) = \delta_{ij}, (X_\alpha, X_{-\alpha}) = 1$$

は Casimir 作用素,  $2\rho = \sum_{\alpha \in \Delta_+} \alpha$ ,  $(,)$  は Weyl 群  
 不変の内積。これらの概念は Euclid リンゴでも  
 意味をもつ。上の式を

$$\sum X v \otimes X^* v = |\Lambda|^2 v \otimes v$$

$X$ :  $\mathfrak{g}$  の基底  
 $X^*$ : dual basis

と書いておいて、左辺を Vertex operator を用いて  
 具体的に書き下せば、広田方程式の一つの母函数  
 が得られる。例えば  $\mathfrak{g} = A_1^{(1)}$  のとき

$$0 = \oint e^{4\xi(y,k)} \tau(x+y-2\tilde{E}(k^1)) \tau(x-y+2\tilde{E}(k^1)) \frac{dk}{2\pi i k}$$

$$- 8 \sum_{\substack{\nu > 0 \\ \text{odd}}} \nu y_\nu D_\nu e^{\langle y, D \rangle} \tau \cdot \tau - e^{\langle y, D \rangle} \tau \cdot \tau, \quad \forall y$$

$$(\xi(y, k) = \sum_{j \text{ odd} > 0} y_j k^j, \quad \tilde{E}(k^1) = (k^1, \frac{1}{3}k^3, \frac{1}{5}k^5, \dots))$$

これは見掛け上 (4) + (10) と少し異なる  
 が、ここから KdV 方程式が得られる。もとの  
 bilinear identity は, Clifford algebra (II 参照)

のレベルで Casimir 作用素にあたるものを用い  
(12) を書いた形になっている。

### 参考文献

日本語の解説としては

[1] 柏原正樹・神保道夫・伊達悦朗・三輪哲二,  
ソリトン方程式と Kac-Moody リー環, 数学 34 巻 1 号  
(1982) 1-16.

特に Euclid リー環とソリトン方程式の関係に  
ついては

[2] E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara and T. Miwa,  
Transformation groups for soliton equations,  
to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ. (1983).

Euclid リー環の Vertex 表現の構成は, 次の  
文献でなされている。

[3] J. Lepowsky and R. Wilson, Construction of  
the Affine Lie Algebra  $A_1^{(1)}$ , Commun. Math. Phys.  
62 (1978) 43-53.

V.G. Kac, D.A. Kazhdan, J. Lepowsky and  
R.L. Wilson, Realization of the Basic

Representations of the Euclidean Lie Algebras,  
Advances in Math. 42 (1981) 83-112.

§1 に述べた Vertex operator の作用の規則  
は

[4] M. Jimbo and T. Miwa, Soliton equations  
and fundamental representations of  $A_{2l}^{(2)}$ ,  
Lett. Math. Phys. 6 (1982) 463-469

から引用した。

佐藤理論については、今の所

[5] M. Sato, Soliton equations as dynamical  
systems on a infinite dimensional Grassmann  
manifolds, 数理研講究録 439 (1981) 30-46

が唯一の文献である。その他に東大等各地  
での集中講義の記録を参照された。

# Braver trees

阪市大理 奥山哲郎

## §0. 序

有限群のモジュラー表現における *cyclic defect groups* をもつ *blocks* の理論は, Brauer [2] の *defect 1* の *blocks* の研究をはじめにもつ。この Brauer の研究のほとんどの内容は, 20 数年の後に Dade [3] によって, 一般の *cyclic defect groups* の場合に拡張されたが, Dade の考察においては, "Green の対応の理論", "Thompson の idea" が重要な働きをしている。Brauer-Dade の *cyclic defect groups* をもつ *blocks* の理論は, 驚くほど多くの内容をもたらす, かつ大変美しい形で記述されるものである。この理論によって, 通常 (標数  $0$  の) 既約指標と, モジュラー (標数  $p$  の) 既約指標との関係を図示する "Braver tree" が考えられるが, この "Braver tree" は その後の様々な人々による研究とかがかかって, 興味深い話題を提供してくれる。

Dade の研究の後, Janusz [10] は Braver tree に関する情報から, *block* の多元環としての構造, 及び直既約加群の構造が記述できることを示した。これについては, Kupisch [11] による Janusz と独立の同様の研究がある。



Feit による "Green 対称" の systematic な考察を更に発展させることにより、Green [8] は "Brauer tree" と関連する興味深い事実を発見した。Green は block に属する simple modules の間のある置換が block の構造と深く関わっている事 ("Brauer tree" がこの置換から記述できること、この置換から、ある種の加群の projective resolution が tree に沿う "walk" として構成できることなど) を導いた。また、Peacock [13] は Green のこの考察を更に精密に行うことにより、この置換と projective indecomposables の構造 (組成列など) との関係と調べた。

cyclic defect groups をもつ blocks は、有限型多元環となっている。上述の Green の考察、及びその後の Michler [12] などの研究の後、この blocks が "symmetric Nakayama algebra" と "stable equivalent" である事実に注目(?)して、Gabriel-Riedtmann [7] は、その様な多元環の特徴付けを行っている。上述の Green, Janusz, Kupisch らの仕事の内容は、Gabriel-Riedtmann の考察により、一層鮮明なものとなったと思われる。

本講演は、Green の上述の仕事 ("Walking around the Brauer tree") を紹介する目的で行う。

## §1. 準備

1° blocks. その他

$G$ : 有限群,  $p$ : 素数,  $R$ : 標数  $p$  の完備な離散付値環  
 $k = R/\mathfrak{m} = \bar{R}$ ;  $R$  の極大 ideal  $\mathfrak{m}$  による剰余体.  $\text{char } k = p$ ,  
 $K$ :  $R$  の商体, 簡単のため  $K \rightarrow \bar{K}$  としておく.

定義 (1.1) decomposition numbers

$\{\chi_s\}$  を  $G$  の ined.  $K$ -characters の全体,  $\{W_i\}$  を  $G$  の projective indecomposable  $RG$ -modules の全体,  $W_i$  の指標を  $\eta_i$  で表す. (このとき  $\{V_i = W_i/\text{Rad } W_i\}$  は simple  $kG$ -modules の全体である.  $V_i$  の Brauer 指標を  $\varphi_i$  とする.)

$\eta_i = \sum_s d_{si} \chi_s$  と表すときの  $\{d_{si}\}$  を decomposition numbers と呼ぶ. 群環が対称多元環であることにより,

$$\chi_s = \sum_i d_{si} \varphi_i \quad \text{となる.}$$

例 (1.2)  $O_5$  (5 次の交代群) の decomposition numbers

$p=2$

	1	2	2'	4
1	1	0	0	0
3	1	1	0	0
3'	1	0	1	0
5	1	1	1	0
4	0	0	0	1

$p=5$

	1	3	5
1	1	0	0
4	1	1	0
3	0	1	0
3'	0	1	0
5	0	0	1

(ただし、表中、たての左は  $i$  に  $\text{inv} K$ -characters (次数で表示)  
横の上段に  $\text{inv} kG$ -modules (次数で表示) をおいている)

### 定義 (1.3) blocks

$RG = \bigoplus \sum RGe$  ( $e$  は centrally primitive idempotents の  
全体を動く) と、多元環として、これ以上分解できない直和分解を  
考えるときの各成分  $RGe$  を  $G$  の ( $p$ -) block と呼ぶ。上の  
分解を mod  $p$  で考え

$kG = \bigoplus \sum kG\bar{e}$  ( $\bar{e}$  は  $e$  の  $R/pR = k$  での image) も  
 $kG$  の多元環として、これ以上分解できない直和分解となる。混乱の  
ないときは、 $RGe$  及び  $kG\bar{e}$  をともに  $G$  の block と呼ぶことに  
する。

既約  $RG$ -加群  $X$  ( $kG$ -加群) に対して、 $\exists ! e \sqrt{\frac{\bar{e}}{e}}$   
 $Xe = X$  ( $X\bar{e} = X$ ) とするものがある。これを  $X \in RGe$   
( $X \in kG\bar{e}$ ) と書く。  $kG, R_G$  の既約 block を  $G$  の  
principal block と呼ぶ  $B_0(G)$  と書くことにする。

### 注意 (1.4)

(1) 既約指標  $\chi_i$  と  $\chi_j$  が同じ block に属する  $\Leftrightarrow$

$$\exists \chi_{a_1}, \dots, \chi_{a_k}, \text{ s.t. } \chi_{a_1} = \chi_i, \chi_{a_k} = \chi_j$$

$\chi_{A_2}$  と  $\chi_{A_{2+1}}$  は共通の既約 Brauer 指標をもつ。

(2) 例 (1.2) では、点線で囲んだところが blocks に入っている。

### 定義 (1.5) defect groups of blocks

正確な定義は Feit [5], あるいは Dornhoff [4] にゆかり。

ここでは、defect groups のもつ次の重要な性質をのべるだけにある。

### 補題 (1.6)

$B = RGe$  ( $\bar{B} = kG\bar{e}$ ) を block,  $D$  をその defect group とする。

(i)  $X \in B$  ( $X \in \bar{B}$ )  $\Rightarrow$   $X$  は  $X_D^G$  の直和因子と同型

(ii)  $D$  は上をみたすような  $G$  の最小の部分群。

$p$ -Sylow 群は (i) の条件をみたすので、特に defect groups は  $p$ -群であり、また、principal block の defect group は  $p$ -Sylow 群である。

注意 (1.7)  $\bar{B}$  : 有限型  $\Leftrightarrow D$  : cyclic

(1.6)(i) の性質により defect group  $D$  は block  $B$  の構造と“相当”に規制されることであるが、特に  $N_G(D)$  の“ある block”が  $B$  を規制する。  $D$  が cyclic の場合、 $N_G(D)$  の block と  $B$  の

間に著しい類似性がみられる。これは Brauer-Dade の理論である。

## 2° Green の対応

Dade, Green の考察で重要は働きをする Green の対応についてふれておく。ここでは  $kG$ -modules のみを考えることにする。

補題 (7.8) indecomposable  $kG$ -module  $X$  に対し、次の性質をもつ部分群  $D$  が (共役を除いて一意に) 存在する。

- (i)  $X$  は  $X_D^G$  の直和因子に同型
- (ii)  $D$  は上をみたす最小の部分群

定義 (7.9) 上の  $D \in X$  の vertex と呼び、 $v_X X = D$  と書く。

注意 (7.10)  $kG$  の vertex は  $p$ -Sylow 群

$$U \text{ ; projective } \Leftrightarrow v_U U = 1$$

定義 (7.11)  $X, Y$   $kG$ -modules

$$(X, Y)_0^G = \text{Hom}_{kG}(X, Y) / \{ \alpha \in \text{Hom}_{kG}(X, Y) ; X \xrightarrow[\alpha]{\text{projective } U} Y \}$$

定理 (1.12) Green の対応

$p$ -Sylow 群  $P$  : cyclic と仮定,  $P \supset P_2, |P_1| = p,$

$H = N_G(P_1)$  とおく. このとき.

(i)  $X$  : non-proj indecomp.  $\xrightarrow{kG\text{-mod.}}$   $X_H = fX \oplus \text{projective}$

$fX$  : indecomp.  $v_x X = v_x fX$

(ii)  $Y$  : non-proj. indecomp.  $kH\text{-mod.} \Rightarrow Y^G = gY \oplus \text{projective}$

$gY$  : indecomp.  $v_x Y = v_x gY$

(iii)  $gfX = X, f gY = Y$

(iv)  $(X, S)_0^G \simeq (fX, fS)_0^H, (Y, T)_0^H \simeq (gY, gT)_0^G$

(v)  $f \Omega X = \Omega fX, g \Omega Y = \Omega gY$

(こゝで  $\Omega$  は Heller の functor. 可換性.  $f$  と  $g$  は

$0 \rightarrow \Omega X \rightarrow U \rightarrow X \rightarrow 0, U$  は  $X$  の proj. cover )

注意 (1.13)

(i) この定理は  $kG$  と  $kH$  間 (係数環の制限, 及び拡大) において "stable equivalent" であることを示している。

(ii)  $f, g$  は blocks の関係も (ある意味で) 保つ。たとえは

$X \in B_0(G) \Leftrightarrow fX \in B_0(H)$

$Y \in B_0(H) \Leftrightarrow gY \in B_0(G)$

以下. Brauer-Dade の理論. Green の仕事の紹介にはいるが.  
 記述の繁雑さを避けるため. principal block のみを対象とする。

## §2. Brauer-Dade の定理

$P$  :  $p$ -Sylow 群. cyclic  $N = N_G(P)$

$e = |N_G(P) : C_G(P)|$ ,  $\alpha = \frac{1}{|O_{p'}(N)|} \sum_{\chi \in O_{p'}(N)} \chi$  ( $O_{p'}(N)$  は

$N$  の最大の  $p'$ -正規部分群)

$B_0(N) \cong RN\alpha \cong R N / O_{p'}(N)$  である。

$\Delta$  は  $P$  の <sup>1対1</sup> ined  $K$ -characters の  $N$ -conjugacy classes の  
 代表系とする ( $|\Delta| = |P|^{-1}/e$  である)

補題 (2.1)  $B_0(N)$  は次の構造をもつ。

(i) ined.  $K$ -characters は  $e + \frac{|P|-1}{e} \varepsilon = (\tilde{\chi}_1, \dots, \tilde{\chi}_e ;$   
 $N / C_G(P)$  の  $e \varepsilon$  a linear characters と,  $\tilde{\chi}_\lambda = \lambda^N := \tau$

$\lambda \in \Delta$ ,  $\lambda$  は  $P \cong C_G(P) / O_{p'}(N)$  より.  $C_G(P)$  の指標とみる)

(ii)  $e \varepsilon$  の projective indecomposables  $\tilde{W}_i$  ( $i=1, \dots, e-1$ )

その指標を  $\tilde{\eta}_i$  (対応する simple  $kN$ -module  $\tilde{V}_i$  の Brauer  
 指標を  $\tilde{\varphi}_i$ ) とする。

(iii) decomposition numbers は. 次の様に表示する。

	$\tilde{\varphi}_0$	.....	$\tilde{\varphi}_{e-1}$
$\tilde{\chi}_1$	1		0
.....			
$\tilde{\chi}_e$	0		1
$\tilde{\chi}_\lambda$	1	.....	1
.....	.....		.....
$\lambda \in \Lambda$	1	.....	1

定理 (2.2) Brauer-Dade の定理

$B_0(G)$  は 次の構造をもつ。

(i)  $e + |P|^{-1}/e = a$  個の ined.  $K$ -characters をもつ。  $(\chi_1, \dots, \chi_e, \chi_\lambda, \lambda \in \Lambda)$   $\chi_\lambda$  は  $p$ -regular elements で 同じ値をもつ。つまり, decomposition numbers は  $\lambda$  による一定である。

( $|\Lambda| > 1$  のとき,  $\chi_\lambda$  を exceptional characters と呼ぶ)

(ii)  $e = a$  個の projective indecomposable  $RG$ -modules  $W_i$  をもつ。 (その指標を  $\eta_i$ , 対応する simple  $kG$ -modules  $V_i = W_i / \text{rad} W_i$  の Brauer 指標を  $\varphi_i$  とする)

(iii)  $\chi_{e+1} = \sum_{\lambda \in \Lambda} \chi_\lambda$  とおくと decomposition numbers  $k$  により次が成立する。

各  $i \in \{0, 1, \dots, e-1\}$  について  $\exists i(1), i(2) \in \{1, \dots, e+1\}$

s.t.  $\eta_i = \chi_{i(1)} + \chi_{i(2)}$



(iii) の主張は. decomposition numbers は 1 か 0 であること. 及び,

$\chi_\lambda$  をひとまとめにして考えるとき. 表

$\chi_1$	$\varphi_0$	$\dots$	$\varphi_{e-1}$	1 か 0
$\vdots$	0			
$\chi_e$	1	0	$\vdots$	
$\vdots$	$\vdots$			
$\chi_\lambda$	0	1	$\vdots$	
	$\vdots$			

にて注目してみると. 1 か 丁度 2 回

あらわされることをいっている. その事実も  $B_0(N)$  についても成立する  
いる.

### 定義 (2.3) Brauer trees

次のグラフを考える.  $\Gamma_v = \{\chi_1, \dots, \chi_{e+1}\}$  は vertices

$\Gamma_e = \{\eta_0, \dots, \eta_{e-1}\}$  は edges

$\eta_i$  is incident with  $\chi_j \Leftrightarrow \chi_j \in \{\chi_{i(1)}, \chi_{i(2)}\}$

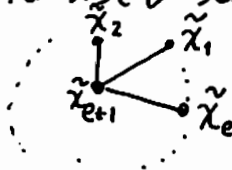
( $i(1), i(2)$ ) は (2.2)(iii) で決まるもの)

これを  $B_0(G)$  の Brauer tree と呼ぶ。

### 注意 (2.4)

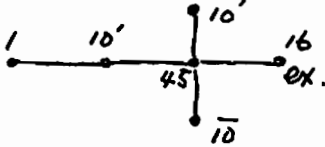
(i) 注意 (2.4) により. 上のグラフは連結である. また vertices と edges の (回数) から. それは必然的に tree となっている。

(ii)  $B_0(N)$  の tree は いずれも "star" である. つまり.

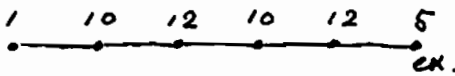


例 (2.5) Brauer trees の例

(1)  $M_{11}$  (Mathieu 群, 11 次の)  $p=11, e=5$

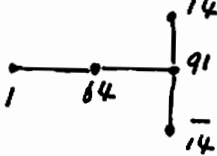


(2)  $PSL(2, 11)$   $p=11, e=5$

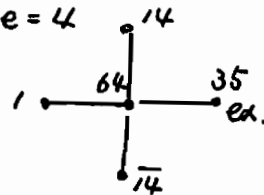


(3)  $S_3(8)$

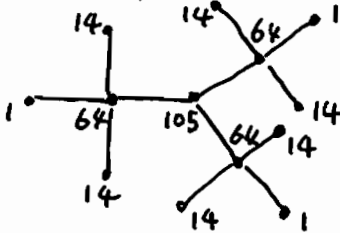
$p=5, e=4$



$p=13, e=4$



(4)  $Aut S_3(8)$   $p=13, e=12$



(vertices 上の数字は、既約指標の次数を示す。また、ex. とあるのは、exceptional characters あり vertex を示す)

最後の節において、もう少し広い範囲の群についての Brauer trees の例をあげることにする。

### §3. Greenの定理

#### 1° Greenの定理

#### 定理(3.1) Greenの定理

定理(2.2)の仮定, 記号のもとで,

(i)  $\exists$  numbering of  $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{e-1}$ ,  $\exists \delta$ : permutation on  $I = \{0, 1, \dots, e-1\}$ . s.t.

$\exists A_n \ n \in \mathbb{Z}$  RG-lattices

$$\mathbb{E}_{2i} \ ; \ 0 \rightarrow A_{2i+1} \rightarrow W_{\delta(i)} \rightarrow A_{2i} \rightarrow 0$$

$$\mathbb{E}_{2i+1} \ ; \ 0 \rightarrow A_{2i+2} \rightarrow W_i \rightarrow A_{2i+1} \rightarrow 0$$

$\vdots$

(i made, i.e.  $W_n \simeq W_{n+e}$ ,  $A_n \simeq A_{n+2e}$ )

(ii)  $A_0, \dots, A_{2e-1}$  は  $\mathbb{Z}$ -非可換,  $\mathbb{E}_n \ (n \geq 0)$  は  $A_0$  の projective resolution の形である。(  $A_0 = R_G$  とする )

$$\dots \rightarrow W_0 \rightarrow W_{\delta(e-1)} \rightarrow W_{e-1} \rightarrow \dots \rightarrow W_{\delta(1)} \rightarrow W_1 \rightarrow W_{\delta(0)} \rightarrow A_0 \rightarrow 0$$

(iii)  $A_n$  の character  $\alpha_n$  は  $\alpha_n \in \Gamma_v$  ((2.3) の記号)

#### 注意(3.2)

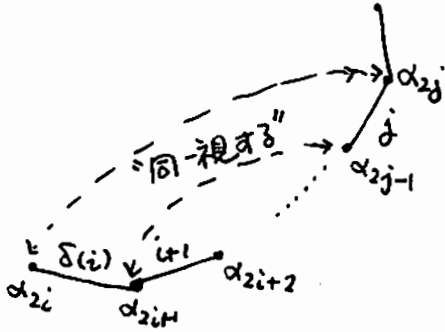
(i) (3.1)(ii) は Alperin-Janusz [1] の結果の拡張.

(ii) ( $\delta$  と Brauer tree の関係.)

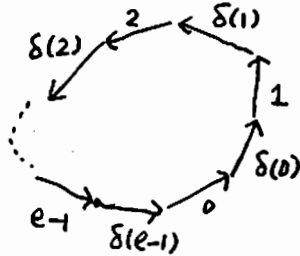
$$(3.1) \text{ (i), (ii) より. } \eta_{\delta(i)} = \alpha_{2i} + \alpha_{2i+1}, \quad \eta_{i+1} = \alpha_{2i+1} + \alpha_{2i+2}$$

から.  $\alpha_i \in \Gamma_v$  とあるから.

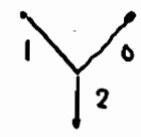
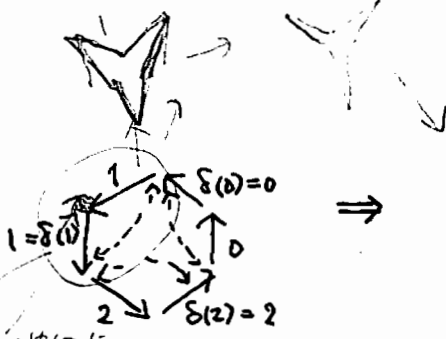
$\begin{array}{c} \gamma_{(i)} \quad \gamma_{(i+1)} \\ \alpha_{2i} \quad \alpha_{2i+1} \quad \alpha_{2i+2} \end{array}$  は Brauer tree の一部である。一方  $\delta$  は permutation であるから、 $\delta(i) = j$  と仮定しているとき



ことにより Brauer tree が得られるはずである。(この同視を単純に考察して、 $\alpha_{2k}$  と  $\alpha_{2l}$  の同視は偶数の添字は偶数へ、奇数の添字は奇数へいかねばならない)。つまり、次の cycle を考えるとき

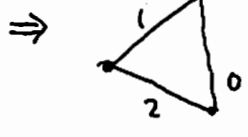
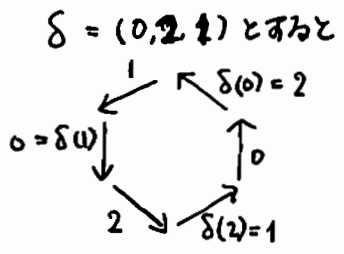


"identifying each pair of edges which carry the same label in such a way that two orientations cancel each other out" することにより Brauer tree が得られる。この操作は、置換  $\delta_0$  と之をいふと、実行できる操作であるが  $\delta$  を勝手と之をいふと、tree に限るとは限らない。たとえ  $I = \{0, 1, 2\}$ ,  $\delta = \text{identity}$  とすると、



と tree には行かない。

このようにして、 $\delta = (0, 2, 1)$  とすると



と tree には行かない。

(iii) (Brauer tree と projective resolution)

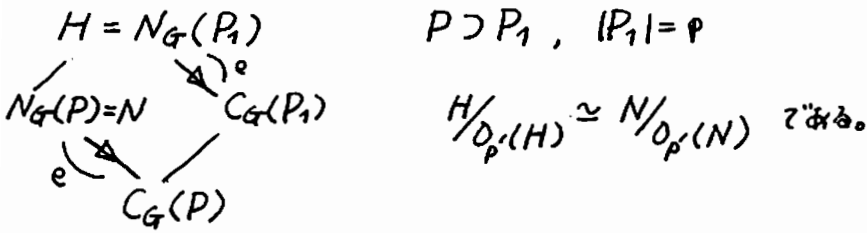
(3.1)(ii) の projective resolution は Brauer tree には  $\delta$  と  $\tau$  "walk" に行っている。前に見たように、 $\alpha_{2i} \xrightarrow{\eta_{\delta(i)}} \alpha_{2i+1} \xrightarrow{\eta_{\tau(i)}} \alpha_{2i+2}$  は

Brauer tree の  $e$  番目に  $\tau$  に行っているから、 $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2e-1}, \alpha_0$  は "incircular walk" around the Brauer tree, accomplished in  $2e$  steps  $\alpha_n \rightarrow \alpha_{n+1}$  so that the  $e$  edges of the tree are each traversed exactly twice in the order " $\eta_{\delta(0)}, \eta_1, \eta_{\delta(1)}, \dots, \eta_{e-1}, \eta_{\delta(e-1)}, \eta_0$ ".

every vertex must be reached at least once during the walk.

注意(ii), (iii) については、後に例をあげてみることにする。

2° Permutation  $\delta$



特に  $\overline{B_0(H)} \cong \overline{B_0(N)}$ .

これは symmetric Nakayama algebras (every indecomposables は unique composition series をもつ) である。

これらの構造について のべておく。

$P_1 = \langle x \rangle$  とし,  $H$  の指標  $\psi \in (\psi: H \rightarrow k^*)$  による。  $\psi(x) = \zeta = \zeta^{-1} x \zeta = x^{n(x)}$ .

$S_i \in \psi^i$  のための  $kH$ -module とする。  $S_0 = kH$ ,

$S_i \cong S_{i+e}$  である。

補題(3.3)

(i)  $\{S_i; i=0, 1, \dots, e-1\}$  は simple  $kH$ -modules of  $B_0(H)$  の全体である。

(ii)  $T_i \in S_i$  の projective cover とすると, その組成列は

$$T_i \supset \underbrace{T_i J(B_0(H))}_{S_i} \supset \dots \supset \underbrace{T_i J(B_0(H))^{(p-1)}}_{S_{i+p-1}} \supset 0$$

$S_{i+p-1} = S_i$

すなわち, 特に  $\Omega^2 S_i = S_{i+1}$  。

定理(3.4)  $V_i, i \in I$  は simple  $kG$ -modules of  $B_0(G)$   
 $W_i$  は projective indecomposable  $RG$ -module.  $W_i/\text{Rad}W_i = V_i$   
 とする。  $\therefore a \geq |I| = e^2$ .

(i)  $\exists$  numbering s.t.

$$\begin{aligned} (fV_j, S_i)_H &\cong (V_j, gS_i)_G \cong k & (i=j) \\ &\cong 0 & (i \neq j) \end{aligned}$$

(ii)  $\exists \delta$ : permutation on  $I = \{0, 1, \dots, e-1\}$  s.t.

$$\begin{aligned} (S_i, fV_j)_H &\cong (gS_i, V_j)_G \cong k & (\delta(i)=j) \\ &\cong 0 & (\delta(i) \neq j) \end{aligned}$$

(iii)  $\exists \mathbb{F}_2$ :  $0 \rightarrow \Omega gS_i \rightarrow \overline{W}_{\delta(i)} \rightarrow gS_i \rightarrow 0$

$$\mathbb{F}_{2i+1}: 0 \rightarrow gS_{i+1} \rightarrow \overline{W}_{i+1} \rightarrow \Omega gS_i \rightarrow 0$$

( $(X, Y)_G = \text{Hom}_{kG}(X, Y)$ ,  $(X, Y)_H = \text{Hom}_{kH}(X, Y)$  とおく)

$f, g$  は 定理(1.12)の Greenの対応を表す。

この定理の証明は 定理(1.12)の Greenの対応, 補題(3.3)を用いて行われる。 (i), (ii)の事実を  $gS_i$  は simple socle simple headをもつことを示し, <sup>(i)の</sup> numbering は  $gS_i$  の simple socle を  $V_i$  とし, simple head を  $V_{\delta(i)}$  とおくことにより 置換  $\delta$  を決めることになっている。

Greenの定理(3.1)は 上の定理(3.4)より容易に

導かれる。  $F_n$  が、  $E_n$  に "lift" されることを導けば、ほとんど  
証明が完了することになる。詳細はほかに。

### 3° Peacock の定理

SO. 序にのりて Peacock の定理について、簡単にふりかえりおく。

$I$  上の置換  $P$  を次の様に定める。

$$P(i) = \delta^{-1}(i) + 1 \pmod{e}$$

Walking on a proj. unccorp  
along axis  $\delta$   $\delta^{-1}$  (2)  $\delta$   
forming

定理 (3.5) Peacock の定理

$W_i$  (Green の定理の記号で) は次の構造をもつ。

$$\text{Rad } W_i / \text{Soc } W_i = X_i \oplus Y_i \quad X_i, Y_i \text{ は } D \text{ または}$$

uniserial  $kG$ -modules である。その組成列は

$$X_i \supset \underbrace{X_i J(kG)}_{V_{P(i)}} \supset \dots \supset \underbrace{X_i J^2(kG)}_{V_{P^2(i)}} \supset \dots$$

$$Y_i \supset \underbrace{Y_i J(kG)}_{V_{\delta(i)}} \supset \dots \supset \underbrace{Y_i J^2(kG)}_{V_{\delta^2(i)}} \supset \dots \quad \text{とあり。}$$

$X_i$  と  $Y_i$  には共通の組成因子は存在しない。

### 4° 例.

上述の各定理の内容を、倒さとしてみる。  $M_{11}$  は  
ついでに、以下の様になる。



$$M_{11} \quad p=11, \quad e=5$$

$M_{11}$  は 次数  $1, 9, 10, \overline{10}, 16$  の simple  $kG$ -modules of  $B_0(G)$  をもつ。補題 (3.3) のように  $H$  の simples を  $S_0, S_1, \dots, S_4$

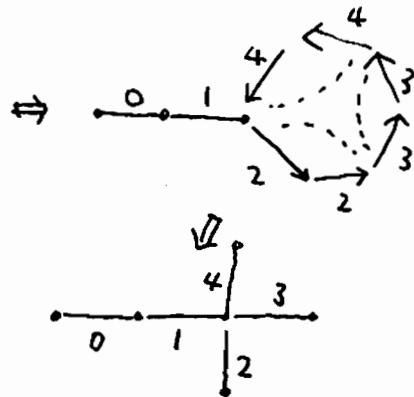
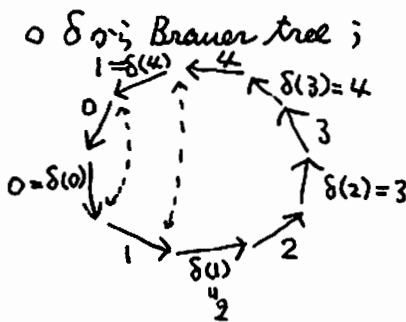
$$\text{とすると, } fS_0 = 1, \quad fS_1 = \begin{matrix} 10 \\ 16 \\ 9 \end{matrix}, \quad fS_2 = \begin{matrix} 16 \\ 10 \\ 9 \end{matrix}, \quad fS_3 = \begin{matrix} \overline{10} \\ 9 \\ 10 \\ 16 \end{matrix}$$

$$fS_4 = \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 16 \\ \overline{10} \end{matrix} \quad \text{と } fS_i \text{ である。 (数字の順で組数列をあらわすといえる) simple } kG\text{-modules of } B_0(G) \text{ の次数}$$

を添字とす。  $F_1, F_9, F_{10}, F_{\overline{10}}, F_{16}$  と表し、その projective cover を  $P_1, P_9, P_{10}, P_{\overline{10}}, P_{16}$  とする。

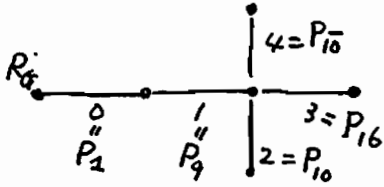
○ numbering ;  $0 = F_1, \quad 1 = F_9, \quad 2 = F_{10}, \quad 3 = F_{16}$   
 $4 = F_{\overline{10}} \quad ((3.4) \text{ (i) をみよ})$

○ permutation  $\delta$  ;  $0 \rightarrow 0, \quad 1 \rightarrow 2, \quad 2 \rightarrow 3, \quad 3 \rightarrow 4, \quad 4 \rightarrow 1$   
 ((3.4) (ii) をみよ)



(注意、(3.2) (i) をみよ)

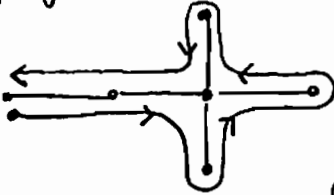
○  $R_G$  の projective resolution ;



$$\dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_9 \rightarrow P_{10} \rightarrow P_{10} \rightarrow P_{16} \rightarrow P_{16} \rightarrow P_{10} \rightarrow P_{10} \rightarrow P_9 \rightarrow P_1 \rightarrow R_G \rightarrow 0$$

$$\begin{matrix} & \delta(4) & \delta(3) & \delta(2) & \delta(1) & \delta(0) \\ & \begin{matrix} 4 \\ \parallel \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} 3 \\ \parallel \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ \parallel \\ 3 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ \parallel \\ 2 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ \parallel \\ 0 \end{matrix} \end{matrix}$$

○  $R_G$  の projective resolution での "walk" は



のように  $T_2$  を回る。  
(注意 (3.2) (iii) をみよ)

○  $\bar{P}_i$  の 組成因子

$$\bar{P}_2 = \begin{matrix} 1 \\ 9 \\ 1 \end{matrix} \quad \bar{P}_9 = \begin{matrix} 9 \\ 10 \\ 16 \\ 10 \\ 9 \end{matrix} \quad \bar{P}_{10} = \begin{matrix} 10 \\ 16 \\ 10 \\ 9 \\ 10 \end{matrix} \quad \bar{P}_{10} = \begin{matrix} 10 \\ 9 \\ 10 \\ 16 \\ 10 \end{matrix}$$

$$\bar{P}_{16} = \begin{matrix} 16 \\ 16 \\ 10 \\ 9 \\ 10 \\ 16 \end{matrix}$$

$P$  ;  $0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0, 2 \rightarrow 2, 3 \rightarrow 3, 4 \rightarrow 4$

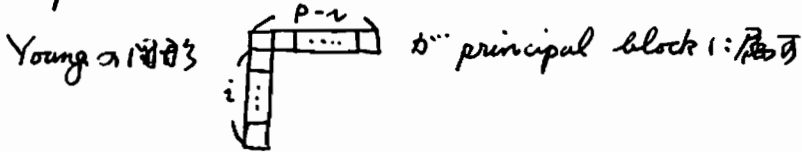
(定理 (3.5) をみよ)

§4. Brauer trees の例

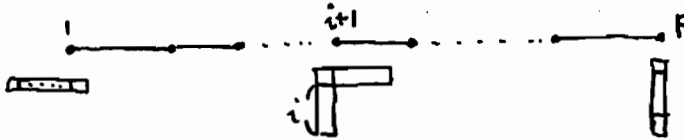
- (1)  $GL(n, q)$  の blocks で cyclic defect groups をもつものは、すべて次の形である (Hong-Srinivasan [6])



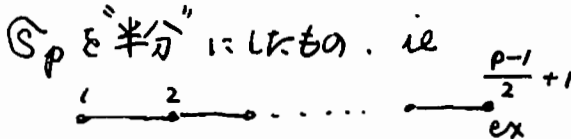
- (2)  $S_p$  (素数  $p$  次交代群)



ired. characters での Brauer tree は

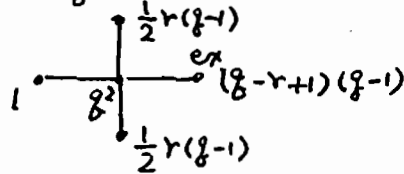


- (3)  $O_p$  (素数  $p$  次交代群)

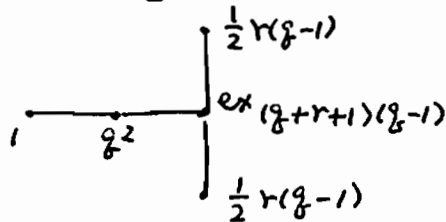


- (4)  $S_3(q)$   $2q = r^2$  ( $q$  は 2 の奇数乗)

$p \mid q+r+1$  のとき  
 $e = 4$

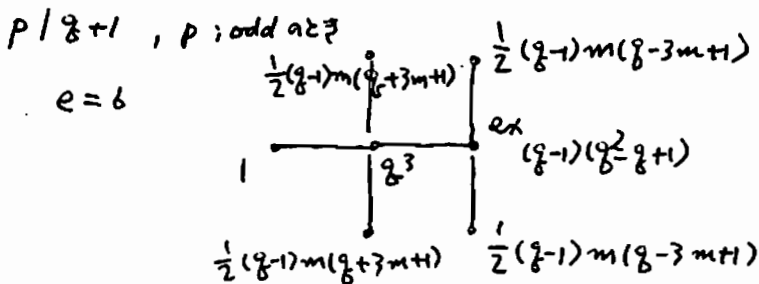
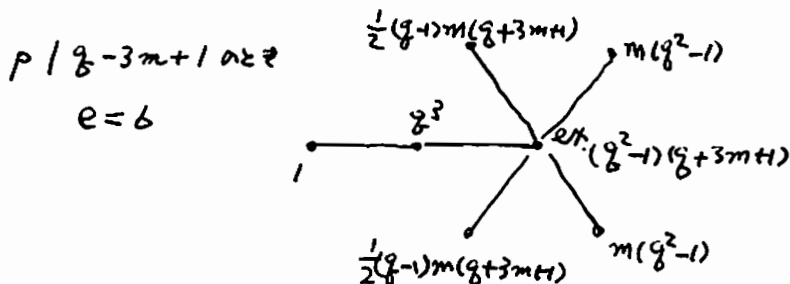
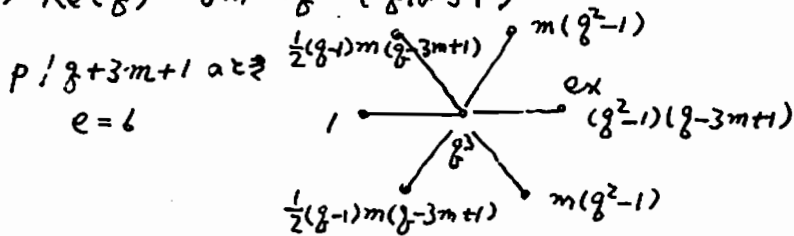


$p \mid q-r+1$  のとき  
 $e = 4$



(1) の時も principal block)

(5)  $\text{Re}(q) \quad 3m^2 = q \quad (q \text{ は } 3 \text{ の } \neq)$



(11) 可換 principal block について

(6)  $p$ -可解群の blocks における cyclic defect groups がある場合の Brauer tree は "star" である。

(7) Mathieu 群については James [9] に詳しい。

より大きく  $\text{tan sporadic}$  は単独群について調べたため、複雑な Brauer tree はなかなか出現しない。これは次の

理由にもよる。

(8)  $\{\chi_i\} \ i=1, \dots, e+1$  が real valued  $\chi$  なら, Brauer tree は 直積線 と なる ([5] Th. 9.2 Chap VII)

(9) "複雑" なる Brauer tree を作る 一の方法。

"  $G \triangleright G_2$  ,  $G/G_2$  :  $p'$ -group ,  $P \in G_2$  の (L.S.)  $G$  の  $p$ -Sylow 群, cyclic とする。  $m = |G : G_2(P)G_2|$  とおくと。

$B_0(G)$  の Brauer tree は  $B_0(H)$  の Brauer tree を exceptional vertex を中心として  $m$  回, まわして得られる。"

(例) (1) 例 (2.5) の (3), (4)

(2)  $\Omega_p$  と  $\mathbb{F}_p$  の関係。

(3) Fong-Srinivasan (1) の結果を用いて。勝手な  $m$

と  $n$  について,



となる 星形 の Brauer tree が 存在する。

(  $GL(n, \mathbb{F}_p)$  について。  $\mathbb{F}_p$  を 適当にとり。  $\mathbb{F}_p$  の automorphism をつけた 群 を 考へる こと による )

参考文献

- [1] Alperin-Janusz ; Proc. A.M.S 37(1973) 403-406
- [2] Brauer ; Ann of Math. 42(1941) 936-958
- [3] Dade ; Ann of Math 84(1966) 20-48
- [4] Dornhoff ; Group Representation Theory Marcel Dekker (1992)
- [5] Feit ; The Representation Theory of Finite Groups  
North-Holland (1981)
- [6] Fong-Srinivasan ; Bull. A.M.S 3(1980) 1041-1045
- [7] Gabriel-Riedtmann ; Comm. Math. Helvetici 54(1979)  
240-287
- [8] Green ; J. Austral. Math. Soc. 17(1974) 197-213
- [9] James ; J. of Alg 27(1973) 57-111
- [10] Janusz ; Ann of Math. 89(1969) 209-241
- [11] Kupisch ; J. of Alg 10(1968) 1-7
- [12] Michler ; J. of Alg 39(1976) 26-51
- [13] Peacock ; J of Alg 34 (1975) 232-259

# Auslander-Reiten quiver I

群馬大学教育学部 大竹公一郎

こゝでの報告の目的は P. Gabriel and K. Bongartz,  
"Covering spaces in representation theory",  
Invent. Math. 65, 331-378 (1982)  
の解説を行うことである。

$k$  は代数閉体とし、 $A$  は  $k$  上の有限次元多元環とす。このとき Auslander-Reiten quiver と呼ばれる有向グラフ  $\Gamma_A$  が存在することが知られている。それではどのような有向グラフが多元環  $A$  の Auslander-Reiten quiver になっているかあるか。これに対する回答は、有限表現型の場合に、万有被覆との関係において定理によって与えられる。万有被覆の利点はそれが必ず単連結にたるということである。従って万有被覆をとることによって有向グラフの性質がわかりやすくなるのである。次に重要な概念は被覆関手と Riedtmann-quiver である。Riedtmann-quiver の最も重要な性質

は基本群が自由群に属することである。最後に被覆技術の応用として、単連結な多元環は木 (tree) とその grading によって完全に決定されることかわかる。

### §1. Auslander-Reiten quivers

$A$  は有限次元多元環とし、考えらる  $A$  加群はすべて有限生成右  $A$  加群とする。  $Y_A$  が直既約のとき、  $e: \lambda_A \rightarrow Y_A$  が分列的全射 (split ep) であり、分列的全射である  $f: Z_A \rightarrow Y_A$  があれば  $ef = f \circ \alpha$  なる写像  $\alpha: Z_A \rightarrow \lambda_A$  が存在するとき、  $e$  を右根分列写像 (right almost split map) という。  $e$  が右根分列で、  $\lambda_A$  の組成列の長さが最も短いとき、  $e$  を極小右根分列という。左根分列及び極小左根分列は双対的に定義される。たとえば  $P_A$  が射影的直既約な場合は  $\text{rad } P_A \hookrightarrow P_A$  は極小右根分列であり、  $E_A$  が射影的直既約な場合は自然な写像  $E_A \rightarrow E_A/\text{soc } E_A$  は極小左根分列である。



定理 1.1. 非射影的直既約加群  $X_A$  に対し.

