「多元環の表現論」シンポジウム

報　告　集

1986年2月25日〜27日

於　奈良県社会教育センター

序

この報告集は１986年２月２５日から２７日まで奈良県社会教育センターで″多元環の表現論″と題して行われた研究集会における講演を講演者自身の原稿をもとに作成したものであります。

多元環の表現論の研究が活発になってから１５年以上を経過し，その間多くの興味ある結果が得られ，更に新しい展開が見られる状況にあるため，これまでの成果及びこれから発展しそうな話題についての解説を中心にした研究集会を開催いたしました。

プログラム責任者は信州大学岩永恭雄氏にお願いいたしました。集会は盛況であり，特に多元環の表現論とSingularity との関連から可換環論の研究者の参加がありこの方面への関心の深さを伺わせました。

講演者の旅費及びこの報告集の出版費は九州大学白谷克巳教授の昭和６０年度文部省科学研究費（総合Ａ，課題番号60302002）に依存しました。

こゝに周到な準備をしていただいた講演者諸氏ならびに，会場，宿泊の世話をしていただいた筑波大学星野光男氏に感謝いたします。

１９８６年２月

太　刀　川　　弘　幸

序

この報告書は1986年2月3日から2月7日まで[illegible]において“多元系の数理論”と題して行われた研究会における[illegible]をもとに作成したものであります。

[illegible]

[illegible]Singularity[illegible]

[illegible]文部省科学研究費（総合A）[illegible]

[illegible]

1986年[illegible]月

[illegible]

目　　次

目次

多元環の表現論入門

山形邦夫

今日の(多元環の)表現論を知るためには、非常に多くの言葉を理解しなければなりません。それ等のいくつかは、昔から使用されているものの簡単な言い換えにすぎないものもありますが、見方を変えれば驚くほど理解しやすくなるという非常によい例があります。それは、多元環を有向グラフ(これをquiverとよびます)によって定義し、加群を(グラフをcategoryと考えて——つまり"点"をobject, "矢"をmorphismと考える——そのcategoryからベクトル空間のcategoryへの)functorと見なすことです。加群が多元環の行列表現と(同型を除いて)一対一に対応することから、この場合のfunctorのことをquiverの"表現"といいます。

「新しい言葉を理解してみたら従来のものと何等変わるところがなかった」などというのは、多くの人が経験していることと思いますし、無駄な時間をさいた気がして厭になるものですが、とにかく、この"quiver"とか"表現"という言葉は、"多元環"と"加群"という言葉を知らなくては加群論が成立しなくなってしまうのと全く同様で、まず記憶しなければならない単語なのです。さらに、この言い換えによって、他の分野(例えば、リー環論や代数群論)との関係も明らかになってきました。次に知らなければならないのが、almost split sequence という特別な short exact sequence です。これは、直既約加群から別の直既約加群を構成するという方法(重要さはこの点にあります)と関連し、多元環論という極めて抽象的な分野に、幾何学(位相幾何学、代数幾何学など)を導入する根拠となるものです。

以上のことから、表現論を専攻しない人達にも現在の表現論の姿を知っていただくには、上述

の2点 ― quiver とその表現，及び almost split sequence ― について先ず紹介しなければなりません。次に…となると次第に深入りすることになって，限られた頁数の中では，全く"「表現論単語集」の初版本"の原稿を書くようなハメに落ち入る危険があります。幸い，以下，表現論の各分野における研究状況の紹介がありますので，それらの共通部分である上記の2点について，ここで解説することにします。さらに幸いなことには，この2つの言葉を知っていると，"表現論を知っている"顔ができるということです。それ程基本的な事柄であるといえます。

以下考える環は，代数的閉体上の有限次元多元環（algebra）とし，単位元の存在を仮定します。また，加群は，とくに断わらない限り，有限生成（＝有限次元）な右加群とします。ここで表現論といえば，広く多元環の表現論をいみすることにします（従って，例えば，群の表現論などに限定した意味ではないことに注意して下さい）。

§0. 準備

いきなり quiver 及びその表現について述べて、すべてを categorical に統一してしまうより，本来の多元環及び加群についての扱いを確認した上で(categorical に)形式化していく方が自然なやり方であると思いますので先ず多元環と加群についての復習から始めます。

K を代数的閉体とし，A を有限次元 K-多元環とする。A^{op} によって A の opposite algebra を表わす。有限生成な A-加群の成す category を $\mathrm{mod}\,A$ で表わすと，$\mathrm{mod}\,A^{op}$ は有限生成な右 A-加群の category を意味する。K-dual functor $\mathrm{Hom}_K(-, K)$: $\mathrm{mod}\,K \longrightarrow \mathrm{mod}\,K$ は，A-加群の間の duality をひきおこす。これを $D = \mathrm{Hom}(-, K)$ で表わす： $\mathrm{mod}\,A \underset{D}{\overset{D}{\rightleftarrows}} \mathrm{mod}\,A$.

(0.1) Jacobson radical

A の (Jacobson) radical を $\mathrm{rad}\,A$ で表わし，A-加群 X (これを $X \in \mathrm{mod}\,A$ と書く) に対して

は，$\mathrm{rad}\,X = X(\mathrm{rad}\,A)$ とする。 $\mathrm{rad}\,A = 0$ となる多元環を <u>semi-simple</u> という．factor algebra $\bar{A} := A/\mathrm{rad}\,A$ は semi-simple であるから，Wedderburn の定理より，$\bar{A}$ は K 上の（有限個の）行列環の直積である（代数的閉体上の有限次斜体は K 自身であることに注意）.

(0.2) <u>Krull-Schmidt の定理</u>

A が local とは，unique maximal right ideal をもつことである。これは左イデアルについての叙述と同値で，さらに，$\bar{A}$ が division algebra（従って，$\bar{A} = K$）であることと同値でもある。また，$X \in \mathrm{mod}\,A$ が直既約であることと，準同型環 $\mathrm{End}(X)$ が local であることとは同値である．任意の加群 X は直既約分解され，次のようないみで，この分解は一意的にきまる：

（Krull-Schmidt の定理） $X = \bigoplus_{i=1}^{m} X_i = \bigoplus_{j=1}^{n} Y_j$ を直既約分解とすれば，$m = n$ であり，どんな直和因子 Y_j に対しても $Y_j \cong X_{\pi(j)}$ となる置換 $\pi : \{1, \dots, n\} \xrightarrow{1:1} \{1, \dots, n\}$ が存在する。

eAe が local algebra となるような巾等元 $e^2=e\in A$ のことを原始的(primitive)という。このことは、$eAe\cong \mathrm{End}(eA)\cong \mathrm{End}(Ae)$ により、eA 或いは Ae が直既約であることと同値である。2つの巾等元 e_1 と e_2 が同型($e_1\cong e_2$)とは、$e_1A\cong e_2A$ ($\Leftrightarrow Ae_1\cong Ae_2$) となることをいう。原始巾等元の集合 $\{e_i\}_{i=1}^n$ が"直交原始巾等元の完全系"であるというのは、$e_ie_j=\delta_{ij}e_i$, $1=\sum_{i=1}^n e_i$ をみたすことである(δ = クロネッカーのデルタ)。原始巾等元と直既約 projective との関係を Krull-Schmidt の定理にあてはめると、単位元についての(原始巾等元への)分解の一意性が得られる:$\{e_i\}_{i=1}^m$, $\{f_j\}_{j=1}^n$ が2つの直交原始巾等元の完全系 なら、$m=n$ であり、$\{1,\cdots,n\}$ における置換 π が存在して、どんな f_j に対しても $f_j\cong e_{\pi(j)}$ が成立する"。

(0.3) <u>Simple modules</u>

多元環のもっている基本的な性質の一つは、simple module と、直既約 projective と、直既約 injective との間に、自然な1:1対応

がみたすことである。つまり、$\{e_i\}_{i=1}^n$ を直交原始巾等元の完全系とすると、$\{e_iA\}_{i=1}^n$ がすべての直既約 projectives から成り、$\{\bar{e}_i\bar{A}\}_{i=1}^n$ がすべての simple modules で、$\{D(Ae_i)\}_{i=1}^n$ がすべての直既約 injectives である。また、$D(Ae_i) \cong I(\bar{e}_i\bar{A})$ (ここで $I(X)$ は X の injective hull をいみする)。さらに、$\mathrm{rad}\, e_iA$ が e_iA の unique maximal submodule である。

(0.4) Basic algebra

$\{e_i\}_{i=1}^n$ を直交原始巾等元の完全系とする。$\{e_i\}$ のうちから、同型類の代表系を一組とり、$\{e_1, \cdots, e_m\}$ とおく。$e := e_1 + \cdots + e_m$ とおくと、多元環 eAe は代表系のとり方に依らずに(同型を除き)決まる。しかも、eAe における単位元は e で、$e = \sum_{i=1}^n e_i$ だから、$\{e_i\}_{i=1}^m$ は (eAe における)互いに非同型な直交巾等元の完全系であり($e_i \in eAe$ に注意)、カテゴリー同型 $\mathrm{mod}\, eAe \approx \mathrm{mod}\, A$ を得る。この理由から、eAe を basic algebra とよぶ。一般に、互いに非同型な直交原始巾等元から成る完全代表系

が存在するような多元環を <u>basic</u> とよぶ。ここで扱う表現論とは、直既約加群の性質を調べることであり、カテゴリー同値によって直既約性は保たれるので、以下、多元環は basic であると仮定することにする。

<u>例</u>　n次行列環 $A=\begin{bmatrix} k & \cdots & k \\ \vdots & & \vdots \\ k & \cdots & k \end{bmatrix}$ において、行列単位 $e_i = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{pmatrix} i$ は、直交原始巾等元の完全系を成し、$e_1 \cong e_i$ ($\forall i$)。従って、k ($\cong e_1Ae_1$) が A の basic algebra である。

(0.5) <u>Indecomposable algebra</u>

A が indecomposable とは、2つの(零でない)多元環 A_1, A_2 の直積 $A_1 \times A_2$ に分解できないことをいう。(0.4)の例は、indecomposable algebra の自明なものである。$A \cong A_1 \times A_2$ のとき
$\mathrm{mod}\,A \approx (\mathrm{mod}\,A_1) \times (\mathrm{mod}\,A_2)$ (カテゴリーの直積)
となるので、やはり以下では、indecomposable algebra のみを考えることにする。quiver(後述)との関係から、indecomposable のことを connected というのが近年の慣習である(これにより、加群 A_A の直既約と混乱しなくなる利点が

ある。(0.4)の例でみると、多元環としては直既約だが($n \geq 2$のとき)加群としては直既約ではない。

§1. Almost split sequence

現在、almost split sequence という概念は、多元環論のみならず広く代数学の基本的なものの一つになりつつあるように思われます(しかし、almost split sequence を一度も使ったことのない、神様のような人が表現論の世界にいます)。この節での議論は、一部を除いて(その個所で注意をおきます)、任意の体 K 上の多元環(もっと一般に、artin algebra)でも成立します。

(1.1) Sink map, source map

X を直既約、$f: X \to Y$ を morphism (in mod A) とする。次の2条件 1), 2) が成立するとき、f を source map (= minimal left almost split map) という;

1) left almost split;

f は split-mono (= splittable mono-morphism) ではない。しかも、かってな non split-mono $h: X \to W$ を与えると、$f'f = h$ となる morphism $f': Y \to W$ が存在する：

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\forall h"', "\text{split-mono} \neq"' {xshift=-20pt}] & Y \arrow[d, dashed, "\exists f'"] \\ & W \end{tikzcd}$$

2) left minimal：

morphism $f': Y \to Y$ が $f = f'f$ をみたすなら、f' は isomorphism である：

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dd, "f'"] \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & Y \end{tikzcd} \Rightarrow f' : \text{iso.}$$

同様にして、直既約 Z に対し、morphism $g: Y \to Z$ が sink map (= minimal right almost split map) であるというのは、
1) right almost split，2) right minimal
(つまり、source map の定義において、"矢印" を逆向きにしたものが sink map の定義になる) を満たすことと約束する。

定義から、source map, sink map は一意的に決まる（存在は次の定理により保証される）；

$$f: X \to Y,\ f': X \to Y' \quad \text{source map} \Rightarrow \begin{tikzcd} & Y \arrow[d, "\exists h"] \\ X \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "f'"'] & Y' \end{tikzcd}$$

(1.2) <u>Existence</u> <u>Theorem</u> of source(sink) map.

1) 任意の直既約 X に対して、source map $f: X \to Y$ が唯一つ存在する。また、任意の直既約 Z に対して、sink map $g: Y \to Z$ が唯一つ存在する。

2) $\varepsilon: 0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ を short exact sequence (in mod A) とする。次の条件は同値である；

a) X が直既約で f は source map である。

b) Z が直既約で g は sink map である。

この同値な条件をみたす exact sequence ε を <u>almost split sequence</u> (Auslander-Reiten sequence) という。（以下、al. s. seq. と略す）。

Sink map 及び source map の一意性から、almost split sequence の一意性もわかる；

$\mathcal{E}: 0 \to X \to Y \to Z \to 0$, $\mathcal{E}': 0 \to X' \to Y' \to Z' \to 0$

を al. s. seq. とすると、次の3つの性質は同値；

(i) $X \cong X'$, (ii) $Z \cong Z'$, (iii) $\mathcal{E} \cong \mathcal{E}'$ (exact sequence としての同型)。

例　P を直既約 projective とすると、$\mathrm{rad}\,P \hookrightarrow P$ は source map であり、I を直既約 injective とすると、$I \twoheadrightarrow I/\mathrm{soc}\,I$ は sink map である（ここで $\mathrm{soc}\,I$ は、I に含まれる唯一つの simple submodule を表わす）。

(1.3) <u>Irreducible map</u>

al. s. seq. の定義において、a) と b) の同値性が成立するのは、$Y = \bigoplus_{i=1}^{s} Y_i$ と直既約分解したときに（f 及び g から）得られる morphisms $f_i : X \to Y_i$, $g_i : Y_i \to Z$ が、全く"左右"の性質によらないということによるものである。また、このような特別な（直既約加群の間の）maps が逆に al. s. seq. を特徴付けている。

$f : X \longrightarrow Y$ を mod A における morphism

とする. fが既約 (irreducible) とは, 次の 0), 1) をみたすことである:

0) fは split-mono でも split-epi でもない.

1) $X \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} Y$ を (mod A における) morphisms とすると, $f = hg$ ならば; g は split-mono であるか または, h は split-epi である。

Th. X, Y, Y_i, Z は 直既約 A-加群 であるとする.

1) (i) $f: X \to Y$ が既約であるなら, morphism $f': X \to Y'$ (in mod A) が存在して, $\binom{f}{f'}: X \to Y \oplus Y'$ は source map である.

(ii) $\begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_s \end{pmatrix}: X \to \bigoplus_{i=1}^{s} Y_i$ が source map なら 各 f_i は 既約である.

2) (i) $g: Y \to Z$ が既約 なら, morphism $g': Y' \to Z$ (in mod A) が存在して, $(g, g'): Y \oplus Y' \to Z$ は sink map である.

(ii) $(g_1, \ldots, g_s): \bigoplus_{i=1}^{s} Y_i \to Z$ が sink map なら, 各 g_i は 既約である.

例 al. s. seq. を計算（つまり、直既約加群を計算）するときの基本になる例を示す。

(1) 直既約加群 P で、projective かつ injective なるものが与えられたとする。例えば、self-injective algebra 上の projectives など。このとき、次の exact sequence は al. s. seq. である：

$$0 \longrightarrow \operatorname{rad} P \xrightarrow{f} P \oplus \frac{\operatorname{rad} P}{\operatorname{soc} P} \xrightarrow{g} P/\operatorname{soc} P \longrightarrow 0,$$

ここで $f(x) = (x, -\bar{x})$, $g(y, \bar{z}) = \bar{y} + \bar{z}$ で $x, y \in \operatorname{rad} P$, $y \in P$ とし、$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ は $P/\operatorname{soc} P$ の元を表わす。（$\operatorname{soc} P$ は、P に含まれる simple submodules すべての和）。

(2) A を <u>Nakayama algebra</u> とする。つまり、すべての直既約 projective module eA は、唯一つの組成列しかもたない。従って、$e(\operatorname{rad}^{n(e)} A) \neq 0$, $e(\operatorname{rad}^{n(e)+1} A) = 0$, とおくと、東屋-中山の補題から

$$eA \supsetneq e(\operatorname{rad} A) \supsetneq \cdots \supsetneq e(\operatorname{rad}^{n(e)} A) \supsetneq 0$$

が唯一つの（eA の）組成列である。さらに、このとき、すべての直既約加群 X は、或る eA の剰余になっている：$0 < {}^{\exists} m(x) \leq n(e)$ s.t. $X \cong eA/e(\operatorname{rad}^{m(x)} A)$,

だから、任意の直既約加群は、或る原始巾等元 e と $0<m\leqq n(e)$ なる整数 m によって完全に決まる。さて、Nakayama algebra A において、al.s.seq. は次の形で与えられる:

$$0 \to er/er^{m} \xrightarrow{f} eA/er^{m} \oplus er/er^{m-1} \xrightarrow{g} eA/er^{m-1} \to 0$$

但し、$r=\mathrm{rad}\,A$ とし、$0<m\leqq n(e)$ とする。また、f, g は (1) におけるように、自然に定義しておく。

(1.2) Auslander-Reiten quiver

al.s.seq. が直既約加群の間の既約写像によって完全に決定されていることを (1.1) でみた。さらに、これ等の写像は左右に無関係な性質である。このことから、al.s.seq. を exact sequence として表わさねばならない理由はあまりない。つまり、どの直既約加群の間に既約写像が存在するのかということが分かれば、直既約加群の間の相互の関係について、かなりの情報が得られるだろう (もちろん、exact sequence としての関係は重要なのだが、ここではこれには触れない)。そこで、次のような

有向グラフを考える；

<u>Def.</u> $\Gamma(A)=(\Gamma_v,\Gamma_a)$ は、次のように定義される有向グラフを表わす：Γ_v は直既約加群の同型類全体である（加群 X の同型類を $[X]$ で表わす）。$[X]$, $[Y]\in\Gamma_v$ に対し、source map $X\longrightarrow Y^{(s)}\oplus Y'$ $(s\geq 1)$ がなたするとき、$[X]$ から $[Y]$ へ s 本の矢（arrow）を引く(1,2)。（K が代数的閉体であることから、$X^{(t)}\oplus X'\longrightarrow Y$ $(t\geq 1)$ を sink map とすると、$s=t$ が成立する）ここで、$Y^{(s)}$ は、Y を s 個直和したものを表わし Y' は Y（と同型な部分加群）を直和因子にもたないものとする。

<u>注意</u> K が代数的閉体でないときは、必ずしも $s=t$ は成立しない。この場合、矢の数は一本だけひくものとし、数の組 (s,t) をその矢に対応させておけばよい。これを $[X]\xrightarrow{(s,t)}[Y]$ と表わし、とくに、$s=t=1$ のとき、単に $[X]\longrightarrow[Y]$ と略記するのが普通である。これを valued Auslander-Reiten quiver という。

$\Gamma(A)=(\Gamma_v,\Gamma_a)$ を <u>Auslander-Reiten quiver</u> とよぶ（以下、AR-quiver と略す）。

<u>Roiter's Theorem</u> (1968; Brauer-Thrall 1st conjecture): 直既約加群 ($\in \mathrm{mod}\, A$) の (K-vector space) 次元が有界なら、A は有限表現型 (representation-finite) である.

ここで: A が<u>有限表現型</u>であるとは、直既約加群の同型類が有限個しかないことをいう. $\Gamma(A)$ が有限グラフであるということと同じである (Brauer-Thrall conjecture における Brauer と Thrall の係わりについては、Ringel の解説 (ICRA II) を参照).

Roiter の定理を、グラフの言葉で言い換えた次の定理 (Auslander) は、与えられた直既約加群のリストが完全であるかどうかを (有限表現型の場合に) 判定するのに極めて有効である。$\Gamma(A)$ の連結成分が有界であるとは、その成分に属する直既約加群の次元が有界であることとする.

<u>Th.</u> $\Gamma(A)$ が有界な連結成分 $\mathcal{C}$ をもてば A は有限表現型であり、$\Gamma(A) = \mathcal{C}$ が成り立つ.

(1.3) Auslander-Reiten translation

X, Z を直既約加群とし．$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ を al. s. seq. とする．(1.2) の al. s. seq. の一意性により．X は Z により．Z は X により，それぞれ (同型の違いを除いて) 唯一つきまる，そこで．$X = \tau_A Z$, $Z = \tau_A^{-1} X$ と表わすことにする．或いは．困難のない範囲内で．$\tau = \tau_A$, $\tau^{-1} = \tau_A^{-1}$ と，Aを略す．この τ, τ^{-1} を Auslander-Reiten translation とよぶ． al. s. seq. の重要さは，(1.2) でも述べたように．直既約加群を構成する (Xから Z, Zから X) ことにあるのだから，抽象的に al. s. seq. のなたが言えただけでは．その価値は十分に発揮されない．この節では．この translation の構成法を紹介する． al. s. seq. のなたを導くときに Auslander-Reiten により得られたもので．本来の translation の"定義"そのものである．しかも．現在のところ．この"定義"こそが．恐らく．最も有効な (直既約加群の) 計算法であると思われる．

$X \in \mathrm{mod}\,A$ を，直既約で non-projective とする．

$$(*) \qquad P_1 \xrightarrow{f} P_0 \xrightarrow{g} X \to 0$$

を X の minimal projective presentation とする．
left exact functor $\mathrm{Hom}_A(-, A)$ を $(*)$ に作用すると，
次の exact sequence が得られる：

$$(**) \quad 0 \to \mathrm{Hom}_A(X, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(g,A)} \mathrm{Hom}_A(P_0, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(f,A)} \mathrm{Hom}_A(P_1, A) \to \mathrm{Tr}_A(X) \to 0$$

但し．$\mathrm{Tr}_A(X) \overset{\mathrm{def.}}{:=} \mathrm{Cok}\,\mathrm{Hom}(f, A)$ とおく．さらに，
duality $D = \mathrm{Hom}(\ , K)$ を作用させると．次の exact sequence を得る：

$$\boxed{0 \to D\mathrm{Tr}_A(X) \to D\,\mathrm{Hom}_A(P_1, A) \to D\,\mathrm{Hom}_A(P_0, A) \to D\,\mathrm{Hom}_A(X, A) \to 0}$$

ここで $D\,\mathrm{Hom}_A(P_1, A)$，$D\,\mathrm{Hom}_A(P_0, A)$ が injective であり．上の exact sequence は．$D\mathrm{Tr}_A(X)$ の minimal injective presentation であることを注意しておく．