次の性質をもつ完全列  $0 \rightarrow Y_A \xrightarrow{f} Z_A \xrightarrow{e} X_A \rightarrow 0$   
が存在する.

(1)  $Y_A$  は直既約.

(2)  $e$  は右根既約.

(3)  $f$  は左根既約.

さらにこの性質をもつ完全列は同型を除いて一意  
である.

上の完全列を Auslander-Reiten 列 といい、 $Y = \tau X$   
あるいは  $X = \tau' Y$  と表す。  $\tau$  を Auslander-Reiten 変  
換 という。  $e = (e_i) : \bigoplus_i Z_i \rightarrow X$  ( $Z_i$ : 直既約) が  
極小右根既約のとき、  $e_i : Z_i \rightarrow X$  を 既約写像  
(irreducible map) という。 双対的な場合も既約写像  
という。

$\{X_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  を直既約加群の代表系とし、各  $X_\lambda$  を  
点とし、既約写像  $X_\lambda \rightarrow X_\mu$  がある場合には 1本の矢  
 $\xrightarrow{X_\lambda} X_\mu$  を対応させると有向グラフが出来上がる。そ  
れを  $\Gamma_A$  と表すことにする。  $\Gamma_A$  を Auslander-Reiten  
quiver という。

このようにして一般の多元環に対し Auslander-Reiten quiver を対応させたことが出来たが、月券子な有向グラフがある多元環の Auslander-Reiten quiver になっているとは勿論いえない。そこで Auslander-Reiten quiver になるための必要条件として、変換付有向グラフ (translation-quivers) を考える。

## §2. 変換付有向グラフ

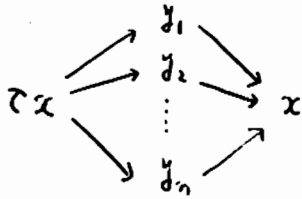
$\Gamma$  を有向グラフ,  $I_0$  を点の集合,  $I_1$  を矢の集合とする。今  $\Gamma$  の subclasses の間の全単射  $\tau$  が与えられているとする。  $x \in I_0$  に対し,  $x^-$  を  $x$  の predecessors の集合,  $x^+$  を  $x$  の successors の集合とする。

定義 2.1.  $(\Gamma, \tau)$  が変換付有向グラフであるとは、次の a, b を満たすときをいう。

- $\Gamma$  は loop  $\odot$  も重複矢  $\Rightarrow$  も持たない。
- $\tau x$  が定義されたならば  $x^- = (\tau x)^+$  が成り立つ。

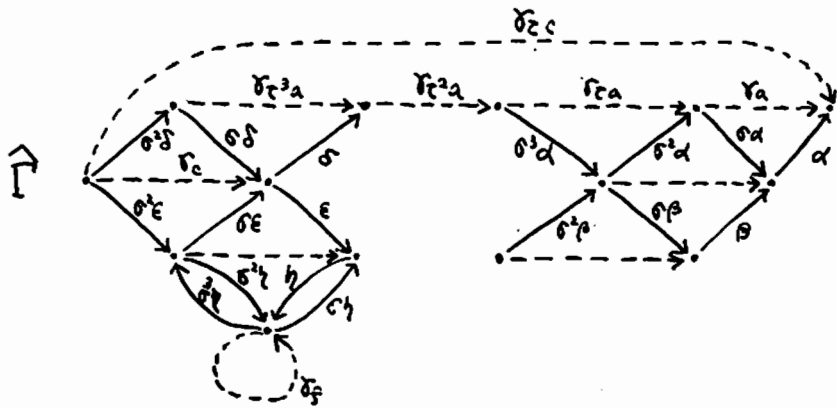
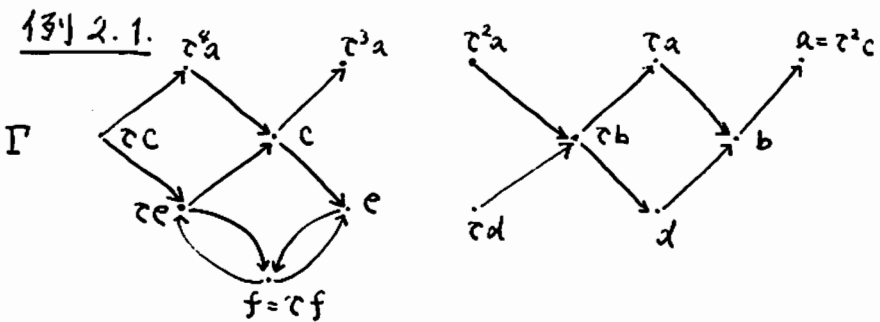
$\tau x$  (同様に  $\tau^2 x$ ) が定義されたとき,  $x$  を射影的

(同様に、移入的) という。



左図において、 $x^{-1} = (\tau x)^+$  =  $\{y_1, \dots, y_n\}$  である。左図を  $\tau x$  を出発点とし、 $x$  を終点とする系図目 (mae) という。

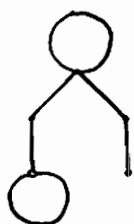
変換付有向グラフ  $\Gamma$  に対し、新しい矢  $\tau x \xrightarrow{\delta_x} x$  を付け加えて得る有向グラフ  $\hat{\Gamma}$  と表す。



定義により  $\tau$  が非射影的ならば  $y \xrightarrow{\alpha} x$  に対して一意の

に  $x \xrightarrow{\sigma^d} y$  が存在する。(網目参照). すべての整数  $n$  に対して  $\sigma^n x$  が定義できるとき,  $x$  を *stable* という. *stable* な  $x$  が ある  $n \neq 0$  に対して  $\sigma^n x = x$  とするとき,  $x$  を周期的であるという. 一般に  $x$  の  $\sigma$ -軌跡を  $x^\sigma$ , また矢  $y \xrightarrow{\sigma} x$  の  $\sigma$ -軌跡を  $y^\sigma$  と表す.  $\Gamma$  の *full subquiver* で *stable* な点全体から成るものを *stable part* と呼ぶ  $\Gamma_S$  で表す.  $\Gamma$  の *full subquiver*  $E$  が周期的成分 (*periodic component*) であるとは,  $E$  が  $\Gamma_S$  の連結な成分であり, 少なくとも1点 (実はすべての点) が周期的であること. 次に  $\Gamma$  に付随するグラフ  $G_\Gamma$  の定義をする.

- (1) 点 は 非周期的な点の  $\sigma$ -軌跡, と周期的成分とする.
  - (2) 矢の  $\sigma$ -軌跡を1つの線とし, 両端の点にそれぞれ始点及び終点の属す  $\sigma$ -軌跡または周期的成分とする.
  - (3) さらに周期的成分には *loop* を付加可.
- たとえば例2.1 に対する  $G_\Gamma$  は次のようになる.



$x, y \in \Gamma_0$  のとき,  $x$  から  $y$  への散歩 (walk) とは,  $\hat{\Gamma}$  と

矢  $\alpha \in \hat{E}_1$  の形式的な逆元  $\alpha^{-1}$  とおけることができる有向グラフの道 (path) として定義される。たとえば例 2.1 で

$$w = (c | \sigma \varepsilon, \sigma^2 \varepsilon, \sigma^3 \varepsilon^{-1}, \sigma_{c^2 a}^{-1}, \sigma_{c^2 a}^{-1}, \sigma_{c^2 a}^{-1}, \sigma \alpha^{-1}, \alpha^{-1} | a)$$

は  $a$  から出発して  $c$  に至る散歩を表している。散歩の合成は普通に定義される。散歩の間、同値関係  $H$  を次の条件を満たす最小の同値関係として定義する。

(a)  $\alpha, \beta \in \hat{E}_1$  で  $\alpha$  の終点及び  $\beta$  の始点を  $x$  のとき

$$(x | \alpha, \alpha^{-1} | x) \sim (x | x) \sim (x | \beta, \beta^{-1} | x)$$

(b) 非射影的な点  $x$  を終点とする  $\alpha \in \hat{E}_1$  に対し

$$(x | \alpha, \sigma \alpha | \sigma x) \sim (x | \sigma x | \sigma x), (\sigma x | \alpha^{-1}, \alpha^{-1} | x) \sim (\sigma x | \sigma x^{-1} | x)$$

(c)  $v \sim v'$  で  $wv, wv', vu, v'u$  が可能なとき

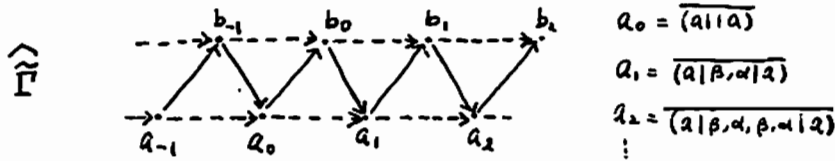
$$wv \sim wv', vu \sim v'u$$

散歩  $w$  の同値類を  $\bar{w}$  で表す。また  $w$  は  $w$  の出発点を、 $\bar{w}$  は  $w$  の終点を表す。次に  $\Gamma$  から新しい有向グラフ  $\hat{\Gamma}$  を構成する。ある固定点  $x$  を出発点とする散歩の同値類を  $\hat{\Gamma}$  の点とし、散歩  $w$  と  $\bar{w} \xrightarrow{\alpha} z$  があるとき矢  $(\bar{w}, \alpha): \bar{w} \rightarrow \overline{(z | \alpha | w) w}$  を定義する。また  $\bar{w}$  が非射影的なとき、 $(\bar{w}, \alpha) = \overline{(z | \alpha | \sigma \alpha^{-1} | \bar{w}) w}$  として変換を定義する。このように定義すると  $\hat{\Gamma}$  が変換付有向グラフとなることがわかる。  $\pi: \hat{\Gamma} \rightarrow \Gamma$  を  $\pi(\bar{w}) = w$

$\pi(\bar{w}, \alpha) = \alpha$  と定義する。

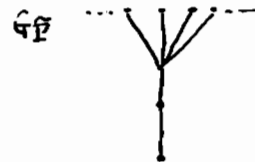
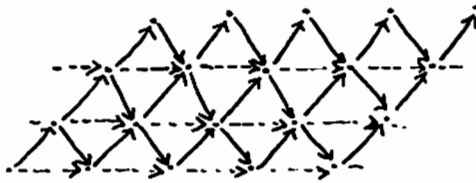
定義 2.2.  $\pi: \tilde{\Gamma} \rightarrow \Gamma$  さんにおける  $\Gamma$  の万有被覆  
 という。また  $\Pi(\Gamma, \alpha) = \pi^{-1}(\alpha)$  を  $\alpha$  における  $\Gamma$  の基  
 本群群 という。

例 2.1.  $\Gamma: a = \tau a \cdot \overset{\alpha}{\curvearrowright} b = \tau b$  のとき



$G_\Gamma \cong \mathbb{Z}, G_{\tilde{\Gamma}} \cong \mathbb{Z}, \Pi(\Gamma, \alpha) \cong \mathbb{Z}$

例 2.3.  $c = \tau c \cdot \overset{\alpha}{\curvearrowright} b = \tau b \cdot \overset{\beta}{\curvearrowright} a = \tau a$  のとき



$\Pi(\Gamma, \alpha) \cong \mathbb{Z}$

練習  $\hat{\Gamma}$  が のとき  $G_\Gamma, G_{\tilde{\Gamma}}, \tilde{\Gamma}, \Pi(\Gamma, \alpha)$

を求めよ。

### §3. Auslander category と Riedtmann quiver

$\Lambda$  は カテゴリ-とし,  $\Lambda(x, y)$  は  $x$  から  $y$  への射の集合とする。  
 $\Lambda(x, y)$  が  $k$  上のベクトル空間であり, 合成に関して双線型  
であるとき,  $\Lambda$  を  $k$ -category という。以下  $\Lambda$  は  $k$ -category  
とする。

定義 3.1. 次の条件を満たすとき  $\Lambda$  は局所有限であるという。

a)  $\forall x \in \Lambda, \Lambda(x, x)$  は  $k$  上の局所多元環。

b)  $x \neq y$  ならば  $\Lambda(x, y) = 0$  (i.e.  $\Lambda$  は basic)。

c)  $\forall x \in \Lambda, \sum_{y \in \Lambda} [\Lambda(x, y): k] < \infty, \sum_{y \in \Lambda} [\Lambda(y, x): k] < \infty$ 。

$\text{mod } \Lambda$  は  $\Lambda$  から  $\text{mod } k$  への線型反変関手の成すカ  
テゴリ-を表し,  $\text{mod } \Lambda$  の対象を  $\Lambda$  加群という。

定義 3.2.  $\Lambda$  が局所有限表現型であるとは,  $\Lambda$  が  
局所有限で, 任意の  $x \in \Lambda$  に対し  $e(x) \neq 0$  となる直既約  $\Lambda$   
加群  $e$  が有限個のときという。

$\text{ind } \Lambda$  は直既約  $\Lambda$  加群から成る  $\text{mod } \Lambda$  の full subcategory とする。

定義 3.3.  $k$ -category  $M$  がある局所有限表現型の  $\Lambda$  に対して、 $\text{ind } \Lambda$  と圏同値になるとき  $M$  を Auslander category という。

$\Gamma$  を局所有限 (i.e. 各点の近傍有限) な変換付有向グラフとする。 $\Gamma$  の道 category とは、 $x, y \in \Gamma$  に対して  $k\Gamma(x, y)$  は  $x$  から  $y$  への道をすべて <sup>自由</sup> 基底とするベクトル空間として定義される。また  $I_\Gamma$  を

$$\mu_x = \sum_{\alpha} \alpha \cdot \delta_{\alpha} \in k\Gamma(\tau x, x)$$

で生成されるイデアルとするとき、 $k(\Gamma) := k\Gamma / I_\Gamma$  を網目 category という。

命題 3.1.  $\Gamma$  を局所有限な変換付有向グラフとする。

このとき網目 category  $k(\Gamma)$  が Auslander-category である

ための必要十分条件は、 $\Gamma$  が次の条件を満たすことである。

a)  $k(\Gamma)$  は局所有限。

b) 非射影的  $x$  と零でない  $\mu \in k(\Gamma)(x, y)$  に対して  $\mu \bar{\alpha}$  となる  $\Gamma$  の矢  $x' \xrightarrow{\alpha} x$  がある。

c) 各射影的  $p$  に対して、ある点  $j$  と線型写像  $\epsilon: k(\Gamma)(p, j) \rightarrow k$  が <sup>あり</sup> 各点  $x$  に対して



$$k(\Gamma)(p, x) \times k(\Gamma)(x, j) \longrightarrow k(\Gamma)(p, j) \xrightarrow{\epsilon} k$$

が  $k(\Gamma)(p, x)$  と  $k(\Gamma)(x, j)$  の間の duality を与える。

定義 3.4.  $k(\Gamma)$  が Auslander-category のとき、 $\Gamma$  を Riedtmann-quiver とする。

命題 3.2.  $\Gamma$  が Riedtmann-quiver のとき、 $P \in \Gamma_0$  の射影的基点  $\alpha$  が成る  $k(\Gamma)$  の full subcategory とすると、 $k(\Gamma)$  と  $\text{ind } P$  はカテゴリ-同値である。

上記命題において多元環の quiver がわかり、従って多元環がわかるということになる。たとえば例 2.3 において  $\Gamma$  が (3.1) の a), b), c) を満たすことは容易に確かめられる。 $\Gamma_0$  の射影的基点は 1 点  $\{P\}$  だけであり、明らかに  $\text{End}_{k(\Gamma)}(P) = k[\Gamma]/(\Gamma^2)$  である。従って命題 3.2. より  $k(\Gamma) \cong \text{ind } k[\Gamma]/(\Gamma^2)$  が成り立つ。

定理 3.3.  $\Gamma$  を連結な変換付有向グラフ、 $\tilde{\Gamma}$  を右有被覆として次の条件は同値である。

(i)  $\Gamma$  はある局所有限表現型の  $k$ -category の Auslander-

Reiten quiver である。

(ii)  $\Gamma$  は Riedtmann-quiver である。

(iii)  $\tilde{\Gamma}$  は Riedtmann-quiver である。

#### §4. Riedtmann-quiver の基本群

この節では Riedtmann-quiver の基本群が自由群になるという説明を行う。要点は基本群の計算を位相幾何的な意味での基本群の計算におきかえてしまうことである。

##### I. 有向グラフ $Q$ の幾何学的表現

$\alpha \in Q_1$  に対して  $I_\alpha$  は区間  $I = [0, 1]$  とする。  $\dot{I}_\alpha$  は境界を表す。  $Q_0$  には discrete topology を入れておく。

$$i: \coprod_{\alpha \in Q_1} \dot{I}_\alpha \hookrightarrow \coprod_{\alpha \in Q_1} I_\alpha, \quad \partial_\alpha: \dot{I}_\alpha \rightarrow Q_0 \text{ は } \partial_\alpha(0) = \alpha,$$

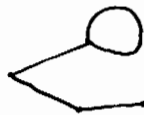
$\partial_\alpha(1) = \beta$ , かつ  $\alpha \xrightarrow{u} \beta$ , とする。このとき図式

$$Q_0 \xleftarrow{[\partial_\alpha]} \coprod_{\alpha \in Q_1} \dot{I}_\alpha \xrightarrow{i} \coprod_{\alpha \in Q_1} I_\alpha$$

の位相的混合和を  $Q$  の幾何学的表現といい  $|Q|$  で表す。たとえば  $Q$  が



のとき  $|Q|$  は



である。

$G$  がグラフのときは、 $G$  の幾何学的表現は  $G$  を適当に有向グラフ  $\vec{G}$  にして、 $\varepsilon$  の幾何学的表現とする。  
 $|\varepsilon| = |\vec{G}|$ .

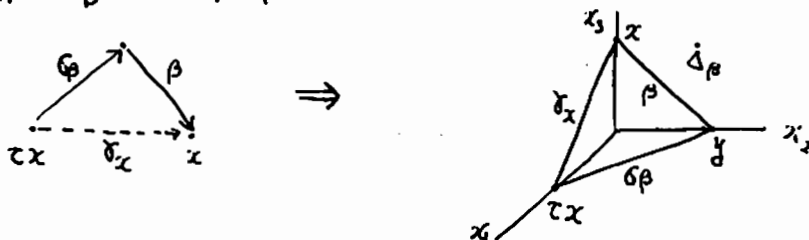
## II. 変換付有向グラフ $\Gamma$ の幾何学的表現

有向グラフ  $\hat{\Gamma}$  の幾何学的表現  $|\hat{\Gamma}|$  を作る。

$\Delta = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1, x_1, x_2, x_3 \geq 0 \}$  とする。

$y \xrightarrow{\beta} x$  で  $x$  が非射影的なとき  $\Delta_\beta = \Delta$  とする。

$\hat{\beta} : \Delta_\beta \rightarrow |\hat{\Gamma}|$  を下図のように対応させる。

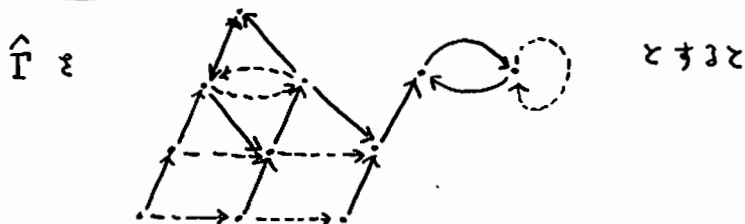


そこで  $\Gamma$  の幾何学的表現は

$$|\hat{\Gamma}| \leftarrow \frac{|\beta|}{\beta} \parallel \Delta_\beta \xrightarrow{j} \parallel \Delta_\beta \quad (j: \text{inclusion})$$

の位相的混合和として定義され、それを  $|\Gamma|$  と表す。

### 例 4.1.





次の命題は直観的には明らかである。

命題 4.1.  $\alpha$  を変換付有向グラフ  $P$  の点とすると、基本群  $\pi(P, \alpha)$  と  $\pi(|P|, \alpha)$  は自然に同型である。

定理 4.2.  $P$  が Riedtmann-juiver ならば、 $P$  と  $G_P$  の幾何学的表現はホモトピー同値である。従って  $\pi(P, \alpha)$  は自由群である。

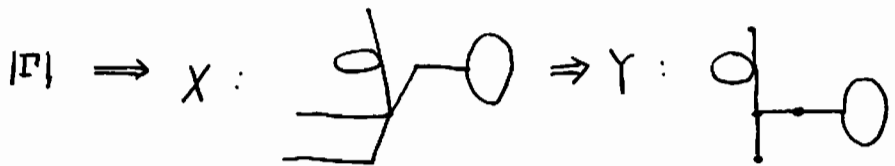
定理の証明の方針は第一段階として、面を線(分)に縮小し、第二段階として線(分)を点に縮小する。この二回の操作で  $|G_P|$  にかなり近い図形が得られるが、周期的成分の幾何学的表現の部分はそのまま残っている。周期的成分の幾何学的表現が円とホモトピー同値に在ることを示して証明が完成されるのであるが、この最後の部分が一番大変である。 $|P|$  から  $|G_P|$  に致

る操作を図示すると次のようになる。

$$|\Omega| \Rightarrow X \Rightarrow Y \Rightarrow |\hat{\Omega}|$$

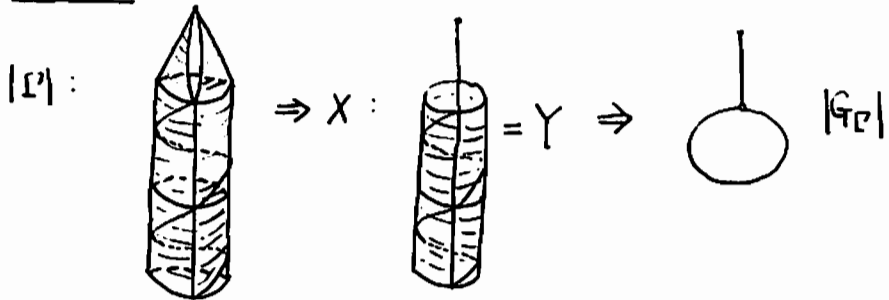
次に示す例を証明と理解する為の参考にしてください。

例 4.2. 例 4.1 の場合



この例では  $Y = |\hat{\Omega}|$  となっている。

例 4.3. 例 2.3 の場合.



### §5. 単連結多元環

$A$  は有限表現型で、連結で、basicで、有限次元で

さらに単連結な Auslander-Reiten quiver  $\Gamma_A$  をもつとする。

このような多元環を単連結多元環という。 $(\Gamma_A$  が単連結  
というのは、 $\Gamma_A$  が連結で基本群が自明なときをいう)。

$G_A$  を  $\Gamma_A$  に付随するグラフとする。定理 3.2 より  $G_A$  は木  
である。さらに定理 3.3 の証明からわかることだが (被覆関手の性質)  
 $k(\Gamma_A) \cong \text{ind } A$  が成り立つ。従って  
命題 3.2 より  $A \cong \bigoplus_{p, \delta} k(\Gamma_A)(p, \delta)$  ただし  $p, \delta$  は  $\Gamma_A$  の  
射影的点である。注目すべきは  $A$  が木  $G_A$  と以下  
に述べる grading  $G_A$  によって完全に決まってしまうこと  
である。

$T$  を木とする。  $x, y$  が近隣るとき  $x-y$  と表すことに  
する。

定義 5.1. 関数  $g: T_0 \rightarrow \mathbb{N}$  が

a)  $x-y$  のとき  $g(x) - g(y) \in 1 + 2\mathbb{Z}$

b)  $g^{-1}(0) \neq \emptyset$

をみたすとき  $g$  を  $T$  の grading といい、 $(T, g) \in \text{graded tree}$  といふ。

定義 5.2.  $(T, g)$  が graded tree のとき、変換付

有向グラフ  $Q_T$  を次のように定義する。  $(Q_T)_0 = \{(n, t) \in \mathbb{N} \times T_0 \mid n - g(t) \in 2\mathbb{N}\}$ 。また  $s - t$  で  $n = m + 1$  のとき  $(m, s) \rightarrow (n, t)$  とする。射影的の点は  $(g(t), t)$  とし、非射影的の点の  $\tau$  変換は  $\tau(n, t) = (n - 2, t)$  とする。

次に dimension map  $d = d_T : (Q_T)_0 \rightarrow \mathbb{N}^{T_0}$  を次のように定義する。

a)  $d(g(t), t) = \delta_t + \sum_s d(g(t) - 1, s)$ 。ただし  $s$  は  $s - t$  で  $g(s) < g(t)$  を満たすものとする。さらに  $t$  はこのまうな  $s$  に対して  $d(g(t) - 1, s) > 0$  であるものとする。(ここで  $d(g(t) - 1, s) > 0$  とするのはすべての値が  $\geq 0$  であつて少くとも一つの  $T_0$  の元に対しては  $> 0$  とする)。

b)  $(n, t)$  が非射影的で  $d(n - 2, t) > 0$  のとき  $d(n, t) = \sum_s d(n - 1, s) - d(n - 2, t)$ 。ただし  $s$  は  $s - t$  で  $g(s) < n$  を満たすものとし、 $t$  は  $\sum_s d(n - 1, s) - d(n - 2, t) > 0$  を満たすものとする。

c) a), b) 以外の  $(n, t) \in (Q_T)_0$  に対しては  $d(n, t) = 0$  とする。

$R_T$  は  $d(n, t) > 0$  なる  $(n, t)$  なる  $Q_T$  の

full subtranslation - quiver とする。

定義 5.3.  $(T, g)$  が有限表現型であるとは、 $R_T$  が有限で  $R_T$  が  $Q_T$  のすべての射影的点を包含する場合という。

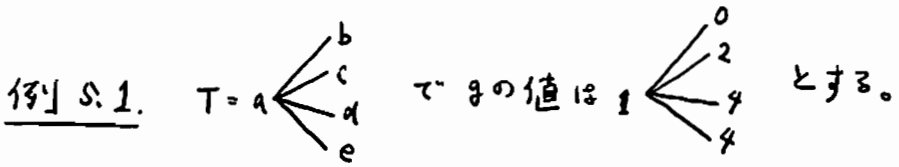
$(T, g)$  が有限表現型のとき  $A^T = \bigoplus_{p \in g} k(R_T)(p, g)$  とする。ただし  $p, g$  は  $R_T$  の射影的点である。

定理 5.1. 写像  $(T, g) \mapsto A^T$  は有限表現型な graded tree の同型類と単連結な多元環の同型類の間の一対一対応を与える。

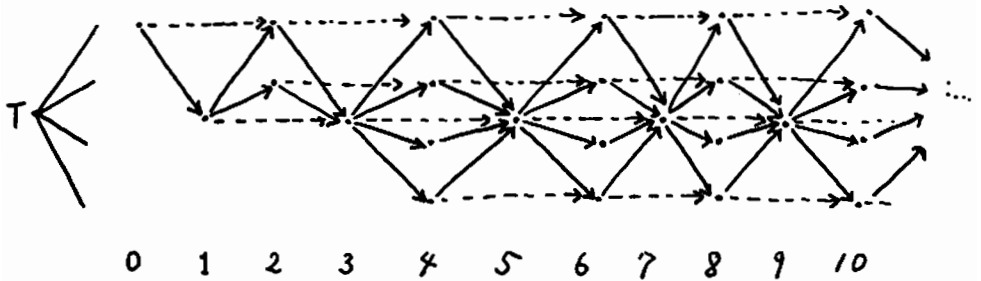
多元環  $A$  に対して  $\{S_i \mid i \in I\}$  を既約加群の代表系とする。加群  $M_A$  に対して  $M_A$  の組成剰余群に表れる  $S_i$  の重複度を  $n_i$  とするとき、 $(n_i)_{i \in I} \in M$  の dimension type という。  $P_i$  を射影加群で  $P_i / \text{rad } P_i = S_i$  とすると、 $n_i = |\text{Hom}_A(P_i, M)_{\text{End}(P_i)}|$  であることは容易にわかる。さて上に定義した dimension map  $d$  は実は  $d(n, t)$  が  $(n, t)$  に対応する直既約加群の dimension type を表



しているのである。



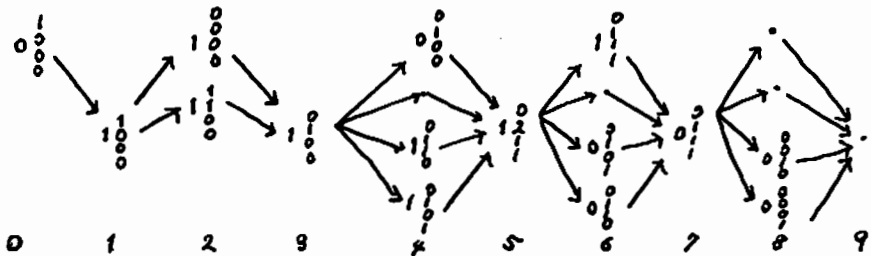
まず  $R_T$  を構成すると次のようになる。



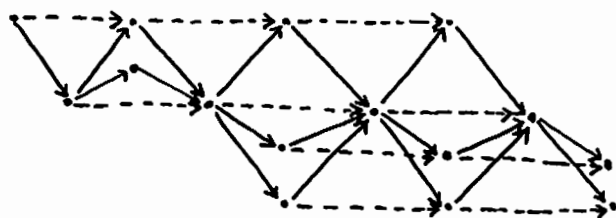
次に アルゴリズム a), b), c) により各点における  $d$  の値を計算してやる。

$$\begin{aligned}
 d(0, b) &= \delta_b \\
 d(1, a) &= \delta_a + d(0, b) = \delta_a + \delta_b \\
 d(2, b) &= d(1, a) - d(0, b) = \delta_a \\
 d(2, c) &= \delta_c + d(1, a) = \delta_a + \delta_b + \delta_c \\
 d(3, a) &= d(2, b) + d(2, c) - d(1, a) = \delta_a + \delta_c \\
 d(4, b) &= d(3, a) - d(2, b) = \delta_c \\
 d(4, c) &= d(3, a) - d(2, c) = -\delta_b < 0 \text{ 故、 } \tau(c) \text{ により } d(4, c) = 0
 \end{aligned}$$

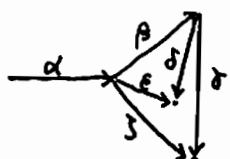
以下同様の計算を行うことにより  $R_T$  は次のように埋め込める。



即ち  $\hat{R}_T$  は



Auslander-Reiten quiver  $R_T$  に対応する多元環  $A^T$  は命題 3.2 による次のような関係をもつ有向グラフの道多元環である。



$$\begin{aligned} \beta\alpha = \epsilon\alpha = \zeta\alpha &= 0 \\ \zeta\beta + \zeta = \delta\beta + \epsilon &= 0 \end{aligned}$$

最後に Bongartz-Gabriel の論文を読むのに必要な文献をあげておく。

C. Riedtmann: Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück. Comm. Math. Helv. 55, 199-224 (1980).

## Auslander-Reiten Quiver II

山梨大学 教育学部 佐藤 真久

本稿は、多元環の表現論に関する Gabriel の論文 *The Universal Cover of a Representation - Finite Algebra* (Springer Lecture Note 903) において紹介された Galois Covering の解説を行うことを目的とする。

代数閉体  $k$  上の有限次多元環  $R$  (ここでは便宜上 basic, 即ち  $R$  の巾等元はすべて非同型とする) が与えられた時, 解決すべき重要な課題は次の2点である。

- (1)  $R$  は、有限表現型 (representation - finite) か否か調べよ。(即ち、直既約 (右-) 加群の同型類は有限個か)
- (2)  $R$  が有限表現型の時 Auslander-Reiten Quiver

$\Gamma_R$  を決定せよ.

Simply Connected (単連結) な環  $R$  においては.

(1), (2) はすでに解決されている. Galois Covering とは Simply Connected でない環をある Covering を取る事で Simply Connected な環を作り両者のある関係 (Push-Down) から元の環の (1), (2) を調べる手法である

§1 Quiver (有向グラフ) と Path Algebra (道多元環)

定義 1. 点と有向線分よりなる図形を Quiver と呼ぶ. 点の集合  $Q_0$ , 有向線分の集合  $Q_1$  として Quiver を  $Q = (Q_0, Q_1)$  と表す.

定義 2. Quiver  $Q$  に対し 点  $i$  から点  $i'$  への長さ  $t$  の path とは  $(i' | \alpha_t, \dots, \alpha_1 | i)$  なる形式をいう. ただし,  $\alpha_1$  の始点  $= i$ ,  $\alpha_t$  の終点  $= i'$  かつ  $\alpha_j$  の終点  $= \alpha_{j+1}$  の始点 ( $j = 1, 2, \dots, t-1$ ).

長さ 0 の path とは  $(i | i)$  なる形式とする.

2つの paths  $(i' | \alpha_1, \dots, \alpha_n | i), (j' | \beta_1, \dots, \beta_m | j)$  に対し積を

$$(i' | \alpha_1, \dots, \alpha_n | i) \cdot (j' | \beta_1, \dots, \beta_m | j) = \begin{cases} (i' | \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_m | j) & \text{if } i = j' \\ 0 & \text{if } i \neq j' \end{cases}$$

と定める。

また便宜上  $(i | i) = e_i, (i | \alpha_1, \dots, \alpha_n | j) = \alpha_1 \circ \dots \circ \alpha_n$  と表すことにする。

定義 3. Quiver  $Q$  に対し  $Q$  の path を  $R$  上の基底とし、上の積と乗法にもつ多元環  $R^Q$  を path-algebra と呼ぶ。

例 1. Quiver  $\begin{matrix} 1 & \xrightarrow{\alpha} & 2 & \xrightarrow{\beta} & 3 \\ & & 0 & \xrightarrow{\gamma} & 3 \end{matrix}$  の path-algebra は下三角行列環に同型である。

一般に、代数閉体上の有限次多元環  $R$  は、ある Quiver  $Q$  と  $R^Q$  のイデアル  $I$  に対し  $R^Q/I$  と同型になる。

実際 Quiver  $Q$  は、次の様に構成できる。

$R = e_1 R \oplus e_2 R \oplus \dots \oplus e_n R$  を直既約分解とする。

$Q_0 = \{1, 2, \dots, n\}$  と置き  $\dim_{\mathbb{k}} e_j N / N e_i = \tau_{ij} \geq 1$  なら  
 $i$  から  $j$  へ  $\tau_{ij}$  本の有向線分を引く。

ここで  $N$  とは  $R$  の Jacobson Radical を表す。

例 2.  $\mathbb{k}(T)/(T^2)$  の Quiver は  $\begin{array}{c} 1 \\ \circ \\ \downarrow \\ 2 \end{array}$  で  $I = (2^2)$  となる  
 また  $R = \left\{ \begin{pmatrix} a & \alpha & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & a \end{pmatrix} \right\}$  の Quiver は  $\begin{array}{ccc} & 1 & \\ & \circ & \\ \alpha & \rightarrow & 2 \\ \beta & & \circ \end{array}$  で  $I = 0$  である。

$R = \mathbb{k}Q/I$  においてイデアル  $I$  の生成元  $= 0$  と置いた式を  
 $Q$  の relation と呼ぶ。

ここでは Covering を考える都合上  $Q$  の点の個数を有  
 限個に限らない点に注意されたい。この場合  $\mathbb{k}Q$  は  
 単位元のない環であるので Gabriel は Algebra と呼ばず  
 $\mathbb{k}$ -category と区別して呼んでいる。

1.1 実質的な計算は、ある中等元  $e \in R = \mathbb{k}Q/I$  を用いて  
 部分環  $eRe$  でなされる為、 $R$  には各中等元  $e$  に対し  
 $[Re: \mathbb{k}], [eR: \mathbb{k}] < \infty$  なる条件 (locally bounded) が  
 課される。

$R = \mathbb{k}Q/I$  の場合 locally bounded とは次の2つの条件

を満たす事と考えた方が分かり易い。

- ①  $Q$  の各点  $\lambda$  に対し、 $\lambda$  を始点 又は 終点 に持つ 有向線分は、高々有限個 (*locally finite* という)
- ②  $Q$  の各点  $\lambda$  に対し、自然数  $N_\lambda$  があり、 $\lambda$  を始点 又は 終点 にもつ長さ  $N_\lambda$  以上の *path* は、必ず  $I$  の要素。

例 3. *Quiver*  $\cdots \xrightarrow{d_1} \circ \xrightarrow{d_2} \circ \xrightarrow{d_1} \circ \cdots$  に  $d_{i+1} \circ d_i = 0$  なる *relation* をもつものは *locally bounded*。

## § 2. 加群の表現

$R = kQ/I$  を *locally bounded  $k$ -category* とする。

右- $R$ -加群の表現とは  $M$  からベクトル空間への反変関手と定義される。即ち

定義 4.  $Q$  の各点  $i$  に対し、ベクトル空間  $V_i$ 、 $Q$  の有向線分  $i \xrightarrow{d_j} j$  に対し線型写像  $V_j \rightarrow V_i$  が対応し、 $I$  の生成元  $\sum d_1 \circ \cdots \circ d_n$  に対し  $\sum V_{d_n} \circ \cdots \circ V_{d_1} = 0$  を満たすものとする。

この時  $V = (\sum_{i \in Q_0} V_i, \{V_d\}_{d \in Q_1})$  を右- $R$ -加群の表現。

ベクトル  $\underline{\dim} V = (\dim V_i)_{i \in Q_0}$  を  $V$  の Dimension Type と呼ぶ

$V$  が与えられた時  $\bar{V} = \Sigma \oplus V_i$  に  $R$  の作用を  $\alpha = (\alpha_i) \in \bar{V}$ ,

$j \in Q_0$ ,  $i \xrightarrow{\alpha} j \in Q_1$  に対し

$\alpha \cdot e_j = \alpha_j$  成分へ射影したベクトル

$\alpha \cdot \alpha = \alpha_i$  成分は  $V_i(\alpha_j)$ , 他成分は 0 のベクトル

と定めて  $\bar{V}$  は  $R$ -加群となる。

この対応で  $R$ -加群とその表現は同一視される。

2つの表現  $V = (\Sigma \oplus V_i, \{V_i\})$ ,  $V' = (\Sigma \oplus V'_i, \{V'_i\})$  に対し

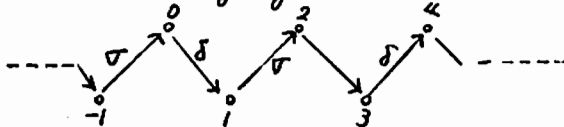
$V \oplus V' \stackrel{\text{def}}{=} (\Sigma \oplus (V_i \oplus V'_i), \{V_i \oplus V'_i\})$  で直和が定義され

自明な直和因子を持たない表現を 直既約表現 と呼ぶ

もする。これらは  $R$ -加群の直和, 直既約加群に対応するものである。

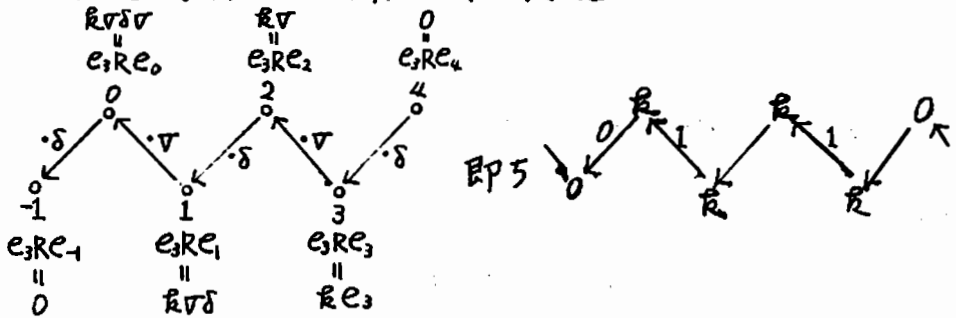
例 4. 下の図の Quiver に relation  $(\sigma\delta)^2 = (\delta\sigma)^2 = 0$  を

入れた  $k$ -category を  $R$  とする。





直既約射影右加群  $e_3 R$  の表現は



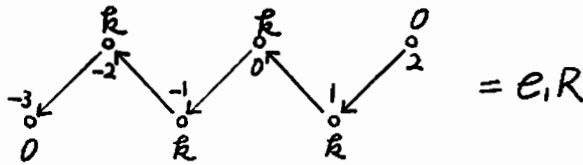
dimension type は点の位置とその点のベクトルの次元を対応させ前後の 0 は略して  $\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}$  と書く。

### §3. $k$ -category の自己同型と加群への作用

$R = kQ/I$  を  $k$ -category,  $\pi: R \rightarrow R$  を  $k$ -線型な自己同型とする。実際この  $\pi$  は *Quiver automorphism*  $\pi: Q \rightarrow Q$  で *relation* を保存するものと対応する。ここで *Quiver automorphism* とは各点  $i \in Q_0$  に  $\pi(i) \in Q_0$  が対応し  $i \xrightarrow{d} \circ j \in Q_1$  に  $\pi(i) \xrightarrow{\pi(d)} \circ \pi(j) \in Q_1$  が対応しこの対応が全単射で  $\pi(\alpha\beta) = \pi(\alpha) \cdot \pi(\beta)$  を満たすものという

定義 5. 自己同型  $\pi: R \rightarrow R$  に対し  $R$ -加群  $V = (\sum \oplus V_i, \{V_i\})$  への作用  $\pi V \stackrel{\text{def}}{=} (\sum \oplus V_{\pi(i)}, \{V_{\pi(i)}\})$  と定める

例5. 例4の  $R$  において  $\pi(i) = i-2$  で定められた自己同型  $\pi$  に対し  $\pi(e_3 R) = e_1 R$  である.



### §4 Galois Covering

$\tilde{R} = \mathbb{R}\tilde{Q}/\tilde{I}$  を locally bounded  $\mathbb{R}$ -category  
 $G$  を  $\tilde{R}$  の自己同型のなす群とする.

定義6 Quiver  $Q$  と  $\mathbb{R}Q$  のイデアル  $I$  を以下のように定め  
 $\tilde{R}/G = \mathbb{R}Q/I$  とおく.