$\mathrm{Tr}_A = \mathrm{Tr}$ を transpose とよぶ． $\underline{\mathrm{mod}}\,A$ を．
(i) $\mathrm{Obj}\,\underline{\mathrm{mod}}\,A = \mathrm{Obj}\,\mathrm{mod}\,A$，(ii) $X, Y \in \underline{\mathrm{mod}}\,A$ に対し．$\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y) := \mathrm{Hom}_A(X, Y) / \{ f \in \mathrm{Hom}_A(X, Y) \mid \exists P :$ projective s.t. $f : X \to P \to Y \}$ を．X から Y への

morphism set，とする category とすれば，

$Tr : \underline{\mathrm{mod}}A \to \underline{\mathrm{mod}}A^{op}$ は functor になる．

$\overline{\mathrm{mod}}A$ を，dual に，"modulo injectives" によって

定義すると，次の functors の合成はカテゴリー同型を与える：

$$\underline{\mathrm{mod}}A \xrightarrow{Tr} \underline{\mathrm{mod}}A^{op} \xrightarrow{D} \overline{\mathrm{mod}}A$$

$$\overline{\mathrm{mod}}A \xrightarrow{D} \underline{\mathrm{mod}}A^{op} \xrightarrow{Tr} \underline{\mathrm{mod}}A \quad ,$$

Th. non-projective X に対して，

$$DTr(X) = \tau(X) \quad .$$

non-injective Y に対して，

$$TrD(Y) = \tau^{-1}(Y) \, ,$$

このことから，$DTr = \tau$，$TrD = \tau^{-1}$ とみなして，τ，τ^{-1}を

functor と考える．その結果，projective P 及び

injective I に対して，$\tau(P) = 0$，$\tau^{-1}(I) = 0$ ．

次の定理は，$Ext^1(-,-)$ を計算するのに非

常に便利なものである：

Th. 任意の $X, Z \in \mathrm{mod}\,A$ において、

$$\mathrm{Ext}_A^1(Z, X) \cong D\overline{\mathrm{Hom}}(X, \tau Z) \cong D\underline{\mathrm{Hom}}(\tau^{-1}X, Z).$$

例 A を hereditary algebra ($\overset{\mathrm{def.}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{gl.dim}\,A \leq 1$) とする。つまり、どの projective の submodule もまた projective である。このときは、上の定理における公式が $\mathrm{mod}\,A$ において求められる。何故ならば、

$$0 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

を minimal projective presentation とする（A が hereditary より）。これに $\mathrm{Hom}_A(\ , A)$ を作用させると、次の exact sequence を得る：

$$0 \to \mathrm{Hom}(X, A) \to \mathrm{Hom}(P_0, A) \to \mathrm{Hom}(P_1, A) \to \mathrm{Ext}_A^1(X, A) \to 0.$$

故に、$\mathrm{Tr}\,X = \mathrm{Ext}_A^1(X, A)$, 従って、$\tau X = D\mathrm{Ext}_A^1(X, A)$.

つまり、 $\tau = D\mathrm{Ext}_A^1(-, A)$,

同様に、$\tau^{-1} = \mathrm{Ext}_A^1(DA, -)$.

（上の定理を利用してもよい； $X = A$ とおけ、Z を non-projective とすれば、A が hereditary ということから、$\overline{\mathrm{Hom}}(X, \tau Z) = \mathrm{Hom}(X, \tau Z)$ なることがわかる。このことから、$\tau = D\mathrm{Ext}_A^1(-, A)$ を得る）

§2. Representations of Quiver

最初の約束から，A は basic connected algebra で；$\{e_i\}_{i=1}^{n}$ を直交原始巾等元の完全系として固定しておく．$1=\sum_{i=1}^{n} e_i$ なので；K-space として，A を $A=\bigoplus_{i,j} e_iAe_j$ と分解し，さらに，$e_iAe_j \cong \mathrm{Hom}_A(Ae_i, Ae_j)$（対応は $e_iae_j \mapsto (xe_i \mapsto xe_iae_j)$）であることに注意すると，直既約 projectives の集合，或いは，記号的に（対応する添数だけをとり出して）$\{1,2,\cdots,n\}$ を objects にもち，i から j $(1\leq i,j\leq n)$ への morphism set として $\mathrm{Hom}(i,j):=e_iAe_j$ を考えれば；一つの category $Q(A)$ が得られます。この category $Q(A)$ は，

(1) 互いに非同型な有限個の objects をもち，

(2) 2つの objects i,j の定める Hom-set $\mathrm{Hom}(i,j)$ は有限次元 K-vector space，です。

逆に，(1)(2) をみたす K-category $Q(A)$ (i.e. 各 Hom-set が K-space で；morphism の間の演算は K-linear となる category) に対して

$$A=\bigoplus_{i,j}\mathrm{Hom}(i,j)$$

とおくと，A は identity morphism $e_i: i\to i$ を直交原始巾等元の完全系にもつ basic algebra にな

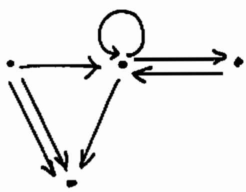
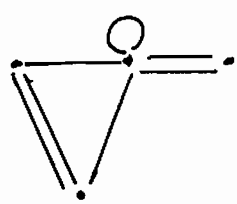
ることは明らかです。つまり、この対応に注意すれば、basic algebraをK-categoryと考えることができるということです。さらに、Kが代数的閉体なので、Aのsemi-simple subalgebra $A_0 = K \times \cdots \times K$ (n個の直積)が存在して、(K-spaceとして) Aの直和分解 $A = A_0 \oplus \mathrm{rad}\,A$ が得られます(Wedderburn-Malcev)。従って、K-space Aにおける K-algebraとしての構造は、rad Aの K-basisの間の関係によってきまることがわかります。

$\mathrm{rad}\,A = \bigoplus_{i,j} e_i(\mathrm{rad}\,A)e_j$ で $\{a_{ij}^{\ell}\}$ を $e_i(\mathrm{rad}\,A)e_j$ の K-basisとおけば、category $\mathcal{Q}(A)$ において、(a_{ij}^{ℓ} に対応する) i から j へのmorphism α_{ij}^{ℓ} が得られ、Aにおける $\{a_{ij}^{\ell} \mid i, j, \ell\}$ の間の関係と全く同じ関係が $\mathcal{Q}(A)$ において考えられます。さらに、各 α_{ij}^{ℓ} を、i から j への矢印 $i \longrightarrow j$ によって表わすと、多元環Aにグラフ(これをquiverとよぶ)を対応させることができますが、このときの矢 α_{ij}^{ℓ} の間には或る関係式が定義されていることを注意しておきます。"Quiver"とその表現という考えは、以上の観点のもとに、従来の多元環とその表現(=加群)をカテゴリー的にとらえるという発想から生じたものです[4]。"quiver"という言葉は、Gabrielによる

命名で、quiverの表現という考えに立って表現論を展開した(1972)最初の人であると思われます。しかし、この考え方は、60年代のはじめの頃にはすでに、直既約加群を計算する道具として、一部の人達の間で使われていました。Maclaneの言葉を借りれば、"For a time it was a sort of secret tool in the arsenal of knowledgeable experts".

(2.1) <u>Quiver</u>

各2点間のarrowsの数が有限な有向グラフを、表現論においては、<u>quiver</u>とよぶ。quiver Qに対し、verticesの集合をQ_v, arrowsの集合をQ_aで表わす: $Q=(Q_v, Q_a)$. 以下では、常に $n := \#(Q_v) < \infty$ であると仮定する。$|Q|$を、Qのunderlying graph(方向を無視したもの)とする。

Q:  , $|Q|$: 

(2.2) Path algebra

$i_k \in Q_v$, $\alpha_k \in Q_a$ に対して

$$i_0 \xrightarrow{\alpha_1} i_1 \xrightarrow{\alpha_2} i_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_s} i_s$$

を長さ s の path とよび $(i_0|\alpha_1\cdots\alpha_s|i_s)$ で表わす。とくに、$e_i := (i\|i)$ $({}^\forall i \in Q_v)$ は長さ 0 の path である。path の間の結合を次のように自然に定義する：

$$(i_0|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s|i_s)(j_0|\beta_1\beta_2\cdots\beta_t|j_t)$$
$$\stackrel{\mathrm{def}}{:=} \begin{cases} (i_0|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s\beta_1\beta_2\cdots\beta_t|j_t) & \text{if } i_s = j_0 \\ 0 & \text{if } i_s \neq j_0 \end{cases}$$

i から j へのすべての paths で張られる k-vector space を $e_i k[Q]e_j$ と表わし、

$$k[Q] := \bigoplus_{i,j \in Q_v} e_i k[Q] e_j$$

とおくと、$k[Q]$ は、$\{e_i\}_{i=1}^n$ を直交原始巾等元の完全系としてもつ basic algebra になる（積は、上で定義した path の間の結合による。また、

$$e_i(i|\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s|j)e_j = (i|\alpha_1\cdots\alpha_s|j)$$

に注意) [5, II §7]. これを、Qで定義された
path algebra とよぶ。 明らかに、Qがconnected
ならK[Q]もconnectedである。

例 1) $\bullet \circlearrowleft x$ のpath algebraは、
変数多項式環 $K[X]$ である (path x の m 個の
結合に X^m を対応させればよい).

2) $x \circlearrowright \bullet \circlearrowleft y$ のpath algebraは、
2変数のfree algebra $K\langle X, Y\rangle$ である。

3) $1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_{m-1}} m$
のpath algebraは、m 次の上半三角行列である

$$K[Q] = \begin{bmatrix} K & K & \cdots & K \\ & K & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & K \end{bmatrix}$$

4) $1 \overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\vdots}} 2$ (s本のarrows)

のpath algebraは、

$$K[Q] = \begin{bmatrix} K & K^{(s)} \\ 0 & K \end{bmatrix}$$

例 1), 2) は, $\dim_K K[Q]=\infty$ である. 一般に,
$\dim_K K[Q]<\infty$ となるのは, Q が oriented cycle
$(i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_s \to i_1)$ ($s \geqq 1$) という形の path)
を含まないとき, そのときに限る.
例 3), 4) は, oriented cycle を含まない例で, 共に
$K[Q]$ は有限次元である.

$K[Q]$ は, $K[Q]^{+1}$ (長さ1の path (= Q_a の元)
で張られる subspace) の tensor algebra
$K[Q]=K[Q]^0 \oplus \bigotimes_{m\geq 1} K[Q]^{+m}$ ($K[Q]^0 = \overbrace{K\times\cdots\times K}^{n}$) で
あるから, $\dim_K K[Q]<\infty$ のとき, $\operatorname{rad} K[Q]=\bigotimes_{m\geq 1} K[Q]^{+}$
で: $\operatorname{rad} K[Q]=\bigotimes_{m\geq 1} K[Q]^{+m}= K[Q]^{+1}\otimes K[Q] \doteqdot$
$\bigoplus^{\#(Q_a)} K[Q]$ (in mod $K[Q]$) であるから, $\operatorname{rad} K[Q]$
は projective であることがわかる. 従って, <u>$K[Q]$
は hereditary algebra である.</u>

(2.2) <u>すべての algebra は relation をもつ quiver</u>

この節のはじめに述べた事柄を公式化しておく.

$$\overline{A}=\prod_{i=1}^{n} e_iAe_i/e_i(\operatorname{rad} A)e_i = \prod_{i=1}^{n} K_i$$

ここで $K_i := e_iAe_i / e_i(\mathrm{rad}\,A)e_i \cong K$ (algebra としての同型) である。さらに、

$$
{}_{\bar{A}}\left(\mathrm{rad}\,A / \mathrm{rad}^2 A \right)_{\bar{A}} \cong \bigoplus_{i,j} {}_{K_i}\left[e_i(\mathrm{rad}\,A)e_j / e_i(\mathrm{rad}^2 A)e_j \right]_{K_j}
$$

と、直和分解しておく。

<u>Def.</u> $Q(A) = (Q_v, Q_a)$ が (ordinary 或いは Gabriel) <u>quiver of</u> A というのは、次の方法で定義される quiver のことである：

(i) $Q_v = \{1, 2, \cdots, n\}$,

(ii) $i, j \in Q_v$ に対し、

$$
m = \dim_K \left(e_i(\mathrm{rad}\,A)e_j / e_i(\mathrm{rad}^2 A)e_j \right)
$$

のとき、i から j への m 本の arrows α_{ij}^{ℓ} $(1 \le \ell \le m)$ をひく。

$e_i(\mathrm{rad}\,A)e_j \ni a_{ij}^{\ell}$ が $e_i(\mathrm{rad}\,A)e_j / e_i(\mathrm{rad}^2 A)e_j$ で一次独立になるようにとり、${}_iM_j = \bigoplus_{\ell=1}^{m} Ka_{ij}^{\ell}$ とおくと、K-space として、直和分解

$$
e_i(\mathrm{rad}\,A)e_j = {}_iM_j \oplus (e_i(\mathrm{rad}^2 A)e_j)
$$

を得る。 $M=\bigoplus_{i,j} {}_iM_j$ とおけば:(k-spaceとしての)
同型対応

$$k[Q(A)]^{+1} \xrightarrow{\sim} M \quad (\alpha_{ij}^{\ell} \mapsto a_{ij}^{\ell})$$

は、自然に algebra epimorphism

$$\varphi : k[Q(A)] \twoheadrightarrow A$$

をひきおこす。($A=(k_1\times\cdots\times k_n)\oplus \mathrm{rad}\,A$ 、また、
東屋-中山の補題から、

$$\mathrm{rad}\,A = M+\mathrm{rad}^2A, \quad \mathrm{rad}^kA=M^k+\mathrm{rad}^{k+1}A \quad (k\geq 1)$$

が成立する。従って、 $A=(k_1\times\cdots\times k_n)\oplus(M+M^2+\cdots)$
を得る)。 $I=\mathrm{Ker}\,\varphi$ とおくと、φ の定義から、
$I\subseteq k[Q]^{+2}$ (=長さ2のpathsで張られる k-subspace)
であり、$k[Q]/I \xrightarrow{\sim} A$ より、($\dim_k A<\infty$ なので)
$k[Q]^{+\rho}\subseteq I$ となる $\rho>0$ が存在する。 I 或いは、
ideal I の generator system のことを、Q の
<u>relation</u> とよぶ。以上のことから、どんな algebra
A も、quiver $Q(A)=Q$ と、

$$k[Q]^{+\rho}\subseteq I \subseteq k[Q]^{+2}$$

をみたす relation I によって、

$$A\cong k[Q]/I$$

と表わされる。 $k[Q]/I$ を $k[Q,I]$ とも書く。

例　1)　$\cdot\circlearrowleft x$　において，relation I を

$I=\langle x^n\rangle$ とする（このときを簡単に，"$x^n=0$" とも書く）と，

$K[Q,I]$ は，$K[X]/X^n$ を表わす．

2)　$1\xrightarrow{\alpha}2\xrightarrow{\beta}3$　において，$I=\langle\alpha\beta\rangle$，

つまり，　"$\alpha\beta=0$"　を考えると，

$$K[Q,I]=\begin{bmatrix}K&K&K\\&K&K\\0&&K\end{bmatrix}\Big/\begin{bmatrix}0&0&K\\&0&\end{bmatrix}$$

(2.3)　Quiver の表現

$Q=(Q_v,Q_a)$ を quiver とし，$n=\#Q_v$ とする．$\{e_i\}_{i=1}^n$ を path algebra $K[Q]$ の直交原始巾等元の完全系とする．　$X\in\mathrm{mod}\,K[Q]$ に対し，$X_i=Xe_i$ とおく．このとき，α_{ij}^l 及び a_{ij}^l は前節と同じものを表わすが，とくに今は $A=K[Q]$ の場合を考えるので，$\alpha_{ij}^l=a_{ij}^l$ と考えることにする（同じ記号を用いる）．

さて，X が $K[Q]$-module であるということは，各 X_i に α_{ij}^l が結合的，加法的に作用することなのだが，結合及び加法性は，写像 $X_i\longrightarrow X_j$: $x_i\mapsto x_i\alpha_{ij}^l$ の性質として常に満足されていることであるから，

結局, K-spaces X_i と, K-linear map

${}_j\varphi_i : X_i \otimes {}_iM_j \longrightarrow X_j$ とが与えられることに他ならない;

$$X = (X_i, {}_j\varphi_i).$$

また, 2つの加群 $X = (X_i, {}_j\varphi_i)$, $X' = (X'_i, {}_j\varphi'_i)$ の間の morphism $f : X \to X'$ とは, $xe_i \in X_i$ に対し, $f(xe_i) = f(x)e_i \in X'_i$ であるから, $f_i = f|X_i$ とおいて,

$$f_i : X_i \longrightarrow X'_i \ , \ \text{K-linear}$$

の組であって, K[Q] の作用と可換になるもののことである;

$$(*) \qquad \begin{array}{ccc} X_i \otimes {}_iM_j & \xrightarrow{{}_j\varphi_i} & X_j \\ {\scriptstyle f_i \otimes 1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_j} \\ X'_i \otimes {}_iM_j & \xrightarrow[{}_j\varphi'_i]{} & X'_j \end{array}$$

そこで quiver の表現というのは, 対応する algebra 上の加群 X から得られる組 $(X_i, {}_j\varphi_i)$ で morphism は, 上の図(*)をみたすような linear maps f_i の組 $\{f_i\}$ と約束するのである. こうしてみると, 次の category 同型は(また, 実際の対応も)定義から明らかである:

$$\boxed{\mathrm{mod}\ Q \ \approx\ \mathrm{mod}\ K[Q]}$$

さらに、上のことから、relation I をもつときの対応のさせ方も自然に考えることができて、このときの表現の成す（mod Q の）full subcategory を $\mathrm{mod}(Q, I)$ と表わすと、次の category 同型が、先の同型より、ひきおこされていることがわかる；

$$\boxed{\mathrm{mod}(Q, I) \approx \mathrm{mod}\, k[Q, I]}$$

注意. 以上の対応においては、$X = \sum_i X_i$ が有限次元であるかどうかは全く必要なかったことを注意しておく。とくに、$\sum_i \dim X_i < \infty$ となる表現を有限次元と呼ぶことは、上で述べた事からもう明らかなことだろう。以下では、有限次元の表現のみを考える。

これ等の同型対応によって、quiver の表現についての言葉や性質は、対応する path algebra 上の加群のそれによって定義される。たとえば、表現 (X_i, φ_α) が直既約とは、$k[Q]$-加群 $X = \sum X_i$ が直既約であることであり、Q が有限表現型とは、$k[Q]$ が有限表現型である、....

例　quiver $1 \to 2 \to 3$ において、表現 $K \to 0 \to 0$ は直既約であるが、$K \xrightarrow{1} K \xrightarrow{0} K$ は直既約ではない：

$$(K \xrightarrow{1} K \xrightarrow{0} K) = (K \xrightarrow{1} K \to 0) \oplus (0 \to 0 \xrightarrow{0} K)$$

最後に、$\mathrm{rad}^2 A = 0$ となる algebra の場合には、表現型が有限かどうかを判定する、極めて簡単な方法があるので、それを紹介する（Gabriel, Kurugliak）

<u>Th.</u>　A は $\mathrm{rad}^2 A = 0$ の多元環とする。このとき、A が有限表現型であるための必要十分条件は、A の separated diagram が Dynkin diagrams の disjoint union となることである。
（Dynkin diagram については、(3.3) を参照して下さい）。

ここで、多元環 A（$\mathrm{rad}^2 A = 0$ とする）の separated diagram とは、点の集合が

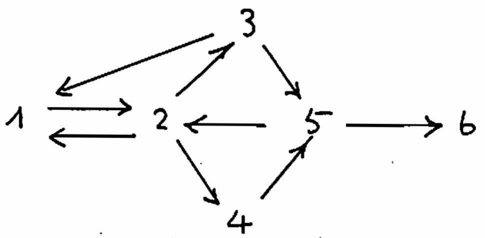
$$\{1, 2, \cdots, n\} \sqcup \{1', 2', \cdots, n'\}$$

であり，$i \overset{t}{=\!=\!=} j'$ (t本のedges) があるのは，

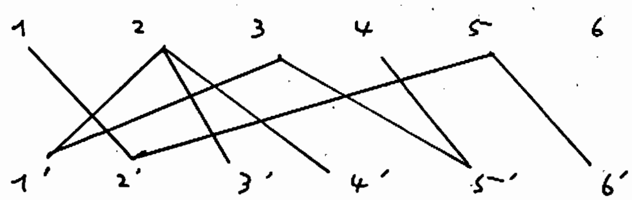
$$\dim_k e_i(\mathrm{rad}A)e_j = t$$

のときであると定義して得られるグラフのことである。

例. 4)



このquiverで，relationは"可能な2つの結合はすべてzero"とする。このとき，separated diagramは，定義に従って表わすと，

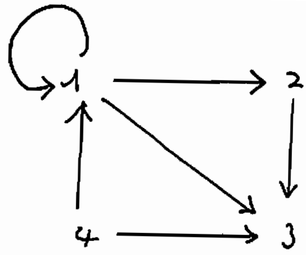


これは，Dynkin diagram

$$D_7\ ,\quad A_4,\quad A_1$$

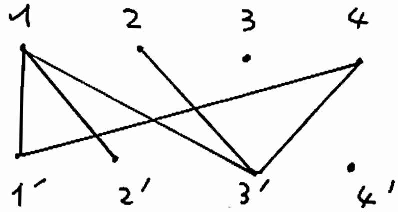
のdisjoint unionになっているから，上のquiverとrelationで定義されるalgebraは有限表現型である。

2)

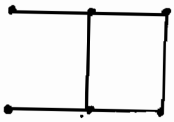


relation "可能な2つの結合はすべてzero".

このときの separated diagram は.



従って. このdiagramは. 次の3つのdisjoint union になる;

 , A_1 , A_1 .

このうち. はじめの図はDynkinではないから. 定理より. この例のalgebraは有限表現型ではない。

§3. Tensor algebraの表現

前節において、oriented cycleのないquiverのpath algebraは、有限次元のhereditary algebraであることを注意しました。path algebraは定義からわかるように、長さ1のpath(=arrow)によって張られるvector spaceのtensor algebraになるからです。この節では、このhereditary tensor algebraの表現とグラフの関係について述べます。グラフの方向の変換が重要な手段になりますので、とくに方向を強調して(quiverというかわりに)もとの用語である"有向グラフ"という言葉を使うことにし、Γをgraphとし、その方向付けをΩなどで表わし、この有向グラフを(Γ, Ω)と表わすことにします。但し、前から注意しているように、有限次元の多元環を扱うのでconnectedでoriented cycleは含まないと仮定します。

tensor algebraとして表わせるhereditary algebraの例として、「有限表現型」のものがかならずtensor algebraになることが知られています。

(3.1) <u>admissible order</u>

以下 Γ の点の数は $n\ (<\infty)$ であるとする.

vertex i が <u>sink</u> (<u>source</u>) であるとは, $i \to j$ ($j \to i$) となる arrow が存在しないもののことである.

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & 3 \arrow[l] \arrow[dl] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & 4 \\ 2 & & \end{tikzcd}$$

においては, 2, 4 が sink であり, 3 が source である.