$Q$  の点 =  $\tilde{Q}$  の点の orbits の集合

$Q$  の有向線分 =  $\tilde{Q}$  の有向線分の orbits の集合

$$I = \{ \sum \mathbb{R} a_1 \cdots a_n \bar{J}_1 \cdots \bar{J}_n \mid \sum \mathbb{R} a_1 \cdots a_n a_1 \cdots a_n \in \tilde{I} \}$$

ただし  $\bar{J}_i$  は  $a_i$  の orbit を表す.

$F: \tilde{R} \rightarrow \mathbb{R}Q/I$  を orbit を対応させる自然写関手とする. この orbit の対応を  $\mathbb{R}Q/I$  と同型なものに許すため次の様子を定義とする

定義 7 関手  $E: \tilde{R} \rightarrow R$  が Galois Covering とは

(1) 各  $g \in G$  に対し  $E \cdot g = E$

(2)  $\tilde{R}/G \cong R$

を満たすものをいう

例 7. 例 4 は Quiver  $0 \begin{matrix} \xrightarrow{\sigma} \\ \xleftarrow{\delta} \end{matrix} 1$  に relation  $(\sigma\delta) = (\delta\sigma)^2 = 0$  をもつ 多元環の Galois Covering になっている

Galois Covering は必然的に Covering Functor になっている

い。即ち任意の  $x \in \tilde{R}$ ,  $b \in R$  に対し

$$\begin{matrix} \parallel \\ F(y)=b \\ \parallel \end{matrix} \text{Hom}_{\tilde{R}}(x, y) \cong \text{Hom}_R(F(x), b) \text{ かつ}$$

$$\begin{matrix} \parallel \\ F(y)=b \\ \parallel \end{matrix} \text{Hom}_{\tilde{R}}(y, x) \cong \text{Hom}_R(b, F(x)) \text{ が成立している。}$$

ここで、有限表現型の環に対し Galois Covering を取った時、例 7 からわかるように無限々の中等元が出てくる為、その個数だけ単純加群が表れ、有限表現型にならない。そこで、有限表現型に対応する概念として、局所有限表現型 (locally representation finite) を導入する

定義 8 locally bounded  $k$ -category  $kQ/I$  が局所

有限表現型とは各点  $i \in Q_0$  に対し  $V_i \neq 0$  なる直既約表現の同型類が有限個しかない時をいう。

$Q$  が有限 Quiver であれば局所有限表現型とは有限表現型に外ならない。実際次の定理が Gabriel により証明されている。

定理 1 (Gabriel)  $F: \tilde{R} \rightarrow R$  と群  $G$  をもつ Galois Covering とする時、次の事が成立する。

- (1)  $R$  が局所有限表現型なら  $\tilde{R}$  も局所有限表現型。
- (2)  $G$  が直既約  $\tilde{R}$ -加群に free に作用する時  $\tilde{R}$  が局所有限表現型なら  $R$  も局所有限表現型。

ここで「 $G$  が直既約  $\tilde{R}$ -加群に free に作用する」とは  $1 \neq g \in G$  に対し、任意の直既約  $\tilde{R}$ -加群  $V$  が、 $gV$  と非同型でかつ  $gV$  も直既約になっている時をいう。これに関して次の定理は有用であろう。

定理 2 (Gabriel) 次の各々の場合、 $G$  は直既約加群に free に作用する。

- (1)  $G$  が有限群で その  $order$  は 体  $K$  の標数でわれない。  
 (2)  $G$  は位数 2 または 3 の元を含まない  
 (3) 体  $K$  の標数が 0 で  $G$  が *residually finite*.  
 (即ち. 任意の有限集合  $S \subset G \setminus \{1\}$  はある有限な  $index$  をもつ部分群  $H$  があり  $S \subseteq G \setminus H$  となる)

### §5. $R$ -加群と $\tilde{R}$ -加群の関係

$F: \tilde{R} \rightarrow R$  を Galois Covering とする時  $\tilde{R}$ -加群と  $R$ -加群がどのように対応するか調べよう

定義 9. 有限生成  $\tilde{R}$ -加群  $V = (\sum \oplus V_i, \{V_i\})$  に対し.

$R$ -加群  $F_\lambda(V)$  を次のように構成する. この  $F_\lambda$  を Push-Down と呼ぶ.

$$R = \mathbb{k}Q/I \text{ とし } a \in Q_0 \text{ に対し } F_\lambda(V)_a \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{F(i)=a} \oplus V_i$$

$$u \xrightarrow{\lambda} v \in Q_1 \text{ に対し } F_\lambda(V)_u \rightarrow F_\lambda(V)_v \text{ を}$$

$$i \xrightarrow{\lambda} j \in Q_1 \text{ で } F(i) = \Delta \text{ となるものを } F_\lambda(V)_u \text{ の } v_j \text{ 成分}$$

$F_\lambda(V)_u$  の  $v_j$  成分に *projection* して得られる字像が  $V_j$  となるように決める. 即ち. 次の図式と可換にするように決める.



環の表現型と直既約加群を求める問題は次の定理より解決される

定理 3.  $G$  が直既約  $\tilde{R}$ -加群に free に作用する時

(1)  $g \in G$  と  $\tilde{R}$ -加群  $V$  に対し  $F_{\lambda}(gV) = F_{\lambda}(V)$

(2)  $\tilde{R}/G = T_R$ . 且し  $\tilde{R}, \tilde{R}$  は  $\tilde{R}, R$  各々の

Auslander-Reiten Quiver.

即ち  $R$  の Quiver に  $\circ \longleftrightarrow \circ, \circ \curvearrowright$  等のサイクルがある場合 Galois Covering と取る事でサイクルのない Quiver をもつ  $R$ -category  $\tilde{R}$  の直既約加群を計算すればよい。

ところが  $R$  が有限表現型の場合、定理 3.(2) より  $\tilde{R}$  に対応する  $\tilde{R}$  の連結部分集合  $S$  を求めれば  $\tilde{R}$  は  $S$  の orbit として得られる。この  $S$  を求めるには  $S$  の直既約加群  $V$  で  $Ve_i \neq 0$  なる  $e_i$  について  $e = \sum e_i$  なる中等元を作り有限次多元環  $e\tilde{R}e$  を調べればよい。なぜなら加群の集合  $S$  が  $e\tilde{R}e$ -加群の中に現れるからである。

一方  $\tilde{R}$  は単連結に取ったので  $e\tilde{R}e$  も単連結である。

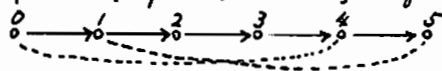
この場合、Auslander Reiten Quiver I の事実より  
 単純射影加群から出発して dimension type を計算  
 するのみで、Auslander-Reiten Quiver が求まる（この結果は  
 複数の人により証明されている）そこで Push-Down する事  
 より  $R$  の直既約加群ならびに  $\Gamma_R$  が計算できる

以上が Gabriel の Galois Covering の概要である。次節で  
 Galois Covering を適用する事でいくつかの例を具体的に  
 計算する。

## §6 具体例

①  $\begin{matrix} 0 & \xrightarrow{\sigma} & 1 \\ \xleftarrow{\delta} & & 0 \end{matrix}$   $(\sigma\delta)^2 = (\delta\sigma)^2 = 0$  なる Quiver と Relation で  
 定義される多元環の直既約加群と  $\Gamma_R$  を求める。

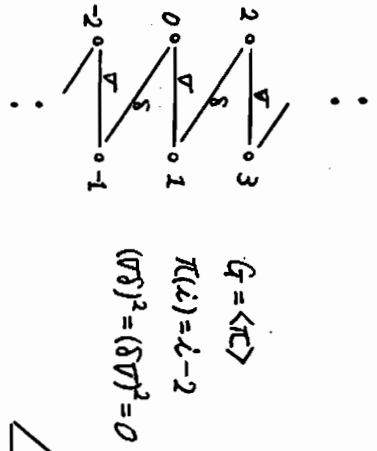
例 4.5.6 で調べたように次図の左端が Galois Covering である  
 $\tilde{R}$  の直既約加群を調べるには  $V_0 \neq 0$  か  $V_1 \neq 0$  で  $V_j = 0$  ( $j < 0$ )  
 なるものを調べればよい。簡単な計算からこの時  $V_j = 0$  ( $j > 5$ )  
 がわかる。そこで Quiver  $\tilde{R}_5$



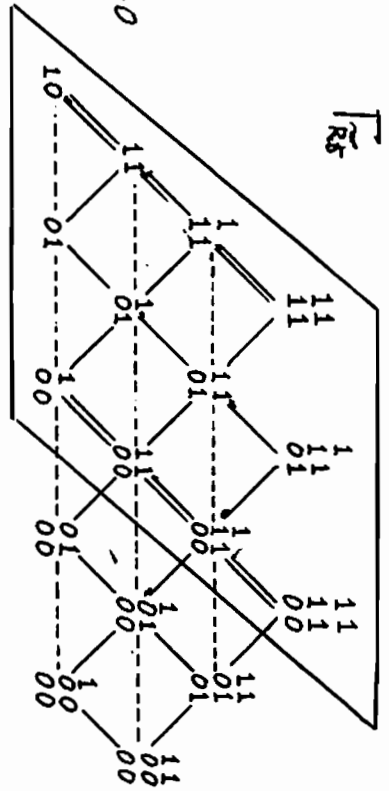
(点線は合成が 0 であることを示す) の多元環の直既約表現



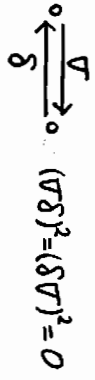
を求めればよい。右端が  $\Gamma_{R_5}$  である



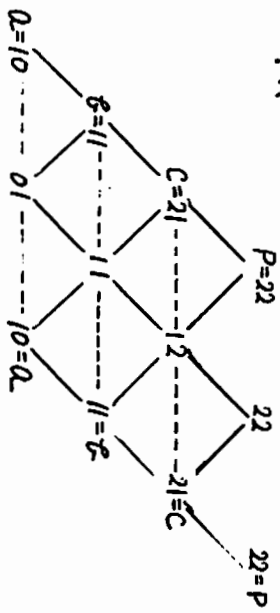
$\Downarrow F$  (Covering Functor)



$\Downarrow F_A$  Push-Down



$\Gamma_R$



$\Gamma_R$  において 2 本線 // は右の系列に  $\pi$  を作用させると  
 左の系列になっていることを示す。よって  $\square$  で囲んだ部分が  
 $\Gamma_R$  に対応している  $\Gamma_R$  の連結部分集合である。従ってこの部  
 分を *Push-down* すれば、下の  $\Gamma_R$  が求まる。アルファベット  
 a, b, c, ... の同じ記号で表された加群は同一のものである。  
 また点線  $\cdots$  は Auslander - Reiten translation と表す。

② 次に同じ Quiver で relation の違いで有限表現型  
 になるものと非有限型になる例を紹介する

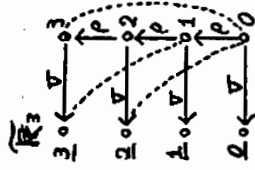


(1) 最初に relation  $0 = \nabla \rho^2 = \rho^3$  の場合を考える。

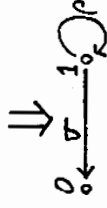
Galois covering として右図の Quiver, relation

並びに  $G = \langle \pi \rangle$  と考える。ただし  $\pi(i) = i-1$ ,

$\pi(i) = i-1$  と定義する。



$$\nabla \rho^2 = \rho^3 = 0$$

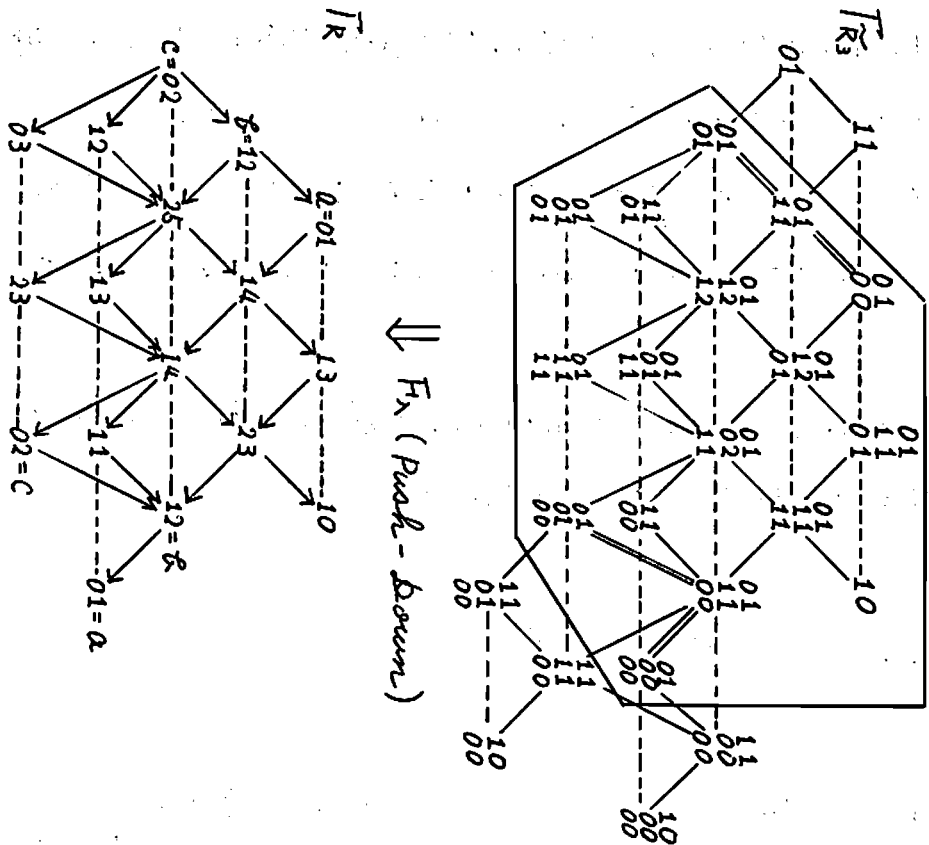


この場合  $V_2 \neq 0$  の  $V_0 \neq 0$  で  $V_i = 0 (i < 0)$

なる直既約  $\Gamma$ -加群を調べれば

よいので左図で表される多元環上  $\nabla \rho^2 = \rho^3 = 0$

の直既約加群を求めればよい。



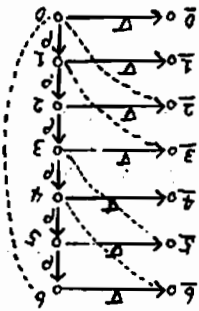
この例は  $\pi$ -orbit は常に射影加群で始まり入射加群で終わる。単連結でない  $\Gamma_R$  をもつ例になっている。  
 また加群の構造を  $\Gamma_R$  の中の  $\frac{01}{12}$  を例にとって調べてみる。この加群は

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{array}{c} R \\ \downarrow 1 \\ R \end{array} \oplus \begin{array}{c} R \xrightarrow{1} R \\ \downarrow 1 \\ R \end{array} \oplus \begin{array}{c} R \xrightarrow{1} R \\ \downarrow 1 \\ R \end{array} & \text{と部分加群} & \begin{array}{c} R \\ \downarrow 1 \\ R \end{array} \text{で}
 \end{array}$$

局所有有限型でなく、これから \$R\$ は有限表現型でなく、従って \$2\$ 次 \$n\$ 定理から \$R\$ は有限表現型でなく、即ち \$R\$ は

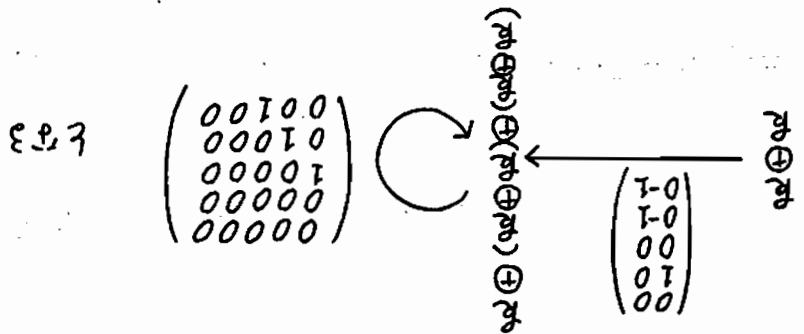
\$\pi\_3\$ dimension type \$\in \mathcal{C}\$ 直既約加群から出た \$< 3\$ の \$R\$ を計算すると \$16\$ 列に

$\Delta p^2 = p^6 = 0$

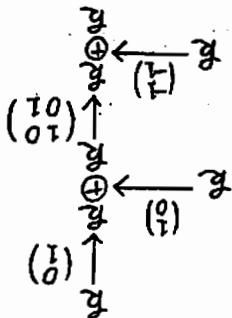


同様に Galois covering を考え右図の Quiver で表される多元環上の直既約加群を調べたいとわかる。

(2) 次は  $0 = \Delta p^2 = p^6$  の関係を考える



従って Rank-down を取ると \$R\$ の \$25\$ の加群は



商を取ると \$T\$ の \$3\$ の

と \$3\$

ない事がわかる

定理 4 (Bongary and Ringel)

$Q$  が tree の時  $kQ/I$  が有限表現型なら直既約加群の dimension type の各成分は 6 以下である。

最後に、直接参考にした論文を掲げておく。

[1] K. Bongary and C. M. Ringel, Representation-finite tree algebras, Lecture Notes 903

[2] K. Bongary and P. Gabriel, Covering spaces in Representation theory, Invent. math 65, 331-378 (1982).

[3] P. Gabriel, The Universal Cover of a Representation Finite Algebra. Lecture Note 903.

# On representations of BOCSS's

山形 邦夫

筑波大学 数学系

半順序集合の表現の研究が多元環の研究に極めて重要な役割を演ずることは、例として Nazarova-Rojter による [2] などによりよく知られている。本稿でもみよように、簡単な多元環の場合でさえ、その表現を“自然”な方法で求めようとすると、その過程において多元環とは異なり半順序集合の表現が現われてくる。そして、半順序集合の表現がわかれば、(またその多元環に戻って) 多元環の表現が決定される。ここに基本的な考え方があつた。つまり、Nazarova-Rojter の考えは、多元環の研究をその中でのみ扱うのではなく、多元環を含むより大きな世界に拡張してその中で考えれば、多元環の研究はより容易になるだろう、ということである。では、その“世界”というのは何か？ これが Rojter により発見された BOCSS の理論である。BOCSS とは、多元環上の Coalgebra の別命である。Rojter を中心とする Kien の研究者グループ

は、半順序集合の表現という意味を、多元環の表現を含む形で形式化(カテゴリー化)しようと言及してきた。はじめは、differential graded category (DGC)としてとらえられた [1, 4]。しかし、基礎的なことを調べるのに非常に複雑性を伴うところがあり、別な方法が期待された。これに成功して得られたのか、DGCと同値な概念である Bocs とよばれるものなのである。

本稿の目的は、Simson 氏に対する Bocs の重要な応用についての解説 [3] を読むために、必要な用語を説明することにあるが、半順序集合の表現の研究になぜ coalgebra が出現してきたのかについての説明を言及しようと努めた。もちろん、Rojter がどのようにしてそれを発見していったのか、その糸口等については私は知らない。なお、本稿は [5] に基づく解説である。扱う体は代数的閉体とし  $K$  で表わす。多元環は、単位元をもち (特に断らない限り)  $K$  上の有限次元なものであるとする。多元環  $R$  上の有限生成左加群の成す圏を  $\text{mod } R$  で表わす。また、半順序集合の表現についての定義は [6] を参照下さい。

## 1. 多元環と加群

1.1 多元環  $R$  を代数的閉体  $K$  上の (有限次元) 多元環とし、直線的射影加群への直和分解を

$R = P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$  とする。additive category  $A$  を次のように定義す: objects は  $\{1, 2, \dots, n\}$  で、 $i$  から  $j$  への hom-set  $A(i, j)$  を  $e_j R e_i$  とする。

morphisms の積は  $R$  の元としての積を考へる。

このようにして得られた category  $A$  は次の3つの性質をもつ。

(i) objects は有限個、

(ii) hom-set は  $K$ -vector space であり、

morphism による積は bilinear である。

(iii) 有限個の morphisms を生成元としてもつ。

この3つの性質を満たす additive category を 有限生成  $K$ -category (f. g.  $K$ -category) という。

逆に、f. g.  $K$ -category  $A$  ( $\text{Obj } A = \{1, 2, \dots, n\}$  とおく) が与えられたとき、

$R = \bigoplus_{i, j \in \text{Obj } A} A(i, j)$  とおくと、 $R$  は自然に商環として

$K$  上の多元環になり、これに対応する中算元を  $e_i$  とおくと、単位元  $1_R = \sum_{i=1}^n e_i$  をもつ。



(注意): 上の対応において, 直和因子  $P_i$  のとり方の違いは, カッコ内同値の違いしか生じないことに注意しよう。

これ等のことから, 多元環と f.g.  $K$ -category が同じものであることがわかる。多元環を category とし扱うのは, 環としての構造を 直線的射影加群と生成元とによってとらえる (グラフで表わすのがこれに相当する) ということを意味する。quiver という概念はこの立場に立ったものである。ここで: category  $A$  の quiver とは, morphisms の生成系を  $\{\varepsilon_i \mid i \in \text{Obj } A\} \cup \{\alpha_i^k \mid i \text{ から } j \text{ への非同型な morphism } \}$  とおくと,  $j, \alpha_i^k$  に対応して  $i$  から  $j$  への arrow  $i \rightarrow j$  をひいて得られる (方向をもつ) グラフ (vertex は  $A$  の object とする) のことである。これを  $Q(A)$  と表す。

例 多元環  $R = \begin{pmatrix} K & K & K \\ 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & K \end{pmatrix}$ ,

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P_1 = e_1 R, P_2 = e_2 R, P_3 = e_3 R$$

に対し, category  $A$  は,  $\text{Obj } A = \{1, 2, 3\}$ ,

$A(i, j) = e_j R e_i$  ( $1 \leq i, j \leq 3$ ) である。また,

$e_1 R e_2 = K e_1 a e_2$ ,  $e_1 R e_3 = K e_1 b e_3$  とおくと.

$\{e_1, e_2, e_3, e_1 a e_2, e_1 b e_3\}$  が  $R$  の生成元であるから.

これを  $A$  の morphisms とみると.  $A$  の quiver は

$$2 \longrightarrow 1 \longleftarrow 3$$

である.

f.g.  $K$ -category  $A$  から f.g.  $K$ -category  $B$  への functor には. 対応する多元環  $R_A$  から  $R_B$  への (多元環としての) 準同型写像が対応する (ただし. ここでいう functor とは.  $K$ -linear なもの考えている).

1.2 加群 多元環の表現という言葉は

行列表現という言葉に古くから使われている.

多元環と category が対応するが (1.1), このとき表現あるいは加群という概念がどのように category における概念と対応するのか. 次にこれを調べよう.

まず.  $R$  を多元環とし.  $A$  をそれに対応する category とする.  $R$  から  $K^{(m)}$  ( $K$  上の  $m$  次正方行列全体の成す環) への (多元環としての) 準同型写像  $\rho$  を  $R$  の表現としい. 右  $R$ -加群  $M$  と  $\rho$  に対応する. すなわち.

$M$  は基底  $\{x_1, \dots, x_m\}$  をもち、 $r \in R$  に対して  
 $\rho(r) = (r_{ij})$  ( $r_{ij}$  は  $(i, j)$ -成分) とおけば、 $x_i r = \sum_j r_{ij} x_j$   
 となる構造をもつ加群である。この右加群  $M$  に対して、

$A$  から  $\text{mod } K (=: V)$  への contravariant functor  
 $F$  が対応する。つまり、 $F(i) = M e_i$  ( $i \in \text{Obj } A$ ) とお  
 き、morphism  $\alpha$  に対応する元  $r \in R$  に対して、

$m r = F(\alpha)(m)$  ( $m \in M$ ) によつて  $R$  の (右からの)  
 作用も定義すれば、 $M$  は右  $R$ -加群になる。従つて、

$R$  の表現  $\leftrightarrow$  右  $R$ -加群  $\leftrightarrow$  contravariant functor  $A \rightarrow V$   
 という対応が得られる。よつて、 $A$  から  $V$  への functor を  
 $A$  の表現といい、 $R$ -加群を category  $A$  上の加群 と  
 いうことができる。

以上でみえたのは、右加群と contravariant  
 functor との対応についてであつたが、左加群についても  
 全く同様にして、

$R$  の表現  $\leftrightarrow$  左  $R$ -加群  $\leftrightarrow$  covariant functor  $A \rightarrow V$   
 の対応が成立する。以下、左加群 (covariant) を考へる。

例  $2(A) : 2 \xrightarrow{\alpha} 1 \xleftarrow{\beta} 3$  の表現は、 $V_i$  を  
 有限次元ベクトル空間とし、 $V_2 \xrightarrow{f_\alpha} V_1 \xleftarrow{f_\beta} V_3$  であり、  
 ここで  $f_\alpha, f_\beta$  は線形写像。これに対応する  $A$  上

の加群は、 $V_1$  の  $V_2$  の  $V_3$  で、 $A$  の作用は  $f_\alpha, f_\beta$  によって  
ひきかえられる。

1.3 両側加群 加群と functor の対応は、自然に両側加群と bifunctor の対応を生ずる。

多元環  $R$  と category  $A$  を (1.2) においたものと  
する。bifunctor  $F: A \times A^{op} \rightarrow V$  (ここで、 $A^{op}$  は  
 $A$  の opposite category) に対し、 $M = \bigoplus_{i,j \in \text{obj } A} F(i,j)$   
とみると、 $M$  は  $R$ -bimodule になり ( $A$  においた)  
identity morphism  $\varepsilon_i: i \rightarrow i$  に対応する  $R$  の元  
を  $e_i$  とおくと、 $M = \bigoplus_{i,j} e_i M e_j$  となる。  $e_i M e_j$   
を  $M(i,j)$  で表わすことにすると、逆の操作で、 $F(i,j) =$   
 $M(i,j)$  という関係よりすべし得られる。

さて、 $\{m_{ij}^k \in M(i,j)\}$  を  $M$  の生成系とし、 $m_{ij}^k$   
に対応させ、quiver  $Q(A)$  の中に arrow  $j \xrightarrow{k} i$   
(矢印は、quiver においた  $\rightarrow$  と区別させるために、真意に  
で描く) を書き入ることにすると、両側加群  $A^M A$   
から (方向をもつ) bigraph が得られる。

例  $Q(A): 2 \xrightarrow{\alpha} 1 \xleftarrow{\beta} 3$  ,

$$R = \begin{pmatrix} K & K & K \\ & K & 0 \\ 0 & & K \end{pmatrix} \cong M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & K \\ & 0 & 0 \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \text{ とおくと,}$$

$M$  は  $R$  両側加群で:  $e_i M e_j \neq 0 \Leftrightarrow i=1, j=3$ , であるから, 対応する bigraph は

$$2 \xrightarrow{\alpha} 1 \xleftarrow{\beta} 3$$

この解説では, 多元環というかわりに category という用語を使うが: 実際には上で見たように, 両者を区別する理由は何もない。単に, グラフ的な記述を意識することにはすぎない。以下, 扱う category は f.g.  $k$ -category であるとし  $A$  と表わす。  $A$  上の両側加群を, 両側加群とは有限生成であると仮定する。

## 2. BOCS とその表現

2.1 BOCS の定義の背景 category  $A$  が与えられると、その表現の成す category が "自然" に定義できる。いわゆる、通常の functor category  $(A^{op}, V)$  である。しかし、ここでの目的は、半順序集合の表現も category を成すように "表現の category" を定義したいのである。しかも、 $(A^{op}, V)$  もその定義の中に含まれるようにしたい。まず、object は  $A$  の表現とする。問題は morphism をどのように定義するかということである。 $(A^{op}, V)$  にかけるように natural transformation を採用するならば、表現の category とし求めるものは  $(A^{op}, V)$  そのものである。もし不都合ならば、natural transformation の定義を変えて新たに "functor category" を造らねばならぬことになる。結論をいって、定義を変えなければならぬ！ では、どのようにするかを見子ために、簡単な半順序集合の表現について考察してみよう。

半順序集合  $\{a < b\}$  の表現は、定義により、行の数が同じ 2 つの行列  $W_2, W_3$  を並べてできる行列  $W = W_2 W_3$  であり、次の字換で得られ

る行列  $W'$  が  $W$  と同値な表現 ( $W' \simeq W$ ) である:

- (i)  $W_2$  の列基本変換,  $W_3$  の列基本変換,
- (ii) 行列  $W$  の行基本変換,
- (iii)  $W_2$  の任意の列を  $k$  倍し,  $W_3$  の任意の列に  $k$  を加える。

さて,  $W_2, W_3$  を線形写像に対応する行列とみなせば: 線形写像  $W_2: V_2 \rightarrow V_1, W_3: V_3 \rightarrow V_1$  が得られる。(  $V_1, V_2, V_3$  は有限次元ベクトル空間 )。

この表現を  $(W, V)$  と表わすことにすると, 問題は, 2つの表現  $(W, V), (\bar{W}, \bar{V})$  の間の morphism をどのように定義し, かつ, morphism の積をどう定義するかである。すでに与えられている "morphism" は, 同値表現を定義する (i) (ii) 及び (iii) である。これを行列で言い換えると,  $U_i: \bar{V}_i \rightarrow V_i$  を正則線形写像,  $X: \bar{V}_3 \rightarrow V_2$  と (任意の線形写像とすれば):

$$\bar{W}_2 = U_1^{-1} W_2 U_2, \quad \bar{W}_3 = U_1^{-1} W_3 U_3 + U_1^{-1} W_2 X$$

となる。すなわち, " $(\bar{W}, \bar{V}) \simeq (W, V) \iff$

或は 正則 行列  $U_1, U_2$  と 或は 行列  $X$  が存在して,  $U_1 \bar{W}_2 = W_2 U_2, U_1 \bar{W}_3 = W_3 U_3 + W_2 X$  が成り立つ。よって, morphism  $\varphi: (\bar{W}, \bar{V}) \rightarrow (W, V)$

とし、(上の関係から「正則」という条件をおとした)次の  
 性質をもつ行列  $U_1, U_2, U_3, X$  の組と考へよ:

$$\begin{cases} U_1 \bar{W}_2 = W_2 U_2 \\ U_1 \bar{W}_3 = W_3 U_3 + W_2 X, \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $U_i: \bar{V}_i \rightarrow V_i$ ,  $X: \bar{V}_3 \rightarrow V_2$  は(必ずしも正則  
 でない)線形写像に対応する行列である。

注意 (iii)を除いたとき(すなわち、 $X=0$  のとき)  
 が: quiver  $2 \rightarrow 1 \leftarrow 3$  の表現であり、上に定義した  
 morphism は、quiver の表現の間の morphism に  
 なる。morphism  $\varphi = (U_1, U_2, U_3, X)$  を  $(U, X)$  と書く。

Object, morphism の定義はこれで出来たが:  
 morphisms の積を定義しなければならぬ。次に  
 これを説明する。

$$(U, X): (\bar{W}, \bar{V}) \rightarrow (W, V)$$

$$(\bar{U}, \bar{X}): (\bar{\bar{W}}, \bar{\bar{V}}) \rightarrow (\bar{W}, \bar{V})$$

を 2 つの morphisms とする;

$$U_1 \bar{W}_2 = W_2 U_2, \quad U_1 \bar{W}_3 = W_3 U_3 + W_2 X \quad (2)$$

$$\bar{U}_1 \bar{\bar{W}}_2 = \bar{W}_2 \bar{U}_2, \quad \bar{U}_1 \bar{\bar{W}}_3 = \bar{W}_3 \bar{U}_3 + \bar{W}_2 \bar{X}. \quad (3)$$

(2) を (3) に代入すると。



$$\begin{cases} (U_1 \bar{U}_1) \bar{W}_2 = W_2 (U_2 \bar{U}_2), \\ (U_1 \bar{U}_1) \bar{W}_3 = W_3 (U_3 \bar{U}_3) + W_2 (X \bar{U}_3 + U_2 \bar{X}). \end{cases} \quad (4)$$

従って、(4)が条件(1)を満たすためには、 $\gamma$ より, morphism  $(\bar{W}, \bar{V}) \rightarrow (W, V)$  を定義するためには、

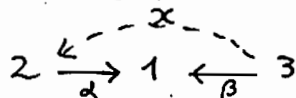
$$\bar{U}_i = U_i \bar{U}_i, \quad \bar{X} = X \bar{U}_3 + U_2 \bar{X} \quad (i=1, 2) \quad (5)$$

を満たさなければならぬ。よって、 $(U, X)$  と  $(\bar{U}, \bar{X})$  の 乗表 とし、(5)によるときる行列  $\bar{U}, \bar{X}$  を用いる。

$$(\bar{U}, \bar{X}) \circ (U, X) = (\bar{U}, \bar{X}) \quad (6)$$

と定義するのである。

以上のことを一般化するために、もう少しみやすくするために、グラフを用いて言い換えてみよう。まず、半順序集合の表現は、(1)を満たす"わかる"ように, bigraph



の表現と考えられる。各表現を記号的に、

$$(W, V) = 2 \begin{array}{c} \xleftarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} 1 \begin{array}{c} \xleftarrow{\beta} \\ \xrightarrow{\alpha} \end{array} 3, \quad (\bar{W}, \bar{V}) = 2 \begin{array}{c} \xleftarrow{\bar{\alpha}} \\ \xrightarrow{\bar{\beta}} \end{array} 1 \begin{array}{c} \xleftarrow{\bar{\beta}} \\ \xrightarrow{\bar{\alpha}} \end{array} 3, \quad (\bar{W}, \bar{V}) = 2 \begin{array}{c} \xleftarrow{\bar{\alpha}} \\ \xrightarrow{\bar{\beta}} \end{array} 1 \begin{array}{c} \xleftarrow{\bar{\beta}} \\ \xrightarrow{\bar{\alpha}} \end{array} 3,$$

また、 $U, \bar{U}_i, \bar{U}_i$  も、 $u_i, \bar{u}_i, \bar{u}_i$  と記号で表わすことにすると、(2), (3), (5)は、次のように表わせる：

$$\begin{cases} u_1 \bar{\alpha} = \alpha u_2, & u_1 \bar{\beta} = \beta u_3 + \alpha X \end{cases} \quad (2')$$

$$\begin{cases} \bar{u}_1 \bar{\alpha} = \bar{\alpha} \bar{u}_2, & \bar{u}_1 \bar{\beta} = \bar{\beta} \bar{u}_3 + \bar{\alpha} \bar{X} \end{cases} \quad (3')$$

$$\bar{u}_i = u_i \bar{u}_i, \quad \bar{X} = X \bar{u}_3 + u_2 \bar{X} \quad (5')$$

実際  $\kappa$ : (2') (3') (5') から、もとの表現を得るには、

単なるおき換え:  $u_i \mapsto U_i, \bar{u}_i \mapsto \bar{U}_i, \bar{\bar{u}}_i \mapsto \bar{\bar{U}}_i, \alpha \mapsto W_2,$   
 $\bar{\alpha} \mapsto \bar{W}_2, \beta \mapsto W_3, \bar{\beta} \mapsto \bar{W}_3, x \mapsto X, \varepsilon$  とすればよい。

$\therefore$  Trigraph  $2 \xrightleftharpoons[\beta]{\alpha} 1 \xleftarrow{\beta} 3$  は、 $A$  (つまり  $2 \xrightarrow{\alpha} 1 \xleftarrow{\beta} 3$  により与えられる category) 上の  $\{x, u_1, u_2, u_3\}$  で生成される両側加群  $M$  を考えることができる。但し、

$$u_1 \alpha = \alpha u_2, \quad u_1 \beta = \beta u_3 + \alpha x \quad (7)$$

により与えられる  $A$ -加群の構造をもつものである。

$$\Psi(x) = x \otimes u_3 + u_2 \otimes x \in M \otimes_A M \quad (8)$$

$$\Delta(u_i) = \varepsilon_i \in A$$

とある。  $\Psi: M_A \rightarrow {}_A M \otimes_A M_A, \Delta: {}_A M_A \rightarrow {}_A A_A$

は両側  $A$ -加群の間の準同型写像であり、次の

(I), (II) をみたす:

$$(I) \quad \begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\Psi} & M \otimes_A M \\ \Psi \downarrow & \cup & \downarrow \varepsilon \otimes \Psi \\ M \otimes_A M & \xrightarrow{\varepsilon \otimes 1} & M \otimes_A M \otimes_A M \end{array}, \quad \begin{array}{ccc} M \otimes_A M & \xleftarrow{\Psi} & M \xrightarrow{\Psi} M \otimes_A M \\ \Delta \otimes 1 \downarrow & \cup & \parallel \cup \downarrow \varepsilon \otimes \Delta \\ A \otimes M & = & M = M \otimes_A A \end{array}$$

$$(II) \quad \Delta: M \rightarrow A \quad \text{epimorphism}$$

以上のことは、 $M$ の生成元  $u_1, u_2, u_3$  及び  $x$  に、それぞれ、表現  $\bar{W}$  から  $W$  への線形写像  $U_1, U_2, U_3$  及び  $X$  を対応させるのが "morphism" であり、(8) において形式的に、morphism  $(U, X)$  を  $\otimes$  の第1成分に、morphism  $(\bar{U}, \bar{X})$  を第2成分に、代入したものが、積  $(U, X) \circ (\bar{U}, \bar{X})$  である... ことを示している。

従って、ここでおくのは、(I)(II)が "morphisms" の積を与えるものであり、BOCS 及びその表現の category の定義を想像するのは容易であろう。

2.1 定義 両側加群  ${}_A M_A$  に対し、上の (I)(II) をみたすような morphisms  $\Psi, \Delta$  が存在するとき、 $(M, \Psi, \Delta)$  を (単に  $M$  という場合もある) BOCS という。(BOCSとは、bimodule over a category with comodule structure の略文字をとったもの。) category  $A$  の表現を bocs  $M$  の 表現 という。

$M$  の表現  $X, Y$  に対し、 ${}_A M_A$  から  ${}_A \text{Hom}_k(X, Y)_A$  への (両側加群としての) 準同型写像を、 $X$  から  $Y$  への morphism という。

morphism  $f: X \rightarrow Y$  は、各 objects の組  $i, j$  に対し、線形写像  $f_{ij}: M(i, j) \rightarrow \text{Hom}_k(X(i), Y(j))$  をひきおこし、 $m \in M, a \in A$  に対し、

$$(i) \quad f(am) = Y(a) f(m)$$

$$(ii) \quad f(ma) = f(m) X(a)$$

をみたす。(2.1)で考えたのは、この組  $(f_{ij})$  を使ったものであるが、これをまとめて言い表わしたのが、ここにあらたえた定義である。

morphisms  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  に対し、 $\Phi(m) = \sum_i m_i \otimes m'_i$  ( $\forall m \in M$ ) とおくと、

$$(g \circ f)(m) := \sum_i g(m_i) f(m'_i)$$

は、 $m$  により一意にきまる値であり、morphism  $g \circ f: X \rightarrow Z$  を得る。この演算  $\circ$  により、morphisms の積を定義する。

以上の定義により、BOCS  $M$  の表現は、category を形成する。これを  $\mathcal{R}(M)$  と表わす。

注意  $M$  の表現  $X$  に対し、

$$(X \Delta)(m) := X(\Delta(m)), \quad \forall m \in M$$

と定義して morphism  $X \Delta: X \rightarrow X$  をきめると、

$\mathcal{R}(M)$  において、 $X \Delta = \varepsilon_X$  ( $X$  における identity)。

### 3 BOCsの生成系と関係式

両側加群から、その生成系に従って、bigraphを作るこゝからできた(1.3)のことを考へれば、両側加群であるBOCSにもbigraphを対応させるこゝからできる。では、このbigraphにどのような(arrowsの間の)関係式を与えれば、逆にBOCSを定義できるのか。この節ではこの問題について考へる。

#### 3.1 DGC (differential graded category)

BOCSにおける関係式を得るのに differential とよばれる operator が必要なので、(こゝでは必ずしも必要ではないが) ついでに DGC についても定義を置いておくことにする。

$\mathcal{T}$  をある category とする。次の性質 (i) (ii) (iii) をみたすとき、 $\mathcal{T}$  を  $(K$ 上の) graded category (GC) という：

(i) 任意の objects  $x, y$  と任意の自然数  $n$  ( $0 \leq n < \infty$ ) に対し、 $K$ -vector space  $T_n(x, y)$  が対応し、次をみたす：

- (i)  $T(x, y) = \bigcup_m T_m(x, y)$  (集合の和集合),
- (ii)  $\alpha \in T_m(x, y), \beta \in T_n(y, z) \Rightarrow \beta\alpha \in T_{m+n}(x, z)$ ,

(iii)  $T(x, y)$  の元はすべて線形である。

$T_n(x, y)$  の元  $t$  の 次数 を  $n$  とし、 $\text{deg } t = n$  と記す。graded category  $T$  は、次のような作用  $\partial$  が定義されるとき、differential graded category (DGC) とよばれる。  $\partial$  は  $T$  における differential という；

任意の objects  $x, y$  と任意の  $n \geq 0$  に対し、linear operator  $\partial : T_n(x, y) \rightarrow T_{n+1}(x, y)$

は、 $\partial^2 = 0$ ,

(Leibniz formula)  $\partial(t_1 t_2) = \partial(t_1) t_2 + (-1)^{\text{deg } t_1} t_1 \partial(t_2)$ ,  
をみたす。

category  $A$  との bimodule  $M$  がある。tensor category  $T(M)$  をつくることはできる。つまり、

$$T(M) = A \oplus M \oplus (M \otimes_A M) \oplus \dots \oplus (\overbrace{M \otimes_A \dots \otimes_A M}^n) \oplus \dots$$

をつくらせよ (一般に、 $T(M)$  は有限次元ではない)。

$$T_0 = A, T_1 = M, T_n = \overbrace{M \otimes_A \dots \otimes_A M}^n \quad (n > 1) \text{ とおいて}$$

$T(M)$  は GC になる。我々の bimodule の tensor category と同型になる GC を semi-free GC という。しかし、通常 GC といふのは、この semi-free

たものを指し、こゝでも以下、GCは semi-free であると仮定する。

$B$  を任意の bigraph (arrow は  $\rightarrow$  と  $\dashrightarrow$  で区別される) とし、 $\rightarrow$  に degree 0 を、 $\dashrightarrow$  に degree 1 を対応させ、path  $\alpha := \alpha_s \alpha_{s+1} \cdots \alpha_n$  には、 $\deg \alpha = \sum_{1 \leq i \leq n} \deg \alpha_i$  とおくことにする。ただし、各  $\alpha_i$  は  $\rightarrow$  または  $\dashrightarrow$  の arrow を示す。  $x$  から  $y$  に至る次数  $n$  の paths による  $(k+a)$ -次結合全体を  $T_n(x, y)$  で表わすことにすると ( $x, y$  は  $B$  における vertices)、graded category  $T(k, B)$  が得られる。この GC を bigraph  $B$  による生成される free GC とよむ。次数 1 の paths 全体をつくる bimodule (i.e. 次数 0 の paths 全体をつくる category 上の bimodule) を、free bimodule という。

注意 次数 0 の paths 全体は category を成し、free category (或いは path algebra) とよばれる。一般に、任意の  $k$ -category は、或る free  $k$ -category の factor になる、とされる。関係式をもつ quiver とは表わされる。こゝでいう free bimodule

の定義は、厳密に言うならば: "free category 上の free bimodule" ということに注意し、通常の定義とは異なることに注意しよう。例としては、category  $A$  のものも、 $A$  上の bimodule  ${}_A A_A$  である (これを principal bimodule という) が、一般には関係を  $\otimes$  quiver とし表わされるから、ここでいう free module とは限らない。

3.2 BOCs の生成系  $(M, \Psi, \Delta)$  を  $A$  上の BOCs とする。  $\Delta$  の核  $\ker \Delta$  を BOCS  $M$  の核 といい、ここで  $B$  と表わすことにする。

$\Delta: M \rightarrow A$  は epimorphism だから、 $A$ -加群としての準同型写像  $\omega: A \rightarrow M$  で  $\Delta \omega = \text{id}_A$  をみたすものが存在する。object  $i \in A$  に対して identity  $\varepsilon_i: i \rightarrow i$  に対して、 $\omega(\varepsilon_i) \in M$  を  $u_i$  とおくと、 $\Delta(u_i) = \varepsilon_i$ 。任意の  $i \in \text{Obj } A$  に対して、 $\Psi(u_i) = u_i \otimes u_i$  をみたすような BOCs を normal という。以下、BOCS といふは、この normal BOCs を意味すると約束する。



任意の  $\alpha \in A(i, j)$ , 任意の  $x \in M(i, j) \cap B$  に対して、

$$\partial(\alpha) = \alpha u_i - u_j \alpha$$

$$\partial(x) = \bar{\psi}(x) - x \circledast u_i - u_j \circledast x$$

と表わす。  $\partial(\alpha) \in B$ ,  $\partial(x) \in B \otimes_A B$  とする。

$\partial$  は  $\text{GCT}(B) = A \otimes B \otimes (B \otimes B) \otimes (B \otimes B \otimes B) \otimes \dots$

における differential になる。つまり  $T(B)$  は DGC である。

$$\Sigma_0 = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}; A \text{ の生成系}$$

$$\Sigma_1 = \{x_1, \dots, x_t\}; B \text{ の生成系}$$

$$\Omega = \{u_1, \dots, u_m\}$$

と表わす。  $\Sigma := \Sigma_1 \cup \Omega$  は  $M$  の生成系になる。

(ただし "ただし" は、 $\forall m \in M(i, j)$  に対して、

$$m = \Delta(m) u_i + (m - \Delta(m)) u_j, \quad m - \Delta(m) \in B$$

従って、 $M$  の構造は、両側加群  ${}_A B_A$  と、DGC

$T(B)$  とによって、次の (I) ~ (IV) により決定される。

(I)  $\Sigma_0$  における関係、

(II)  $\Sigma_1$  における関係、

(III)  $\Sigma_1$  と  $\Omega$  の関係;  $\forall \alpha \in A(a(\alpha), b(\alpha))$

$$\text{に対して } \partial(\alpha) = \alpha u_{a(\alpha)} - u_{b(\alpha)} \alpha,$$

(IV)  $\forall x \in \mathcal{B}(a(x), b(x))$  に対し

$$\Psi(x) = x \otimes u_{a(x)} + u_{b(x)} \otimes x + D(x),$$

(V)  $\Psi(u_i) = u_i \otimes u_i,$

もちろぬ、 $\Delta$  は、 $\Delta(u_i) = E_i$  とおけばよい。(また  
仮定により、 $\Psi(u_i) = u_i \otimes u_i$  の式は normal BOCs  
に対する式をたすために得られたもので、一般には

(normal を仮定しなくても) 等しいとは限らない。

このことは、BOCS と DGC の一対一に対応する  
ことを示す。両側加群  $B$  の bigraph を

BOCS  $M$  の bigraph という。

注意 (1)  $B=0$  のときか: quiver にほかならない。

(2) (I) (II) が trivial (i.e. 関係をもたない) とい  
うことは、 $M$  が free bimodule であることを用  
する。

定義 写像  $h: \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \rightarrow \mathbb{N}$  を "任意

の  $y \in \Sigma_0 \cup \Sigma_1$  に対し、 $\mathcal{U}(y)$  が  $h(y') < h(y)$   
なる  $y'$  のみで表わされる" という性質をもつもの  
が存在するとき、 $M$  を triangular BOCs とい  
う。重要な理由がこれのみならず、帰納的の証明が  
可能にする条件でもある ([3] 参照)。

### 3.3 半順序集合は Bocs 半順序集合の表現

については、すでに深く研究されており、その重要さは前に指摘したとおりである。特殊な半順序集合を用いて Bocs の定義について説明した (3.1) が、一般の半順序集合の表現がどのようにして Bocs とみなされるのかについて説明しよう。半順序集合を少し一般化して扱おう。

$S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ ,  $S' = \{s'_1, s'_2, \dots, s'_n\}$  を 2 つの半順序集合とする。  $S, S'$  における順序を表わすのに、共に  $\leq$  という記号を用い、 $\leq$  が  $\leq$  のとき、 $<$  で表わすことにする。集合

$$B := S \cup S' = \{s_1, \dots, s_m, s'_1, \dots, s'_n\}$$

を次のようにして bigraph とみなす:

(i)  $\forall s_i \in S, \forall s'_j \in S'$  に対し、arrow  $\alpha(j, i):$

$s_i \rightarrow s'_j$  を  $\cup$ ,

(ii)  $s_i < s_j$  のとき、arrow  $x(i, j): s_j \dashrightarrow s_i$  を  $\cup$ ,

(iii)  $s'_i < s'_j$  のとき、arrow  $y(j, i): s'_i \dashrightarrow s'_j$  を  $\cup$ .