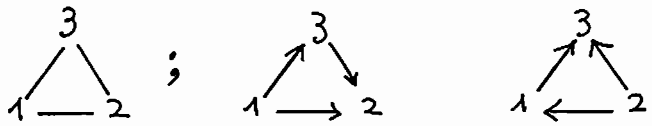
$i \in \Gamma$ に対し, i を端点にもつ (Ω での) すべての arrows の方向を変え, 他はもとのままにしておくことにより得られる有向グラフを $(\Gamma, s_i\Omega)$ で表わす。 とくに, Γ の点の列 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ は, 次の2つをみたすとき, <u>admissible</u> <u>order</u> とよばれる:

1) k_1 は sink in Ω,

2) k_t は sink in $s_{k_{t-1}} \cdots s_{k_2} s_{k_1} \Omega$.

このとき, 1′) k_n は Ω で source, 2′) k_t は $s_{k_{t+1}} \cdots s_{k_n} \Omega$ で source, となることに注意しよう.

例. Γ (Γ, Ω) $(\Gamma, s_1\Omega)$



$(\Gamma, s_3 s_2 \Omega)$ $(\Gamma, s_1 s_3 s_2 \Omega)$

従って 2, 3, 1 は admissible order である。上の例で $s_1 s_3 s_2 \Omega = \Omega$ であることに注意。一般に、有向グラフ (Γ, Ω) が oriented cycle を含まないと仮定しているので、いつも admissible order が存在し、$\Omega = s_{k_n} \cdots s_{k_2} s_{k_1} \Omega$ が成立する。逆に異なる点の列 $k_1, k_2, \dots, k_n$ が admissible order になり、$\Omega = s_{k_n} \cdots s_{k_2} s_{k_1} \Omega$ となるような方向付け Ω を決めることができる。

(3.2) Coxeter functor

(2.3)におけるように、mod $k[\Gamma, \Omega]$ を単に mod(Γ, Ω) と表わしても困難は生じない。

Bernstein-Gelfand-Ponomarev [4.6] による Coxeter functor の定義を述べる.

(1) $k \in \Gamma$ が <u>sink</u> の場合;

$X = (X_i, {}_j\varphi_i) \in \mathrm{mod}(\Gamma, \Omega)$ に対して.

$C_k^+(X) = (C_k^+(X)_i, {}_j\psi_i) \in \mathrm{mod}(\Gamma, s_k\Omega)$ を次のように定義する:

(oi) $\forall i \neq k$ に対して.

$$C_k^+(X)_i = X_i, \quad {}_i\psi_j = {}_i\varphi_j$$

(oii)

$$0 \longrightarrow C_k^+(X)_k \xrightarrow{({}_i\psi_k)_i} \bigoplus_{i \to k} X_i \xrightarrow{({}_k\varphi_i)_i} X_k$$

が exact になるように $C_k^+(X)_k$, ${}_i\psi_k$ をきめる. つまり

$$C_k^+(X)_k := \mathrm{Ker}\,({}_k\varphi_i)_i ,$$

で, $({}_i\psi_k)_i$ は自然な injection を表わす.

morphism $(f_i): (X_i, {}_j\varphi_i) \to (X_i', {}_j\varphi_i')$ に対して.

(mi) $\forall i \neq k$ に対して.

$$C_k^+(f)_i = f_i ,$$

(mii) 下の図を可換にするような morphism

$$C_k^+(X)_k \longrightarrow C_k^+(X')_k$$

が unique に決まる. これを $C_k^+(f)_k$ と表わす;

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_k^+(X)_k \arrow[r, "({}_i\psi_k)_i"] \arrow[d, "C_k^+(f)_k"'] & \bigoplus_{i\to k} X_i \arrow[r, "({}_k\varphi_i)_i"] \arrow[d, "\oplus f_i"] & X_k \arrow[d, "f_k"] \\
0 \arrow[r] & C_k^+(X')_k \arrow[r, "({}_i\psi'_k)_i"'] & \bigoplus_{i\to k} X'_i \arrow[r, "({}_k\varphi'_i)"'] & X'_k
\end{tikzcd}
$$

以上の $(\theta i)(\theta ii)$ 及び $(m i)$, $(m ii)$ から、C_k^+ が $\mathrm{mod}(\Gamma,\Omega)$ から $\mathrm{mod}(\Gamma, s_k\Omega)$ への left exact functor を定義することがわかる;

$$C_k^+ : \mathrm{mod}(\Gamma,\Omega) \to \mathrm{mod}(\Gamma,\Omega)$$

(2) $k \in \Gamma$ が <u>source</u> の場合

(M)を全く dual にして right exact functor

$$C_k^- : \mathrm{mod}(\Gamma,\Omega) \to \mathrm{mod}(\Gamma,\Omega)$$

が次のように定義される(重要なので改めて書いておく):

$X = (X_i, {}_j\varphi_i) \in \mathrm{mod}(\Gamma,\Omega)$ に対し、

$C_k^-(X) = (C_k^-(X)_i, {}_j\psi_i)$ とおく。ここで、$C_k^-(X)_i$, ${}_j\psi_i$ は次のように定める;

$(\theta i')$ $\forall i \neq k$ において、

$$C_k^-(X)_i = X_i, \quad {}_j\psi_i = {}_j\varphi_i .$$

(oii′)

$$X_k \xrightarrow{({}_i\varphi_k)_i} \bigoplus_{k\to i} X_i \xrightarrow{({}_k\psi_i)_i} C_k^-(X)_k \longrightarrow 0$$

が exact sequence になるように，つまり，

$$C_k^-(X)_k = \mathrm{Cok}\,({}_i\varphi_k)_i$$

と定義し，$({}_k\psi_i)_i$ は自然な surjection とする．

(mi′)(mii′) morphism の対応についても同様に Cokernel をとる操作によって定義する；

(mi′) $C_k^-(f)_i = f_i$ for $\forall i \neq k$,

(mii′) $C_k^-(f)_k$ は Cokernel による．

例．
$$\begin{tikzcd} 2 \arrow[dr] & & 4 \arrow[dl] \\ & 1 & \\ & 3 \arrow[u] & \end{tikzcd}$$
の表現 $X =$
$$\begin{tikzcd} X_2 \arrow[dr, "{}_1\varphi_2"'] & & X_4 \arrow[dl, "{}_1\varphi_4"] \\ & X_1 & \\ & X_3 \arrow[u, "{}_1\varphi_3"'] & \end{tikzcd}$$

(Γ, Ω)

において，$0 \to \mathrm{Ker}\,\varphi \xrightarrow{\psi = \begin{pmatrix} {}_2\psi_1 \\ {}_3\psi_1 \\ {}_4\psi_1 \end{pmatrix}} X_2 \oplus X_3 \oplus X_4 \xrightarrow{\varphi = ({}_1\varphi_2,\ {}_1\varphi_3,\ {}_1\varphi_4)} X_1$

とおくと，

$(\Gamma, s_1\Omega)$:
$$\begin{tikzcd} 2 & & 4 \\ & 1 \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[d] & \\ & 3 & \end{tikzcd}$$
における表現 C_1^+X は．

$$\begin{tikzcd}
X_2 & & X_4 \\
& \operatorname{Ker}\varphi \arrow[ul, "{}_2\varphi_1"'] \arrow[ur, "{}_4\varphi_1"] \arrow[d, "{}_3\varphi_1"] & \\
& X_3 &
\end{tikzcd}$$

admissible sequence $k_1, \dots, k_n$ において.

$$C^+ = C^+_{k_n} \cdots C^+_{k_1} : \operatorname{mod}(\Gamma, \Omega) \to \operatorname{mod}(\Gamma, \Omega)$$

$$C^- = C^-_{k_1} \cdots C^-_{k_n} : \operatorname{mod}(\Gamma, \Omega) \to \operatorname{mod}(\Gamma, \Omega)$$

を <u>Coxeter functor</u> という.

(3.3) <u>Coxeter functor と translation</u>

k は (Γ, Ω) で sink であるとし. $X = (X_i, {}_j\varphi_i)$ を直既約表現とする. 定義から. 次の可換な図式が得られる.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_k^+(X)_k \arrow[r] \arrow[d, equal] & \displaystyle\bigoplus_{\substack{k \to i \\ \text{in } s_k\Omega}} C_k^+(X)_i \arrow[r] \arrow[d, equal] & C_k^-(C_k^+(X))_k \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists \eta"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_k^+(X)_k \arrow[r] & \displaystyle\bigoplus_{\substack{i \to k \\ \text{in } \Omega}} X_i \arrow[r] & X_k &
\end{tikzcd}$$

ここで，横の２列は共に exact で，$X_i = C_k^+(X)_i$ $(\forall i \neq k)$ である。$\eta : C_k^-(C_k^+(X))_k \to X_k$ は injection になるから，vector space としての分解

$$X_k = C_k^-(C_k^+(X))_k \oplus K^{(m)}$$

が得られる（m は或る整数で，$K^{(m)}$ は m 次元 K-vector space）。$\forall i \neq k$ に対し，$C_k^-(C_k^+(X))_i = X_i$ であるから，

$$r(k)_i = \begin{cases} K & : i = k \\ 0 & : i \neq k \end{cases}$$

とおくと，$\mathrm{mod}(\Gamma, \Omega)$ における X の直和分解

$$X = C_k^-(C_k^+(X)) \oplus r(k)^{(m)}$$

を得る。また，定義からすぐわかるように，$r(k)$ は simple な表現であり，$C_k^+(r(k)) = 0$ であるから，$X \not\cong r(k)$ なら $X \cong C_k^- C_k^+(X)$ が成立する。とくに，$C_k^+(X) \cong C_k^+ C_k^- C_k^+(X)$ でもある。従って，次の２つの morphisms は同型になる：

$$\mathrm{End}(X) \xrightarrow{C_k^+} \mathrm{End}(C_k^+ X) \xrightarrow{C_k^-} \mathrm{End}(C_k^- C_k^+(X))$$

$$\mathrm{End}(C_k^+ X) \xrightarrow{C_k^-} \mathrm{End}(C_k^- C_k^+ X) \xrightarrow{C_k^+} \mathrm{End}(C_k^- C_k^+ C_k^- X)\,.$$

だから. $\mathrm{End}(X)\to\mathrm{End}(C_k^+X)$ は, はじめの同型から, injective であり, あとの同型から surjective になる.

$$\therefore\ \mathrm{End}(X)\cong\mathrm{End}(C_k^+X).$$

X を直既約と仮定しているので, $\mathrm{End}(X)$ は local, 従って, C_k^+X は直既約であることがわかった。とくに, $k_1,\dots,k_n$ が admissible order のときは, $X\not\cong r(k_1)$ なる直既約表現なら, $C^+(X)$ も直既約である.

X も $C^+(X)$ も同じ category $\mathrm{mod}(\Gamma,\Omega)$ の objects であり, $C^+(X)$ が直既約をつくる functor であることがわかると、Auslander-Reiten translation との関係について知りたくなるが, 実際, 次のことが成立する (Brenner-Butler, Gabriel).

functor $T:\mathrm{mod}(\Gamma,\Omega)\to\mathrm{mod}(\Gamma,\Omega)$ を, $T((X_i,{}_j\varphi_i:X_i\to X_j))=(X_i,-{}_j\varphi_i:X_i\to X_j)$ によって定義すると.

<u>Th.</u> 有向グラフ (Γ,Ω) に対して

$$\tau_{K[\Gamma,\Omega]}\cong C^+T\cong TC^+,$$

$$\tau_{K[\Gamma,\Omega]}^{-1}\cong C^-T\cong TC^-.$$

この定理から、たとえば Γ が tree の場合や、$\bullet \rightrightarrows \bullet$ の場合などは、$\tau \cong C^{+}$, $\tau^{-1} \cong C^{-}$ が成立する。

(3.3) <u>Quadratic form</u>

Γ を connected graph とし、

$$n = \# \Gamma_v$$

$$m_{ij} = \{ i \text{ と } j \text{ を結ぶ edges の数} \}$$

とおく。ただし、しばらくは orientation を考えないことにする（だから、circle を含んでいても構わない）。
2次形式 $q_\Gamma = q : \mathbb{Q}^n \to \mathbb{Q}$ を次のように定義する:

$$\boxed{q(x) = \sum_i x_i^2 - \sum_{i-j} m_{ij} x_i x_j}$$

ここで $x = (x_i) \in \mathbb{Q}^n$ とする。B を q の極形式とする:

$$B(x, y) = \sum_i x_i y_i - \frac{1}{2} \sum_{i-j} m_{ij} x_i x_j$$

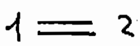
$$= x C\, {}^t y$$

ここで、C は symmetric matrix で、Γ が loop ○ を含まないときは、C は Cartan matrix とよば

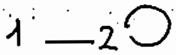
れている.(スカラー倍の違いは無視する).

例.

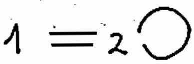
のとき $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$



のとき $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$



のとき $C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$



のとき $C = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$

$$\sigma_i(x) = x - 2B(x, \underline{i})\underline{i}$$

とおく. 但し, $\underline{i} = (0, \cdots, 0, \underset{i}{1}, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{Q}^n$

とする. σ_i を行列で表わせば次のようになる.

$$\sigma_i(x) = (x_1 \cdots\cdots x_n)\begin{pmatrix} 1 & & & m_{1k} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & m_{k-1\,k} & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & m_{k+1\,k} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & m_{nk} & & & 1 \end{pmatrix}$$

定義から、 $\sigma_i^2 = 1$,

$$B(\sigma_i x, \sigma_i y) = B(x, y)$$

$(\forall x, y \in \mathbb{Q}^n)$ がすぐにわかる。

以下、再び (Γ, Ω) は oriented cycle を含まない有向グラフと仮定する。$k \in \Gamma$ を sink とする。

直既約表現 $X = (X_i, {}_\alpha\varphi_i)$ が $r(k)$ に同型でないとき、$C_k^+(X)$ がまた直既約になることを (3.2) で示したが、表現の "dimension vector" $(\in \mathbb{Q}^n)$ がどのように変化するのかを次に調べてみよう。まず、表現 X の <u>dimension vector</u> ($\underline{\dim} X$ とかく) とは、vector $(\dim_K X_i)_i \in \mathbb{Q}^n$ のことをいう。定義から、$X \not\cong r(k)$, なる直既約表現に対して、

$$\dim C_k^+(X)_k = -\dim X_k + \sum_{i \to k} \dim X_i \ ,$$

$$\dim C_k^+(X)_i = \dim X \qquad (\forall i \neq k)$$

従って、 $\underline{\dim}\, C_k^+(X) = \underline{\dim} X - 2B(\underline{\dim} X, \underline{k})\underline{k}$

$$= \sigma_k(\underline{\dim} X)$$

となることがわかる。また、このことからさらに、

$$\underline{\dim}\, C^+(X) = c^+(\underline{\dim}\, X).$$

同様にして $\underline{\dim}\, C^-(X) = c^-(\underline{\dim}\, X)$ を得る。

ここで $c^+ := \sigma_{k_n}\cdots\sigma_{k_1}$, $c^- := \sigma_{k_1}\cdots\sigma_{k_n}$ とおく。

c^+, c^- を <u>Coxeter transformation</u> という。

<u>Prop.</u> 1) Γ は Dynkin diagram である

$\Longleftrightarrow$ q_Γ は positive definite である (i.e.

$q_\Gamma(x) > 0$ for $0 \neq {}^\forall x \in \mathbb{Q}^n$).

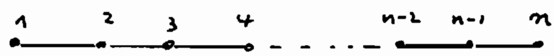
2) Γ は Euclidean diagram である

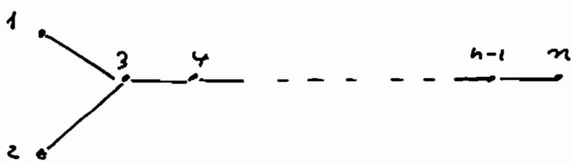
$\Longleftrightarrow$ q_Γ は positive semi-definite である (i.e.

${}^\forall x \in \mathbb{Q}^n$ において $q_\Gamma(x) \geqq 0$ であるが $q_\Gamma(y) > 0$ となる $y \in \mathbb{Q}^n$ が少くとも一つ存在する).

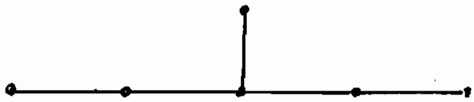
ここで Dynkin, Euclidean diagram とは次のような形のグラフのことである:

<u>Dynkin</u>

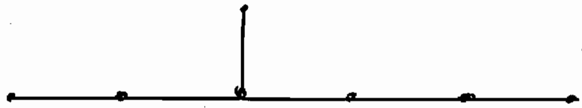
A_n :  $(n \geqq 1)$

D_n :  $(n \geqq 4)$

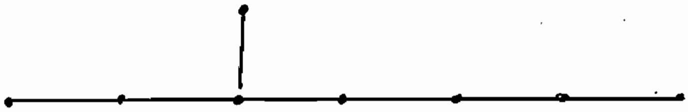
E_6 :



E_7 :

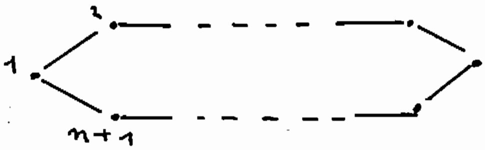


E_8 :



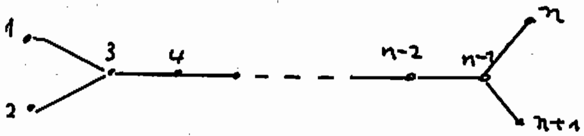
Euclidean

$\tilde{A}_n$:



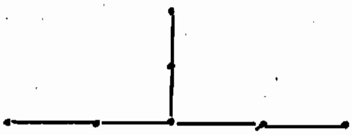
$(n \geq 1)$

$\tilde{D}_n$:



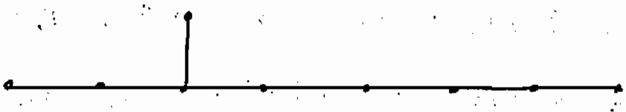
$(n \geq 4)$

$\tilde{E}_6$:



$\tilde{E}_7$:

$\tilde{E}_8$:



(3.4) <u>Root of Γ</u>

reflection σ_i $(i \in \Gamma)$ で生成される linear transformation of $\mathbb{Q}^n$ の成す群を W で表わす. (これを、グラフ Γ の Weyl 群という).

$x = (x_i) \in \mathbb{Q}^n$ が $x = wk$ $(\exists w \in W, k \in \Gamma)$ という vector であるとき. x を Γ の (Weyl) <u>root</u> という. $x_i \geqq 0$ $(\forall i)$ のとき x を <u>positive</u> という.
$\forall i \in \Gamma$, $x \in \mathbb{Q}^n$ に対し. $q(\sigma_i x) = q(x)$ 及び $q(i) = 1$ だから. x が root なら $q(x) = 1$ をみたす. 逆に. q が positive definite (従って. (3.3) から Γ は Dynkin) のとき、逆も成立する. つまり $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid q(x) = 1\}$ が Γ の roots 全体となる.
さらに、q が positive definite なら W は有限群になり, その位数 h は c の位数でもある. $X \in \mathrm{mod}(\Gamma, \Omega)$ を直既約とすると、

$$y := (1 + c + \cdots + c^{h-1})(\underline{\dim}\, X)$$

は $cy = y$ をみたす. 一方. q が positive (i.e. $q(x) \geqq 0$ for $\forall x \in \mathbb{Q}^n$) なら、$cx = x$ なることと $q(x) = 0$ とは同値になる. 従って. $q(y) = 0$ を得. q が (今の場合の仮定から) positive definite な

ので、これから、$y=0$ でなければならない。つまり。

$$\exists t>0 \quad \text{s.t.} \quad c^t(\underline{\dim} X)=0 \text{。}$$

故に、或る $p\leq t$ が存在して。

$$\sigma_{k_{s-1}}\cdots\sigma_{k_1} c^p(\underline{\dim} X)=\underline{k_s}$$

が成立する。従って。

$$\underline{\dim} X = c^{-p}(\sigma_{k_1}\cdots\sigma_{k_{s-1}}\underline{k_s}), \quad p\geq 0$$

を得る。一方、$\underline{\dim}\, r(k_s)=\underline{k_s}$ なので明らかに。

$$\underline{\dim} X = \underline{\dim}\, C^{-p}(C_{k_1}^{-}\cdots C_{k_{s-1}}^{-} r(k_s)).$$

ところが $\underline{\dim} \quad = \underline{k_s}$ なる表現 Y は、$r(k_s)$ に限るので、

$$X \cong C^{-p}(C_{k_1}^{-}\cdots C_{k_{s-1}}^{-} r(k_s))$$

が成り立つことがわかる。以上のことから、

$$P_{k_s}=C_{k_1}^{-}\cdots C_{k_{s-1}}^{-}(r(k_s))$$

とおくと、q が positive definite のときは、どんな直既約表現も或る $C^{-p}P_{k_s}$ に同型になる。同様にして、

$$I_{k_s}=C_{k_n}^{+}\cdots C_{k_{s+1}}^{+}(r(k_s))$$

とおくと、$X\cong C^{+q}(I_{k_s}) \quad (\exists q\geq 0,\ 1\leq s\leq n)$ となる。

これ等のことから、W が有限群であることに注意すると、(Γ, Ω) が有限表現型であることがわかる。以上のことをまとめると、

<u>Th.</u> 有向グラフ (Γ, Ω) において、Γ が Dynkin diagram であることと、(Γ, Ω) が有限表現型であることとは同値である。さらに、このとき、

$$\underline{\dim} : \mathrm{mod}(\Gamma, \Omega) \longrightarrow \mathbb{Q}^n$$

は、直既約表現と q_Γ の positive roots との間の 1:1 対応をひきおこす。

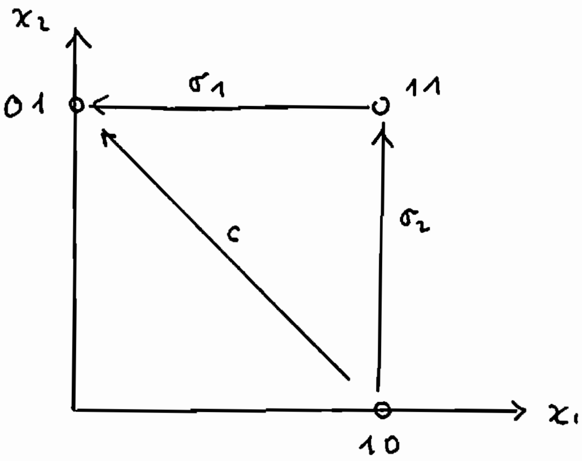
この定理にもう少し説明を加えると、Γ が Dynkin diagram のとき、(Γ, Ω) の直既約表現は dimension vector によって確定し ($\underline{\dim}\, X = \underline{\dim}\, Y \Leftrightarrow X \cong Y$)、さらに、dimension vector として得られる positive vector は、方程式 $q(x) = 1$ の根で positive なものに他ならない、ということである。