すなわち、各 arrow  $\alpha(j, i)$  に次数 0 を、 $x(i, j)$

及び  $y(j, i)$  に次数 1 を対応させる。bigraph

$B$  から生成される free GC を得る。differential  $D$

を次のように定義する:

$$D(d(j, i)) = \sum_{x_k < x_i} d(j, k) x(k, i) - \sum_{x_j' < x_i'} d(l, i),$$

$$D(x(i, j)) = \sum_{x_i < x_k < x_j} x(i, k) x(k, j),$$

$$D(y(j, i)) = - \sum_{x_i < x_k < x_j} y(j, k) y(k, i).$$

graded category  $T(K, B)$  の一般の元に対する  $D$  の作用は、Leibnitz formula と系集形性を使って自然な方法で定義する。これにより  $D$  は differential になるということがわかる (証明は単なる計算のみ)

$T(K, B)$  が DGC になることがわかる。 $T(K, B)$  における次数 0 の元全体を  $A$ , 次数 1 の元全体を  $B$  とおけば:  $A$  は category になり  $B$  は両側  $A$ -加群である。(  $A$  は  $\{\alpha(i, j)\}$  で、  $B$  は  $\{x(i, j), y(k, l)\}$  で生成されることに注意。) また、

$T(K, B) = T_{(A, B_A)}$  (tensor category) であるから、

以上のことにより、  $B \subset \{u_{s_i}, u_{s_j} \mid s_i \in S, s_j \in S'\}$

とよって生成される BOCSM が得られる (3.2)。

BOCSM の bigraph は  $B$  であり、  $\Sigma_0 = \{\alpha(i, j) \mid i, j\}$ ,  $\Sigma_1 = \{x(i, j), y(k, l) \mid i, j, k, l\}$ ,  $\Omega = \{u_{s_i}, u_{s_j} \mid i, j\}$

であることに注意しよう。とくに、 $S'$  (或いは  $S$ ) が  
 唯一点から成る場合が半順序集合  $S$  (或いは  $S'$ ) の  
 表現に相当する。例には、(3.1) における例では、

$S = \{a, b \mid a < b\}$  とおき、点から成る集合  $S' = \{c\}$  を  
 考え、上の結果に従って  $\text{high rank } B$  を考えれば、

$\circ \xrightarrow{\quad} \circ \xleftarrow{\quad} \circ$  を得る。半順序集合の BOCs は、

free triangular であることは容易に確かめられた。

例 triangular である BOCs の例:

$$B : \alpha \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} \begin{array}{c} \circ \\ \circ \end{array} x \quad , \quad \partial(\alpha) = \alpha x \alpha, \quad \partial(x) = 0.$$

$A$ :  $\alpha$  で生成される category :

$$A = k\varepsilon_1 \oplus k\alpha \oplus k\alpha^2 \oplus \dots = k[\alpha]$$

( $\alpha$  を変数とする多項式環)

$B$ :  $x$  で生成される両側  $A$ -加群

$$B = \bigoplus_{m, n \geq 0} k \alpha^m x \alpha^n \quad (\text{但し } \alpha^0 := \varepsilon_1),$$

$M$ :  $x \in u (:= u_1)$  で生成される両側  $A$ -加群

$$M = B \oplus \left( \bigoplus_{m, n \geq 0} k \alpha^m u \alpha^n \right).$$

$$T(B)_i(1, 1) = \bigoplus_{0 \leq m_i < \infty} k \alpha^{m_1} x \alpha^{m_2} x \dots \alpha^{m_i} x \alpha^{m_{i+1}}$$

$M$  は  $B$  を核とする BOCs である。

## 4 アルゴリズム

一つの例で説明しよう。これでも各点読みの意味が十分わかると思うし、一般の形での応用については [3] に詳しく載っているから。

いま、同じ行数の 2 つの行列  $S, T$  を並べ、  
行列  $W = S T$  をつくる。

- (i)  $S$  及び  $T$  において、それぞれ列基本交換をほどこす、
- (ii)  $W$  の行基本交換をほどこす。

この 2 つの操作のもとで行列  $W$  の“標準形”を求めよ、  
という問題も考えよう。これは、(i), (ii) により得られる行列を同値であるということにすれば、(i) (ii) のもとでの同値類を求めよ、という意味である。さて、この問題の答えを与えることは簡単なことであるが、アルゴリズムの説明をするために、一つの變形過程について注目することしよう。まず、この問題は、

$$2 \xrightarrow{\alpha} 1 \xleftarrow{\beta} 3$$

という guiver の表現の問題であることを注意しておく。  
(表現  $v_2 \xrightarrow{f_\alpha} v_1 \xleftarrow{f_\beta} v_3$  において、 $f_\alpha, f_\beta$  と行列  $S, T$  とが対応する。(1.2) 参照) この guiver における vertices  $1, 2, 3$  を示すために、行列  $W$  を

$$W = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ \end{array} & \begin{array}{c} S \\ T \end{array} \end{array}$$

と番号をつけて表わしておくことにする。

(a) まず、 $S$  に対して、行及び列の基本変換を行えば、

$S$  を  $\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  ( $E$  は適当な次数の単位行列を表わす

以下同様) に変換できる。その結果、 $T$  の方え (条

件 (ii) による) 変形する。これを  $\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$  で表わせば、

$$W = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ \end{array} & \begin{array}{c} S \\ T \end{array} \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c|c} W_1 & \\ \hline W_2 & \end{array} = \begin{array}{c|c|c} & \begin{array}{c} 2 \\ 3 \end{array} & \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ \end{array} & \begin{array}{c|c} E & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} T_1 \\ T_2 \end{array} \end{array}$$

(b)  $S$  の標準形  $\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  を変え、 $\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$  の変形を考す。

$W_2$  に対しては任意の行基本変換をほどこせる。また

$W_1$  に対しては、行基本変換を行えば、このとき一番

左側の単位行列  $E$  は別の形の行列  $X$  に変わるか

もしもない。しかし、 $\begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix}$  に列基本変換を行えば、再び

$X$  を単位行列  $E$  にもどすことができる。だから、

$T_1$  に対しても行基本変換を行えばよいことがわかる。

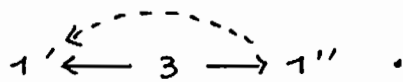
従って、行列

に対して許容される操作は、

$$T = \begin{bmatrix} T_1 \\ \hline T_2 \end{bmatrix}$$

- (i)  $T_1, T_2$  どちらかの中で行基本変換を行う。  
 (ii) 行列  $T$  の列基本変換を行う。  
 (iii)  $T_2$  の任意の行をスカラー倍し、 $T_1$  の任意の行に加えることを許す。

の3種類である。これは、半順序集合  $\{1'' < 1'\}$  の表現にはかたがたない。対応する digraph は、



(3.1) における半順序集合の相対の場合であることに注意)。このことは、quiver  $\bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet$  の表現の分類問題が半順序集合  $\{ \bullet < \bullet \}$  の表現のそれと帰着されることを示している。

3.2. 上の問題が: BOCs  $2 \xrightarrow{\alpha} 1 \xleftarrow{\beta} 3$ ,  $\mathcal{D}(\alpha)=0$ ,  $\mathcal{D}(\beta)=0$ , の表現の問題であることは、すでに述べた通りであるか: 上の手続き (a) (b) を記号化し、一般の場合を想像できるようにしよ。

(a) については、行列  $S$  を線形写像  $V_2 \xrightarrow{f_2} V_1$  とみれば:  $S$  の標準形を求めよということは、

$$f_2 := \begin{pmatrix} 0 & f_2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : V_2 = V_2' \oplus V_2'' \rightarrow V_1 = V_1' \oplus V_1'' ,$$

$$f_2 : V_2'' \xrightarrow{\sim} V_1' \quad \text{同型}$$



と対応する形写像をもつ表現  $V_2 \xrightarrow{f'_\alpha} V_1 \xleftarrow{f_\beta} V_3$  を  
 考えようということである。従って次の操作を得る:

reduction of an arrow  $\alpha$  with  $\mathcal{D}(\alpha) = 0$

$\mathcal{D}(\alpha) = 0$  対する arrow  $\alpha$  に対し、category  $A$   
 に形式的に記号  $\alpha^*: 1 \rightarrow 2$  をつけ加え、条件

$$(i) \alpha \alpha^* \alpha = \alpha, \quad (ii) \alpha^* \alpha \alpha^* = \alpha^*$$

を加え、category  $\hat{A} = A(\alpha^*)$  をつく (von  
 Neumannian).  $M$  に  $\alpha^*$  を作用させ、BOCS  
 $M(\alpha^*)$  をつく;  $M(\alpha^*) = \hat{A} \underset{A}{\otimes} M \underset{A}{\otimes} \hat{A}$  ( $\Psi, \Delta$   
 によりとも自然に定義する) こととする。

$$\mathcal{D}(\alpha^*) = \alpha^* u_1 - u_2 \alpha^* \neq 0$$

である。  $\chi = \mathcal{D}(\alpha^*)$  とおくと、 $M$  の bigraph に  
 arrow  $1 \xrightarrow{\chi} 2$  を付加した  $M(\alpha^*)$  の bigraph  
 が得られる。上の例では、 $2 \xleftarrow{\frac{\chi}{\alpha}} 1 \xleftarrow{\beta} 3$  を得る。

(b) は、すでに標準形として得られた部分  $\begin{matrix} \boxed{E} \\ \vdots \\ \boxed{0} \end{matrix}$  を  
 除いたところで独立に議論する、ということである  
 から、basic category (i. e. basic algebra)  
 を得るという操作に相当する。ここで次の操作を得る。

regularization category  $A(\alpha^*)$  の basic  
 category をつく;  $A(\alpha^*)$  の元  $\beta$  の同型類

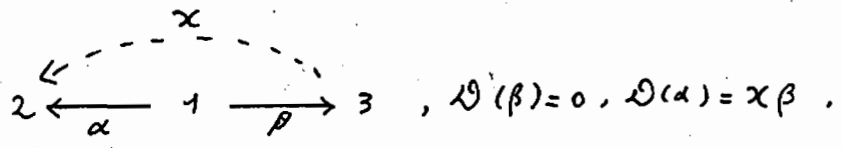
$(\beta \cong \beta' \stackrel{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \exists r, r' \text{ n.t. } \beta = r'r, \beta' = rr')$  の  
 中から代表元をとり、それを object とする category  
 $\overline{A(\alpha^*)}$  をつくる。但し、morphism  $\varphi: \beta \rightarrow \beta'$  とは、  
 $\varphi = \beta'\varphi = \varphi\beta$  をみたすものを考えよ。  $A(\alpha^*)$  における  
 primitive idempotents は、  $\varepsilon_i (i \neq 1, 2)$  と  
 $v_1 := \alpha^* \alpha, v_1' := \varepsilon_1 - v_1, v_2 := \alpha \alpha^*, v_2' := \varepsilon_2 - v_2$  と  
 なり、  $v_1 \cong v_2$  であるから、  $v_1$  と  $v_2$  のうち、片方を  
 取り除く。例として  $v_2$  を、除き、さらに  $v_2$  が left identity  
 あるいは right identity となるものを除くと  $\overline{A(\alpha^*)}$  が  
 得られる。  $v_2$  のつくる ideal を  $\langle v_2 \rangle$  とおくと、  $\overline{A(\alpha^*)} =$   
 $A(\alpha^*) / \langle v_2 \rangle$ 。 また、BOCS  $\overline{M(\alpha^*)}$  を自然に定義される;  
 $\overline{M(\alpha^*)} = M(\alpha^*) / (A \cap M(\alpha^*) + M(\alpha^*) \cap A)$ 。 上例と同じ。

$$2' \leftarrow \frac{x_1}{x_1} 1' \xleftarrow{\beta'} 3 \xrightarrow{\beta''} 1'' ; \theta(\beta') = x_2 \beta''$$

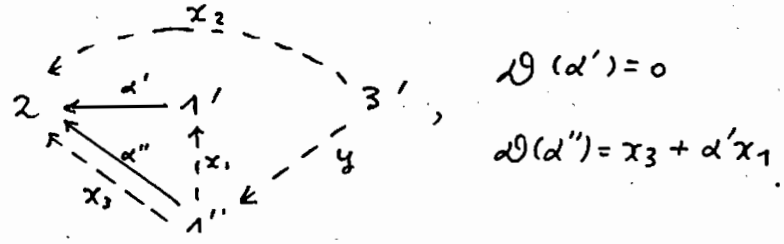
が得られる。(とくに記述された関係はすべて  
 自明なものと考えよ。例として、  $\theta(\beta'') = 0$  となる)  
 ここで、  $1' \xleftarrow{\beta'} 3 \xrightarrow{\beta''} 1''$  の部分に注目すると、たし  
 かに半順序集合の表現  $\begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$  に対応している。

次に、  $\theta(\beta'') = 0$  に注意して、以上の操作 (a), (b)  
 を再び行くと、(a), (b) 以外の操作を必要とする関係

式が得られる。簡単のため、 $2'$ を除いた場合について説明する。



の場合：  $\beta$  に対し操作 (a) を行い、次に (b) を行くと、次の BOCs が得られる。



ここで問題になるのは、今までと違って、 $\vartheta(\alpha'')$  が BOCs の核の生成系  $\Sigma_1$  の中に入っていないということです。しかし、 $\vartheta(\alpha'')$  が BOCs の核に含まれているのは明らかだから、

生成系の写換 :  $\bar{x}_3 = x_3 + \alpha'x_1$

とおいと、 $x_3$  を  $\bar{x}_3$  でおきかえた生成系を考へる。

その結果、 $\vartheta(\beta'') = \bar{x}_3 \in \Sigma_1$  という生成系  $\Sigma_1'$  が得られる。ここで、

生成元の消去 : " BOCs  $M$  の生成系  $\Sigma_0, \Sigma_1$

が、 $\alpha = D(\alpha) \in \Sigma_1$  とする  $\alpha$  を  $\alpha$  とし、 $\Sigma_0 = \Sigma_0 - \{\alpha\}$ ,  
 $\Sigma_1 = \Sigma_1 - \{\alpha\}$  で生成される category 上の Bocs.  
を  $M'$  とおくと、 $\mathcal{R}(M) \cong \mathcal{R}(M')$  が成立する。”

この性質をつかうと、 $\alpha''$  と  $\alpha_3$  を除いたところの  
話をうけつめることが出来る。この結果(上例に対しては)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \alpha & & \\
 & & \text{---} & & \\
 & \alpha'' & & & \alpha_3 \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 1'' & \xrightarrow{\alpha_1} & 1' & \xrightarrow{\alpha'} & 2 & \xleftarrow{\alpha_2} & 3'
 \end{array}$$

$$D(\alpha') = 0,$$

を得る。そこで、 $D(\alpha') = 0$  に対し、以上の操作 (a)  
(b) (必要ならば生成元を交換したりする) などを  
繰り返す。

こうして(上例では) 最後には  $\rightarrow$  のみの Bocs が得  
られるだろう。

生成系の変換という操作について注意しなければ  
ならないことは、triangularity が保存されないか  
も知れないということである。これについては、次のよう  
にかかわることが出来る。他の操作を繰り返して適  
用し、もう適用できないという場合に達したとする。この  
とき、すべての arrow が  $\dashrightarrow$  であるか、あるいは、  
 $D(\alpha) = 0$  になる arrow  $\xrightarrow{\alpha}$  が存在しないという

2つの場合が考えられる。(1)では、 $\circledast$  ではない、  
 arrow が存在する場合のみを考慮して、例としては、  
 有限表現型 (直線的表現の同型類が有限個しかない)  
 の BOCs に対しては、常に  $\circledast$  ではない arrow  $\rightarrow$  が  
 存在する。後者の場合、(M が triangular であるから、  
 $h: \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \rightarrow N$  が存在する)  $h(\alpha)$   
 $(\alpha \in \Sigma_0)$  が最小とあるものがたり、それを倒して  $\alpha$  と  
 する。 
$$d(\alpha) = kx + \sum_i k_i x_i, (k \neq 0, k_i \in k)$$
  
 (但し、 $h(x) \leq h(x_i)$  for  $\forall x_i$  とする) とおき、  
 $x$  を  $\bar{x} = kx + \sum_i k_i x_i$  とおき換える。こうすれば、  
 triangularity も保存される (定義から!) の  
 結果、 $\bar{x} = d(\alpha) \in \Sigma_1$  となり、生成元の消去とい  
 う操作を行える。

以上述べた操作などにより、表現の  
 category が同型になるように BOCs を変換する操  
 作を アルゴリズム とよんでいる。別種の操作を含め  
 て、アルゴリズムの適用の仕方については [3] で紹  
 介されている。

有限回の操作で  $\rightarrow$  のない Bocs に変形されたとす。このとき上記の操作はもう適用できない。しかし  $\rightarrow$  のない Bocs の表現は非常に簡単で: 各 vertex  $i$  に対し  $V_i = K$ , 他の  $j$  ( $\neq i$ ) に対し  $V_j = 0$ , とする表現が直既約表現にはほかならない。従って、直既約表現と vertex が  $1$ -対  $1$ -に対応するのであるから、アルゴリズムによつて  $\rightarrow$  のない Bocs  $M'$  に変換できたとすとき、( $R(M) \cong R(M')$  だから)  $M$  の直既約表現の数と vertices の数とが一致し、 $M$  が有限表現型であることがわかる。さらに、 $M'$  は直既約表現を vertex とするグラフと考えることもできる。従つて、このことから、 $M'$  を表わすグラフは  $M$  の Auslander-Reiten quiver とどのような関係にあるのだろうか、という疑問が生ずるだろう。果して、まさに Auslander-Reiten quiver そのものかのである (D. Simson)! 一方、有限表現型の category に或る操作 (アルゴリズム) を作用させると、その category 上の直既約表現を vertex としたグラフ (Auslander-Reiten quiver) が得られるというのである。

category  $A$  を与えたと、有限生成加群の成り  
category  $\text{mod } A$  が「得られるのは「あたりまえ」の  
ことだが、この  $\text{mod}$  という操作を「説明」しているのか  
 $B$  OCS に対するアルゴリズムのたのびではないだろうか。

### 参考文献

1. M. M. Kleiner, A. V. Rojter: Representations of differential graded categories, "Matrix problems", Math. Institute AN USSR, 1977, 5-71 (Russian).
2. L. A. Nazarova, A. V. Rojter: Categorical matrix problems and the Brauer-Thrall conjecture, Preprint. Institute. Math. Acad. Sci., Kiev 1973 (Russian), German transl. Mitt. Math. Sem. Gießen 115 (1975), 1-153.

3. D. Simson : On representation type of algebras and BOCs's. (この報告集に掲載)

4. A.V. Rojter, M.M. Kleiner :  
Representations of differential graded categories, Lecture Notes in Math. 488, Springer-Verlag (1975), 316-340.

5. A.V. Rojter : Matrix problems and representations of BOCs's, Lecture Notes in Math. 831, Springer-Verlag (1979), 288-324.

6. 山形 邦夫 ; 複素環の表現論 I,  
第26回代数学シンポジウム報告集 (兵庫県)  
1980年7月, 1-15.



ON THE REPRESENTATION TYPE OF ALGEBRAS AND BOCS'S

by

Daniel Simson

Nicholas Copernicus University, Toruń, Poland

and University of Tsukuba, Japan

The main problem in the representation theory is to get a classification of indecomposable objects (with respect to a direct sum) of a given additive category of modules over an associative ring  $R$  with an identity element. A typical well-known example of such a problem is the classification of indecomposable finitely generated abelian groups. Let us mention also the classification of indecomposable representations of a finite group or a topological compact group. There are problems of so called "wild type" when the classification seems to be impossible (see [4,8,15] and Section 1). Therefore it would be interesting to answer the question: "When the classification is possible?". The problem was studied for many authors. An interesting answer to the question was given recently by Drozd[7] who introduced a notion of the tame representation type (which should be considered as the classifiable case) and he proves that the category  $\text{mod}(R)$  of finitely generated right  $R$ -modules over a finite dimensional algebra  $R$  over an algebraically closed field  $K$  is either of finite, or of tame

or of wild representation type.

The aim of these notes is to report on the Drozd's theorem and related problems.

The main tool used by Drozd in the proof of the theorem mentioned above is the theory of representations of BOCS's introduced by Rojter[17,18]. In particular, the Drozd's push-out interpretation of the Rojter's classification algorithm plays a basic role in his considerations. We discuss the problem in Section 2. A discussion of similar problems can be found in [1,13,19]. A background on the representation type and simple examples can be found in Section 1. Section 3 contains some remarks on the tame representation type of categories of Harish-Chandra modules.

Throughout we will follow the terminology and notation introduced by Drozd[7]. We suppose that the reader is familiar with the notes by Yamagata[20].

Throughout these notes  $K$  denotes an algebraically closed field and  $A$  is an additive category with a finite number of isomorphism classes of indecomposable objects. We suppose that  $A$  has the Krull-Schmidt decomposition property, the hom-set  $(X, Y)$  is a finite dimensional  $K$ -space for any two objects  $X$  and  $Y$  in  $A$  and the morphism composition in  $A$  is  $K$ -bilinear. We denote by  ${}^M_A A$  a fixed BOCS  $({}^M_A A, \Psi, \Delta)$  where  ${}^M_A A$  is an

A-comodule and

$$\Delta: M_A \rightarrow A_A \quad \text{and} \quad \Psi: M_A \rightarrow M_A \otimes M_A$$

is the counit and the comultiplication respectively. We always suppose that  $\Delta$  is surjective and we denote by  $R(M_A)$  the category of k-linear representations of the BOCS  $M_A$  [17,18,7].

Following [7,1,13] we will identify  $R(M_A)$  with the Kleisli category (see[14])  $\text{mod}(A)_T$  where  $\text{mod}(A) = \text{Add}(A^{\text{op}}, Ab)$  is the category of finitely generated additive functors from  $A^{\text{op}}$  to Abelian groups (or equivalently right A-modules) and

$$T = - \otimes_A M_A : \text{mod}(A) \rightarrow \text{mod}(A).$$

We recall that  $\text{ob}(\text{mod}(A)_T) = \text{ob}(\text{mod}(A))$  and the hom-set  $(X, Y)_T$  in  $\text{mod}(A)_T$  is defined by the formula

$$(X, Y)_T = \text{Hom}_A(X \otimes_A M_A, Y)$$

for any objects  $X, Y$  in  $\text{mod}(A)_T$ . If  $f \in (X, Y)_T$  and  $g \in (Y, Z)_T$  then we take for  $g * f \in (X, Z)_T$  the composed map

$$X \otimes_A M_A \xrightarrow{1 \otimes \Psi} X \otimes_A M_A \otimes_A M_A \xrightarrow{f \otimes 1} Y \otimes_A M_A \xrightarrow{g} Z.$$

It is easy to prove that  $\text{mod}(A)_T$  is an additive category and that there is an equivalences of categories

$$R(M_A) \simeq \text{mod}(A)_T$$

which will be considered in these notes as an identification.

Since the counit is surjective it induces an embedding

$$\text{Hom}_A(X, Y) \rightarrow (X, Y)_T$$

for any objects  $X$  and  $Y$  in  $\text{mod}(A)_T$ . Simple examples of BOCS's as well as an explanation of their representations can be found in [20].

1. The representation type of finite dimensional algebras

Let  $R$  be a finite dimensional algebra over an algebraically closed field  $K$  and let  $\text{mod}(R)$  be the category of finite dimensional right  $R$ -modules. Let

$$\Gamma = K\langle X, Y \rangle$$

be the polynomial ring of two non-commuting indeterminates  $X$  and  $Y$  with coefficients into  $K$ . We denote by  $\text{fin}(K\langle X, Y \rangle)$  the category of all finite dimensional right  $K\langle X, Y \rangle$ -modules, or equivalently, the category of triples  $x \circlearrowleft V \circlearrowright y$  where  $V$  is a finite dimensional  $K$ -space and  $x, y$  are  $K$ -linear endomorphisms of  $V$ . The following lemma shows that the classification of indecomposables in  $\text{fin}(\Gamma)$  is extremely difficult.

Lemma 1.2(see[4]). For any finite dimensional  $K$ -algebra  $R$  there exists a functor  $G:\text{mod}(R) \rightarrow \text{fin}(\Gamma)$  which is full, faithful, exact and reflects isomorphisms. In particular, the classification problem for  $\text{fin}(\Gamma)$  contains the classification problem for  $\text{mod}(R)$  where  $R$  is an arbitrary finite dimensional  $K$ -algebra.

Proof. Let  $a_1, \dots, a_m$  be generators of  $R$ . Given  $X$  in  $\text{mod}(R)$  we define  $G(X)$  as the space  $X^{m+2}$  the direct sum of  $m+2$  copies


of  $X$  together with two endomorphisms  $x, y: X^{m+2} \rightarrow X^{m+2}$  defined by the matrices

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \vdots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & a_m & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definition 1.2. A finite dimensional  $K$ -algebra  $R$  is said to be of wild representation type if there exists a bimodule  ${}_{\Gamma}N_R$  with the following properties:

- (i)  ${}_{\Gamma}M_R$  is finitely projective as a left  $\Gamma$ -module,
- (ii) the functor  $- \otimes_{\Gamma} N_R: \text{fin}(\Gamma) \rightarrow \text{mod}(R)$  reflects isomorphisms and preserves indecomposability.

Corollary 1.3. If  $R$  is an algebra of wild representation type then for any finite dimensional  $K$ -algebra  $B$  there exists an exact functor  $\text{mod}(B) \rightarrow \text{mod}(R)$  which reflects isomorphisms and preserves indecomposability.

Given a quiver  $Q$  (i.e. a finite oriented graph) we denote by  $KQ$  the quiver algebra of  $Q$  which has as a  $K$ -basis the set of all oriented paths and the multiplication in  $KQ$  is induced by the composition of paths. Note that  $\Gamma = KQ$  where  $Q$  is the quiver .

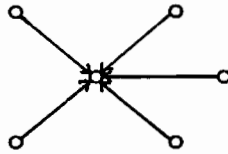
Let us consider two simple examples of quiver algebras of wild representation type.

1°. Let  $Q$  be the quiver  $\circ \longrightarrow \circ \begin{matrix} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{matrix}$ . Given  $x \begin{matrix} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{matrix} y$  in  $\text{fin}(\Gamma)$  we define a module  $G(V)$  in  $\text{mod}(KQ)$  by the matrices

$$V \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} V \oplus V \begin{matrix} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & x \\ 1 & y \end{pmatrix}$$

It is clear that we have defined a functor  $G: \text{fin}(\Gamma) \rightarrow \text{mod}(KQ)$  and therefore  $KQ$  is of wild representation type.

2°. Let  $Q$  be the quiver



Given  $x \begin{matrix} \curvearrowright \\ \curvearrowright \end{matrix} y$  in  $\text{fin}(\Gamma)$  we define a module  $G(V)$  in  $\text{mod}(KQ)$  by the diagram

$$\begin{array}{ccccc} & & & & 0 \oplus V \\ & & & & \swarrow \\ V \oplus 0 & & & & V \\ & \searrow & & \swarrow & \\ & & V \oplus V & \xleftarrow{d} & V \\ & \nearrow & \swarrow & \nwarrow & \\ & & (1, x) & & (1, y) \\ & & \swarrow & \nwarrow & \\ & & V & & V \end{array}$$

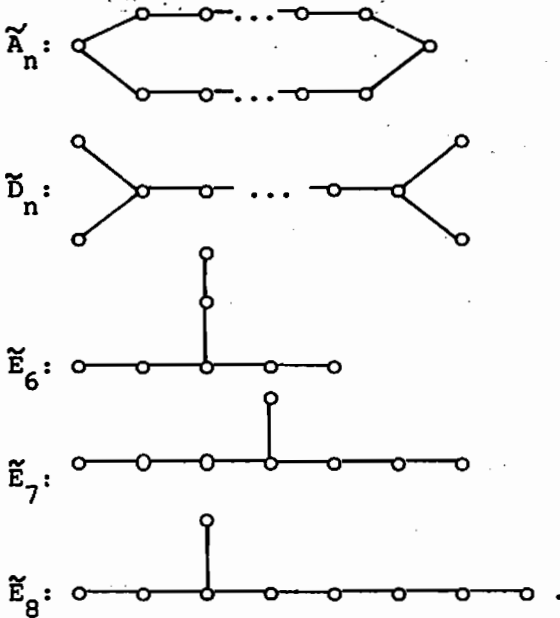
where  $d$  is the diagonal map. It is clear that we have defined an additive functor  $\text{fin}(\Gamma) \rightarrow \text{mod}(KQ)$  and that  $KQ$  is of wild representation type. Note also that

$$KQ = \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & 0 & 0 & K \\ & K & 0 & 0 & 0 & K \\ & & K & 0 & 0 & K \\ & & & K & 0 & K \\ & & & & K & K \\ & & & & & K \end{bmatrix}.$$

Let us also mention a general result proved by Ringel [15]

Theorem 1.4. A quiver algebra  $KQ$  is of wild representation type if and only if  $Q$  does not contains as a proper subquiver

the following extended Dynkin diagrams



A discussion of the wild type can be found in [4,9,15,16].

Our next basic definition is the following

Definition 1.5. A finite dimensional  $K$ -algebra  $R$  is of finite representation type if there is only finitely many pairwise nonisomorphic indecomposable  $R$ -modules.  $R$  is said to be of tame representation type if  $R$  is not of finite representation type and for any dimension  $d$  there exist bimodules  $S_j N_R^{(j)}$ ,  $j=1,2,\dots,m_d$ , such that:

(a)  $S_j$  is either  $K$  or  $S_j$  is the localization  $K[X]_f$  of  $K[X]$  with respect to a polynomial  $f \in K[X]$ ,

(b) Every  $S_j N_R^{(j)}$  is a finitely generated projective left  $S_j$ -module,

(c) The functor  $-\otimes_{S_j} N_R^{(j)} : \text{mod}(S_j) \rightarrow \text{Mod}(R)$  reflects isomorphisms for every  $j$ ,

(d) If  $X$  is an indecomposable right  $R$ -module and  $\dim_K X = d$  then there exist an index  $j$  and an indecomposable module  $Y$  in  $\text{mod}(S_j)$  such that  $X \approx Y \otimes_{S_j} N_R^{(j)}$ .

Here  $\text{Mod}(R)$  denotes the category of all right  $R$ -modules.

We consider the algebras of tame representation type as those whose indecomposable modules admit a classification in the sense that the indecomposable modules of a given dimension  $d$  can be "parametrized" by points of  $K$ -projective lines  $P^1$ .

A well-known example of a tame algebra is the Kronecker algebra  $\begin{pmatrix} K & K^2 \\ 0 & K \end{pmatrix}$  whose right modules can be identified with pairs  $W \begin{matrix} \xrightarrow{A} \\ \xrightarrow{B} \end{matrix} V$  of linear maps  $A, B$  between finite dimensional  $K$ -spaces  $W$  and  $V$ . The indecomposable modules of the algebra were already classified by Kronecker who solved a problem of Weierstrass.

Let us also recall from [15,6] that a quiver algebra  $KQ$  is of tame representation type if and only if  $Q$  is a disjoint union of the extended Dynkin diagrams  $\tilde{A}_n, \tilde{D}_n, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8$ .

The characterization of group algebras of tame representation type is the following (see [5])

Theorem 1.6. Let  $G$  be a finite group and let  $K$  be an algebraically closed field of characteristic  $p > 0$  which does not



divide the order of G. Then the group algebra  $K[G]$  is of tame representation type if and only if  $p=2$ , G does not contain noncyclic abelian 2-subgroups of order  $> 4$  and the 2-Sylow subgroup of G is not cyclic.

We also recall an old result of Higmann that  $K[G]$  is of finite representation type if the p-Sylow subgroup of G is cyclic.

Interesting examples of algebras of tame representation type can be found in [8,15,16].

The main result on the representation type of algebras is the following (see Drozd[7])

Theorem 1.7. If R is a finite dimensional algebra over an algebraically closed field then R is either of finite, or of tame or of wild representation type. Moreover there is no algebra which is both of tame and of wild representation type.

Drozd reduces the proof of Theorem 1.7 to the corresponding theorem for BOCS's by the following result:

Proposition 1.8. Let  $\text{Morph}(R)$  be the category of all maps  $P \rightarrow P'$  between indecomposable finitely generated projective right R-modules. Then the functor

$$C: \text{Morph}(R) \rightarrow \text{mod}(R)$$

given by taking the cokernel is full, dense and carries over into zero only indecomposable objects of the form  $P_j \rightarrow 0$  and

$P_j \xrightarrow{\text{id}} P_j$  where  $P_1, P_2, \dots, P_n$  is a complete list of pairwise nonisomorphic indecomposable projective right  $R$ -modules. Then the categories  $\text{Morph}(R)$  and  $\text{mod}(R)$  have the same representation type. Furthermore, there exists a free triangular BOCS  ${}^M_A A$  and an equivalence of categories  $\text{Morph}(R) \simeq R({}^M_A A)$ .

The reduction above is very useful because it allows to apply the theory of BOCS's and their classification algorithms and to proceed an induction on the dimension. As a result we get rather constructive method for the "parametrization" of the indecomposable representations in each dimension.

Although the BOCS  ${}^M_A A$  in Proposition 1.8 is free in order to proceed the induction it is not enough to deal with free BOCS's because some operation on BOCS's needed for applying algorithms lead to a wider class of so called almost free BOCS's. Moreover, in order to formulate a counterpart of Theorem 1.7 for almost free BOCS's we need a definition of the dimension of representations of BOCS's as well as the definitions of the tame and the wild representation types for BOCS's. We will do it in the next section.

## 2. The representation type of almost free BOCS's.

Suppose that  ${}^M_A A$  is a free BOCS with a differential  $D$ . Since  $A$  has only finitely many indecomposable pairwise nonisomorphic objects, say  $X_1, \dots, X_n$ , then there exists an equivalence of categories  $\text{mod}(A) \simeq \text{mod}(E)$  where  $E = \text{End}(X_1 \oplus \dots \oplus X_n)$ . We fix the decomposition

$$E = e_1 E \oplus e_2 E \oplus \dots \oplus e_n E$$

where  $e_j$  is the primitive idempotent corresponding to  $X_j$ . Throughout these notes we will suppose that  $A$  is basic in the sense that different indecomposable objects of  $A$  are not isomorphic. Therefore we can identify  $A$  and  $E$  as well as  $X_j$  and the indecomposable projective right  $E$ -module  $e_j E$ .

If  $a_1 \circlearrowleft, \dots, a_m \circlearrowleft$  are loops in  $A$  with  $D(a_j) = 0$  for all  $j$  then given polynomials  $f_1, \dots, f_s, \dots, f_m \in K[X]$  with  $f(a_1) \neq 0, \dots, f(a_s) \neq 0$  we can form the localization

$$\bar{A} = A[f_1(a_1)^{-1}, \dots, f_s(a_s)^{-1}]$$

and the completion

$$\hat{A} = \varprojlim_i \bar{A} / (f_{s+1}(a_{s+1}), \dots, f_m(a_m))^i.$$

We define a new BOCS  $\hat{A} \hat{M} \hat{A} = \hat{A} \otimes_A M \otimes_A \hat{A}$  with the counit and the comultiplication induced by those in  ${}^M_A A$ . A BOCS is said to be almost free if it has the form  $\hat{A} \hat{M} \hat{A}$  where  ${}^M_A A$  is a free BOCS

and  $f_1, \dots, f_m$  are some polynomials satisfying the above conditions.

Now given a representation  $X$  in  $R(\hat{M}_A)$  we define its dimension vector

$$\underline{\dim} X = (\dim_K X \hat{e}_1, \dots, \dim_K X \hat{e}_m)$$

where  $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_m$  are the idempotents determined by  $e_1, \dots, e_m$ .

We say that  $X$  is exact if  $\dim_K X \hat{e}_j \neq 0$  for all  $j$ . Given a vector

$\underline{d} = (d_1, \dots, d_m)$  we define its  $\hat{M}$ -norm  $\|\underline{d}\|$  by

the formula

$$\|\underline{d}\| = \sum_{i,j=1}^n s_{ij} d_i d_j$$

where  $s_{ij}$  is the number of continuous arrows from  $i$  to  $j$  in the bigraph of the free BOCS  $M_A$ . The dimension  $\underline{d}$  is said to be exact if all  $d_1, \dots, d_m$  are non zero.

Given an exact dimension  $\underline{d}$  of  $\hat{M}_A$  usually we try to find an equivalence of categories  $u: R(\hat{M}_A) \xrightarrow{\cong} R(N_B)$  such that  $\|\underline{\dim} u(X)\| < \|\underline{\dim} X\|$  for any indecomposable  $X$  in  $R(\hat{M}_A)$  with  $\underline{\dim} X = \underline{d}$ . From this point of view the best possible situation is when we can find such equivalence  $u$  with  $B$  semisimple because there is no continuous arrow in the bigraph of  $N_B$  and therefore  $\|\underline{d}\| = 0$  for every  $\underline{d}$ . This is the case when  $R(M_A)$  is of finite representation type. The argument above will be frequently applied in the inductive proofs concerning tame BOCS's.

Throughout we suppose that  ${}_A M_A$  is an almost free BOCS. We recall that the counit of  ${}_A M_A$  is a surjection and therefore it induces a monomorphism  $\text{Hom}_A(X, Y) \rightarrow (X, Y)_T$  and we have a faithful embedding functor

$$\text{mod}(A) \hookrightarrow \text{mod}(A)_T \cong R({}_A M_A)$$

in the notation in the Introduction.

Definition 2.1. An almost free BOCS  ${}_A M_A$  is of wild type if there exists a bimodule  ${}_\Gamma N_A$  which is a finitely generated projective  $\Gamma$ -module ( $\Gamma = K\langle X, Y \rangle$ ) such that the composed functor

$$\text{fin}(\Gamma) \xrightarrow{-\otimes_{\Gamma} N_A} \text{mod}(A) \hookrightarrow \text{mod}(A)_T \cong R({}_A M_A)$$

reflects isomorphisms and carries over indecomposable modules into indecomposable objects in  $R({}_A M_A)$ .

Definition 2.2. An almost free BOCS  ${}_A M_A$  is of tame type if for every dimension  $\underline{d} = (d_j)$  there are bimodules  $S_j N_A^{(j)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_{\underline{d}}$ , such that

(i) The ring  $S_j$  is either  $K$  or it is of the form  $K[X]_f$  for some  $f \in K[X]$ ,

(ii)  $S_j N_A^{(j)}$  is a finitely generated projective  $S_j$ -module,

(iii) The composed functor

$$\text{mod}(S_j) \xrightarrow{-\otimes_{S_j} N_A^{(j)}} \text{mod}(A) \hookrightarrow \text{mod}(A)_T \cong R({}_A M_A)$$

reflects isomorphisms and preserves the indecomposability,

(iv) For every indecomposable representation  $X$  of  ${}^A M_A$  with  $\dim X = \underline{d}$  there exist an index  $j$  and an indecomposable module  $Y$  in  $\text{mod}(S_j)$  such that  $Y \otimes_{S_j} N_A^{(j)} \cong X$  in  $R({}^A M_A)$ .

We call  $S_j N_A^{(j)}$ ,  $j=1, \dots, n_{\underline{d}}$ , a parametrizing family of  ${}^A M_A$  in the dimension  $\underline{d}$ .

We say that an additive  $K$ -linear functor  $T: B \rightarrow B'$  between additive  $K$ -categories  $B$  and  $B'$  is dominant if every  $K$ -linear additive functor from  $B$  to the category of finite dimensional  $K$ -vector spaces has a factorization through  $T$ .

The following simple lemma gives a categorical interpretation of the Rojter's classification algorithm [17,18,20].

Lemma 2.3. Let  ${}^A M_A$  be a BOCS. Then for every additive  $K$ -subcategory  $B$  of  $A$  and for every dominant functor  $T: B \rightarrow B'$  there are a push-out diagram

$$\begin{array}{ccc} B & \rightarrow & A \\ \downarrow T & & \downarrow \tilde{T} \\ B' & \rightarrow & B' \coprod_B A = \tilde{A} \end{array}$$

and a BOCS  $\tilde{A} \tilde{M} \tilde{A} = \tilde{A} \otimes_A M_A \otimes_A \tilde{A}$  such that  $\tilde{T}$  induces an equivalence of categories  $\tilde{T}_*: R(\tilde{M}) \xrightarrow{\cong} R(M)$ .

As a consequence we get the following two propositions

Proposition 2.4. Suppose that  $M_A$  is a triangular almost free BOCS and let  $1 \xrightarrow{a} 2$  be a continuous arrow in the bigraph of  $M_A$  such that  $D(a) = 0$ . If  $B$  is the additive  $K$ -subcategory of  $A$  generated by "a" and  $B'$  is an additive  $K$ -category having only three different isolated objects  $1', 2', 3'$  (i.e.  $B'(i', j')$  is zero for  $i' \neq j'$ ), then the functor  $T: B \rightarrow B'$  defined by the formulas  $T(1) = 1' \oplus 2'$ ,  $T(2) = 2' \oplus 3'$ ,  $T(a) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  is dominant and there is an equivalence of categories

$$\tilde{T}_*: R(\tilde{M}_A) \cong R(M_A)$$

induced by  $\tilde{T}$  (in the notation of Lemma 2.3) such that

(i) if  $X \cong \tilde{T}_*(Y)$  is an indecomposable representation such that  $X(1) \neq 0$  and  $X(2) \neq 0$  then  $\| \dim Y \| < \| \dim X \|$ .

(ii) if there is no loops  $1 \xrightarrow{c} c$ ,  $2 \xrightarrow{b} b$  with  $D(b) = D(c) = 0$  in the bigraph of  $M_A$  then the BOCS  $\tilde{M}_A$  is almost free and triangular.

Note that the BOCS  $\tilde{M}_A$  in the Proposition 2.4 is isomorphic to the BOCS  $M(a^*)$  in the notation of Rojter[18] (see also [20]).

Proposition 2.5. If  $1 \xrightarrow{a} 2$  is a continuous arrow in the bigraph of a box  $M_A$  such that  $D(a)$  can be extended to a set of generators free of  $\text{Ker } \Delta$  then there exist a BOCS  $\overline{M}_A$  with  $\overline{A} = A/AaA$  and an equivalence of categories

$$\Theta: R(\overline{M}_A) \cong R(M_A)$$

such that


(i) if  $X \approx \Theta(Y)$  is an indecomposable representation such that  $X(1) \neq 0$  and  $X(2) \neq 0$  then  $\| \dim Y \| < \| \dim X \|$ ,

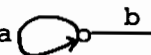
(ii) if  ${}_A M_A$  is triangular (and almost free by our assumption) and  $D(a)$  can be extended to a triangular set of generators then  $\overline{{}_A M_A}$  is also triangular and almost free.

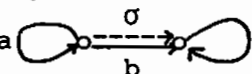
Now we can formulate the main result in [7]

Theorem 2.6. If  $K$  is an algebraically closed field and  ${}_A M_A$  is a  $K$ -finite dimensional triangular almost free BOCS then  ${}_A M_A$  is either of tame or of wild representation type.


Outline of the proof. One can prove that  ${}_A M_A$  is of wild type if its bigraph contains as a subbigraph one of the following forms

(h<sub>1</sub>)   $b, D(a) = D(b) = 0,$

(h<sub>2</sub>)   $, D(a) = D(b) = 0,$

(h<sub>3</sub>)   $, D(a) = D(b) = D(\sigma) = 0$  and  $D(b)$

can not be extended to a set of free triangular generators of  $\text{Ker } \Delta,$

(h<sub>4</sub>)   $, D(a) = D(\sigma) = 0$  and  $D(b)$  can not be extended to a set of free triangular generators of  $\text{Ker } \Delta,$

Next we suppose that the bigraph of  ${}_A M_A$  does not contain as a full subbigraph the forms (h<sub>1</sub>) - (h<sub>4</sub>) and we prove by the induction on  $\|d\|$  that for any triangular almost free BOCS



there is a parametrizing family for its indecomposable representations of dimension  $\underline{d}$ .

The case  $\|\underline{d}\| = 0$  is trivial because any indecomposable  $X$  with  $\|\underline{\dim} X\| = 0$  is simple in  $\text{mod}(A)$ . There is only finitely many such  $X$  and they have trivial endomorphism rings.

Now suppose that for any triangular almost free BOCS  ${}_A M'_A$ , and any  $\underline{d}'$  with  $\|\underline{d}'\| < \|\underline{d}\|$  there is a parametrizing family for indecomposables of  ${}_A M'_A$  in the dimension  $\underline{d}'$ . Since  ${}_A M_A$  is almost free and triangular then there exists a function

$$h: \Sigma \rightarrow \{1, 2, 3, \dots\}$$

such that  $D(a)$  depends only on  $b \in \Sigma$  with  $h(b) < h(a)$  for any  $a \in \Sigma$ . Here  $\Sigma = \Sigma_0 \cup \Sigma_1$ , where  $\Sigma_0$  is the set of continuous arrows and  $\Sigma_1$  is the set of dashed arrows in the bigraph of  ${}_A M_A$ . Without loss of generality we may suppose that  $\underline{d}$  is an exact dimension because otherwise any representation  $X$  with  $\underline{\dim} X = \underline{d}$  is an exact representation of a smaller BOCS.

Now let  $a \in \Sigma_0$  be such that  $h(a)$  is minimal. Since the bigraph of  ${}_A M_A$  does not contain the graphs  $(h_1) - (h_4)$  then there are three possibilities:

(i)  $a$  is an edge with  $D(a) = 0$ ,

(ii)  $a$  is a loop with  $D(a) = 0$ ,

(iii)  $D(a) \neq 0$  and  $D(a)$  can not be extended to a triangular


set of generators of  ${}_A M_A$ . It follows from Propositions 2.4


and 2.5 that there is an equivalence of categories

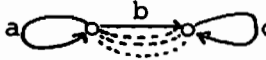
$$w: R(\mathcal{A}^* M^* \mathcal{A}^*) \xrightarrow{\cong} R(\mathcal{M}_A)$$

with a triangular almost free BOCS  $\mathcal{A}^* M^* \mathcal{A}^*$  such that

$\|\dim Y\| < \|\dim w(Y)\|$  for any indecomposable representation  $Y$  with  $\dim w(Y) = \underline{d}$  when either (i) or (iii) holds. Then by our inductive assumption there is a parametrising family for indecomposable representations of  $\mathcal{A}^* M^* \mathcal{A}^*$  in any dimension  $d'$  with  $\|d'\| < \|d\|$  and therefore there is also a parametrizing family for indecomposables of  $\mathcal{M}_A$  in the dimension  $\underline{d}$ . Now suppose that (i) and (iii) do not hold and that (ii) holds. Let  $T$  be the set of all loops  $c \in \Sigma_0$  with  $D(c) = 0$  and let  $b \in \Sigma_0 - T$  be an element with  $h(b)$  minimal. Then  $h(b) \neq 0$  and one can show that only the following three cases can appear

(I)  where  $b$  is an edge and  $D(a) = 0$ ,

(II)  where  $b$  is an edge and  $D(a) = 0$ ,

(III)  where  $b$  can be a loop or an edge.

Then  $0 \neq D(b) = \sum_{i=1}^m f_i(a) \sigma_i$  for some  $f_i \in K[X]$  and  $\sigma_i \in \Sigma_1$

in the case (I). Let  $\Sigma_1$  be such that  $h(\sigma_1) \geq h(\sigma_j)$  for all  $j$  and let  $R'$  and  $R''$  be full subcategories of  $R(\mathcal{M}_A)$  consisting of representations  $X$  such that  $X(f_1(a))$  is invertible and nilpotent, respectively. If we denote by  $M[f_1(a)^{-1}]$  a corresponding localization of the BOCS  $\mathcal{M}_A$  (as in the definition of

almost free BOCS) then there is an equivalence of categories

$$R' \simeq R(M[f_1(a)^{-1}])$$

and in the localizing BOCS  $D(b)$  can be extended to a set of triangular generators. Then we are in the same position as in the case (iii) above and therefore we conclude that there is a parametrizing family for representations in  $R'$  of dimension  $\underline{d}$ . Furthermore, applying Lemma 2.3 one can find a triangular almost free BOCS  $M^\circ$  and an equivalence  $R(M^\circ) \cong R(\begin{smallmatrix} M \\ A \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} A \\ A \end{smallmatrix})$  such that  $\|\underline{\dim} Y\| < \|\underline{\dim} u(X)\|$  for any indecomposable representation  $Y$  with  $u(Y) \in R''$  and  $\underline{\dim} u(Y) = \underline{d}$ . Hence we get a parametrizing family for representations in  $R''$  of the dimension  $\underline{d}$ .

A parametrizing family for representations in  $R(\begin{smallmatrix} M \\ A \end{smallmatrix} \begin{smallmatrix} A \\ A \end{smallmatrix}) - (R' \cup R'')$  can be found in a similar way, but the proof is a little more difficult than the previous ones. The proof in the cases (II) and (III) is similar.

### 3. Final remarks.

Theorem 2.6 can be also applied to categories which are rather far from being equivalent to  $\text{mod}(R)$  where  $R$  is a finite dimensional algebra over an algebraically closed field. There are several such examples coming from the matrix problems considered by Rojter and his students (see [16,17]). In particular it can be applied to the categories of representations of partially ordered sets.

Let us remark that Theorem 2.6 can be also applied to the classification of algebraic vector bundles over the projective space  $P^n$  because we know from [3] (see also A.A. Beilinson, Coherent sheaves on  $P^n$  and problems of linear algebra, Funkc. Anal. i Priložen. 12(1978), No.3, pp. 68-69) that the problem is equivalent to the classification of indecomposable finite dimensional graded modules over the exterior Grassman algebra  $\Lambda$  of  $n+1$  variables, i.e.  $\Lambda$  is the exterior algebra of the space  $K^{n+1}$ . Unfortunately we do not know if the category is of tame or of wild representation type.

We recall that there are several interesting categories of Harish-Chandra modules of tame representation type.

It was already proved in [8,10] that the category of Harish-Chandra modules of the Lorentz group (or equivalently of the group  $SL(2, \mathbb{C})$ ) is of the tame representation type and the classification of its indecomposable representations is reduced to the classification of indecomposable finite dimensional modules over the algebra  $\mathbb{C}[X,Y]/(XY)$ . The corresponding problem for the group  $SL(2, \mathbb{R})$  is also of the tame representation type (see [12]). It is proved in [2] that for any real semisimple Lie group  $G$  there exists an agreeable algebra  $S$  of analytic functions such that the category of Harish-Chandra modules of  $G$  is locally equivalent to the category of finite dimensional  $S$ -modules. However, for any particular group  $G$  the classifi-

cation of its indecomposable Harish-Chandra modules is an interesting and nontrivial problem.

In a connection of these problems we would like to mention interesting results of Horoškin[11,12]. It is proved in [11] that the classification problem of Harish-Chandra modules of the group  $SU(1,n)$  is of wild type for  $n \geq 2$ . It is also concluded in [12] that the problem is of wild type for the groups  $Sp(1,n)$  with  $n \geq 2$  as well as for any real reductive Lie group of rank  $\geq 2$ . The main result proved in [12] asserts that the category of Harish-Chandra modules of the connected component  $SO_0(1,n)$  of the identity element in the Lorentz group  $SO(1, n)$  is of the tame representation type and there are no other real connected simple Lie groups whose categories of Harish-Chandra modules are of tame representation type or, equivalently, are <sup>not</sup> of wild representation type (by Theorem 2.6 and [2 ]).

It is interesting to remark that the classification methods applied by Gelfand and Ponomarev[8] and developed by Horoškin in [12] are very close to the covering technique developed recently by P.Gabriel [The universal cover of a representation finite algebra, Lecture Notes in Math. No. 903, 1981, pp.68-105] and involves interesting graded categories.

## REFERENCES

1. R.Bautista, L.Colavita and L.Salmeron, On adjoint functors in representation theory, Lecture Notes in Math. No. 903, 1981, pp. 9-25.
2. I.N.Bernstein, I.M.Gelfand and S.I.Gelfand, Structure locale de la catégorie des modules de Harish-Chandra, C.R.Acad.Sc.Paris, 286(1978), 435-437, 495-497.
3. I.N.Bernstein, I.M.Gelfand and S.I.Gelfand, Algebraic bundles over  $P^n$  and problems of linear algebra, Funkcj. Analiz i Priložen. 12(1978), no. 3, pp.66-67(in Russian).
4. S.Brenner, Decomposition properties of some small diagrams of modules, Symposia Mat. 13(1974), pp. 127-141.
5. V.M.Bondarenko and Ju.A.Drozd, The representation type of finite groups, Zap.Naučn.Semin. LOMI 71(1977), 24-41.
6. V.Dlab and C.M.Ringel, Indecomposable representations of graphs and algebras, Mem.Amer.Math.Soc.;173(1976).
7. Ju.A.Drozd, Tame and wild matrix problems, in "Representations and Quadratic Forms", Akad.Nauk Ukr.SSR, Inst.Mat., Kiev, 1979, pp. 39-74 (in Russian). English translation-Lecture Notes in Math. No. 832, 1980, pp. 242-258.
8. I.M.Gelfand and V.A.Ponomarev, Indecomposable representations of the Lorentz group, Uspiehi Mat.Nauk 23(140), 1968, pp. 1-60.
9. I.M.Gelfand and V.A.Ponomarev, Remarks on the classifica-

- tion of pairs of commuting linear maps in a finite dimensional space, *Funkcj.Analiz i Priložen.* 3(1969),no.4, 81-82.
10. I.M.Gelfand, M.I.Graev and V.A.Ponomarev, The classification of linear representations of the group  $SL(2, C)$ , *Dokl.Akad.Nauk SSSR* 194(1970), no. 5, pp. 1002-1005.
  11. S.M.Horoškin, On the category of Harish-Chandra modules of the group  $SU(1, n)$ , *Funkcj.Analiz i Priložen.* 14(1980), no.2, pp. 85-86 (in Russian).
  12. S.M.Horoškin, Indecomposable representations of Lorentz groups, *Funkcj.Analiz i Priložen.* 15(1981), no.2, 50-60.
  13. M.M.Kleiner, Induced modules and comodules and representations of BOCS's and DGC's, *Lecture Notes in Math.* No. 903, 1981, pp. 168-175.
  14. S. Mac Lane, *Categories for the Working Mathematicians*, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1971.
  15. C.M.Ringel, Representations of K-species and bimodules, *J.Algebra* 41(1976), 269-302.
  16. C.M.Ringel, Tame algebras, *Lecture Notes in Math.* No. 831, 1980, pp. 137-287.
  17. A.V.Rojter, Matrix problems, *Proc. of the International Congress of Math.*, Helsinki, 1978, pp.157-159.
  18. A.V.Rojter, Matrix problems and representations of BOCS's, in "Representations and Quadratic Forms", *Akad.Nauk Ukr.*

SSR, Inst.Mat.; Kiev, 1979, pp. 3-38. English translation:  
Lecture Notes in Math., No. 831, pp. 298-324.

19. D.Simson, Special schurian vector space categories  
and  $\mathcal{L}$ -hereditary right QF-2 artinian rings, Preprint 1982.
20. K.Yamagata, On representations of BOCs's (in Japanese),  
this "Proceedings".

Institute of Mathematics  
Nicholas Copernicus University  
87-100 Toruń, Poland



ON EQUATIONS  $x^p + y^q + z^r - xyz = 0$

By Iku NAKAMURA

Department of Mathematics, Hokkaido University

INTRODUCTION. There are two "strange" dualities in certain classes of isolated singularities, exceptional unimodular singularities and hyperbolic unimodular singularities (cusp singularities). The dualities resemble each other very much. The purpose of this article is to show what they look like and to give an explanation for the duality of cusp singularities from the arithmetic and geometric view points. The most part of the article is, roughly speaking, devoted to studying the connection between two isolated singularities

$$T_{3,4,4} : x^3 + y^4 + z^4 - xyz = 0$$

$$T_{2,5,6} : x^2 + y^5 + z^6 - xyz = 0.$$

This article is a revised version of [N3].

The details with proofs will appear in [N2]. I would like to appreciate Professor Kenji Ueno, with whom discussions and correspondences were very valuable during the preparation of the article.

CONTENTS.

- §1 MODALITY OF SINGULARITIES.
- §2 STRANGE DUALITY OF ARNOLD-GABRIELOV.
- §3 DUALITY OF CUSP SINGULARITIES.
- §4 HYPERBOLIC INOUE SURFACES.
- §5 AN ARITHMETIC EXPLANATION OF THE SECOND DUALITY.
- §6 A GEOMETRIC EXPLANATION OF THE SECOND DUALITY.

57 WHY IS  $T_{p,q,r}$  CALLED  $T_{p,q,r}$  ?

58 DEFINING EQUATIONS OF CUSP SINGULARITIES.

59 A CONNECTION WITH KAC-MOODY LIE ALGEBRAS.

51 MODALITY OF SINGULARITIES.

(1.1) Let us consider the following problem. Let  $f$  be a germ of a holomorphic function at the origin  $(0,0,0)$  of  $\mathbb{C}^3$  with isolated critical zero at the origin, and find a normal form of  $f$  up to biholomorphic coordinate transformations of  $\mathbb{C}^3$  at the origin. Following Arnold we consider the problem in the following manner. Consider  $X_0 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3; f(x,y,z) = 0\} = f^{-1}(0)$  and arbitrary deformation of  $X_0$ . In other words, consider

$$F(x,y,z,t) = f(x,y,z) + t_1 h_1 + \dots + t_k h_k$$

for  $h_j$  fixed holomorphic functions,  $t_j$  complex parameters with  $|t_j|$  sufficiently small. Let  $X_t = F^{-1}(0)$ ,  $t = (t_1, \dots, t_k)$ . We ask, for instance, what  $X_0$  is if any  $X_t$  is smooth or isomorphic to  $X_0$  itself. The answer for it is quite simple, indeed, up to equivalence (coordinate transformations at the origin),

$$f = x^2 + y^2 + z^2, \quad X_0 = f^{-1}(0) \cong A_1.$$

The proof of it goes as follows. We take a Weierstrass normal form of  $f$

$$f = x^m + \sum_{j=1}^m a_j(y,z) x^{m-j}$$

with  $a_j(0,0) = 0$ . Define

$$F = f + tx^2$$

and  $X_t = F^{-1}(0)$ . Then for  $t \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}
 F &= x^2(t + x^{m-2} + \dots) + a_{m-1}(y,z)x + a_m(y,z) \\
 &\sim u^2 + 2a'_{m-1}u + a_m \quad (\exists a'_{m-1}) \\
 &\sim (u + a'_{m-1})^2 + a'' \quad (\exists a'')
 \end{aligned}$$

where  $a''(0,0) = a''_y(0,0) = a''_z(0,0) = 0$ . So  $X_t$  is singular at the origin, by assumption  $X_t \cong X_0$ , which implies  $m = 2$ . By similar arguments we infer

$$f(x,y,z) \sim x^2 + y^2 + z^2.$$

The next problem is what are the singularities  $X_0$  with small deformations  $A_1$  or smooth only. Then the answer for it is  $f = x^2 + y^2 + z^3$ ,  $X_0 \cong A_2$ . And so on.

Thus we are led to the following

(1.2) THEOREM [A]. Suppose that # (isomorphism classes of deformations of  $X_0$ ) is finite for a given isolated hypersurface singularity  $X_0 = f^{-1}(0)$ . Then  $f$  is one of the following

$$\begin{aligned}
 A_k &: x^{k+1} + y^2 + z^2 \\
 D_k &: x^2y + y^{k-1} + z^2 \\
 E_6 &: x^3 + y^4 + z^2 \\
 E_7 &: x^3 + xy^3 + z^2 \\
 E_8 &: x^3 + y^5 + z^2
 \end{aligned}$$

(1.3) Let us consider the following finite  $\mathbb{C}$ -module

$$M_f := \mathbb{C}[[x,y,z]] / (f_x, f_y, f_z, f)$$

for a holomorphic function  $f$  with an isolated critical zero at  $o$ , i.e., the set  $\{f = f_x = f_y = f_z = 0\}$  is  $\{o = (0,0,0)\}$ .

Consider

$$F(x,y,z) = f + t_1 h_1 + \dots + t_k h_k$$

for a basis  $h_1, \dots, h_k$  of  $M_f$  and define

$$X = \{(x, y, z; t_1, \dots, t_k); F(x, y, z) = 0, |t_j| < \epsilon\}.$$

Let  $\pi$  be the natural projection of  $X$  to  $D_\epsilon^k$ ,  $X_t = \pi^{-1}(t)$ ,  $t = (t_1, \dots, t_k)$ , where  $D_\epsilon = \{t \in \mathbb{C}; |t| < \epsilon\}$ . Then it is known that any (small) deformation is equivalent (or isomorphic) to one of the fibers  $X_t$ .

(1.4) DEFINITION [A]. The modality of an isolated singularity  $X = f^{-1}(0)$  is the minimal dimension of an analytic subset  $S$  of  $D_\epsilon^k$  such that any isomorphism class of deformations of  $X$  is one of the fibers  $X_t$ ,  $t \in S$ .

(1.5) THEOREM [A]. Any 0-modal (hypersurface) isolated singularity is one of  $A_k$ ,  $D_k$ ,  $E_6$ ,  $E_7$  and  $E_8$ . Any 1-modal (unimodular) singularity is one of the following

- 1) simply elliptic singularities  $T_{2,3,6}$ ,  $T_{2,4,4}$ ,  $T_{3,3,3}$
- 2) 14 exceptional singularities  $S_{p,q,r}$  with  $(p,q,r)$  one of the Dolgatchev triples
- 3) cusp singularities  $T_{p,q,r}$  with  $(1/p)+(1/q)+(1/r) < 1$  where  $T_{p,q,r} : x^p + y^q + z^r - txyz = 0$  ( $t \neq 0$ ),  $t$  can be chosen to be 1 in the case 3).

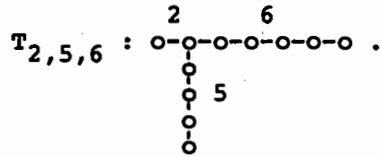
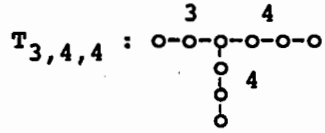
## §2 THE STRANGE DUALITY OF ARNOLD-GABRIELOV.

We consider the following germs  $S$  and  $S'$  of isolated singularities at the origins;

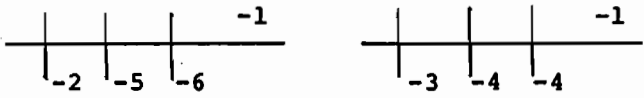
$$S : x^2z + yz^2 + y^4 = 0, \quad S' : x^4 + xy^4 + z^2 = 0.$$

The singularities  $S$  and  $S'$  are among the 14 exceptional singularities. Let  $f = x^2z + yz^2 + y^4$ ,  $g = x^4 + xy^4 + z^2$ . Let  $S_t = f^{-1}(t)$ ,  $S'_t = g^{-1}(t)$  ( $t \neq 0$ ). Then  $b_2(S_t) = 11$ ,  $b_2(S'_t) = 13$  and there are bases  $e_1, \dots, e_{11}$  and  $f_1, \dots, f_{13}$  of  $H_2(S_t, \mathbb{Z})$  and  $H_2(S'_t, \mathbb{Z})$  such that their intersection diagrams are  $T_{3,4,4} \otimes H$  and  $T_{2,5,6} \otimes H$  where

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



We call (3,4,4) and (2,3,9) the Gabrielov numbers of S and S' and write Gab(S) = (3,4,4) and Gab(S') = (2,5,6) respectively. On the other hand we have resolutions of S and S' with exceptional sets consisting of 4 nonsingular rational curves as below;



where each line denotes a nonsingular rational curve, a negative integer beside it denotes the selfintersection number of the curve. We call (2,5,6) and (3,4,4) the Dolgatchev numbers of S and S' and we write Dolg(S) = (2,5,6) etc.. So we have

$$\text{Gab}(S) = \text{Dolg}(S'), \text{Dolg}(S) = \text{Gab}(S').$$

For a Dolgatchev triple (p,q,r) of an exceptional singularity U we define  $\Delta(U) = pqr - pq - qr - rp$ . Then we have

$$\Delta(S) = \Delta(S')$$

This is part of the strange duality of Arnold-Gabrielov of 14 exceptional singularities. See [A].

Here is another observation. The polynomials f and g are quasi-homogeneous. Namely by defining degrees of variables x, y and z

$$(\deg x, \deg y, \deg z) = (6, 5, 4)$$

$$(\deg x, \deg y, \deg z) = (4, 3, 8)$$

for  $f$  and  $g$  respectively, the polynomials  $f$  and  $g$  are homogeneous of degree 16 (equal !). Moreover the sums of degrees of variables are both 15 (= the degree of  $f$  minus one).

### §3. DUALITY OF CUSP SINGULARITIES.

(3.1) Let  $T_{p,q,r}$  be a germ of an isolated singularity at the origin defined by

$$T_{p,q,r} : x^p + y^q + z^r - xyz = 0$$

where  $(1/p) + (1/q) + (1/r) < 1$ . We define  $\deg(T_{p,q,r}) = p+q+r$ ,  $\text{index}(T_{p,q,r}) = (p-1, q-1, r-1)$ ,  $\Delta(T_{p,q,r}) = pqr - pq - qr - rp$ .

Let  $T = T_{3,4,4}$ ,  $T^* = T_{2,5,6}$ . We shall show that there is a duality between  $T$  and  $T^*$ . First we resolve the singularities. Their exceptional sets in their minimal resolutions are cycles of nonsingular rational curves,

$$C = C_1 + C_2, \quad D = D_1 + D_2 + D_3$$

with selfintersection numbers  $C_1^2 = -3$ ,  $C_2^2 = -4$ ,  $D_1^2 = -2$ ,  $D_2^2 = -3$ ,  $D_3^2 = -3$ . By blowing up the first once at one of the intersections of  $C_1$  and  $C_2$ , we obtain a cycle of three nonsingular rational curves  $C'_1, C'_2, C'_3$  with  $C'_1{}^2 = -1$ ,  $C'_2{}^2 = -4$ ,  $C'_3{}^2 = -5$ .

Now we define

$$\text{cycle}(T) = (1, 4, 5), \quad \text{cycle}(T^*) = (2, 3, 3).$$

Then the first duality between  $T$  and  $T^*$  is

$$\text{index}(T) = \text{cycle}(T^*), \quad \text{cycle}(T) = \text{index}(T^*).$$

The second is

$$\Delta(T) = \Delta(T^*).$$

Moreover the intersection matrices of C and D are

$$(C_i C_j) = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad (D_i D_j) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

whose determinants are equal to  $\Delta(T)$  or  $\Delta(T^*)$  up to sign.

Next we consider modified continued fractions arising from the sequences of selfintersection numbers of C and D. Let  $\omega = [[\overline{3,4}]]$ . By definition

$$\omega = 3 - \frac{1}{4 - \frac{1}{3 - \frac{1}{4 - \frac{1}{\ddots}}}}} = 3 - \frac{1}{4 - \frac{1}{\omega}} = (3 + \sqrt{6})/2.$$

Then the modified continued fraction expansion of  $(1/\omega)$  is given by

$$1/\omega = [[1, 2, \overline{3, 2, 3}]]$$

where 3,2,3 is the periodic part of the expansion and the first 1 and 2 have no particular meaning, indeed, the 1 comes first simply because  $(1/\omega) < 1$ . Since (3,2,3) is a cyclic permutation of (2,3,3), we may identify (2,3,3) and (3,2,3). Conversely if we start with  $\omega^* = [[\overline{3,2,3}]]$ , then we obtain  $1/\omega^* = [[1, 2, \overline{4, 3}]]$ . This is the third duality.

Next we reconsider the cycles C and D. The cycles C and D are so-called fundamental divisors of the singularities T and T\*. An important fact is for instance that the embedding dimension of any cusp singularity S is equal to  $\max(3, -Z^2)$  for the fundamental divisor Z of S. So we define  $\text{Deg}(T) = -C^2$ ,  $\text{Deg}(T^*) = -(D)^2$ . Then

$$\text{Deg}(T) = -(C_1 + C_2)^2 = 3 + 4 - 4 = 3,$$

$$\text{Deg}(T^*) = -(D_1 + D_2 + D_3)^2 = 2 + 3 + 3 - 2 - 2 - 2 = 2.$$

Now the fourth duality is

$$\text{Deg}(T) = \#(\text{irreducible components of } D),$$

$$\text{Deg}(T^*) = \#(\text{irreducible components of } C).$$

Here we define length(T) = #(irreducible components of C) etc..

There is still a duality between T and T\*. To state it, we need to take another pair  $T_{2,3,9}$  and  $T_{3,3,4}$ . The exceptional sets of  $T_{2,3,9}$  and  $T_{3,3,4}$  are cycles of three nonsingular rational curves with selfintersection numbers -2, -2, -3 and a rational curve with a node with selfintersection number -3. By blowing up the second at the node of the rational curve, we obtain a cycle of two rational curves with selfintersection numbers -1, -7. By blowing up again at one of the intersection points of two curves, we have a cycle of three rational curves with selfintersection numbers -1, -2, -8. So we define

$$\text{cycle}(T_{2,3,9}) = (2, 2, 3), \quad \text{cycle}(T_{3,3,4}) = (1, 2, 8).$$

Thus we have the same duality as before,

$$\text{cycle}(T_{2,3,9}) = \text{index}(T_{3,3,4}), \quad \text{index}(T_{2,3,9}) = \text{cycle}(T_{3,3,4}).$$

Now the fifth duality is

$$\text{deg}(T) + \text{deg}(T^*) = 24,$$

$$\text{deg}(T_{2,3,9}) + \text{deg}(T_{3,3,4}) = 24.$$

(3.2) THEOREM. Let  $\mathcal{T}$  be the set of all  $T_{p,q,r}$  with length less than 4. Then there is a bijection  $i$  of  $\mathcal{T}$  onto itself such that



for any  $T$  of  $T$

- 0)  $i(i(T)) = T$ ,
- 1)  $\text{index}(T) = \text{cycle}(i(T))$ ,
- 2)  $\text{deg}(T) + \text{deg}(i(T)) = 24$ ,
- 3)  $\Delta(T) = \Delta(i(T))$ ,
- 4) an assertion about continued fraction expansions holds,
- 5)  $\text{Deg}(T) = \text{length}(i(T))$ .

We notice that  $\#(T) = 14$  and  $T_{p,q,r}$  belongs to  $T$  iff  $S_{p,q,r}$  is one of the 14 exceptional unimodular singularities and that  $T_{p,q,r}$  and  $T_{s,t,u}$  are dual iff  $S_{p,q,r}$  and  $S_{s,t,u}$  are dual.

(3.3) TABLE OF 14 TRIPLES.

non self-dual		self-dual
$(2,3,8) \xleftrightarrow{\text{dual}} (2,4,5)$		$(2,3,7), (3,3,6)$
$(2,3,9) \xrightarrow{\text{dual}} (3,3,4)$		$(2,4,6), (3,4,5)$
$(2,4,7) \xrightarrow{\text{dual}} (3,3,5)$		$(2,5,5), (4,4,4)$
$(2,5,6) \xrightarrow{\text{dual}} (3,4,4)$		

where we mean by self-dual that  $(p,q,r)$  is dual to  $(p,q,r)$ .

§4 HYPERBOLIC INOUE SURFACES.

(4.1) Let  $K$  be a real quadratic field with conjugation  $( )'$ ,  $M$  a free  $\mathbb{Z}$  module of rank two (called a complete module) in  $K$ . Let  $U^+(M) = \{\alpha \in K ; \alpha M = M \text{ and } \alpha > 0, \alpha' > 0\}$ ,  $V$  a subgroup of  $U^+(M)$  of finite index. It is known that  $U^+(M)$ , a fortiori,  $V$  is infinite cyclic. Let  $H$  be the upper half plane  $\{z \in \mathbb{C} ; \text{Im}(z) > 0\}$ . We define actions of  $M$  and  $V$  on  $H \times H$  and  $H \times \mathbb{E}$  by

$$m : (z_1, z_2) \rightarrow (z_1 + m, z_2 + m')$$

$$\alpha : (z_1, z_2) \rightarrow (\alpha z_1, \alpha' z_2),$$

and  $G(M, V)$  to be the group of those actions by  $M$  and  $V$ . Then the actions of  $G(M, V)$  on  $H \times H$  and  $H \times \mathbb{C}$  are free and properly discontinuous so that we have as quotient spaces nonsingular surfaces

$$X'(M, V) = H \times H / G(M, V)$$

$$S'(M, V) = H \times \mathbb{C} / G(M, V)$$

$$X'(M) = H \times H / \text{the group of actions of } M.$$

The surface  $S'(M, V)$  is compactified by adding two points  $\infty$  and  $\infty_-$  and we obtain a singular surface  $S_{\text{sing}}(M, V)$ . By the natural inclusion of  $H \times H$  into  $H \times \mathbb{C}$  we may consider  $X'(M, V)$  as a subset of  $S_{\text{sing}}(M, V)$ . We may assume that  $X(M, V)$ , the interior of the closure of  $X'(M, V)$  in  $S_{\text{sing}}(M, V)$ , contains  $\infty$ . We have

$$X(M, V) = X'(M, V) \cup \{\infty\}.$$

I shall give the one-dimensional analogue of  $X(M, V)$ . We take  $K = \mathbb{Q}$ ,  $M = \mathbb{Z}$ ,  $V = \{1\}$  and define an action of  $M$  on  $H$  by

$$m (\in M) : z \rightarrow z + m.$$

Then the quotient  $X'$  is a punctured disc  $D' = D - \{0\}$  by  $\exp(2\pi\sqrt{-1}z)$ .  $S'(M, V) = \mathbb{C}/M (\cong \mathbb{C}^*)$ ,  $S_{\text{sing}} = \mathbb{P}^1$ . The interior of the closure of  $X'$  in  $S_{\text{sing}}$  is the unit disc  $D$ .

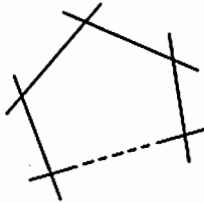
(4.2) DEFINITION. The germ  $(X(M, V), \infty)$  at  $\infty$  is called a cusp singularity of type  $(M, V)$ .

The surface  $S_{\text{sing}}(M, V)$  has two cusp singularities at  $\infty$  and  $\infty_-$  which can be resolved by replacing  $\infty$  and  $\infty_-$  by  $C$  and  $D$  cycles of rational curves  $[H]$ . Here we mean by a cycle of rational curves a connected curve  $C = C_1 + C_2 + \dots + C_n$  such that

$n \geq 3$   $C_j C_k = 0$  ( $j \neq k, k \pm 1 \pmod n$ ),  $C_j C_{j+1} = 1$  (for any  $j \pmod n$ ),

$n = 2$   $C_1$  and  $C_2$  meet at two distinct points transversally,  
each  $C_j$  is a nonsingular rational curve ( $n \geq 2$ )

$n = 1$   $C_1$  is a rational curve with a node.



( $n \geq 3$ )



( $n = 2$ )



( $n = 1$ )

By resolving the singularities  $\infty$  and  $\infty_-$  of  $S_{\text{sing}}(M, V)$ , we obtain a nonsingular surface  $S(M, V)$  which has an infinite cyclic fundamental group and no exceptional curves of the first kind.

This is the second example of a surface of class  $VII_0$  with  $b_2 > 0$ ,

which was constructed by Masahisa Inoue in 1974. We call this surface a hyperbolic Inoue surface from various reasons. As we saw, any hyperbolic Inoue surface  $S(M, V)$  has two cycles  $C$  and  $D$  of rational curves. It is not difficult to check except 3) the following

(4.3) PROPOSITION.

1) The intersection matrices  $(C_j C_k)$  and  $(D_j D_k)$  are negative definite.

2)  $C^2 = -\#(\text{irreducible components of } D)$ ,

$D^2 = -\#(\text{irreducible components of } C)$ ,

$b_2(S) = \#(\text{irreducible components of } C+D)$ .

3)  $H_2(C, \mathbb{Z})$  and  $H_2(D, \mathbb{Z})$  are primitive sublattices of  $H_2(S(M, V), \mathbb{Z})$ , and  $H_2(D, \mathbb{Z}) = H_2(C, \mathbb{Z})^\perp$  (the orthogonal complement).

4)  $|\det(C_j C_k)| = |\det(D_j D_k)|$ .

See (7.9) for the definitions of lattices, primitive sublattices. We also notice that the sequences of selfintersection numbers of irreducible components of C and D are related by modified continued fraction expansions of a real quadratic irrationality  $\omega$  and  $1/\omega$ . To be precise, we define

(4.4) DEFINITION. For a cycle C of rational curves

$$\text{Zykel}(C) = (-C_1^2, -C_2^2, \dots, -C_n^2) \quad (n \geq 2)$$

$$(-C_1^2 + 2) \quad (n=1).$$

(4.5) LEMMA. Let  $\omega$  be a real quadratic irrationality with  $\omega > 2$ ,  $1 > \omega' > 0$ . Then there exist  $p_j, q_j (\geq 3)$  and  $n (\geq 1)$  such that

$$\omega = [ \underbrace{p_1, 2, \dots, 2}_{(q_1-3)}, \underbrace{p_2, 2, \dots, 2}_{(q_2-3)}, \dots, \underbrace{p_n, 2, \dots, 2}_{(q_n-3)} ]$$

$$1/\omega = [ [1, \underbrace{2, \dots, 2}_{(p_1-3)}, q_1, \underbrace{2, \dots, 2}_{(p_2-3)}, q_2, \dots, q_{n-1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{(p_n-3)}, q_n ] ] .$$

With these preparations we can state the relation between C and D as follows;

(4.6) PROPOSITION. For two cycles C and D on a hyperbolic Inoue surface  $S(M, V)$  there exist  $p_j, q_j (\geq 3)$  and  $n (\geq 1)$  such that

$$\text{Zykel}(C) = (p_1, \underbrace{2, \dots, 2}_{(q_1-3)}, p_2, \underbrace{2, \dots, 2}_{(q_2-3)}, \dots, p_n, \underbrace{2, \dots, 2}_{(q_n-3)})$$

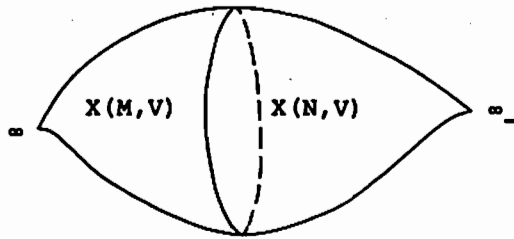
$$\text{Zykel}(D) = (\underbrace{2, \dots, 2}_{(p_1-3)}, q_1, \underbrace{2, \dots, 2}_{(p_2-3)}, q_2, \dots, q_{n-1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{(p_n-3)}, q_n)$$

and  $M = (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega)\beta$

$$\omega = [ \underbrace{p_1, 2, \dots, 2}_{(q_1-3)}, \dots, \underbrace{p_n, 2, \dots, 2}_{(q_n-3)} ]$$

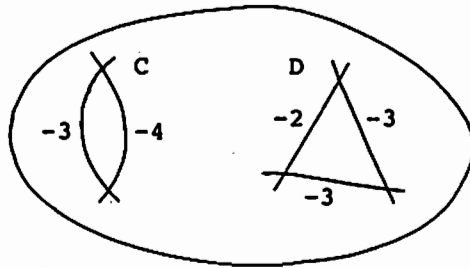
for some  $\beta (\in K)$  with  $\beta > 0, \beta' > 0$ .