例 1)　A_2 : $1 \longrightarrow 2$　のとき.

$$q(x) = (x_1 - \tfrac{1}{2}x_2)^2 + \tfrac{3}{4}x_2^2 .$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} : \text{Coxeter transformation}$$

直既約表現は、$q(x)=1$ をみたす positive vector : $[1\ 0]$, $[1\ 1]$, $[0\ 1]$



対応する直既約表現は、

$$K \to 0 , \quad K \xrightarrow{1} K , \quad 0 \to K$$

であり、AR-quiver は (dimension type で表示)

$$\begin{tikzcd} & {[1\ 1]} \arrow[dr] & \\ {[0\ 1]} \arrow[ur] & & {[1\ 0]} \arrow[ll, dashed, no head] \end{tikzcd}$$

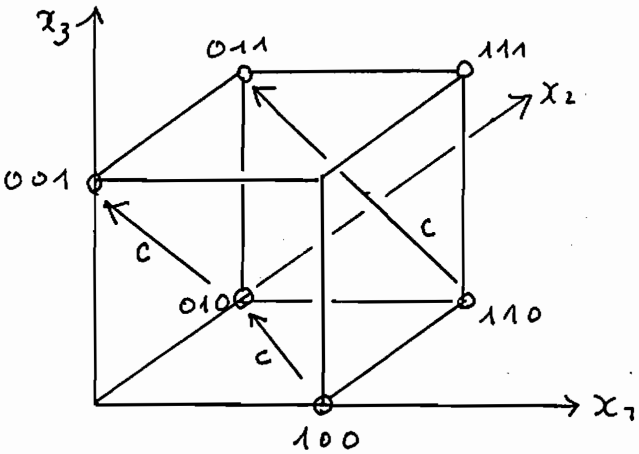
(ここで •— — —• は translation • = τ(•) を示す)

2) A_3 : $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$

$$q(x) = \left(x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}x_2 - x_3\right)^2 + \frac{1}{2}x_2^2$$

$$c = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

○ 印で positive roots を表わす;



AR. quiver:

$$\begin{tikzcd}
 & & {[111]} \arrow[dr] & & \\
 & {[011]} \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & {[110]} \arrow[dr] & \\
{[001]} \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] & & {[010]} \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] & & {[100]}
\end{tikzcd}$$

(3.5) Projective modules

(3.4)で定義した直既約表現 $\{P_k\}$、及び $\{I_k\}$ は、それぞれ、直既約 projectives，直既約 injectives，の complete list である。

(3.6) Euclidean case

以下、Γ は Euclidean であるとする。

$\mathcal{P}$ を、$\{C^{-m}(P_k) \mid m \geq 0, k \in \Gamma\}$ から成る $\mathrm{mod}(\Gamma, \Omega)$ の full subcategory とし、$\mathcal{I}$ は $\{C^{+m}(P_k) \mid m \geq 0, k \in \Gamma\}$ から成る full subcategory とする。(Γ, Ω) が有限表現型でないことから(有限型は Dynkin!)，$\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \phi$ であることがわかる。そこで問題になるのは，$\mathrm{Reg}(\Gamma, \Omega) := \mathrm{mod}(\Gamma, \Omega) \setminus (\mathcal{P} \sqcup \mathcal{I})$ に属する直既約表現がどうなっているのか、ということである。

$\mathcal{P}$ 及び $\mathcal{I}$ に属する直既約表現は，(3.4)の議論から，dimension vector によって確定してしまう。このような性質をもつ表現を discrete といい、そうじゃないものを continuous とよぶ。$\mathcal{P}$，$\mathcal{I}$ 以外の表現は、多性にいろいろ"パラメーター"によって決定される (discrete series，continuous series)．$\mathrm{Reg}(\Gamma, \Omega)$ に属する表現を

regular という.

Th. X を直既約表現 ($\in \operatorname{mod}(\Gamma, \Omega)$) とすると.

1) $X \in \operatorname{Reg}(\Gamma, \Omega) \iff \tau^{+p} X = X$ for some $p > 0$.

2) $\operatorname{Reg}(\Gamma, \Omega) = \coprod_{p \in \mathbb{P}^1 K} \operatorname{Reg}_p$; full subcategory

Reg_p ($p \in \mathbb{P}^1 K$) の直積で. Reg_p は次の性質をもつ;

(i) Reg_p は projective objects と injective objects をもたないで $\operatorname{gl.dim} \operatorname{Reg}_p \leq 1$.

(ii) $p \neq 0, 1, \infty$ のとき. Reg_p は. uniserial category (simple object が唯一つの Nakayama category),

(iii) Reg_0, Reg_1, $\operatorname{Reg}_\infty$ は Nakayama category (すべての直既約表現は唯一つの組成列をもつ).

頁数の制限のために参考文献は各節につき1〜2個にとどめたことをお詫びいたします。詳しい文献については、"Proceedings of ICRA"の報告集(Springer L. N.)に載っていますのでそちらを参照願います。

§1については.

[1] Auslander, M.: Comm. in Alg. 1 1974, 269-310.

[2] Auslander, M & Reiten, I.: Comm. in Alg. 3, 1975, 239-294.

§2については.

[3] Gabriel, P: Indecomposable representations II, Symposia Math. Inst. Naz. Alta Math. 11, 81-104.

[4] 〃 〃 : Des catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. France 90, 1962, 323-448.

[5] MacLane, S: Categories for ..., Springer GTM. 5.

§3については.

[6] Dlab. V. & Ringel. C. M.: Mem. Amer. Math. 173 (1976).

多元環の表現におけるsingularity
及びCohen-Macaulay加群　I

－可換環論からの準備と動機－

吉野雄二（名大・理）

本稿の目的は、isolated singularity上の表現論に関する最近のAuslander の結果を理解するに必要と思われる準備と動機を与えることである。先ず前半では可換環論からの準備として、Cohen-Macaulay module,canonical module,Gorenstein ring,isolated singularity 等について、その言葉の解説を試みる。そして後半では、可換環論からの最近の結果等をまとめて報告したいと思う。なお、Auslander の結果の詳しい紹介は後の佐藤英雄氏の報告にゆだねることとするので、そちらを参照してほしい。

1：可換環論からの準備

以下では環とは断わらない限り全て可換環で、1を持つものとする。また加群は全て有限生成とする。

我々が以降で話題にしたい事柄は全て局所的性質であることが分かっているので、はじめから局所環で話をすすめることにしよう。そこで、以下では、Rは常に局所環で、mをその極大イデアル、kを剰余体とする。我々は実はある種の直既約加

群に関心がある。その為に、Ｒはｍ－進位相で完備であるとしておく。完備性を仮定する理由は大まかに言って次のことによる。例えば$R=(k[x,y]/(x^2+y^2+y^3))_{(x,y)}$なる完備でない局所環を考える。$x^2+y^2+y^3$は既約な多項式なのでＲは整域である。そこで、ＳをＲの商体における整閉包とすると、Ｓは直既約なＲ加群であることは直ちに分かる。ところが、$\mathrm{End}_R(S)=S$ は局所環ではない。実際、ＳはＲの２本のbranchに対応する２つの極大イデアルを持つのである。以下では、主に直既約加群に関心があるので、このようなことは非常に大きな障害となるのである。一般に、任意のＲ加群Ｍに対して、「Ｍが直既約 ＝ $\mathrm{End}_R(M)$が（非可換）局所環」が成立するためには、Ｒがｍ進位相で完備であれば十分である（実はＲはHenzel環であればよい。）そこで、以降ではＲはいつも完備局所環であるとする。この時には、よく知られたCohen の定理によって、正則局所環(regular local ring)ＴがＲの部分環として存在して、ＲはＴ上有限生成加群となっている。（［Ｍ］参照）Regular local ring は、一般にはglobal dimension が有限であると定義される。しかし、もしＴが体を含むような場合であれば、Ｔはいつも、ある体上の形式的巾級数環であることが知られている。したがって、Ｒはいつも体上の形式的巾級数環Ｔ上のfinite algebraであると考えてもさほど一般性を失うことはない。

ＲがCohen-Macaulay 環（以下ＣＭ環と略する）であると

は、depth(R)＝ dim(R) が成立することとして定義される。ここで、depth(R)とはｍに含まれる正則列の長さの最大、dim(R)はＲの Krull次元を表わす。しかるに、我々の状況では、このことはＲがＴ-free algebra であることと同等であることが、分かる。ＣＭ環の例をあげよう。

例１；１次元reduced （巾零元を持たない）ならばＣＭ環。

例２；２次元normal domain （整閉整域）はいつもＣＭ環。

例３；Hypersurface（超曲面）はＣＭ環。例えば、Ｔがregular local ring で、$R=T[x]/(x^n+a_1 x^{n-1}+...+a_n)$ と書けるときＲは $\{1, x, x^2, ..., x^{n-1}\}$ をbaseに持つfree T-algebraである。

環の場合と同じようにＲ加群Ｍについて、ＭがＣＭ加群であるとは、depth(M)=dim(M) 成立するときと定義される。ここで、depth(M)はｍに含まれるＭ正則列の長さの最大、dim(M)はＭのsupport の次元である。一般に depth(M)≦dim(M)≦dim(R) が成立することを見るのは容易である。そこで、depth(M)=dim(R) なるときＭを maximalＣＭ加群（以下ではＭＣＭ加群と略する）と呼ぶ。depth(M)が可能な限りの最大値をとるという意味で maximalというのである。（注意！Auslander 等はＭＣＭ加群を単にＣＭ加群と呼んでいる。）

例４；Ｒが１次元reduced のとき、ＭがＭＣＭということとtorsion freeとは同値である。

例５；Ｒが２次元normal domain のとき、ＭがＭＣＭであるこ

ととMがreflexive であることは同値である。

例6；R自身がregular local ringであるとき、MがMCMということとfree module であることは同値である。

例7；任意のR加群Mに対して　$0 \to N \to F \to M \to 0$（Fはfree）なるexact sequenceがあるときNをMの1-st syzygy と言い、$N = syz_1(M)$ と書く。又、帰納的に $syz_n(M) = syz_1(syz_{n-1}(M))$ によって、n-th syzygy が定義される。一般に、$0 \to N \to F \to M \to 0$　に対して、不等式：

$$\mathrm{depth}(N) \geqq \min(\mathrm{depth}(F), \mathrm{depth}(M)+1)$$

が成立するから、RがCM環で　$n \geqq \dim(R)$ のときには、$syz_n(M)$ はいつもMCM加群である。

一般にRがCM環でないときには、MCM加群が存在するかどうかは分からない。（存在するに違いなかろうという予想がある。）我々はMCM加群に関心があるのだから、以下ではRはCM環であることを仮定することにする。

MCM加群の重要な例の一つとして canonical module（正準加群）がある。我々の場合　$K = K_R = \mathrm{Hom}_T(R,T)$ として定義されるR加群KをRの canonical module と呼ぶことにする。RがCM環（i.e.T-free）なので、当然KもT-free、従ってKはMCM加群である。canonical module は dualizing moduleとも呼ばれ、その重要性は次のduality が成立することにある。

DUALITY：*MがMCM加群のとき、M ’= Hom_R（M,K）とおくと、M’ もまたMCM加群で、M” は自然な写像によってMと同型である。*

M’ のことをMの canonical dual と呼ぶこともある。K＝RとなるときRは Gorenstein 環であると云われる。RがGorenstein環のときには、canonical dualと普通の意味でのdualが一致するわけである。Gorenstein環の重要な例として、hypersurfaceを揚げておこう。