$S_{\text{sing}}(M, V)$



minimal resolution

$S(M, V)$



$$(M = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} (3 + \sqrt{6}) / 2)$$

(4.7) EXAMPLE. Let  $M = \mathbb{Z} + \mathbb{Z} \omega$ ,  $\omega = (3 + \sqrt{6}) / 2$ , and  $V = U^+(M)$ . Then  $V$  is an infinite cyclic group generated by  $\alpha$ ,  $\alpha = 5 - 2\sqrt{6}$ . The surface  $S(M, V)$  has two cycles  $C$  and  $D$

$$C = C_1 + C_2, \quad D = D_1 + D_2 + D_3$$

with  $C_1^2 = -3$ ,  $C_2^2 = -4$ ,  $D_1^2 = -2$ ,  $D_2^2 = -3$ ,  $D_3^2 = -3$ . We have

$$\omega = [[\overline{3, 4}]], \quad 1/\omega = [[\overline{1, 2, 3, 2, 3}]].$$

This is the case we treated in §3.

Next we consider a double covering  $S(M, V^2)$  of  $S(M, V)$  where  $V^2 = \langle \beta^2 ; \beta \in V \rangle$ . Then we have two cycles  $C'$  and  $D'$  of rational curves on  $S(M, V^2)$ , each being a double unramified covering of  $C$  or  $D$  respectively as well as  $S(M, V^2)$ . Then we have

$$\text{Zykel}(C') = (3, 4, 3, 4), \quad \text{Zykel}(D') = (3, 2, 3, 3, 2, 3)$$

which is also a special case of (4.6).

(4.8) We say that two complete modules  $M$  and  $N$  are strictly equivalent if there is  $\gamma$  in  $K$  such that  $\gamma > 0$ ,  $\gamma' > 0$  and  $M = \gamma N$ . Up to strict equivalence, we may assume that  $M = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$  with  $\omega > 2$ ,  $1 > \omega' > 0$ . Then we define with the help of (4.6)

$$\omega^* = \left[ \underbrace{[2, \dots, 2, q_1]}_{(p_1-3)}, \underbrace{[2, \dots, 2, q_2]}_{(p_2-3)}, \dots, \underbrace{[2, \dots, 2, q_n]}_{(p_n-3)} \right].$$

It is easy to see that  $\omega^* = (\omega-1)/(\omega-2)$ .

(4.9) LEMMA. Let  $M = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$ ,  $N = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega^*$  with the notations in (4.8). Then  $(S_{\text{sing}}(M, V), \infty) \cong (X(N, V), \infty)$  for any subgroup  $V$  of  $U^+(M)$  of finite index.

(4.10) DEFINITION. Two cusp singularities  $(X(M, V), \infty)$  and  $(X(N, U), \infty)$  are dual if  $V = U$  and there exist a real quadratic irrationality  $\omega$  with  $\omega > 2$ ,  $1 > \omega' > 0$  such that  $M$  and  $N$  are respectively strictly equivalent to  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$  and  $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega^*$  where  $\omega^* = (\omega-1)/(\omega-2)$ .

This definition is equivalent to saying that two cusp singularities are dual iff they are obtained from one and the same hyperbolic Inoue surface by contracting two cycles of rational curves on it.

(4.11) PROPOSITION. Let  $M$  be a complete module,  $M^*$  the dual of  $M$ , that is,  $M^* = \{x \in K; \text{tr}(xy) \in \mathbb{Z} \text{ for any } y \text{ in } M\}$ . Then two cusp singularities  $(M(M, V), \infty)$  and  $(X(M^*, V), \infty)$  are dual for any subgroup  $V$  of  $U^+(M)$  of finite index.

This proposition is essentially due to K. Ueno. (See [N3] LEMMA 2.) This fact was pointed out to us by Van der Geer too.

§5 AN ARITHMETIC EXPLANATION OF THE SECOND DUALITY.

The purpose of this section is to give an explanation for why the duality (3.2) 1) holds true.

(5.1) Let  $M = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$  be a complete module with  $\omega > 2$ ,  $1 > \omega' > 0$  and  $V$  a subgroup of  $U^+(M)$  of finite index. We embed  $M$  into  $\mathbb{R}^2$  by a mapping

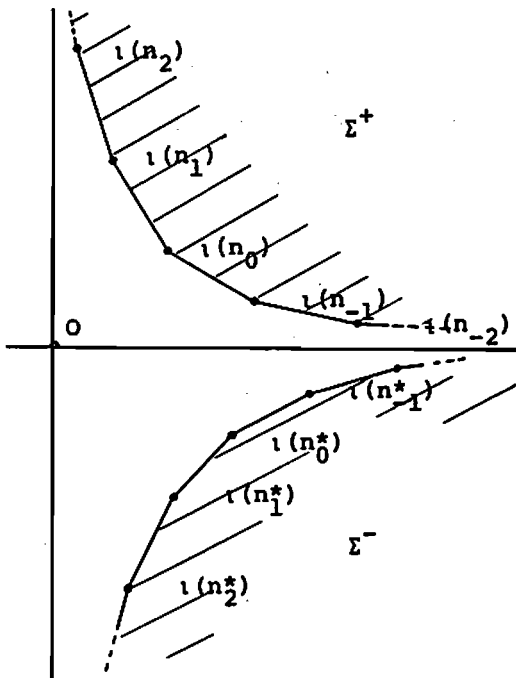
$$\begin{aligned} \iota : M &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ m &\rightarrow (m, m') \end{aligned}$$

Consider the convex hulls of the images of  $M$  in the first and fourth quadrants,

$$\Sigma^+ = \text{convex hull of } \{ \iota(m); m \in M, m > 0, m' > 0 \}$$

$$\Sigma^- = \text{convex hull of } \{ \iota(m); m \in M, m > 0, m' < 0 \}.$$

Let  $\partial\Sigma^+$  ( $\partial\Sigma^-$ ) be the boundary of  $\Sigma^+$  ( $\Sigma^-$ ). Then  $\Sigma^\pm$  is a one dimensional polygon as the picture shows below.



The polygons  $\partial\Sigma^\pm$  consist of infinitely many edges, each connecting two points of  $\iota(M)$ . Let us number them consecutively. Let

$$SK^+ = \iota^{-1}(\partial\Sigma^+ \cap \iota(M)) = \{n_j ; j \in \mathbb{Z}\}$$

$$SK^- = \iota^{-1}(\partial\Sigma^- \cap \iota(M)) = \{n_j^* ; j \in \mathbb{Z}\}$$

where  $n_0 = 1$ ,  $n_0^* = (\omega-1)/\omega^*$ ,  $n_j < n_k$ ,  $n_j^* < n_k^*$  ( $j > k$ ).

These polygons are called the Cohn's support polygons.

Of particular importance is that they describe the minimal resolutions of the cusp singularities  $(X(M, V), \omega)$  and  $(X(N, V), \omega)$  where  $N = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega^*$ ,  $\omega^* = (\omega-1)/(\omega-2)$ . See [0].

(5.2) We define two cone decompositions of  $M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  as follows;

$$Dec^+(M) = \{\mathbb{R}_+ n_j + \mathbb{R}_+ n_{j+1}, \mathbb{R}_+ n_j \quad (j \in \mathbb{Z}), \{0\}\}$$

$$Dec^-(M) = \{\mathbb{R}_+ n_j^* + \mathbb{R}_+ n_{j+1}^*, \mathbb{R}_+ n_j^* \quad (j \in \mathbb{Z}), \{0\}\}.$$

By the general theory of torus embeddings [0], we have two complex spaces locally of finite type associated to  $Dec^\pm(M)$

$$T_M^{emb}(Dec^+(M)) \quad \text{and} \quad T_M^{emb}(Dec^-(M)).$$

For simplicity we denote them by  $T(Dec^+(M))$  and  $T(Dec^-(M))$  in what follows.  $X'(M)$  and  $X'(N)$  (See (4.1).) are naturally embedded into  $T(Dec^+(M))$  and  $T(Dec^-(M))$  as open subsets. Let  $\mathcal{D}^+(M)$  or  $\mathcal{D}^-(M)$  be the interior of the closure of the image of  $X'(M)$  or  $X'(N)$  in  $T(Dec^+(M))$  or  $T(Dec^-(M))$  respectively.

(5.3) We have a dictionary of correspondence between objects in  $Dec^+(M)$  and  $T(Dec^+(M))$  as follows;



$\text{Dec}^+(M)$	$T(\text{Dec}^+(M))$
$n_j$ (or $\mathbb{R}_+ n_j$ , a cone of dim 1)	$C_j$ , a nonsingular rational curve in $\mathcal{D}^+(M)$
$\mathbb{R}_+ n_j + \mathbb{R}_+ n_{j+1}$ (a cone of dim 2)	$p_j = C_j \cdot C_{j+1}$ , the transversal intersection of $C_j$ and $C_{j+1}$
no cone of dim 2 containing $n_j$ and $n_k$ ( $k \neq j, j \pm 1$ )	$C_j$ and $C_k$ don't meet ( $k \neq j, j \pm 1$ )
$n_{j-1} + n_{j+1} = a_j n_j$ ( $\exists a_j \in \mathbb{N}$ )	$C_j^2 = -a_j$
$\alpha$ : a generator of $V$	$g$ : an automorphism of $\mathcal{D}^+(M)$ inducing on $X'(M)$
	$g _{X'(M)} : (z_1, z_2) \rightarrow (\alpha z_1, \alpha' z_2)$
$\alpha n_j = n_{j+r}$ for any $j$	$g(C_j) = C_{j+r}$ for any $j$

(5.4) LEMMA. The group  $\{g^n ; n \in \mathbb{Z}\}$  operates on  $\mathcal{D}^+(M)$  freely and properly discontinuously. We have a natural holomorphic mapping  $h^+$  of  $\mathcal{D}^+(M)/V := \mathcal{D}^+(M)/\{g^n ; n \in \mathbb{Z}\}$  onto  $X(M, V)$ . The mapping  $h^+$  is a minimal resolution of  $\infty$ .

(5.5) We assume that  $\#\{n_j^* ; j \in \mathbb{Z}\} \bmod V = 3$ . Then we have a dictionary for  $\text{Dec}^-(M)$  and  $T(\text{Dec}^-(M))$ ,  $\mathcal{D}^-(M)$  as follows;

$\text{Dec}^-(M)$	$T(\text{Dec}^-(M))$
$n_j^*$	$D_j$ , a rational curve in $\mathcal{D}^-(M)$
$(p-1)n_{3j}^* = n_{3j-1}^* + n_{3j+1}^*$	$D_{3j}^2 = -(p-1)$
$(q-1)n_{3j+1}^* = n_{3j}^* + n_{3j+2}^*$	$D_{3j+1}^2 = -(q-1)$
$(r-1)n_{3j+2}^* = n_{3j+1}^* + n_{3j+3}^*$	$D_{3j+2}^2 = -(r-1)$
$\alpha$ : a generator of $V$	$g$ : an automorphism of $\mathcal{D}^-(M)$
$\alpha n_j^* = n_{j+3}^*$	$g(D_j) = D_{j+3}$

where  $p, q \geq 3, r \geq 4$ .

We know  $n_j^*$  explicitly. For instance see [O, p. 161].

In correspondence with  $D_j$  or  $n_j^*$ , we define holomorphic functions  $f_j$  on  $X(M, V)$  by

$$\begin{aligned} f_j &= F_{f(n_j^*)}(z_1, z_2) \\ &= \sum_{\beta \in V \cdot f(n_j^*)} \exp(2\pi \sqrt{-1}(\beta z_1 + \beta' z_2)) \end{aligned}$$

where  $f(n_j^*) = (n_j^*/(\omega - \omega'))'$ ,  $V \cdot f(n_j^*) = \{vf(n_j^*) ; v \in V\}$ .

(5.6) THEOREM.

1)  $f_j$  is holomorphic on  $X(M, V)$  and  $f_j(\infty) = 0$ . We have  $f_j = f_k$  iff  $j \equiv k \pmod{3}$ .

2) The mapping  $F : (X(M, V), \infty) \rightarrow (\mathbb{C}^3, 0)$

$$(z_1, z_2) \longmapsto (f_0, f_1, f_2)$$

is a holomorphic embedding.

3) We have  $f_0^p + f_1^q + f_2^r - f_0 f_1 f_2 = 0 \pmod{\text{higher order}}$ .

4) There exist holomorphic functions  $\hat{f}_j$  on  $(X(M, V), \infty)$  such that

$$\hat{f}_j \equiv f_j \pmod{m^2} \quad (m : \text{maximal ideal of } \infty)$$

$$\hat{f}_0^p + \hat{f}_1^q + \hat{f}_2^r - \hat{f}_0 \hat{f}_1 \hat{f}_2 = 0.$$

(5.7) THEOREM. Under the assumption in (5.5),  $(X(M, V), \infty)$  is isomorphic to  $T_{p, q, r}$  where  $p, q \geq 3, r \geq 4$ .

(5.8) Next we consider the case where  $\#\{n_j^* ; j \in \mathbb{Z}\} \pmod{V} = 2$ .

We define  $n_{2j-1/2}^*$ ,  $\text{Dec}^{-1}(M)$  as follows;

$$n_{2j-1/2}^* = n_{2j}^* + n_{2j-1}^*$$

$$\text{Dec}^{-1}(M) = \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ n_{2j-1}^* + \mathbb{R}_+ n_{2j-1/2}^* + \mathbb{R}_+ n_{2j-1/2}^* + \mathbb{R}_+ n_{2j}^* \\ \mathbb{R}_+ n_{2j}^* + \mathbb{R}_+ n_{2j+1}^* \text{ and their faces} \end{array} \right\}.$$

Then we define  $\mathcal{D}^{-1}(M)$  to be the interior of the closure of  $X'(M)$

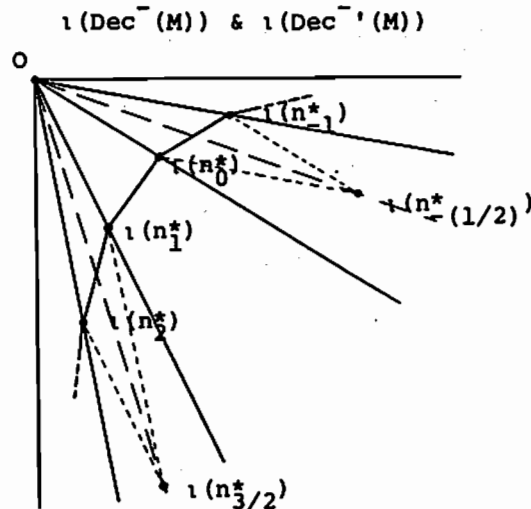
in  $T(\text{Dec}^{-1}(M))$ . ( $X'(M)$  is embedded into  $T(\text{Dec}^{-1}(M))$  too.)

We can also lift the action of  $g$  on  $\mathcal{D}^{-}(M)$  to  $\mathcal{D}^{-1}(M)$  which we denote by the same  $g$ .

Now we have two dictionaries.

$\text{Dec}^{-}(M)$	$T(\text{Dec}^{-}(M))$
$n_j^*$	$D_j ( \subset \mathcal{D}^{-}(M) )$
$(q-2)n_{2j}^* = n_{2j-1}^* + n_{2j+1}^*$	$D_{2j}^2 = -(q-2)$
$(r-2)n_{2j+1}^* = n_{2j}^* + n_{2j+2}^*$	$D_{2j+1}^2 = -(r-2)$
$\text{Dec}^{-1}(M)$	$T(\text{Dec}^{-1}(M))$
$n_j^*$	$D_j' ( \subset \mathcal{D}^{-1}(M) )$
$n_{2j-(1/2)}^*$	$D_{2j-(1/2)}'$
$(2-1)n_{2j-(1/2)}^* = n_{2j-1}^* + n_{2j}^*$	$(D_{2j-(1/2)}')^2 = -(2-1)$
$(q-1)n_{2j}^* = n_{2j-(1/2)}^* + n_{2j+1}^*$	$(D_{2j}')^2 = -(q-1)$
$(r-1)n_{2j+1}^* = n_{2j}^* + n_{2j+(3/2)}^*$	$(D_{2j+1}')^2 = -(r-1)$

where  $q \geq 4$ ,  $r \geq 5$ .



(5.9) LEMMA. The quotient surface  $\mathcal{D}^{-1}(M)/V := \mathcal{D}^{-1}(M)/\{g^n; n \in \mathbb{Z}\}$  is a blowing-up of  $\mathcal{D}^{-}(M)/V := \mathcal{D}^{-}(M)/\{g^n; n \in \mathbb{Z}\}$  with center the image of  $p_{-1}$ .

(5.10) THEOREM. Define holomorphic functions  $f_j$  ( $j=-1/2, 0, 1$ ) on  $X(M, V)$  and a holomorphic mapping  $F$  of  $X(M, V)$  into  $\mathbb{C}^3$  by

$$\begin{aligned} f_j &= F_{f(n_j^*)}(z_1, z_2) \\ &= \sum_{\beta \in V \cdot \hat{f}(n_j^*)} \exp(2\pi\sqrt{-1}(\beta z_1 + \beta' z_2)) \\ F(z_1, z_2) &= (f_{-1/2}, f_0, f_1). \end{aligned}$$

Then

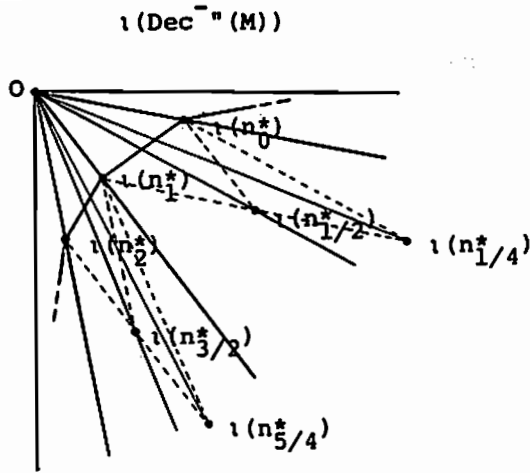
- 1)  $F$  is a holomorphic embedding of  $(X, (M, V), \infty)$  into  $(\mathbb{C}^3, 0)$ .
- 2) We have  $f_{-1/2}^2 + f_0^q + f_1^r - f_{-1/2}f_0f_1 = 0$  (mod higher order).
- 3) There exist holomorphic functions  $\hat{f}_j$  on  $(X(M, V), \infty)$  such that

$$\begin{aligned} \hat{f}_j &= f_j \pmod{m^2} \\ \hat{f}_{-1/2}^2 + \hat{f}_0^q + \hat{f}_1^r - \hat{f}_{-1/2}\hat{f}_0\hat{f}_1 &= 0. \end{aligned}$$

(5.11) THEOREM. Under the assumption in (5.9),  $(X(M, V), \infty)$  is isomorphic to  $T_{2, q, r}$  where  $q \geq 4$ ,  $r \geq 5$ .

(5.12) Finally we consider the case  $\#\{n_j^*\} \pmod V = 1$ . We define  $n_{j+(1/2)}^*$ ,  $n_{j+(1/4)}^*$  and  $\text{Dec}^{-n}(M)$  as follows,

$$\begin{aligned} n_{j+(1/2)}^* &= n_j^* + n_{j+1}^*, \\ n_{j+(1/4)}^* &= n_j^* + n_{j+(1/2)}^*, \\ \text{Dec}^{-n}(M) &= \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ n_{j-(1/2)} + \mathbb{R}_+ n_j^*, \mathbb{R}_+ n_j^* + \mathbb{R}_+ n_{j+(1/4)}^*, \\ \mathbb{R}_+ n_{j+(1/4)}^* + \mathbb{R}_+ n_{j+(1/2)}^*, \text{ and their faces} \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

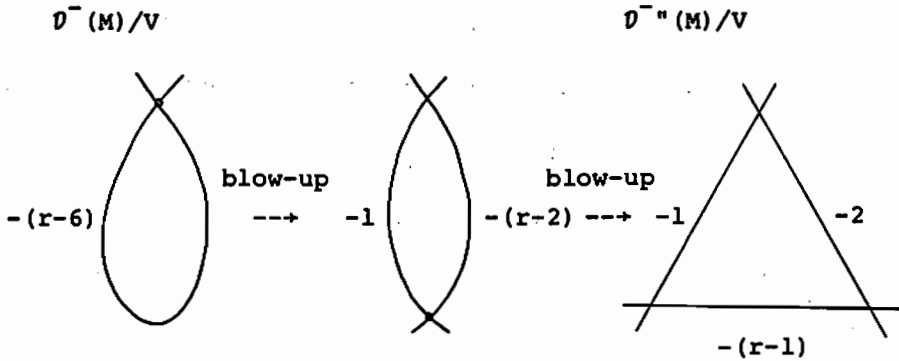


(5.13) LEMMA. Let  $\mathcal{D}^{-n}(M)$  be the interior of the closure of  $X'(M)$  embedded in  $T_M \text{emb}(\text{Dec}^{-n}(M))$ ,  $g$  the lifting of the automorphism  $g$  of  $\mathcal{D}^{-n}(M)$  corresponding to a generator of  $V$  in (5.3). Then the surface  $\mathcal{D}^{-n}(M)/V := \mathcal{D}^{-n}(M)/\{g^n; n \in \mathbb{Z}\}$  is a succession of two blowing-ups of  $\mathcal{D}^{-n}(M)/V$  with centers a node of the unique rational curve in  $\mathcal{D}^{-n}(M)/V$  and a singular point of the total transform of the curve.

(5.14) We have two dictionaries;

$\text{Dec}^{-n}(M)$	$T(\text{Dec}^{-n}(M))$
$n_j^*$	$D_j ( \subset \mathcal{D}^{-n}(M) )$
$(r-4)n_j^* = n_{j-1}^* + n_{j+1}^*$	$D_j^2 = -(r-4)$
$\text{Dec}^{-n}(M)$	$T(\text{Dec}^{-n}(M))$
$n_j^*$	$D_j^n ( \subset \mathcal{D}^{-n}(M) )$
$n_{j+(1/2)}^*$	$D_{j+(1/2)}^n$
$n_{j+(1/4)}^*$	$D_{j+(1/4)}^n$
$(2-1)n_{j+(1/4)}^* = n_j^* + n_{j+(1/2)}^*$	$(D_{j+(1/4)}^n)^2 = -(2-1)$
$(3-1)n_{j+(1/2)}^* = n_{j+(1/4)}^* + n_{j+1}^*$	$(D_{j+(1/2)}^n)^2 = -(3-1)$
$(r-1)n_{j+1}^* = n_{j+(1/2)}^* + n_{j+(5/4)}^*$	$(D_{j+1}^n)^2 = -(r-1)$

where  $r \geq 7$ .



We remark that  $D_0^2 = -(r-4)$  in  $\mathcal{D}^-(M)$  but  $\bar{D}_0^2 = -(r-6)$  where  $\bar{D}_0$  is the image of  $D_0$  in  $\mathcal{D}^-(M)/V$ .

(5.15) **THEOREM.** We define holomorphic functions  $f_j$  ( $j=1/4, 1/2, 1$ ) on  $X(M,V)$  and a holomorphic mapping  $F$  of  $X(M,V)$  into  $\mathbb{C}^3$  by

$$f_j = F_{f(n_j^*)}(z_1, z_2)$$

$$F(z_1, z_2) = (f_{1/4}, f_{1/2}, f_1).$$

Then

- 1)  $F$  is a holomorphic embedding of  $(X(M,V), \infty)$  into  $(\mathbb{C}^3, 0)$ .
- 2) We have  $f_{1/4}^2 + f_{1/2}^3 + f_1^r - f_{1/4} f_{1/2} f_1 = 0$  (mod higher order).
- 3) There exist holomorphic functions  $\hat{f}_j$  on  $(X(M,V), \infty)$  such that

$$\hat{f}_j = f_j \text{ mod } m^2$$

$$\hat{f}_{1/4}^2 + \hat{f}_{1/2}^3 + \hat{f}_1^r - \hat{f}_{1/4} \hat{f}_{1/2} \hat{f}_1 = 0.$$

(5.16) **THEOREM.** Under the assumption in (5.12),  $(X(M,V), \infty)$  is isomorphic to  $T_{2,3,r}$  where  $r \geq 7$ .

(5.17) Now we are in a position to give an explanation for the duality (3.2) 1). Let  $M = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega$ ,  $N = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\omega^*$ ,  $\omega = (3+\sqrt{6})/2$ ,  $\omega^* = (\omega-1)/(\omega-2) = (7+2\sqrt{6})/5$ . Then  $V := U^+(M) = U^+(N) = \{\alpha^n ; n \in \mathbb{Z}\}$  where  $\alpha = 5-2\sqrt{6}$ ,  $1 > \alpha > 0$ . Let  $T = (X(M,V), \infty)$ ,  $T^* = (X(N,V), \infty)$ .  $T^*$  is the dual of  $T$  by definition. Then by [H] or

(5.4), we have minimal resolutions of  $T$  and  $T^*$

$$\mathcal{D}^+(M)/V (\cong \mathcal{D}^-(N)/V), \quad \mathcal{D}^-(M)/V (\cong \mathcal{D}^+(N)/V).$$

Their exceptional sets are cycles of rational curves, respectively

$$C_0, C_1 \quad \text{and} \quad D_0, D_1, D_2$$

$$\text{with } C_0^2 = -3, C_1^2 = -4 \text{ and } D_0^2 = -3, D_1^2 = -2, D_2^2 = -3.$$

In view of (5.5)-(5.7), we have holomorphic functions  $\hat{f}_j$  ( $j=0, 1, 2$ ) on  $T$  such that

$$\begin{aligned} \hat{f}_j &= F_{f(n_j^*)} \pmod{m^2} \quad (j=0, 1, 2) \\ \hat{f}_0^4 + \hat{f}_1^3 + \hat{f}_2^4 - \hat{f}_0 \hat{f}_1 \hat{f}_2 &= 0 \end{aligned}$$

together with correspondences

$$\begin{aligned} n_0^* &\longleftrightarrow D_0, & D_0^2 &= -(4-1), \\ n_1^* &\longleftrightarrow D_1, & D_1^2 &= -(3-1), \\ n_2^* &\longleftrightarrow D_2, & D_2^2 &= -(4-1) \end{aligned}$$

The singularity  $T = (X(M, V), \infty)$  is thus isomorphic to  $T_{4,3,4}$  by (5.7).

On the other hand we have in view of (5.8)-(5.11) holomorphic functions  $\hat{g}_j$  ( $j=-(1/2), 0, 1$ ) on  $T^*$  such that

$$\begin{aligned} \hat{g}_j &= F_{g(n_j)} \pmod{m^2} \quad (j=-(1/2), 0, 1) \\ \hat{g}_{-(1/2)}^2 + \hat{g}_0^5 + \hat{g}_1^6 - \hat{g}_{-(1/2)} \hat{g}_0 \hat{g}_1 &= 0 \end{aligned}$$

together with correspondences

$$\begin{aligned} n_{-(1/2)} &\longleftrightarrow C'_{-(1/2)}, & (C'_{-(1/2)})^2 &= -(2-1), \\ n_0 &\longleftrightarrow C'_0, & (C'_0)^2 &= -(5-1), \\ n_1 &\longleftrightarrow C'_1, & (C'_1)^2 &= -(6-1) \end{aligned}$$

where  $g(n) = ((\omega^* - 1)n / (\omega^* - \omega^{*'}))'$  and  $C'_j$  is a rational curve in  $\mathcal{D}^-(N)$ . Then the singularity  $T^* = (X(N, V), \infty)$  is isomorphic to

$T_{2,5,6}$  in view of (5.11). The introduction of  $n_{-(1/2)}$  corresponds to a blowing-up  $\mathcal{D}^-(N)/V$  of  $\mathcal{D}^-(N)/V$ , which fits the process of defining cycle(T) in (3.1). This explains (3.2) 1).

#### §6. A GEOMETRIC EXPLANATION OF THE SECOND DUALITY.

(6.1) THEOREM [N5]. Let  $S$  be a  $VII_0$  surface (i.e. a compact complex surface with  $b_1 = 1$  having no exceptional curves of the first kind). Suppose that  $S$  has two cycles  $A$  and  $B$  of rational curves. The  $S$  is a hyperbolic Inoue surface.

In view of (4.3) and (4.6), (6.1) shows that there is a duality between two cycles  $A$  and  $B$  of rational curves on a  $VII_0$  surface. However the argument for the proof proceeds in the reverse order in reality. We make an essential use of the duality in order to prove (6.1). So it is worthy of mentioning

(6.2) THEOREM. Let  $S$  be a  $VII_0$  surface with  $A, B$  two cycles of rational curves. Then

1) , the intersection matrices  $(A_j A_k)$  and  $(B_j B_k)$  are negative definite,

2)  $A^2 = -\#(\text{irreducible components of } B),$

$B^2 = -\#(\text{irreducible components of } A),$

$b_2 = \#(\text{irreducible components of } A+B),$

3) there exist positive integers  $p_j, q_j (\geq 3)$  and  $n (j=1, \dots, n)$  such that

$$\text{Zykel}(A) = (p_1, \underbrace{2, \dots, 2}_{(q_1-3)}, p_2, 2, \dots, p_n, \underbrace{2, \dots, 2}_{(q_n-3)})$$

$$\text{Zykel}(B) = (\underbrace{2, \dots, 2}_{(p_1-3)}, q_1, 2, \dots, q_{n-1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{(p_n-3)}, q_n),$$

4)  $H_2(A, \mathbb{Z})$  and  $H_2(B, \mathbb{Z})$  are primitive sublattices of a



unimodular lattice  $H_2(S, \mathbb{Z})$ , each being the orthogonal complement of the other in  $H_2(S, \mathbb{Z})$ ,

$$5) \quad |\det(A_j A_k)| = |\det(B_j B_k)|.$$

The proof of this is essentially based on the following fact.

(6.3) LEMMA [N5] Let  $S$ ,  $A$  and  $B$  be the same as in (6.2). Then there exists a proper smooth family  $\pi : S \rightarrow D$  over the unit disc  $D$  with two  $\pi$ -flat divisors  $A$  and  $B$  of  $S$  such that

$$1) \quad (S_0, A_0, B_0) \cong (S, A, B),$$

2)  $A_t$  and  $B_t$  are nonsingular elliptic curves for  $t \neq 0$ ,

3)  $S_t$  is a blown-up primary Hopf surface with two elliptic curves whose proper transforms are  $A_t$  and  $B_t$ , and the centers of blowing-ups are on the two elliptic curves or their proper transforms.

See [N4, N5] for the details.

(6.4) THEOREM. Let  $S$  be a  $VII_0$  surface with two cycles  $A$  and  $B$ . Suppose  $A$  and  $B$  are exceptional sets of  $T_{p,q,r}$  and  $T_{s,t,u}$ . Then  $p+q+r+s+t+u = 24$ .

Proof. We assume (3.2) 1). Then by blowing up  $S$  at singular points of  $A$  and  $B$  if necessary, we have a surface  $S'$  with  $b_1 = 1$ ,  $b_2 = 6$ ,  $A'$  and  $B'$  cycles of three rational curves on  $S'$  and  $K_{S'} = -A' - B'$  because  $K_S = -A - B$  by [I]. Then (3.2) 1) implies that the sequences of selfintersection numbers of irreducible components of  $A'$  and  $B'$  are given by  $-(s-1)$ ,  $-(t-1)$ ,  $-(u-1)$  and  $-(p-1)$ ,  $-(q-1)$ ,  $-(r-1)$  respectively. Then we have

$$6 = b_2 = -K_S^2 = -(A'+B')^2 = (p-1+q-1+r-1-6)+(s-1+t-1+u-1-6),$$

hence  $p+q+r+s+t+u = 24$ .

Q.E.D.

§7 WHY IS  $T_{p,q,r}$  CALLED  $T_{p,q,r}$  ?

(7.1) By [L2] the deformation theory for a singular hyperbolic Inoue surface with one cusp  $T$  and with the dual cycle  $D$  of  $T$  preserved is equivalent to the deformation theory for the cusp singularity  $T$ . Hence we study deformations of a hyperbolic Inoue surface instead of deformations of  $T$ .

(7.2) LEMMA [L2]. Let  $Y$  be a singular hyperbolic Inoue surface with one cusp  $T$ , the dual cycle  $D$ . Suppose that  $D$  consists of three rational curves with selfintersection numbers  $-(p-1)$ ,  $-(q-1)$ ,  $-(s-1)$  ( $p, q \geq 3$ ,  $r \geq 4$ ). Then there exists a proper flat family

$$\pi : S \rightarrow \Delta$$

over a discs  $\Delta$  with a  $\pi$ -flat Cartier divisor of  $\mathcal{D}$  of  $S$  such that  $(S_0, \mathcal{D}_0) = (Y, D)$ ,  $\mathcal{D} \cong D \times \Delta$ ,  $S_t$  ( $t \neq 0$ ) is a nonsingular surface. Moreover the pair  $(S_t, \mathcal{D}_t)$  is a blown-up projective plane  $\mathbb{P}^2$  and the total transform of a cycle consisting of three lines.

(7.3) Let  $L_0, L_1$  and  $L_2$  be three lines forming a cycle on the projective plane  $\mathbb{P}^2$ ,  $P_j$  nonsingular points of the cycle such that  $P_j \in L_0$  ( $1 \leq j \leq p$ ),  $P_j \in L_1$  ( $p+1 \leq j \leq p+q$ ),  $P_j \in L_2$  ( $p+q+1 \leq j \leq p+q+r$ ). Blow up  $\mathbb{P}^2$  at these points to obtain a surface  $Y'$  and exceptional curves  $E_j$  ( $1 \leq j \leq p+q+r$ ),  $D_j$  the proper transform of  $L_j$  ( $1 \leq j \leq 3$ ). Then  $E_j E_k = -\delta_{jk}$ ,  $D_0^2 = -(p-1)$ ,  $D_1^2 = -(q-1)$ ,  $D_2^2 = -(r-1)$ . A fiber  $(S_t, \mathcal{D}_t)$  is isomorphic to one of such pairs  $(Y', D)$  by (7.2).

(7.4) LEMMA [L2]. We have an exact sequence,

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow H_2(S_t - \mathcal{D}_t, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(S_t, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(\mathcal{D}_t, \mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

(7.5) It follows that

$$L(T) := H_2(S_t - \mathcal{D}_t, \mathbb{Z}) / \mathbb{Z} \cong H_2(\mathcal{D}_t, \mathbb{Z})^\perp \text{ in } H_2(S_t, \mathbb{Z})$$

( $\cong$  the orthogonal complement of  $H_2(D, \mathbb{Z})$  in  $H_2(Y', \mathbb{Z})$ ).

Let us study  $L(T)$ . Then by (7.2) and (7.3)

$$H_2(Y', \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}h \oplus \bigoplus_{i=1}^{p+q+r} \mathbb{Z}E_i$$

$$D_0 = L_0 - E_1 - \dots - E_p \sim h - E_1 - \dots - E_p$$

$$D_1 = L_1 - E_{p+1} - \dots - E_{p+q} \sim h - E_{p+1} - \dots - E_{p+q}$$

$$D_2 = L_2 - E_{p+q+1} - \dots - E_{p+q+r} \sim h - E_{p+q+1} - \dots - E_{p+q+r}$$

where  $h$  denotes the pull back of the class of a line on  $\mathbb{P}^2$ . So we define

$$e = h - E_1 - E_{p+1} - E_{p+q+1},$$

$$e_i = E_i - E_{i+1} \quad (1 \leq i \leq p-1), \quad f_{j-p} = E_j - E_{j+1} \quad (p+1 \leq j \leq p+q-1)$$

$$g_{k-p-q} = E_k - E_{k+1} \quad (p+q+1 \leq k \leq p+q+r-1).$$

Then  $e, e_i, f_j$  and  $g_k$  have length  $-2$ , i.e.,  $e^2 = e_i^2 = f_j^2 = g_k^2 = -2$ , and

$$(e, e_i) = \delta_{i1}, (e, f_j) = \delta_{j1}, (e, g_k) = \delta_{k1},$$

$$(e_i, e_{i+1}) = (f_j, f_{j+1}) = (g_k, g_{k+1}) = 1,$$

$$(e_i, e_{i'}) = (f_i, f_{j'}) = (g_k, g_{k'}) = 0 \quad (\text{otherwise})$$

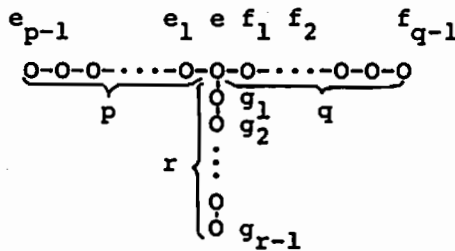
$$(e_i, f_j) = (e_i, g_k) = (f_j, g_k) = 0$$

where  $e^2 = (e, e)$  etc.,  $(, )$  is the intersection form on  $H_2(Y', \mathbb{Z})$ . They form a  $\mathbb{Z}$ -basis of  $L(T)$ .

In what follows we denote by  $L(T_{p,q,r})$  the free  $\mathbb{Z}$  module generated by  $e, e_i, f_j$  and  $g_k$  ( $1 \leq i \leq p-1, 1 \leq j \leq q-1, 1 \leq k \leq r-1$ ) with

bilinear form defined as above for any triple  $(p, q, r)$  with  $(1/p) + (1/q) + (1/r) < 1$ . To indicate the bilinear form on  $L(T_{p,q,r})$  we define a graph in the following manner. Each vertex of the graph denotes one of  $e, e_i, f_j$  and  $g_k$ . Two vertices  $e'$  and  $e''$  are connected by a single edge iff two vectors  $v'$  and  $v''$  corresponding to  $e'$  and  $e''$  in  $L(T_{p,q,r})$  have  $(v', v'') = 1$ .

The graph thus defined is



which is called  $T_{p,q,r}$  after its shape.

This fact was observed by [L2], and partially by [N3].

(7.6) Let  $f(x, y, z) = x^p + y^q + z^r - xyz, \mathbb{K}_t = f^{-1}(t)$ . Then

$$\begin{aligned} H_2(\mathbb{K}_t, \mathbb{Z})_{\text{free}} &= H_2(\mathbb{K}_t, \mathbb{Z}) / \text{torsions} \\ &\cong H_2(S_t - \mathcal{D}_t, \mathbb{Z}) \\ &\cong H_2(Y' - D, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

From (7.4) we infer

$$(H_2(\mathbb{K}_t, \mathbb{Z})_{\text{free}}, (\text{intersection form})) \cong 0 \oplus L(T_{p,q,r})$$

where 0 denotes  $\mathbb{Z}$  with bilinear form 0. This is the reason why the singularity  $\mathbb{K}_0$  is called  $T_{p,q,r}$ .

(7.7) The bilinear form on  $L(T_{p,q,r})$  is nondegenerate of rank  $p+q+r-2$ , indeed it has a positive eigenvalue and  $(p+q+r-3)$  negative eigenvalues. Therefore  $L(T_{p,q,r})$  is canonically embedded into the dual  $L(T_{p,q,r})^* (:= \text{Hom}(L(T_{p,q,r}), \mathbb{Z}))$  with finite index. Rather surprising is that the finite group  $L(T_{p,q,r})^* / L(T_{p,q,r})$



By Brieskorn,  $L(T_{2,7,7}) \cong L(T_{3,3,10}), L(T_{3,9,10}) \cong L(T_{4,5,13})$ . So (7.10) 3) fails for  $p+q+r = 16$ .

(7.11) PROPOSITION (LATTICE-THEORETIC DUALITY). Two singularities  $T_{p,q,r}$  and  $T_{s,t,u}$  are dual if and only if  $L(T_{p,q,r})$  is primitively embedded into  $E_8 \oplus E_8 \oplus H \oplus H$  with  $L(T_{p,q,r})^\perp$  ( $:=$  the orthogonal complement of  $L(T_{p,q,r})$ ) being  $L(T_{s,t,u})$  embedded primitively.

(7.10) and (7.11) follows from [Ni]. See also [P, Theorem 1]. The relation (3.2) 2) is  $\text{rank}(E_8 \oplus E_8 \oplus H \oplus H) = 20$ .

### §8 DEFINING EQUATIONS OF CUSP SINGULARITIES.

(5.7), (5.11) and (5.16) are an interpretation and a generalization of the duality (3.2). We shall try to generalize the duality to arbitrary cusp singularities, or cusp singularities of arbitrary embedding dimension in this direction.

(8.1) PROPOSITION [Ka]. Any cusp singularity of embedding dimension 4 is isomorphic to

$$\Pi_{p,q,r,s} : x^p + z^r - yw = y^q + w^s - xz = 0$$

where  $p, q, r \geq 2, s \geq 3$ .

(8.2) PROPOSITION. Let  $T$  be a cusp singularity,  $D$  the dual cycle (= the exceptional set of the dual  $T^*$ ). Suppose  $\text{Zykel}(D) = (p,q,r,s)$ . Then  $T$  is isomorphic to  $\Pi_{p,q,r,s}$ .

(8.3) PROPOSITION. Let  $T$  be a cusp singularity,  $D$  the dual cycle of  $T$  with  $\text{Zykel}(D) = (p_0, p_1, p_2, p_3, p_4)$ . Then  $T$  is isomorphic to  $W_{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4}$ , a germ at the origin of an algebraic subset of  $\mathbb{A}^6$  defined by 5 equations,

$$x_j^{p_j} - x_{j-1} x_{j+1} + x_{j-2}^{p_{j-2}-1} x_{j+2}^{p_{j+2}-1} = 0 \quad (j \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$$

where  $p_j \geq 2$ ,  $p_4 \geq 3$ .

(8.2) and (8.3) are proved by using rigidity theorem of cusp singularities due to Laufer. We can construct holomorphic functions on  $T$  corresponding to irreducible components of  $D$  which seem to approximate  $x, y, z, w$  and  $x_j$ .

(8.4) The five polynomials in (8.3) are Pfaffians of 5 principal minors of an alternating  $5 \times 5$  matrix. In fact, let

$$A = \begin{pmatrix} 0 & x_3 & -x_1^{q-1} & -x_4^{t-1} & x_2 \\ -x_3 & 0 & x_4 & -x_2^{r-1} & -x_0^{p-1} \\ x_1^{q-1} & -x_4 & 0 & x_0 & -x_3^{s-1} \\ x_4^{t-1} & x_2^{r-1} & -x_0 & 0 & x_1 \\ -x_2 & x_0^{p-1} & x_3^{s-1} & -x_1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Then the  $j$ -th Pfaffian is

$$x_j^{p_j} - x_{j-1} x_{j+1} + x_{j-2}^{p_{j-2}-1} x_{j+2}^{p_{j+2}-1}$$

where  $(p_0, p_1, p_2, p_3, p_4) = (p, q, r, s, t)$ .

(8.5) The defining equations of  $W_{p_0, \dots, p_4}$  reminds us of Bianchi's defining equations of the universal elliptic curve with level five structure [K, p. 230]. (This was pointed out to us by Taka-aki Oda.) They are

$$abx_i^2 - a^2x_{i-1}x_{i+1} + b^2x_{i-2}x_{i+2} = 0 \quad (i \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$$

where  $[a:b]$  is the homogeneous coordinate of  $\mathbb{P}^1 = \mathbb{H}/\Gamma(5) \cup \text{cusps}$ .

Compare (8.4) with the following.

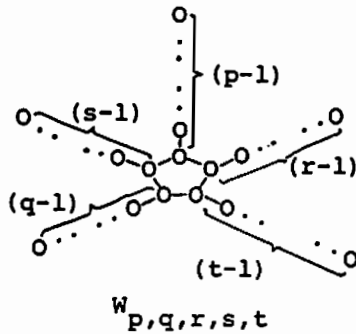
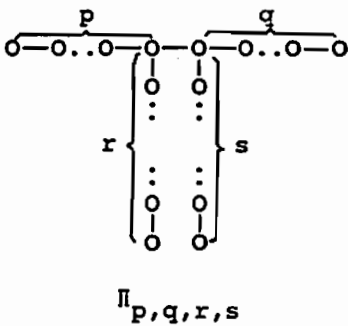
Let

$$B = \begin{bmatrix} 0 & ax_3 & -bx_1 & -bx_4 & ax_2 \\ -ax_3 & 0 & ax_4 & -bx_2 & -bx_0 \\ bx_1 & -ax_4 & 0 & ax_0 & -bx_3 \\ bx_4 & bx_2 & -ax_0 & 0 & ax_1 \\ -ax_2 & bx_0 & bx_3 & -ax_1 & 0 \end{bmatrix} \quad ({}^t B = -B)$$

Then the  $i$ -th Pfaffian of  $B$  is equal to

$$abx_i^2 - a^2x_{i-1}x_{i+1} + b^2x_{i-2}x_{i+2} \quad (i \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z})$$

(8.6) The intersection diagrams corresponding to  $\Pi_{p,q,r,s}$  and  $W_{p,q,r,s,t}$  are obtained in the same manner as those corresponding to  $T_{p,q,r}$ . Let  $Y$  be a singular hyperbolic Inoue surface with a cusp  $T$  and its dual cycle  $D$  with  $\text{Zykel}(D) = (p,q,r,s)$  or  $(p,q,r,s,t)$ . Then by [L2] there exists a proper flat family  $\pi: S \rightarrow \Delta$  over a disc  $\Delta$  with a  $\pi$ -flat divisor  $\mathcal{D}$  of  $S$  such that  $\mathcal{D} \cong D \times \Delta$  and  $S_t$  ( $t \neq 0$ ) is nonsingular.  $S_t$  ( $t \neq 0$ ) is a blown-up projective plane. Let  $L(T) = H_2(D, \mathbb{Z})^\perp$  in  $H_2(S_t, \mathbb{Z})$  ( $t \neq 0$ ). Then  $L(T)$  has a  $\mathbb{Z}$  basis consisting of vectors of length  $-2$ . By suitable choices of bases their intersection forms are described by the following diagrams. Their names come from their shape  $\Pi$  and a web. We notice that some extended Dynkin diagrams are obtained by specializing  $T_{p,q,r}, \Pi_{p,q,r,s}$  and  $W_{p,q,r,s,t}$ . In fact,  $\tilde{E}_8 = T_{2,3,6}$ ,  $\tilde{E}_7 = T_{2,4,4}$ ,  $\tilde{E}_6 = T_{3,3,3}$ ,  $\tilde{D}_5 = \Pi_{2,2,2,2}$ ,  $\tilde{A}_4 = W_{2,2,2,2,2}$ .





§9 A CONNECTION WITH KAC-MOODY LIE ALGEBRAS.

(9.1) Simple singularities  $A_k, D_k, E_6, E_7$  and  $E_8$  are deeply connected with corresponding simple Lie algebras and groups. Indeed these singularities and their semi-universal deformations are obtained as transversal slices of subregular nilpotent (or unipotent) elements of Lie algebras (or groups). It is expected that there are similar relations between unimodular singularities and Kac-Moody Lie algebras and Lie groups associated with Cartan matrices corresponding to intersection diagrams (graphs) such as  $T_{p,q,r}$ . No theory of it is yet completed. See [S1,S2].

(9.2) DEFINITIONS. Let  $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,r}$  be an integral matrix.  $A$  is called a (generalized) Cartan matrix if it has the following properties;

- 1)  $a_{ii} = 2 \quad (1 \leq i \leq r)$
- 2)  $a_{ij} \leq 0 \quad (i \neq j)$
- 3)  $a_{ij} = 0 \quad \text{iff} \quad a_{ji} = 0.$

Let  $\mathfrak{g}$  be the corresponding Kac-Moody Lie algebra, "a Cartan sub-

algebra"  $\mathfrak{h} = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{C}h_i, \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}} = \bigoplus_{i=1}^r \mathbb{Z}h_i, \mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z})$ .

Suppose for simplicity that  $\det A \neq 0$ . (This is true for  $T_{p,q,r}$  if  $(1/p)+(1/q)+(1/r) < 1$ .) Define an element  $\alpha_i$  of  $\mathfrak{h}_{\mathbb{Z}}^*$  by

$\alpha_i(h_j) = a_{ij}$ , and a reflection  $r_{\alpha_i}$  of  $\mathfrak{h}$  by

$$r_{\alpha_i}(h) = h - \alpha_i(h)h_i \quad (h \in \mathfrak{h}).$$

Let  $B$  be the Cartan diagram of  $A$  — a diagram whose vertices  $v_i$  are in one to one correspondence with  $\alpha_i$ , and whose two vertices  $v_i$  and  $v_j$  are connected by edges with suitable multiplicities if  $a_{ij}a_{ji} \neq 0$ . For instance  $B = T_{p,q,r}$  in our case. Let  $X$  be a subdiagram of  $B$ . Then we can associate a Cartan matrix to  $X$ , so we have a corresponding Kac-Moody Lie algebra  $\mathfrak{g}_X$ , "a Cartan

subalgebra"  $\mathfrak{h}_X = \bigoplus_{\alpha_i \in X} \mathbb{C} \mathfrak{h}_i$ , a Weyl group  $W_X$  — the group generated by  $r_{\alpha_i}$  ( $\alpha_i \in X$ ). Let  $T_X = \mathfrak{h}_X \oplus \mathbb{Z} \mathbb{T}^*$ ,  $T = T_B$ .

The Kac-Moody Lie group  $G$  is a group generated by  $T$ ,  $X_i$  and  $Y_i$  ( $i=1, \dots, r$ ) where  $X_i$  and  $Y_i$  are images of additive one-parameter subgroups  $x_i, y_i$

$$x_i : \mathbb{C} \longrightarrow G$$

$$y_i : \mathbb{C} \longrightarrow G$$

such that

$$t x_i(c) t^{-1} = x_i(\alpha_i(t)c), \quad (t \in T)$$

$$t y_i(c) t^{-1} = y_i(-\alpha_i(t)c).$$

We require some additional conditions on  $G$  for a precise formulation. See [S2].

(9.3) DEFINITION [L1]. Let  $A$  a Cartan matrix,  $B$  the Cartan diagram of  $A$ . A subdiagram  $X$  of  $B$  is special if  $X = \emptyset$  or  $W_Y$  is infinite for any connected component  $Y$  of  $X$ .

In case  $B = T_{p,q,r}$ ,  $X$  is special iff  $X = T_{p',q',r'}$  with  $p' \leq p, q' \leq q, r' \leq r$  and  $X$  contains one of  $T_{2,3,6'}$ ,  $T_{2,4,4}$  or  $T_{3,3,3}$ .

(9.4) THEOREM [L2]. Let  $B$  the Cartan diagram  $T_{p,q,r}$  (= the graph  $T_{p,q,r}$ ). Let  $Y$  be a singular hyperbolic Inoue surface with a cusp  $T = T_{p,q,r}$  and its dual cycle  $D$ . Let  $\pi : X \rightarrow U$  be a semi-universal deformation of  $Y$  with  $D$  preserved. Then  $U$  has a natural stratification

$$U = \begin{array}{c} \text{---} \\ | \quad | \\ \text{---} \\ X \subset B \\ \text{special} \end{array} U_X$$

such that

1)  $U_X$  is a quotient of an open subset of  $T_B/T_X$  by  $\tilde{W}_X$ , an extended Weyl group of  $W_{X^*}$  by  $(h_B)_{\mathbb{Z}}$  where  $X^* = \{v \in B; v(h_j) = 0 \text{ for } v_j \in X\}$ .

2)  $\bar{U}_X \supset U_Y$  iff  $X \subset Y$

3) Minimal resolutions of fibers  $X_u$  over  $u \in U_X$  ( $X \neq \emptyset$ ) are blown-up parabolic Inoue surfaces or hyperbolic Inoue surfaces with blown-up dual cycles equal to the given  $D$ . The centers of blowing-ups thereby are always on the dual cycles.

(9.5) THEOREM [S2]. With the notations in (9.2)-(9.4), let  $\omega_i (\in h_{\mathbb{Z}}^*)$  be fundamental dominant weights of  $h$  such that  $\omega_i(h_j) = \delta_{ij}$ ,  $R_i : G \rightarrow GL(V^{\omega_i})$  the standard representation of the Kac-Moody Lie group  $G$ ,  $V_{\mu}^{\omega_i}$  a subspace of  $V^{\omega_i}$  of weight  $\mu (\in h_{\mathbb{Z}}^*)$   $\chi_i(t) = \text{tr}(R_i(t))$ . Then

1)  $\chi_i(t) = \sum_{\mu \in h_{\mathbb{Z}}^*} (\dim V_{\mu}^{\omega_i}) \mu(t)$  is a convergent holomorphic function on  $U_{\emptyset}$  and extends to  $U$  continuously, and

2) the holomorphic mapping  $\bar{\chi}$  of  $U$  into  $(\mathbb{C}^r, 0)$  defined by

$$\bar{\chi}(t) = (\chi_1(t), \dots, \chi_r(t))$$

is an isomorphism at  $U_B$  (= a point of  $U$ ).

See [S2] for the definitions and details.

(9.5) is an analogue of the theorem that  $T/W$  is isomorphic to  $\mathbb{C}^r$  where  $T$  and  $W$  are respectively a maximal torus, the Weyl group of a simple group and the isomorphism is given by fundamental characters.

(9.6) I shall explain (9.4) in more detail. First we observe the following. Let

$$F = x \prod_{i=1}^{p-1} (x-s_i) + y \prod_{j=1}^{q-1} (y-t_j) + z \prod_{k=1}^{r-1} (z-u_k) - xyz,$$

$$T_{\mathfrak{a}} = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3; F=0\}, \mathfrak{a} = (s_1, \dots, u_{r-1}) \in \mathbb{C}^{p+q+r-3}.$$

If  $s_i = t_j = u_k = 0$  ( $1 \leq i \leq p'-1$ ,  $1 \leq j \leq q'-1$ ,  $1 \leq k \leq r'-1$ ) and nonzero  $s_i, t_j$  and  $u_k$  are generic, then  $T_{\mathbb{A}^3}$  is  $T_{p',q',r'}$ . If  $s_i = t_j = u_k = 0$  ( $1 \leq i \leq p'-1$ ,  $1 \leq j \leq q'-1$ ,  $1 \leq k \leq r'-1$ ) and  $s_i = s_i', s_j = s_j', u_k = u_k'$  ( $p' \leq i < i', q' \leq j < j', r' \leq k < k'$ ), then  $T_{\mathbb{A}^3}$  is  $T_{p',q',r'} \oplus A_{p-p'-1} \oplus A_{q-q'-1} \oplus A_{r-r'-1}$ . This means that  $T_{\mathbb{A}^3}$  in the second case has four isolated singular points isomorphic to  $T_{p',q',r'}, A_{p-p'}, A_{q-q'}$  and  $A_{r-r'}$ . Any subdiagram of  $T_{p,q,r}$  containing one of  $T_{2,3,6}, T_{2,4,4}$  and  $T_{3,3,3}$  is obtained in this way. (9.4) 3) asserts that singularities of  $X_u$  ( $u \in U_X, X \neq \emptyset$ ) are only those singularities thus obtained. More precisely

(9.7) COROLLARY OF (9.4) Let  $X_u$  be a fiber of  $\pi$ . Suppose that  $X_u$  has an isolated singularity distinct from  $A_k, D_k, E_6, E_7, E_8$ . Then the singularity of  $X_u$  is  $T_{p',q',r'} \oplus \oplus_i A_{p_i} \oplus \oplus_j A_{q_j} \oplus \oplus_k A_{r_k}$

where  $\sum_i (p_i+1) \leq p-p', \sum_j (q_j+1) \leq q-q', \sum_k (r_k+1) \leq r-r'$ .

(9.8) We shall give "a proof" of (9.7) by using the theory of  $VII_0$  surfaces. First we recall parabolic Inoue surfaces. Parabolic Inoue surfaces are  $VII_0$  surfaces, each with an elliptic curve  $E$  and a cycle  $Z$  of rational curves. We have a sort of duality,  $E^2 = -\#(\text{irreducible components of } Z)$ . Let  $n = -E^2$ . If  $n = 1$ , then  $Z$  is a rational curve with a node with  $Z^2 = 0$ . If  $n > 1$ , then any irreducible component  $Z_j$  has  $Z_j^2 = -2$ . So by (4.4) we have  $Zykel(Z) = (2, \dots, 2)$ .

(9.9) THEOREM. Let  $Y$  be a singular hyperbolic Inoue surface with a cusp  $T$  and its dual cycle  $D$ . Let  $\pi : X \rightarrow \Delta$  be a proper flat morphism such that  $X_0 = \pi^{-1}(0) \cong Y$ , there is a  $\pi$ -flat divisor  $\mathcal{D}$  of  $X$ , isomorphic to  $D \times \Delta$ . Suppose that  $X_t$  ( $t \neq 0$ ) has an elliptic singularity. Then the minimal resolution of  $X_t$  ( $t \neq 0$ ) is a blown-up parabolic Inoue surface or a blown-up hyperbolic

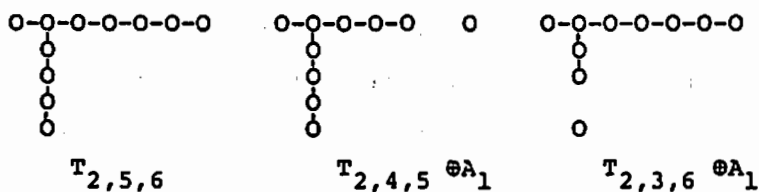
Inoue surface with blown-up dual cycle equal to the given  $D$ . The centers of blowing-ups are on the union of an elliptic curve and a cycle or two cycles of rational curves.

(9.10) CONJECTURE. With the notations in (9.10), the minimal resolution of  $X_t$  is minimal along the exceptional set of the (unique) elliptic singular point of  $X_t$ .

(9.11) By assuming (9.9), (9.10) we shall give "a proof" of (9.7). For simplicity we assume  $\text{Zykel}(D) = (p-1, q-1, r-1)$ ,  $p, q \geq 3$ ,  $r \geq 4$ . By (9.9)  $X_t$  is either a blown-up parabolic Inoue surface or a blown-up hyperbolic Inoue surface. First we consider the case where the minimal model of the minimal resolution of  $X_t$  is a parabolic Inoue surface  $S'$  with  $\text{Zykel}(Z) = (2, 2, 2)$ . Then since  $\text{Zykel}(D) = (p-1, q-1, r-1)$ , we can blow up  $S'$  at  $(p-3)$ ,  $(q-3)$  and  $(r-3)$  points of three irreducible components of  $Z$ . Thus we obtain  $(-2)$  rational curves from repeated blowing-ups at the same points of  $Z$ , so the dual graph of  $(-2)$  curves thus obtained is a subdiagram of  $A_{p-4} \oplus A_{q-4} \oplus A_{r-4}$ . Besides it we have a simple elliptic singularity  $T_{3,3,3}$  from the elliptic curve  $E$  with  $E^2 = -3$  on  $S'$ . If  $X_t$  has as the minimal model of the minimal resolution a hyperbolic Inoue surface  $S''$  with  $D'$  the dual cycle with  $\text{Zykel}(D') = (p'-1, q'-1, r'-1)$ , then in order to obtain  $D$  we can blow up  $S''$  at  $(p-p')$ ,  $(q-q')$  and  $(r-r')$  points of irreducible components of  $D'$ . We have therefore  $T_{p',q',r'}$  (as the dual of  $D'$ ) and any subdiagram of  $A_{p-p'-1} \oplus A_{q-q'-1} \oplus A_{r-r'-1}$ . In the cases where  $Z$  or  $D'$  has less than three irreducible components, we can prove similarly.

(9.12) EXAMPLE.  $\underbrace{\text{Let } T =}_{\lambda} T_{2,5,6}$ . Then  $Y$  has the dual cycle  $D$  with  $\text{Zykel}(D) = (3, 4)$ . Any subdiagram  $X$  of  $T_{2,5,6}$  containing  $T_{2,4,4}$  is one of  $T_{2,5,5'}$ ,  $T_{2,4,6'}$ ,  $T_{2,4,5} \oplus A_1$ ,  $T_{2,4,5'}$ ,  $T_{2,4,4} \oplus A_1$ ,

$T_{2,4,4}$ . For instance,  $T_{2,4,4} \oplus A_1$  is obtained from a parabolic Inoue surface  $S'$  with an elliptic curve  $E$  with  $E^2 = -2$ .  $S'$  has a cycle  $Z$  of two rational curves  $Z_1$  and  $Z_2$  with  $Z_j^2 = -2$ . We can blow up once and twice on  $Z_1$  and  $Z_2$ . Let the centers of blow-ups be  $P, Q_1, Q_2$  ( $P \in Z_1, Q_1, Q_2 \in Z_2$ ). If  $Q_1 = Q_2$ , we have a rational curve with selfintersection number  $-2$  which blows down to an  $A_1$  singularity. Since  $E^2 = -2$ , this blows down to a  $T_{2,4,4}$  singularity. Thus we obtain  $T_{2,4,4} \oplus A_1$ . If  $Q_1 \neq Q_2$  then we have  $T_{2,4,4}$  only. Subdiagrams  $X$  of  $T_{2,5,6}$  containing  $T_{2,3,6}$  are  $T_{2,4,6}, T_{2,3,6} \oplus A_1, T_{2,3,6}$ . All of them appear in the same manner as above.



## BIBLIOGRAPHY.

- [A] V.I. Arnold : Critical points of smooth functions.  
Proceedings of Intern. Congress of Math., Vancouver (1974)  
19-39.
- [H] F. Hirzebruch : Hilbert modular surfaces. *L'Ens. Math.*  
71 (1973) 183-281.
- [I] M. Inoue : New surfaces with no meromorphic functions, II.  
Complex Analysis and Algebraic Geometry, Iwanami Shoten  
Publ. and Cambridge Univ. Press (1977) 91-106.
- [K] F. Klein : Gesammelte Mathematische Abhandlungen III.  
Verlag von Julius Springer, Berlin (1923).
- [Ka] U. Karras : Deformations of cusp singularities. *Proceedings of Symposia in Pure Math.* 30 (1977) 37-44.
- [L1] E. Looijenga : Invariant theory for generalized root systems. *Invent. Math.* 61 (1980) 1-32.
- [L2] \_\_\_\_\_ : Rational surfaces with an anticanonical cycle.  
*Annals of Math.* 114 (1981) 267-322.
- [N1] I. Nakamura : Inoue-Hirzebruch surfaces and a duality of hyperbolic unimodular singularities I. *Math. Annalen* 252 (1980) 221-235.
- [N2] \_\_\_\_\_ : ditto. II. (in preparation)
- [N3] \_\_\_\_\_ : Duality of cusp singularities. *Complex Analysis of Singularities*, RIMS KOKYU-ROKU 415, Kyoto Univ. (1981) 1-18.
- [N4] \_\_\_\_\_ :  $VII_0$  surfaces and a duality of cusp singularities..  
Proceedings of the Katata Symposium on Algebraic Geometry,  
1982 July.
- [N5] \_\_\_\_\_ : On surfaces of class  $VII_0$  with curves. (to appear in *Proc. Japan Acad.* & preprint)

- [Ni] V.V. Nikulin : Integral symmetric bilinear forms and some of their applications. Math. USSR Izvestija, 14 (1980) 103-167.
- [O] T. Oda : Torus Embeddings and Applications. Tata Inst. Lecture Notes, Bombay (1978).
- [P] H.C. Pinkham : Automorphisms of cusps and Inoue-Hirzebruch surfaces. (preprint)
- [S1] P. Slodowy : Chevalley groups over  $\mathbb{C}((t))$  and deformations of simply elliptic singularities. RIMS KOKYU-ROKU 415, Kyoto Univ. (1981) 19-38.
- [S2] \_\_\_\_\_ : A character approach to Looijenga's invariant theory for generalized root systems. (preprint)



# Kac-Moody Lie algebra の root lattice automorphism について

小林善司 (筑波大数学)

1. 序.  $A$  を  $l \times l$  分解不能、対称化可能な Cartan 行列とする。  $A$  に対応する root 系  $\Delta$  は、  $l$  個の基本 root  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  によって生成される階数  $l$  の自由加群  $P$  中にある。( [4], [6], [8] ) Weyl 群  $W$  は、  $A$  によって定義される双一次形式に関する  $P$  の isometry 群  $O(P)$  の部分群である。 graph automorphism 群  $D$  と、対応する Dynkin 図形の graph automorphism によって生成される  $GL(P)$  の部分群とする。  $D$  と  $O(P)$  は isometry 群として作用する。  $\tilde{W}$  を  $W, D, -id$  によって生成される  $GL(P)$  の部分群とする。

$O(P)$  に関して、  $A$  が有限型るとき、  $O(P)$  の  $\Delta$  を保つ元より成る部分群を  $O(\Delta)$  とする。  $Aut(L)/Inn(L) \cong O(\Delta)/W$  という古典的結果がある。( [3] )  $\therefore Aut(L) / Inn(L)$  は対応する Lie 環  $L$  の automorphism 群

(inner automorphism 群) である。  $A$  が hyperbolic 型 のとき  
 には、  $O(P)$  は対応する root 系 の不変式環 の決定に重要  
 な役割を 果たす。( [9] )

この報告の 主目的は、有限型、Euclid 型、hyperbolic  
 型 群 の Cartan 行列  $A$  に対し、  $\text{Imd}(A)$  の 指数  
 $[O(P):\tilde{W}]$  を 研究する ことである。 結果は 少く驚く  
 べきものであり、 特異に  $A$  が有限型 のとき、  $C_4$  型 以外 の  
 ときには  $\text{Imd}(A) = 1$  となる。  $C_4$  型 の例外を 与える理  
 由は  $C_4$  型 の root lattice の 中 に 3 つ の  $C_4$  型 と同型な  
 root 系 が 存在する こと による。

2. Kac-Moody Lie 環 と root 系 について、  $A = (A_{ij})$   
 を  $l \times l$  Cartan 行列 とする。 i.e.  $A_{ij} \in \mathbb{Z}$ ,  $A_{ii} = 2$ ,  
 $i \neq j$  ならば  $A_{ij} \leq 0$ ,  $A_{ij} = 0$  ならば  $A_{ji} = 0$ 。 任意の  
 Cartan 行列  $A$  と 標数 0 の 体  $F$  に対し、 3  $l$  個  
 の 生成元  $e_1, \dots, e_l, h_1, \dots, h_l, f_1, \dots, f_l$  と 基本関係  
 $[h_i, h_j] = 0, [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i, [h_i, e_j] = A_{ij} e_j,$   
 $[h_i, f_j] = -A_{ij} f_j, i \neq j$  ならば  $i, j$  に対し  $(\text{ad } e_i)^{-A_{ij}+1} e_j$   
 $= 0, (\text{ad } f_i)^{-A_{ij}+1} f_j = 0$  により 生成される Lie 環 を  
 $L$  とし、  $A$  に対し  $F$  上 生成される Kac-Moody

Lie環と呼ぶ。

$P = \sum_{i=1}^l \mathbb{Z}\alpha_i$  を生成元  $\alpha_1, \dots, \alpha_l$  により生成される自由  $\mathbb{Z}$  加群とし、 $L$  の root lattice とし、 $\deg(e_i) = \alpha_i$ 、

$\deg(h_i) = 0$ 、 $\deg(f_i) = -\alpha_i$  とする。これにより、Lie環  $L$  に  $P$ -grading を定義する。  $\alpha \in P$  に対し、次数  $\alpha$  のすべての元より成る  $L$  の部分空間を  $L_\alpha$  とする。  $0$  以外の元  $\alpha \in P$  は  $L_\alpha \neq 0$  のとき  $L$  の root とし、 $\Delta$  を  $L$  のすべての root の集合とし、 $L$  の root 系とす。このとき、 $L = H \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} L_\alpha$  である。  $\therefore H = Fh_1 \oplus \dots \oplus Fh_l$ 、 $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  を  $\Delta$  の基本 root 系とす。  $P$  の automorphism  $w_i$  を  $w_i(\alpha_j) = \alpha_j - A_{ij}\alpha_i$  で定義し、 $W$  を  $w_i$  達により生成される  $GL(P)$  の部分群とする。  $W$  を  $A$  の Weyl 群とす。

正の有理数の対角行列  $\text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l)$  により、 $\text{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l) A$  が対称行列になる時、Cartan 行列  $A$  を対称化可能とす。この報告では、 $i \neq j$  となる  $\varepsilon_i A_{ij}$  は半整数、 $\varepsilon_i A_{ii}$  は整数、 $\varepsilon_1 A_{11}, \dots, \varepsilon_l A_{ll}$  の最大公約数は 1 となる様により  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_l$  を正規化しておく。

([5])  $P$  の対称双-次形式を  $(\alpha_i, \alpha_j) = \varepsilon_i A_{ij}$  で定義すると、これは  $W$ -不変で  $2(\alpha_i, \alpha_j) / (\alpha_i, \alpha_i) = A_{ij}$  で

ある。この双-次形式に既知する  $P$  の isometry から成る群を  $O(P)$  とする。  $A$  に対応する Dynkin 図形の graph automorphism  $\iota$  によって生成される  $O(P)$  の部分群を graph automorphism 群と  $\dots D$  と書く。  $\tilde{W} \in W, D$ -id  $\iota$  によって生成される  $O(P)$  の部分群とする。最終的に  $\text{Ind}(A)$  を  $O(P)$  の中での  $\tilde{W}$  の指数を表わす。

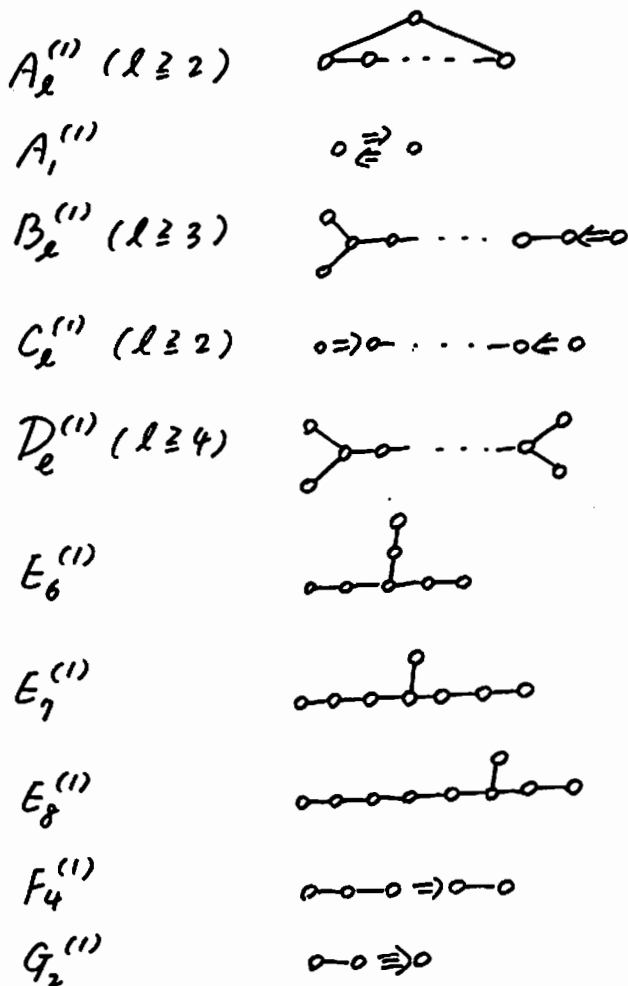
Cartan 行列  $A$  は、置換行列によって  $\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$  の形の行列と相似になることがあるとき、分解不能という。Cartan 行列は、有限次元複素単純 Lie 環の Cartan 行列のとき有限型という。  $A$  が Euclid 型とは、  $\det A = 0$  で  $\{1, \dots, l\}$  の空でない任意の真部分集合  $S$  に対して部分行列  $A_S = (A_{ij})_{i,j \in S}$  が有限型の和のときという。有限型、Euclid 型の Cartan 行列は、対称化可能で分解不能である。 Cartan 行列  $A$  が hyperbolic 型とは、分解不能、対称化可能で、有限型、Euclid 型でなく、任意の部分行列  $A_S$  が有限型、Euclid 型の和のときという。 hyperbolic 型の Cartan 行列の size は最大 10 である。 ([1], [2])

3. 有限型るとき、この節では  $A$  は有限型と可る。このとき次の定理が成り立つ。(〔7〕)

Theorem 3.1  $A$  が  $C_4$  型ならば  $\text{Ind}(A) = 32$  あり、それ以外るときは  $\text{Ind}(A) = 12$  がある。

4. Euclid 型るとき、この節では  $A$  は Euclid 型と可る。

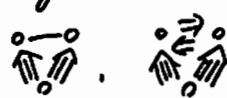


このとき  $A$  は Dynkin 図形は 5, 2 分類される。(〔5],〔10])



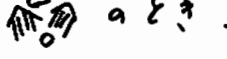




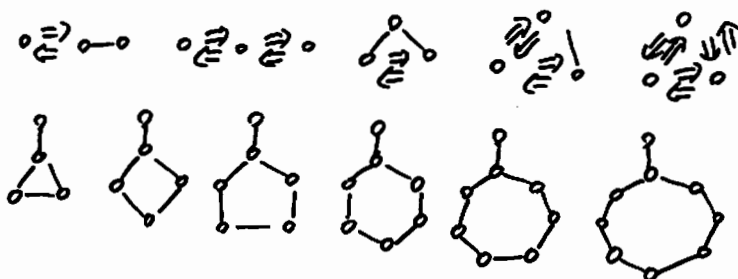
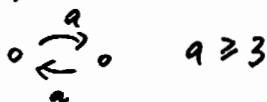
Theorem 5.1  $A$  の "hyperbolic 型" の 2 行 2 列 の Cartan 行列 ならば  $\text{Ind}(A) = 1$  である。

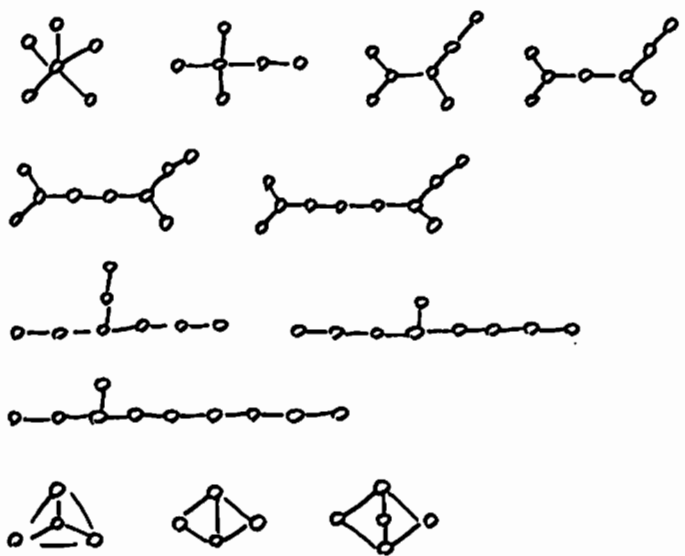
Theorem 5.2 (森田)  $A$  の "hyperbolic 型" の Cartan 行列 2 size  $A = 2$  ならば  $\text{Ind}(A) = 1$  である。

Theorem 5.3  $A$  の "hyperbolic 型" の Cartan 行列 2 size  $A = 3$  であり、 $A$  に 対応 する Dynkin 図形 が , ,  ならば  $\text{Ind}(A) = 1$  である。

Theorem 5.4  $A$  に 対応 する Dynkin 図形 が ,  の とき  $\text{Ind}(A) = 2$  であり、 の とき  $\text{Ind}(A) = 3$  である。

6. Appendix. (1) 2 行 2 列 の hyperbolic 型 Cartan 行列 の Dynkin 図形

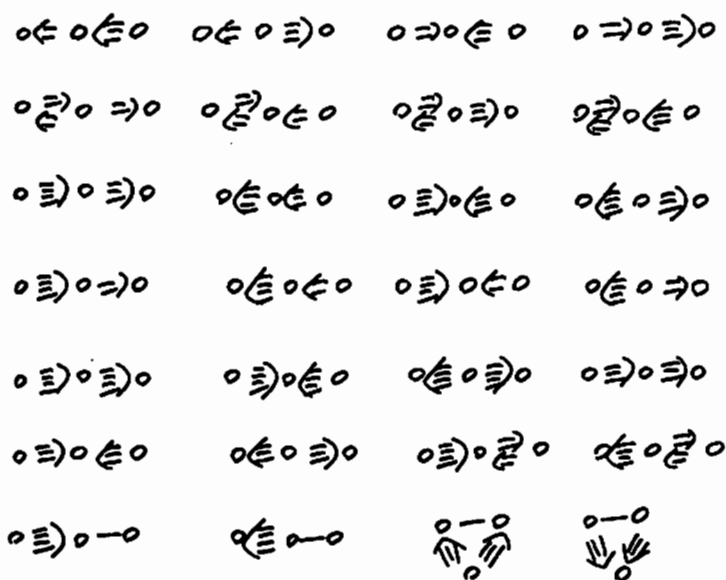




(2) 非对称与 hyperbolic 型 Cartan 行列の Dynkin

図形 (a) size  $A = 2$   $\begin{matrix} \circ & \xrightarrow{a} & \circ \\ & \nwarrow & \\ & \swarrow & \\ \circ & & \circ \end{matrix}$   $a, b > 4$

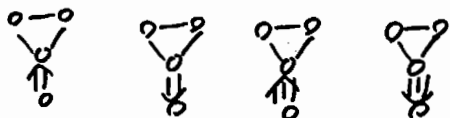
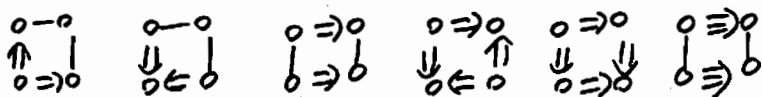
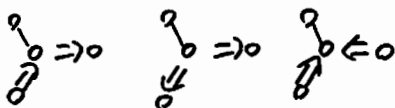
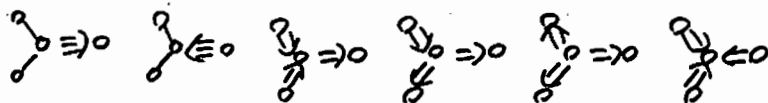
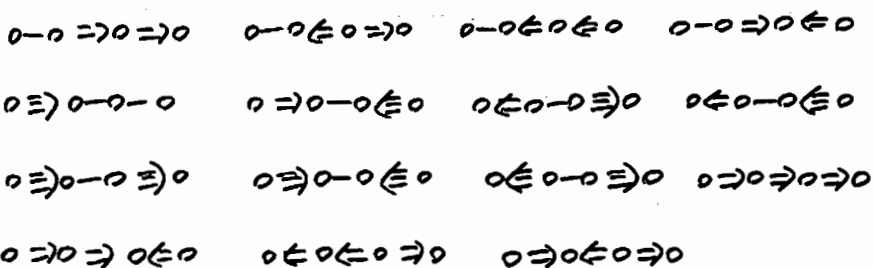
(b) size  $A = 3$



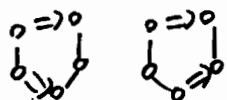
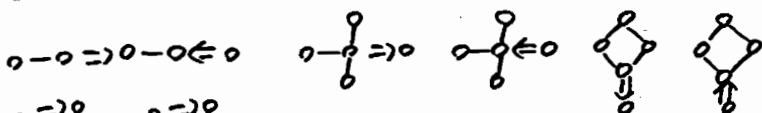
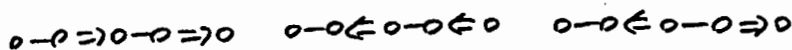


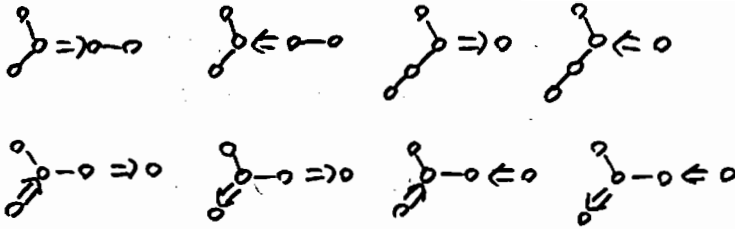


(c)  $n_{\text{type}} A = 4$

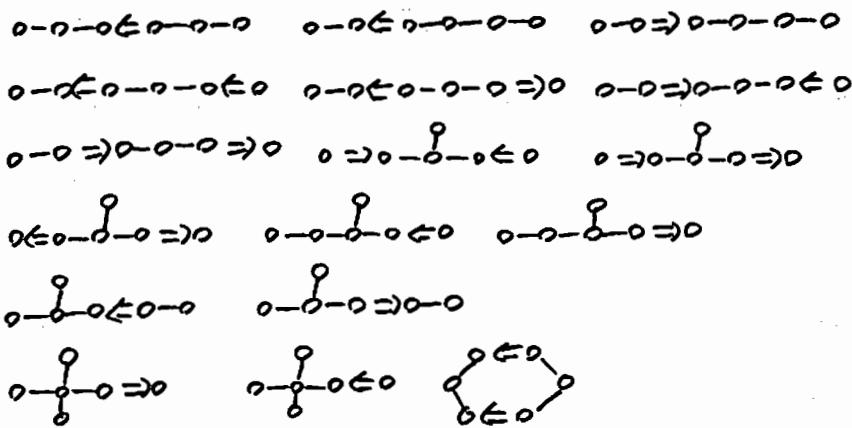


(d)  $n_{\text{type}} A = 5$





(e) size  $A = 6$



(f) size  $A = 7$

(g) size  $A = 8$

(h) size  $A = 9$

(i) size  $A = 10$

7. 文献表 [1] N. Bourbaki "Groupes et algebres de Lie" Chap. 4. 5. 6 Herman, Paris, 1968.

[2] M. Chein: Recherche des group des matrices de Coxeter hyperbolic d'ordre 10, Revue Fr. Info. Rech. Oper. no. R-3 (1969), 3-16

- [3] J. E. Humphreys "Introduction to Lie algebra and representation theory" Springer-Verlag, New York, 1972.
- [4] V. G. Kac: Simple irreducible graded Lie algebras of finite growth, *Math. USSR - Izv.* 2 (1968). 1271-1311
- [5] V. G. Kac: Infinite root systems, representations of graphs and invariant theory, *Invent. Math.* 56 (1980) 57-92
- [6] J. Lepowsky: Lectures on Kac - Moody Lie algebra, Paris Univ. 1978.
- [7] Z. Kobayashi, J. Morita: Automorphisms of certain root lattices, in preparation
- [8] R. V. Moody: A new class of Lie algebra, *J. Algebra* 10 (1968) 211-230
- [9] R. V. Moody: Polynomial invariants of isometry groups of indefinite quadratic lattices, *Tôhoku Math J.* 30 (1978) 525-535
- [10] R. V. Moody: Root systems of hyperbolic types, *Adv. Math.* 33 (1979) 144-160

# Peirce : Linear Associative Algebra

清水 達雄

§0 著者と時代

Benjamin Peirce (1809-80) の古懐の著作, Linear Associative Algebra は, 1870年に発表された。沿岸測量部の好意により部費が配布された。

Johns Hopkins 大学が創立された。American Journal of Mathematics 発刊。その第4巻, 1881年に掲載される。著者の没後, 息子の Charles Sanders Peirce (1839-1914) による注, 表を付録した。

その位置づけは, 行列代数の前身である。

R.C. Archibald: A Semicentennial History of the American Mathematical Society 1888-1938, AMS, 1938.

の第210-211頁に出ている。著書は12, もとの

Analytical Mechanics (1855).

その続きの巻 (本あり)

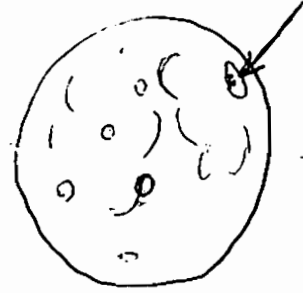
Celestial Mechanics

Potential Physics

Analytic Morphology

の出たところ。『解析形態論』といつても可  
志向したところ。『解析形態論』といつても可  
志向したところ。『解析形態論』といつても可  
志向したところ。『解析形態論』といつても可

月のクレーターに彼の名をつけた。『危難の海』中  
(中野解『月面』と『観測』  
恒星礼厚生初, 76ページ,  
38ページ参照。)



『小正』雜誌記事の時

齊田博「月面に名を冠せしむるに在りて」

月刊天文ガイド 82年7月, 102ページ

(左記の記事の誤り, 世に混同した。)

父がハーバート... 見もハーバートの誤

といふ, C.S. パースの誤り。『父』といふは  
B. パース自身。

海王星の発見 (1846) — 18ページ

(了らぬ) 観測の, 世に『天体力学の発展』

に記す, 批判的の訂正を示した。

金星の太陽面通過の国際観測(1874)  
は、了川力<sup>リウカ</sup>の著書の一頁。その後の観測結果は、  
長崎、神戸、横浜 などであり、何れも、明治7年  
頃の時期で、特に『科学の黒潮』に於いて  
実況解説が有る:

齊藤国治『金星の古記録』岩波新書207  
(1982.10.20発行).

—— パースの発見に因り、本邦に於いては、  
了川力の御同著を以て元石とす。

了川力の 1874年金星観測年表会のメンバー  
(政府関係者)

合衆国海軍少将 スミヤソン・インスティテュション 長

アトキンソン ジョージ・ヘンリー

合衆国海岸測量長

アトキンソン ベンジャミン・ヒールズ

合衆国海軍司天官

アトキンソン ウィリアム・ハルグレン

などあり、B.ヒールズがパースの著作より、上り

文部省学監タビット・ヒールズから文部大輔 田中不磨の  
公的文章の中からの引用です。...

22971726, 3x11カ 第14代大統領の

Franklin Pierce (1804-69)

発音 ピアース, 綴り ie, 動詞 ヒル (左に  
イリゴエマケル (耳に) 穴を打つ。Pierce の綴り  
発音 パース 耳に ヒル (『新英和辞典』研究社, 5頁)。

年カ (1) も イル (心), 下田馬尺 (マヤ尺)

森 雅昭 編 「黒船」 太平印刷, 下田市

の目次を 続 ( 史実 ) の筆致に

大統領 フランクリン・ピアースは,

日本皇帝陛下と条約を締結する権限を,

タウンゼント・ハリスに付与せられた

年表に相当する。ピアースは最初の補佐に昇任

せし (1853) 年。13代大統領。2月日 (神奈川

和親条約) をピアースは、ハリスの下田着任が 1856。

通商条約 本州 (使節団訪米) のため フランクリン。4年11月,

リンカーン 当選。南北戦争。戦後 (再建, 42)

日本との関係。18代 グラント の2期 (1869-77) に

現出 (2), 「金星観測」も 4年 (1856) 年, 42 (4)

1876年 の 3x11カ 第100年 博覧会 — ビル (電話発明; 42)

伊沢修 = ビル の 出会。 (cf. 数学セリ 8年12月31日)

§1. 先行者と息子と

天文の Peirce 心, どの代数学の没頭1年か。  
伝記的の解説も, 文脈も又と思)心,  
前も左とてはた。

先人とい, 巧者下の人,

W. R. Hamilton (1805-65),

数学と光学, 412 Quaternion (1843).

Peirce の Hamilton と尊敬し,

たか 300力. 300力. 外国人名に相170。

42割の51乃の92, 10と手広く, 塚17

411 2119が, Peirce の '線型結合代数',  
70512が, 着手100か。 本文は流石とい,

熱中12-気は 計算12117211に見之。

之とい Hamilton の没後, '追悼'の  
遺稿の話題は 何かに至らなく,

自入りや, 1742, 02111が。

息子 C.S. との度にも考之す。

長 <sup>J.M.</sup> 秀才 7 ハーバートの副読本, 1705本,  
次子 C.S. は ハーバート卒業成績心

91人中の 79%。 父 B. 17



2nd C.S. の天才と認められ特別の早教育を  
1942年2月。10才前後から算術や  
化学実験を学ばせられた。

資料：世界の名著、中公の  
『パース、ヒンズ、ティーン  
547年-11の年譜。

大学の成績は高く10才で卒業、コースを  
終った自由研究で研究の進捗を、  
能力が十分に発揮できるよりにして、  
教授の成績がマスター、オブ、アーツ。1863年  
化学の部内で最高位賞、バグジー、オグデン。  
1867年、C.S. パース最初の哲学論文5篇、  
アメリカ哲藝科学アカデミー年報にのり。  
1907年

「フールの論理計算の改良、

Boole (1815-64): Math. Anal. of  
Logic 1847. 木村岡博監修 西脇英作訳 公刊元1977.  
息子がやっ出した29行、父B. もつた  
やっ出した29行も14行。

ブール代数の

$$1 = e \vee e^c$$

12から

$$a = (a \wedge e) \vee (a \wedge e^c)$$

2u)94, 11°-2 1解

$$a = ae + (a - ae)$$

214, 5c 12 7u2.

ハミルトンは4元論の中心人物。17世紀初頭の  
自然当然の哲人、哲人空想家と見られる。

264. 「4元論は初等算数である」と主張する\*。

4元論は多元論の一列である。多元論は初等算数  
に12分教をばえ、2u)94

11°-2の立場。

ハミルトンの説、1717年266頁(?)の12元論の中へ、

26見計る。 266, 2u)94, 7-11 1年2

64 7-11 設, 65 ハミルトン 設,

67 C.S. 11°-2 の 7-11 討論, 197.

70 B. 11°-2, 線形結合代数。

\* F 線形結合代数の B. 11°-2 注 1 出 2 (28)

7-10 2-1) =, u7 7-10 代数, z 70 74 2-1 =

### 森川寿『不变式论』(19)国尾

9. 本論文に —

代数的不变式論 ... 普通 Boole = 1841 年,  
論文「二元二次形式の不变式」ハ判別式に依りて其  
根を正負に別する。此の次に「二元二次形式の  
不变式」の明瞭な定義と共に、不变式論の基本概念を述べ  
て其の基礎を置いた。Boole の Boole 代数の代数的  
演算に依り、正理の判別式に依りて其の性質を述べ  
た。... 尤も 1843 年 Cayley の Boole の演算の性質を  
と平叙し見扱へり。... 判別式に依りて其の性質を述べた。

2) Cayley, Sylvester の行列, 固有値, 固有値の  
等。線形代数の (34), 此の第 1 次と 2 次と  
7-10 の 2 行の式を。

2) 1) 普通代数の性質を述べた。2) 1) 2) 3) 4) 5) 6) 7) 8) 9) 10) 11) 12) 13) 14) 15) 16) 17) 18) 19) 20) 21) 22) 23) 24) 25) 26) 27) 28) 29) 30) 31) 32) 33) 34) 35) 36) 37) 38) 39) 40) 41) 42) 43) 44) 45) 46) 47) 48) 49) 50) 51) 52) 53) 54) 55) 56) 57) 58) 59) 60) 61) 62) 63) 64) 65) 66) 67) 68) 69) 70) 71) 72) 73) 74) 75) 76) 77) 78) 79) 80) 81) 82) 83) 84) 85) 86) 87) 88) 89) 90) 91) 92) 93) 94) 95) 96) 97) 98) 99) 100) 101) 102) 103) 104) 105) 106) 107) 108) 109) 110) 111) 112) 113) 114) 115) 116) 117) 118) 119) 120) 121) 122) 123) 124) 125) 126) 127) 128) 129) 130) 131) 132) 133) 134) 135) 136) 137) 138) 139) 140) 141) 142) 143) 144) 145) 146) 147) 148) 149) 150) 151) 152) 153) 154) 155) 156) 157) 158) 159) 160) 161) 162) 163) 164) 165) 166) 167) 168) 169) 170) 171) 172) 173) 174) 175) 176) 177) 178) 179) 180) 181) 182) 183) 184) 185) 186) 187) 188) 189) 190) 191) 192) 193) 194) 195) 196) 197) 198) 199) 200) 201) 202) 203) 204) 205) 206) 207) 208) 209) 210) 211) 212) 213) 214) 215) 216) 217) 218) 219) 220) 221) 222) 223) 224) 225) 226) 227) 228) 229) 230) 231) 232) 233) 234) 235) 236) 237) 238) 239) 240) 241) 242) 243) 244) 245) 246) 247) 248) 249) 250) 251) 252) 253) 254) 255) 256) 257) 258) 259) 260) 261) 262) 263) 264) 265) 266) 267) 268) 269) 270) 271) 272) 273) 274) 275) 276) 277) 278) 279) 280) 281) 282) 283) 284) 285) 286) 287) 288) 289) 290) 291) 292) 293) 294) 295) 296) 297) 298) 299) 300) 301) 302) 303) 304) 305) 306) 307) 308) 309) 310) 311) 312) 313) 314) 315) 316) 317) 318) 319) 320) 321) 322) 323) 324) 325) 326) 327) 328) 329) 330) 331) 332) 333) 334) 335) 336) 337) 338) 339) 340) 341) 342) 343) 344) 345) 346) 347) 348) 349) 350) 351) 352) 353) 354) 355) 356) 357) 358) 359) 360) 361) 362) 363) 364) 365) 366) 367) 368) 369) 370) 371) 372) 373) 374) 375) 376) 377) 378) 379) 380) 381) 382) 383) 384) 385) 386) 387) 388) 389) 390) 391) 392) 393) 394) 395) 396) 397) 398) 399) 400) 401) 402) 403) 404) 405) 406) 407) 408) 409) 410) 411) 412) 413) 414) 415) 416) 417) 418) 419) 420) 421) 422) 423) 424) 425) 426) 427) 428) 429) 430) 431) 432) 433) 434) 435) 436) 437) 438) 439) 440) 441) 442) 443) 444) 445) 446) 447) 448) 449) 450) 451) 452) 453) 454) 455) 456) 457) 458) 459) 460) 461) 462) 463) 464) 465) 466) 467) 468) 469) 470) 471) 472) 473) 474) 475) 476) 477) 478) 479) 480) 481) 482) 483) 484) 485) 486) 487) 488) 489) 490) 491) 492) 493) 494) 495) 496) 497) 498) 499) 500) 501) 502) 503) 504) 505) 506) 507) 508) 509) 510) 511) 512) 513) 514) 515) 516) 517) 518) 519) 520) 521) 522) 523) 524) 525) 526) 527) 528) 529) 530) 531) 532) 533) 534) 535) 536) 537) 538) 539) 540) 541) 542) 543) 544) 545) 546) 547) 548) 549) 550) 551) 552) 553) 554) 555) 556) 557) 558) 559) 560) 561) 562) 563) 564) 565) 566) 567) 568) 569) 570) 571) 572) 573) 574) 575) 576) 577) 578) 579) 580) 581) 582) 583) 584) 585) 586) 587) 588) 589) 590) 591) 592) 593) 594) 595) 596) 597) 598) 599) 600) 601) 602) 603) 604) 605) 606) 607) 608) 609) 610) 611) 612) 613) 614) 615) 616) 617) 618) 619) 620) 621) 622) 623) 624) 625) 626) 627) 628) 629) 630) 631) 632) 633) 634) 635) 636) 637) 638) 639) 640) 641) 642) 643) 644) 645) 646) 647) 648) 649) 650) 651) 652) 653) 654) 655) 656) 657) 658) 659) 660) 661) 662) 663) 664) 665) 666) 667) 668) 669) 670) 671) 672) 673) 674) 675) 676) 677) 678) 679) 680) 681) 682) 683) 684) 685) 686) 687) 688) 689) 690) 691) 692) 693) 694) 695) 696) 697) 698) 699) 700) 701) 702) 703) 704) 705) 706) 707) 708) 709) 710) 711) 712) 713) 714) 715) 716) 717) 718) 719) 720) 721) 722) 723) 724) 725) 726) 727) 728) 729) 730) 731) 732) 733) 734) 735) 736) 737) 738) 739) 740) 741) 742) 743) 744) 745) 746) 747) 748) 749) 750) 751) 752) 753) 754) 755) 756) 757) 758) 759) 760) 761) 762) 763) 764) 765) 766) 767) 768) 769) 770) 771) 772) 773) 774) 775) 776) 777) 778) 779) 780) 781) 782) 783) 784) 785) 786) 787) 788) 789) 790) 791) 792) 793) 794) 795) 796) 797) 798) 799) 800) 801) 802) 803) 804) 805) 806) 807) 808) 809) 810) 811) 812) 813) 814) 815) 816) 817) 818) 819) 820) 821) 822) 823) 824) 825) 826) 827) 828) 829) 830) 831) 832) 833) 834) 835) 836) 837) 838) 839) 840) 841) 842) 843) 844) 845) 846) 847) 848) 849) 850) 851) 852) 853) 854) 855) 856) 857) 858) 859) 860) 861) 862) 863) 864) 865) 866) 867) 868) 869) 870) 871) 872) 873) 874) 875) 876) 877) 878) 879) 880) 881) 882) 883) 884) 885) 886) 887) 888) 889) 890) 891) 892) 893) 894) 895) 896) 897) 898) 899) 900) 901) 902) 903) 904) 905) 906) 907) 908) 909) 910) 911) 912) 913) 914) 915) 916) 917) 918) 919) 920) 921) 922) 923) 924) 925) 926) 927) 928) 929) 930) 931) 932) 933) 934) 935) 936) 937) 938) 939) 940) 941) 942) 943) 944) 945) 946) 947) 948) 949) 950) 951) 952) 953) 954) 955) 956) 957) 958) 959) 960) 961) 962) 963) 964) 965) 966) 967) 968) 969) 970) 971) 972) 973) 974) 975) 976) 977) 978) 979) 980) 981) 982) 983) 984) 985) 986) 987) 988) 989) 990) 991) 992) 993) 994) 995) 996) 997) 998) 999) 1000) 1001) 1002) 1003) 1004) 1005) 1006) 1007) 1008) 1009) 1010) 1011) 1012) 1013) 1014) 1015) 1016) 1017) 1018) 1019) 1020) 1021) 1022) 1023) 1024) 1025) 1026) 1027) 1028) 1029) 1030) 1031) 1032) 1033) 1034) 1035) 1036) 1037) 1038) 1039) 1040) 1041) 1042) 1043) 1044) 1045) 1046) 1047) 1048) 1049) 1050) 1051) 1052) 1053) 1054) 1055) 1056) 1057) 1058) 1059) 1060) 1061) 1062) 1063) 1064) 1065) 1066) 1067) 1068) 1069) 1070) 1071) 1072) 1073) 1074) 1075) 1076) 1077) 1078) 1079) 1080) 1081) 1082) 1083) 1084) 1085) 1086) 1087) 1088) 1089) 1090) 1091) 1092) 1093) 1094) 1095) 1096) 1097) 1098) 1099) 1100) 1101) 1102) 1103) 1104) 1105) 1106) 1107) 1108) 1109) 1110) 1111) 1112) 1113) 1114) 1115) 1116) 1117) 1118) 1119) 1120) 1121) 1122) 1123) 1124) 1125) 1126) 1127) 1128) 1129) 1130) 1131) 1132) 1133) 1134) 1135) 1136) 1137) 1138) 1139) 1140) 1141) 1142) 1143) 1144) 1145) 1146) 1147) 1148) 1149) 1150) 1151) 1152) 1153) 1154) 1155) 1156) 1157) 1158) 1159) 1160) 1161) 1162) 1163) 1164) 1165) 1166) 1167) 1168) 1169) 1170) 1171) 1172) 1173) 1174) 1175) 1176) 1177) 1178) 1179) 1180) 1181) 1182) 1183) 1184) 1185) 1186) 1187) 1188) 1189) 1190) 1191) 1192) 1193) 1194) 1195) 1196) 1197) 1198) 1199) 1200) 1201) 1202) 1203) 1204) 1205) 1206) 1207) 1208) 1209) 1210) 1211) 1212) 1213) 1214) 1215) 1216) 1217) 1218) 1219) 1220) 1221) 1222) 1223) 1224) 1225) 1226) 1227) 1228) 1229) 1230) 1231) 1232) 1233) 1234) 1235) 1236) 1237) 1238) 1239) 1240) 1241) 1242) 1243) 1244) 1245) 1246) 1247) 1248) 1249) 1250) 1251) 1252) 1253) 1254) 1255) 1256) 1257) 1258) 1259) 1260) 1261) 1262) 1263) 1264) 1265) 1266) 1267) 1268) 1269) 1270) 1271) 1272) 1273) 1274) 1275) 1276) 1277) 1278) 1279) 1280) 1281) 1282) 1283) 1284) 1285) 1286) 1287) 1288) 1289) 1290) 1291) 1292) 1293) 1294) 1295) 1296) 1297) 1298) 1299) 1300) 1301) 1302) 1303) 1304) 1305) 1306) 1307) 1308) 1309) 1310) 1311) 1312) 1313) 1314) 1315) 1316) 1317) 1318) 1319) 1320) 1321) 1322) 1323) 1324) 1325) 1326) 1327) 1328) 1329) 1330) 1331) 1332) 1333) 1334) 1335) 1336) 1337) 1338) 1339) 1340) 1341) 1342) 1343) 1344) 1345) 1346) 1347) 1348) 1349) 1350) 1351) 1352) 1353) 1354) 1355) 1356) 1357) 1358) 1359) 1360) 1361) 1362) 1363) 1364) 1365) 1366) 1367) 1368) 1369) 1370) 1371) 1372) 1373) 1374) 1375) 1376) 1377) 1378) 1379) 1380) 1381) 1382) 1383) 1384) 1385) 1386) 1387) 1388) 1389) 1390) 1391) 1392) 1393) 1394) 1395) 1396) 1397) 1398) 1399) 1400) 1401) 1402) 1403) 1404) 1405) 1406) 1407) 1408) 1409) 1410) 1411) 1412) 1413) 1414) 1415) 1416) 1417) 1418) 1419) 1420) 1421) 1422) 1423) 1424) 1425) 1426) 1427) 1428) 1429) 1430) 1431) 1432) 1433) 1434) 1435) 1436) 1437) 1438) 1439) 1440) 1441) 1442) 1443) 1444) 1445) 1446) 1447) 1448) 1449) 1450) 1451) 1452) 1453) 1454) 1455) 1456) 1457) 1458) 1459) 1460) 1461) 1462) 1463) 1464) 1465) 1466) 1467) 1468) 1469) 1470) 1471) 1472) 1473) 1474) 1475) 1476) 1477) 1478) 1479) 1480) 1481) 1482) 1483) 1484) 1485) 1486) 1487) 1488) 1489) 1490) 1491) 1492) 1493) 1494) 1495) 1496) 1497) 1498) 1499) 1500) 1501) 1502) 1503) 1504) 1505) 1506) 1507) 1508) 1509) 1510) 1511) 1512) 1513) 1514) 1515) 1516) 1517) 1518) 1519) 1520) 1521) 1522) 1523) 1524) 1525) 1526) 1527) 1528) 1529) 1530) 1531) 1532) 1533) 1534) 1535) 1536) 1537) 1538) 1539) 1540) 1541) 1542) 1543) 1544) 1545) 1546) 1547) 1548) 1549) 1550) 1551) 1552) 1553) 1554) 1555) 1556) 1557) 1558) 1559) 1560) 1561) 1562) 1563) 1564) 1565) 1566) 1567) 1568) 1569) 1570) 1571) 1572) 1573) 1574) 1575) 1576) 1577) 1578) 1579) 1580) 1581) 1582) 1583) 1584) 1585) 1586) 1587) 1588) 1589) 1590) 1591) 1592) 1593) 1594) 1595) 1596) 1597) 1598) 1599) 1600) 1601) 1602) 1603) 1604) 1605) 1606) 1607) 1608) 1609) 1610) 1611) 1612) 1613) 1614) 1615) 1616) 1617) 1618) 1619) 1620) 1621) 1622) 1623) 1624) 1625) 1626) 1627) 1628) 1629) 1630) 1631) 1632) 1633) 1634) 1635) 1636) 1637) 1638) 1639) 1640) 1641) 1642) 1643) 1644) 1645) 1646) 1647) 1648) 1649) 1650) 1651) 1652) 1653) 1654) 1655) 1656) 1657) 1658) 1659) 1660) 1661) 1662) 1663) 1664) 1665) 1666) 1667) 1668) 1669) 1670) 1671) 1672) 1673) 1674) 1675) 1676) 1677) 1678) 1679) 1680) 1681) 1682) 1683) 1684) 1685) 1686) 1687) 1688) 1689) 1690) 1691) 1692) 1693) 1694) 1695) 1696) 1697) 1698) 1699) 1700) 1701) 1702) 1703) 1704) 1705) 1706) 1707) 1708) 1709) 1710) 1711) 1712) 1713) 1714) 1715) 1716) 1717) 1718) 1719) 1720) 1721) 1722) 1723) 1724) 1725) 1726) 1727) 1728) 1729) 1730) 1731) 1732) 1733) 1734) 1735) 1736) 1737) 1738) 1739) 1740) 1741) 1742) 1743) 1744) 1745) 1746) 1747) 1748) 1749) 1750) 1751) 1752) 1753) 1754) 1755) 1756) 1757) 1758) 1759) 1760) 1761) 1762) 1763) 1764) 1765) 1766) 1767) 1768) 1769) 1770) 1771) 1772) 1773) 1774) 1775) 1776) 1777) 1778) 1779) 1780) 1781) 1782) 1783) 1784) 1785) 1786) 1787) 1788) 1789) 1790) 1791) 1792) 1793) 1794) 1795) 1796) 1797) 1798) 1799) 1800) 1801) 1802) 1803) 1804) 1805) 1806) 1807) 1808) 1809) 1810) 1811) 1812) 1813) 1814) 1815) 1816) 1817) 1818) 1819) 1820) 1821) 1822) 1823) 1824) 1825) 1826) 1827) 1828) 1829) 1830) 1831) 1832) 1833) 1834) 1835) 1836) 1837) 1838) 1839) 1840) 1841) 1842) 1843) 1844) 1845) 1846) 1847) 1848) 1849) 1850) 1851) 1852) 1853) 1854) 1855) 1856) 1857) 1858) 1859) 1860) 1861) 1862) 1863) 1864) 1865) 1866) 1867) 1868) 1869) 1870) 1871) 1872) 1873) 1874) 1875) 1876) 1877) 1878) 1879) 1880) 1881) 1882) 1883) 1884) 1885) 1886) 1887) 1888) 1889) 1890) 1891) 1892) 1893) 1894) 1895) 1896) 1897) 1898) 1899) 1900) 1901) 1902) 1903) 1904) 1905) 1906) 1907) 1908) 1909) 1910) 1911) 1912) 1913) 1914) 1915) 1916) 1917) 1918) 1919) 1920) 1921) 1922) 1923) 1924) 1925) 1926) 1927) 1928) 1929) 1930) 1931) 1932) 1933) 1934) 1935) 1936) 1937) 1938) 1939) 1940) 1941) 1942) 1943) 1944) 1945) 1946) 1947) 1948) 1949) 1950) 1951) 1952) 1953) 1954) 1955) 1956) 1957) 1958) 1959) 1960) 1961) 1962) 1963) 1964) 1965) 1966) 1967) 1968) 1969) 1970) 1971) 1972) 1973) 1974) 1975) 1976) 1977) 1978) 1979) 1980) 1981) 1982) 1983) 1984) 1985) 1986) 1987) 1988) 1989) 1990) 1991) 1992) 1993) 1994) 1995) 1996) 1997) 1998) 1999) 2000) 2001) 2002) 2003) 2004) 2005) 2006) 2007) 2008) 2009) 2010) 2011) 2012) 2013) 2014) 2015) 2016) 2017) 2018) 2019) 2020) 2021) 2022) 2023) 2024) 2025) 2026) 2027) 2028) 2029) 2030) 2031) 2032) 2033) 2034) 2035) 2036) 2037) 2038) 2039) 2040) 2041) 2042) 2043) 2044) 2045) 2046) 2047) 2048) 2049) 2050) 2051) 2052) 2053) 2054) 2055) 2056) 2057) 2058) 2059) 2060) 2061) 2062) 2063) 2064) 2065) 2066) 2067) 2068) 2069) 2070) 2071) 2072) 2073) 2074) 2075) 2076) 2077) 2078) 2079) 2080) 2081) 2082) 2083) 2084) 2085) 2086) 2087) 2088) 2089) 2090) 2091) 2092) 2093) 2094) 2095) 2096) 2097) 2098) 2099) 2100) 2101) 2102) 2103) 2104) 2105) 2106) 2107) 2108) 2109) 2110) 2111) 2112) 2113) 2114) 2115) 2116) 2117) 2118) 2119) 2120) 2121) 2122) 2123) 2124) 2125) 2126) 2127) 2128) 2129) 2130) 2131) 2132) 2133) 2134) 2135) 2136) 2137) 2138) 2139) 2140) 2141) 2142) 2143) 2144) 2145) 2146) 2147) 2148) 2149) 2150) 2151) 2152) 2153) 2154) 2155) 2156) 2157) 2158) 2159) 2160) 2161) 2162) 2163) 2164) 2

§2. 内容

±2 "Linear Associative Algebra" 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, 57, 58, 59, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70, 71, 72, 73, 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 85, 86, 87, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203, 204, 205, 206, 207, 208, 209, 210, 211, 212, 213, 214, 215, 216, 217, 218, 219, 220, 221, 222, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245, 246, 247, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265, 266, 267, 268, 269, 270, 271, 272, 273, 274, 275, 276, 277, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 293, 294, 295, 296, 297, 298, 299, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 306, 307, 308, 309, 310, 311, 312, 313, 314, 315, 316, 317, 318, 319, 320, 321, 322, 323, 324, 325, 326, 327, 328, 329, 330, 331, 332, 333, 334, 335, 336, 337, 338, 339, 340, 341, 342, 343, 344, 345, 346, 347, 348, 349, 350, 351, 352, 353, 354, 355, 356, 357, 358, 359, 360, 361, 362, 363, 364, 365, 366, 367, 368, 369, 370, 371, 372, 373, 374, 375, 376, 377, 378, 379, 380, 381, 382, 383, 384, 385, 386, 387, 388, 389, 390, 391, 392, 393, 394, 395, 396, 397, 398, 399, 400, 401, 402, 403, 404, 405, 406, 407, 408, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 416, 417, 418, 419, 420, 421, 422, 423, 424, 425, 426, 427, 428, 429, 430, 431, 432, 433, 434, 435, 436, 437, 438, 439, 440, 441, 442, 443, 444, 445, 446, 447, 448, 449, 450, 451, 452, 453, 454, 455, 456, 457, 458, 459, 460, 461, 462, 463, 464, 465, 466, 467, 468, 469, 470, 471, 472, 473, 474, 475, 476, 477, 478, 479, 480, 481, 482, 483, 484, 485, 486, 487, 488, 489, 490, 491, 492, 493, 494, 495, 496, 497, 498, 499, 500, 501, 502, 503, 504, 505, 506, 507, 508, 509, 510, 511, 512, 513, 514, 515, 516, 517, 518, 519, 520, 521, 522, 523, 524, 525, 526, 527, 528, 529, 530, 531, 532, 533, 534, 535, 536, 537, 538, 539, 540, 541, 542, 543, 544, 545, 546, 547, 548, 549, 550, 551, 552, 553, 554, 555, 556, 557, 558, 559, 560, 561, 562, 563, 564, 565, 566, 567, 568, 569, 570, 571, 572, 573, 574, 575, 576, 577, 578, 579, 580, 581, 582, 583, 584, 585, 586, 587, 588, 589, 590, 591, 592, 593, 594, 595, 596, 597, 598, 599, 600, 601, 602, 603, 604, 605, 606, 607, 608, 609, 610, 611, 612, 613, 614, 615, 616, 617, 618, 619, 620, 621, 622, 623, 624, 625, 626, 627, 628, 629, 630, 631, 632, 633, 634, 635, 636, 637, 638, 639, 640, 641, 642, 643, 644, 645, 646, 647, 648, 649, 650, 651, 652, 653, 654, 655, 656, 657, 658, 659, 660, 661, 662, 663, 664, 665, 666, 667, 668, 669, 670, 671, 672, 673, 674, 675, 676, 677, 678, 679, 680, 681, 682, 683, 684, 685, 686, 687, 688, 689, 690, 691, 692, 693, 694, 695, 696, 697, 698, 699, 700, 701, 702, 703, 704, 705, 706, 707, 708, 709, 710, 711, 712, 713, 714, 715, 716, 717, 718, 719, 720, 721, 722, 723, 724, 725, 726, 727, 728, 729, 730, 731, 732, 733, 734, 735, 736, 737, 738, 739, 740, 741, 742, 743, 744, 745, 746, 747, 748, 749, 750, 751, 752, 753, 754, 755, 756, 757, 758, 759, 760, 761, 762, 763, 764, 765, 766, 767, 768, 769, 770, 771, 772, 773, 774, 775, 776, 777, 778, 779, 780, 781, 782, 783, 784, 785, 786, 787, 788, 789, 790, 791, 792, 793, 794, 795, 796, 797, 798, 799, 800, 801, 802, 803, 804, 805, 806, 807, 808, 809, 810, 811, 812, 813, 814, 815, 816, 817, 818, 819, 820, 821, 822, 823, 824, 825, 826, 827, 828, 829, 830, 831, 832, 833, 834, 835, 836, 837, 838, 839, 840, 841, 842, 843, 844, 845, 846, 847, 848, 849, 850, 851, 852, 853, 854, 855, 856, 857, 858, 859, 860, 861, 862, 863, 864, 865, 866, 867, 868, 869, 870, 871, 872, 873, 874, 875, 876, 877, 878, 879, 880, 881, 882, 883, 884, 885, 886, 887, 888, 889, 890, 891, 892, 893, 894, 895, 896, 897, 898, 899, 900, 901, 902, 903, 904, 905, 906, 907, 908, 909, 910, 911, 912, 913, 914, 915, 916, 917, 918, 919, 920, 921, 922, 923, 924, 925, 926, 927, 928, 929, 930, 931, 932, 933, 934, 935, 936, 937, 938, 939, 940, 941, 942, 943, 944, 945, 946, 947, 948, 949, 950, 951, 952, 953, 954, 955, 956, 957, 958, 959, 960, 961, 962, 963, 964, 965, 966, 967, 968, 969, 970, 971, 972, 973, 974, 975, 976, 977, 978, 979, 980, 981, 982, 983, 984, 985, 986, 987, 988, 989, 990, 991, 992, 993, 994, 995, 996, 997, 998, 999, 1000.

小見出しを記す。

§§1~4

Book I. The Language of Algebra ... 99

§§5~7

The Alphabet (§§8~13)

The Vocabulary (§§14~27)

The Grammar (§§28~37)

Linear Associative Algebra (§§38~§70) ... 108

Investigation of Special Algebras ... 119

Single Algebra

Double Algebra

Triple Algebra

Quadruple Algebra ... 127

Quintuple Algebra ... 143

Sextuple Algebra ... 203

Natural Classification ... 215

冒頭 数学

Mathematics is the science which draws necessary conclusions.

宣言 32.

通常の定義は、その範囲に量的研究に限らず、  
その対象に量的、とす。また通常定義は、  
他の諸科学より対象に主として (objective) なる、  
それの見地 (subjective) による。その例は  
その一回の割合に等しい。その例は

Algebra, then, is formal mathematics.

その名の通り、その代数的な性質：  
言語、技法、科学的応用。

その言語 (2巻以下の書名に於て)

例示の  $a + b$

$a + b$        $F$  なる Vocabulary  
letter      sign

$a + b = b + a$  なる grammar

alphabet なる、その例は  $\{a, b\}$  なる、

1次多項式を基の元。

422 linear associative algebra (有限次元)  
 (交換律一般化(及延)の系合の有限次元)

最初の定理は、

中等元  $e$ 、中零元  $\bar{e}$ 、あり。

左の方程式は、

$$0 = a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_k A^k = a_1 A + BA$$

$$\text{右 } 0 = a_1 A^l + BA^l, \quad 0 = a_1 B + BB$$

$$a_1 \neq 0 \text{ ならば } -\frac{B}{a_1} \text{ は中等元。 } a_1 = 0 \text{ ならば } B^2 = 0。$$

よって中等元  $\bar{e}$  は  $\lambda = 1$ ,  $1^0$  と  $\lambda$  解  $\lambda = 1$ 。

両側  $\lambda$  解 —  $\lambda$  は  $\gamma$  と  $1-\gamma$  と

$$1 = \lambda \gamma + x(1-\gamma) + (1-\lambda)\gamma + (1-\lambda)(1-\gamma) \quad \text{よって}$$

中等元  $e$  の乘法 (作用) (当時の  $\lambda$  と  $1-\lambda$  と)

$$L_e : x \mapsto ex, \quad R_e : x \mapsto xe$$

よって  $0, 1$  の  $\lambda$  と  $1-\lambda$  と

$$\lambda = 1 \text{ の時 } \quad ex = xe = x$$

$$\lambda = 2 \text{ の時 } \quad ex = x, \quad xe = 0$$

$$\lambda = 3 \text{ の時 } \quad xe = x, \quad ex = 0$$

$$\lambda = 4 \text{ の時 } \quad ex = xe = 0$$

$1^0$  と  $\lambda$  と  $1-\lambda$  と  $\lambda$  と  $1-\lambda$  と  $xe = 0$  と

$x$  は nilfacient (左零因子)

右側用  $R$  に対し  $0$ ,  $1$  は  $1$

左側因子に  $1$  対して  $0$ .

$$\text{facient} \underline{\quad} \times \text{faciend} = \text{factum}$$

(これは Hamilton の用字記号),

右側因子に  $1$  対して  $e$ .  $e \times x = x$  と  $x$  自身に  $1$  対して  $e$   
 $\text{idem faciend}$ .  $521$

以下 2 階:  $\text{idem faciend} \rightarrow \text{nil facient}$   
 $2i \sim ia \sim 2$   $\downarrow$   $dn$   $\leftarrow$   $\uparrow$   $2$  の記号

$x, y$  と  $1$  対して  $dn$  の記号  $2$

$$x y = x(e y) = (x e) y = 0 y = 0$$

$$- \text{例} \quad (*n) \times (d*) = 0 = (*d) \times (n*)$$

以下 4 階の 1) の乗法表

	dd	dn	nd	nn
dd	dd	dn	0	0
dn	0	0	dd	dn
nd	nd	nn	0	0
nn	0	0	nd	nn

$$(d*) \times (*n) \sim (dn) \text{ の記号}, \text{ 2, 1, 2, 2}$$

$e$  の左側用 (右側因子に  $1$  対して  $1$  の記号),  $1$  の左側因子に  $1$  対して  $1$  の記号

第1~4群は、この全部を3つに分ける。2つ

第1群 + 第4群 2つある。

第4群は直交に分解して分ける。

第1群 + 第2群 + 第4群 なるべし、

dd	nn		
dd	0		
nn	nn		

一つの加群(第2群)は、二つの代数(第1群, 第4群)が分離して作用して分ける。

$$\lambda_1 \text{群} + \lambda_2 \text{群}, \quad \lambda_4 \text{群} + \lambda_2 \text{群}$$

は分離して分離する。±は

$$\lambda_1 \text{群} + \lambda_2 \text{群}, \quad \lambda_2 \text{群} = \{u_1, \dots, u_n\}$$

±,  $\lambda_1 \text{群} + \{u_i\}$  は分離して分離する。

2つの分離して混合代数は

「純代数」は(1)と(2)の積を分ける, ±に分ける。

注意. 混合代数は混合型のもので、

その扱いは1つは物理現象、別の法則

に区別して分ける, ±は2つの結果がある

その1つは分離して分ける。

パー入は、代数の分解、<sup>分離</sup>混合型がある

自然の現象、自然認識、±条件、分離。



§3 リンネ式と自然分數と.

分數は,  $n$  次元による.

1次元 Single algebra 型 2 種.

$$u^1 = u \text{ or } u^2 = 0 \text{ or.}$$

2次元 Double algebra 3

3 Triple 5

4 Quadruple 18

5 Quintuple 70

これは  $60 \binom{n-1}{2}$  である

6 Sextuple

5次元の中央 alg. 54 種あり,

単位元を追加すると 54 種が得られ,

~~54~~ 11 種が構成される。これ

6次元の中央 alg. に移ると 232,

分數の筆をふらげる。

65 + \*\*\*?

乗積表の中, 係數表の元をたか出れば,

$\gamma$  の (連続) 無限直のものを一括し, 一つと割れば

下のようになる, 上記の型は  $n$  次元,  $n$  次元

の自然分數  $n$  次元. (連続)



かゝるもの。

「線形結合代数」本文の通り、具体例は  
名に付した代数は、ハミルトンの四元数  
也。雑誌掲載の、C.S. II-2注の中で、  
これが交代数也、との注記がある。  
1911. 付録 1 (1895) の中で、  
B. パース自身が、交代数 4 個の分類  
にあることを確認している。

交代数 alternate numbers

$$a_i a_j = -a_j a_i, \quad a_i^2 = 0$$

の  $i, j$  是

$$a_1, \dots, a_n$$

より生成した、次数環。

1 を除くは、 $2^n - 1$  次元也。

この  $n$  のラッセル代数。(単位元なし)

すなわちハミルトンの四元数也。

行列式への応用は「リファクト」

に付した通り也。

2) の具体例、無名に付した通り也。  
具名代数。

Yoneda が示したように、代数の  
形式的完全性 (公理論的) に注意して。

有限単位群の場合、

終幕定理 (示した) に注意して、

スカラーリングの同型と等価 (公理論的) により、

同型の中 (念のため) (1)。

<sup>2.1.1</sup> 大天狗の鳥元約、眷属の存在と存在の解法、

怪物神話、腕手と握造、かみかみ虚誕

とていつ、分類の根本的精神の同一。

生物の自然分類、ダーウィンの進化論。

『種の起源』初版 1859, 『人間の由来』 1869。

2.1-1) もつて 眼の前から上へして、

代数的自然分類の論。論は自然論、

生成の二奇行を考へ、その自然論の足取と考へる。

現実実現の「 $\pi$ 」の夢を思ふ部分、中興代算。

有限群の場合、可換群の基本定理で解る。

中興群の  $\rho$  群の直積、 $\rho$  群  $\rho$  群、

全部を組織化して得る方法からして全体を観る。

とていつか、 $\rho$  群  $\rho$  群。それらに注意して、

直ちに考へる。

Wie alg の場合, 降中心列:

$$L = L^1 \supset L^2 \supset \dots \supset L^n \supset L^{n+1} = 0$$

昇中心列  $0 \subset Z \subset \dots$

導来列  $L \supset L^2 \supset (L^2)^2 \dots$

代数構造の全体が述べて。それ以外,  
元の向の商係, 構造は皆それより小さく。  
2)  $n_j$  観察法は, 1) と, 束論は = 評価法。

ideal 概念も,  $\lambda - \lambda$  の alg の  
適する。  $\lambda - \lambda$ , 元の計算は終結し,  
加群, 積の計算方法は全く異なる。  
部入加群 = 2) の計算に用いる。

「中環」 = 1) の計算法は, 4) の, 元  $z$  の  
中環, なる  $nil$ 。

有限次元の結合環は  $z$  の,  $nil = nilpotent$   
である, 概念は 1) の,  $nil$  の  $n_j$ 。

$z$  の  $n_j$

元の向の商係式は定義中の alg  $z$ ,  
その定義商係式は対称性による,  
自然に環形となる。

その  $n_j$  は  $n$  である, 4) の

元の向の商係式は定義中の alg  $z$ ,  
その定義商係式は対称性による,  
自然に環形となる。

その  $n_j$  は  $n$  である, 4) の

その  $n_j$  は  $n$  である, 4) の



#### §4 C.S. パーヌの 塊形

AJM 掲載の B 線型 結合代数  $\mathcal{A}$  について、分類は出ている代数では、 $\mathcal{A}$  の「塊形」をいふが、脚注が示している。

C.S. パーヌは、 $\mathcal{A}$  について、 $\mathcal{A}$  は [C.S.P.] の断り果てがある。

この表示法  $\mathcal{A}$  のため、C.S. パーヌの考察で、1875年5月11日、 $\mathcal{A}$  の基礎科学者会議 - a Proceedings にある。

同時に、B. パーヌの報告が〈付録 I〉。

また C.S. パーヌの 解説が〈付録 II〉。

今日の云々  $\mathcal{A}$  のこと。

同型の B 線型表現。

B. パーヌは  $\mathcal{A}$  の、代数は、

適当に選んだ B 線型表現  $\mathcal{A}$  の、

乗積表  $\mathcal{A}$  を示す。

代数  $\mathcal{A}$  は、乗積表  $\mathcal{A}$  を掲げている。

大切な表  $\mathcal{A}$  は、認めるべきである。

また 脚注の 塊形は、 $\mathcal{A}$  の  $\mathcal{A}$  である。

行列単位、適當な和、組  
を記す  $2 \times 7 \quad 2 \times 2$ 。

行列単位  $e_{ij}$  の積

$$e_{ij} e_{kl} = \begin{cases} e_{il} & (j=k) \\ 0 & (j \neq k) \end{cases}$$

以下一般の場合に前提として、

同数の行列  $e_{ij}$  の乗積表、

以下の、

2つ、大なる進歩を以て評価する。

1922年 B. パーソンの報告 (付録 I)

の 199 箇所：

(c. s.) パーソン単純論理上の推論 (1) 16

5jk, 方数 quadrate (17) 全行列環)

11-22 全列方環型行列の正逆形式、

200 以上の行列の形式、

不完全な行列  $e_{ij}$  による。

簡約形の 1 等型、 $7 \in a$  通り、

I, J, K, ...

2 線型  $e_{ij}$ 、以下何れかの量  $2$

12 列の  $u$  と  $v$  の比較、量  $a$  と  $b$  の比較



$(I:J)$

また  $(I:J)J = I$  の作用である。

作用の如く、積が成る。

$$(I:J)(J:K) = (I:K)$$

同物  $\mathfrak{g}$  の基底  $e_i, f_i, h_i$  に対して、

$\mathfrak{g}$  の  $\mathfrak{sl}_2$ -部分代数  $\mathfrak{h}$  の基底  $e, f, h$  に対して、

同様である。

乗積表  $\rho_{ij}$  (一般の場合) である。

$$IJ = \sum \delta_{IJ}^K K$$

$$\sum_J \sum_K \delta_{IJ}^K (K:J) = I'$$

と表す。

同物  $I \mapsto \rho_{ij}$  の作用  $\rho$ -表現  $I'$

は homomorphism (左正則表現)

center  $O$  上の同型である。

余  $\mathfrak{h}$  の基底  $e, f, h$  に対して  $A$  上の作用  $\rho$  である。

$$(I:A) + \sum_J \sum_K \delta_{IJ}^K (K:J) = I'$$

したがって  $A$  上の作用  $\rho$  に対して  $I \neq J$  かつ  $I' \neq J'$ 。

$I \neq J$  かつ  $I' \neq J'$ 。

\*  $\mathfrak{sl}_2$  の技巧は、Lie algebra の使われ方、特に基底の作用。

特に、1-群と1-環、2、杉浦記 p.334 参照。