Tをregular local ring、$R=T[x]/(f)$ とする。但し、$f=x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ （$a_i\in T$）。このような、Rをhypersurfaceと言って、これがCM環となることは既に述べた。これが、Gorenstein環となることを説明しよう。簡単のために、fは既約多項式（＝Rは整域）であるとし、また、kは標数0の体であるとしよう。T，Rの商体をそれぞれQ，Lと置くとき、Trを L/Q の trace mapとする。$D=\{x\in L;\ Tr(xR)\subseteq T\}$ は Dedekind’s complementary module と呼ばれ古典的に $D=(1/f'(x))\cdot R=R$-free であることが知られている。一方で、$D\cong D\cdot Tr=Hom_T(R,T)$ だから、このDは、まさにcanonical moduleである。こんな訳で、上の様なRはいつもGorensteinとなるのである。（可換環のhomology theoryを使えば、fが既約であるとか、kの標数が0であるとかの仮定は必要がないことがわかる。）

Regular でない局所環Rは、極大イデアル以外の素イデア

ルpに対して、R_pがいつもregular なるとき、isolated singularity（孤立特異点）と呼ばれる。

例8；1次元CMのとき、isolated singulaity ということとreduced は同値である。

例9；Rが2次元のregular でない normal domainのとき、Rは isolated singularity である。実際、この時極大でない素イデアルpに対してR_pは離散付値環となるからである。逆にRが2次元以上のisolated singularityであるようなCM環のとき、Rはnormalである。

例10；$R=S/(f)$（但し、$S=k[[x_1,\ldots,x_n]]\ni f$、kは標数0の体）の時、Rが isolated singularity であるためには、$\{f_1,\ldots,f_n\}$で生成されたRのイデアルが、m－primary ideal となることが必要十分である。ここで、f_iはfのx_iによる偏微分を表わすものとする。実際、もし$(f_1,\ldots,f_n)$がm－primary なら、Sの極大でない任意の素イデアルp（$\ni f$）にたいして、$(f_1,\ldots,f_n,f)S_p=S_p$となり$f_i$の中に$S_p$の unit があることになる。$f_1$がそうであるとして構わないであろう。$pS_p=(y_1,\ldots,y_k)S_p$（$y_i\in p$）とおくとき、$f\in p$故$\exists\, t\in S-p$ such that $tf=a_1y_1+\ldots+a_ky_k$（$a_i\in S$）と書ける。もし全てのa_iがpの元ならば、$tf_1+ft_1=(tf)_1=\Sigma(a_i)_1y_i+\Sigma a_i(y_i)_1\in p$ よって、$tf_1\in p$、これより、$f_1\in p$。従って、f_1がS_pの unit であ

ることに反するので、実はある a_i は p の元でない。結局、$f \in pS_p - p^2 S_p$、言い換えれば、f は pS_p の極小生成元の１つとして取れる。この様なとき、$R_p = (S/f)_p$ は、regular local ring であることが容易にわかる。

Hypersurface isolated singularity の例として、例えば $x^n + y^2 + z_3{}^2 + \ldots + z_n{}^2$ で定義されるものがあげられる。実は、この種のものは古典的な不変式論から見い出すことができるので、つぎにそれを解説しよう。

F.Klein はその有名な著書［K 1］の中で、SL(2,$\mathbb{C}$) の有限部分群を全て見い出している。それを書き下すと次のようになる。

（１）cyclic group of order n

$$C_n = \left\langle \begin{pmatrix} w & 0 \\ 0 & w^{-1} \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{但し } w \text{ は } 1 \text{ の原始 } n \text{ 乗根}$$

（２）binary dihedral group of order 4n

$$D_n = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ C_{2n} \right\rangle$$

（３）binary tetrahedral group of order 24

$$T = \left\langle 1/\sqrt{2}\begin{pmatrix} e & e^3 \\ e & e^7 \end{pmatrix},\ D_2 \right\rangle \text{但し } e \text{ は } 1 \text{ の } 8 \text{ 乗根}$$

（４）binary octahedral group of order 48

$$O = \left\langle \begin{pmatrix} e^3 & 0 \\ 0 & e^5 \end{pmatrix},\ T \right\rangle$$

（５）binary icosahedral group of order 120

$$I = \left\langle 1/\sqrt{5}\begin{pmatrix} u^4 - u & u^2 - u^3 \\ u^2 - u^3 & u - u^4 \end{pmatrix}, \quad 1/\sqrt{5}\begin{pmatrix} u^2 - u^4 & u^4 - 1 \\ 1 - u & u^3 - u \end{pmatrix} \right\rangle$$

但し u は１の５乗根である。

今、２次元のベクトル空間Ｖに、これらの群を自然な方法で作用させると、Ｖの対称代数（＝多項式環）$\mathbb{C}[u, v]$ に作用が延長される。そのときの、不変式の全体の成す環（＝不変式環）が重要な研究対象である。例えば、上のcyclic group C_n の場合には，$u \to wu$，$v \to w^{-1}v$ という形で、作用するから、その不変式は全て uv，u^n，v^n の多項式となることがすぐにわかる。すなわち、不変式環は $\mathbb{C}[uv, u^n, v^n]$ と表わされる。一方で、この環は $\mathbb{C}[x,y,z]/(f)$ と書ける。但し、$f = x^n + y^2 + z^2$ となる。かようにして、$SL(2,\mathbb{C})$ の有限部分群 C_n に対して、方程式が１つ定まった。（あるいは、その方程式で定まる hypersurface が決まる。）

同じ様に進めて次の対応を得る。

$C_n \to x^n + y^2 + z^2 \quad (A_{n-1})$

$D_n \to x^{n+1} + xy^2 + z^2 \quad (D_{n+2})$

$T \to x^3 + y^4 + z^2 \quad (E_6)$

$O \to x^3 + xy^3 + z^2 \quad (E_7)$

$I \to x^3 + y^5 + z^2 \quad (E_8)$

ここで現われた方程式で定義される hypersurface は、皆 isolated singularityであって、simple surface singularity 又は Klein singularity又は rational double pointなどと呼ばれる。そして、各方程式にたいして記号Ａ－Ｄ－Ｅの名で呼んだりする。この記号Ａ－Ｄ－Ｅの意味は、それぞれの特異点を blow-upして、resolutionを構成したときに、その exceptional curveのconfiguration の dual graph が対応するＡ－Ｄ－Ｅ型の Dynkin 図形となることを表わしている。

上の例は surface（＝２次元）の場合であったが、一般の次元についても、次の一連の方程式で定義されるhypersurfaceを simple と云う。

$(A_n)\quad x^{n+1}+y^2+z_3{}^2+\dots+z_d{}^2$

$(D_n)\quad x^2y+y^{n-1}+z_3{}^2+\dots+z_d{}^2$

$(E_6)\quad x^3+y^4+z_3{}^2+\dots+z_d{}^2$

$(E_7)\quad x^3+xy^3+z_3{}^2+\dots+z_d{}^2$

$(E_8)\quad x^3+y^5+z_3{}^2+\dots+z_d{}^2$

但し、$d\geqq 2$である。

特に、ここで$d=2$（curve の場合、あるいはｚ変数がない）のときには、simple plane curve と呼ばれる。

2：ＭＣＭ加群についての可換環論の現況

前節と同じように、Ｒは完備ＣＭ局所環で、ｍはその極大イデアル、ｋ＝Ｒ／ｍとする。また、以下では簡単のために、<u>ｋはいつも標数０の代数閉体であるとしておく</u>。また、Ｃ(R)をＭＣＭ　Ｒ加群の成す category 、ｎ(R)を直既約ＭＣＭ加群の同型類の個数とする。ｎ(R)が有限のとき、Ｃ(R)は　of finite representaion type であるということにする。（以下では、ｆｒｔと省略して書くことにする。）

我々が特に関心があるのは、どのような環Ｒに対して、Ｃ(R)がｆｒｔかということである。このような問題に、可換環論の立場から始めて関心を持って研究をしたのは、J.Herzog であろう。彼は先ずつぎのことを証明した。［Ｈ］

定理　１：Ｒが Gorenstein 環で、Ｃ(R)がｆｒｔならばＲは hypersurface である。

（注意；Ｒが Gorenstein でなく、かつＣ(R)がｆｒｔとなることもある。その例は、後であげる。）

この定理の証明は簡単なので概説しておこう。Ｒの剰余体ｋの minimal free resolution；

$$\cdots \to F_n \to F_{n-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to k \to 0$$

を書いたとき、$b_n = \mathrm{rank}(F_n)$ とおいて、これをＲの n-th Betti number と云う。この Betti number を使って作った series; $\sum b_n t^n \in Z[[t]]$ をＲの Poincare seriesと言って、$P(t)$ と書く。一般論で、$P(t)$ は常に次のような無限乗

積の形で書けることがわかる。

$$P(t) = \frac{(1+t)^{e_0}(1+t^3)^{e_2}\cdots\cdots}{(1-t^2)^{e_1}(1-t^4)^{e_3}\cdots\cdots}$$

ここで、各e_iは非負整数でRの deviationと呼ばれる。deviation は環の構造を良く表わす不変量である。Rは完備であったから、Cohen の定理によってRは次のように書ける。

$R = S/I$（但し、Sはregular local ringで、$I \subseteq m^2$）

このとき、上の等式から直ちに次のことがわかる。

$e_0 = \dim(S)$, $e_1 = I$の生成元の個数

従って、Rが hypersurface ということと$e_1 = 1$であるということとは同値であるとわかる。そこで、もしRが hypersurface では<u>ない</u>と仮定すると、上の等式より、

$P(t) \geqq (1+t)^e / (1-t^2)^2$

となり、両辺の係数を比較することによって、$b_n \to \infty$ ($n \to \infty$) となることが分かる。今$M_n = \mathrm{Ker}(F_n \to F_{n-1})$と置くと、このことは$M_n$の生成元の個数が、$n \to \infty$のときに、やはり→∞となることを意味している。特に同型でない無限個の加群がM_nの中にある。このM_nは前に述べたkの n-th syzygyであるから、$n \geqq \dim(R)$のときには、M_nはMCM加群である。ところで、Rが Gorenstein という仮定のもとでは、M_nはいつも直既約であることが、容易に知れるのである。以上によって、同型でない直既約MCM加群が無限個構成できてしまう。よって、定理が示された。

また、Herzogは２次元の不変式環について次のことも注意している。

定理２； *Gが $GL(2,k)$の有限部分群で、$S = k[[x,y]]$ とする。Gは自然にSに作用する。そこで、その不変式環S^G をRとおく。このとき、$C(R)$ はいつもｆｒｔである。*

実際、ＳをＲ加群として直既約なものに分解して、$S = \Sigma M_i$ と書いたとき、これらのM_i が直既約ＭＣＭ　Ｒ加群の全てであることがわかる。ところで、実はこの逆が成立することが、最近 Auslander［Ａ１］，Artin-Verdier ［ＡＶ］によって示されたのである。

定理３； *Rを２次元完備局所環とする。この時、もし$C(R)$ がｆｒｔならば、$\exists G \subseteq GL(2,k)$ 有限部分群、$\exists S = k[[x,y]]$ such that $R = S^G$ となる。*

一方で、渡辺敬一氏によってS^G がいつ Gorenstein になるか分かっている。（［W］）そこで、その結果と上の定理を合わせると次の系を得る。

系； *Rが２次元の完備局所環のとき、Rが Klein singularity であるための必要十分条件は、Rが Gorenstein で$C(R)$ がｆｒｔとなることである。*

このように Klein singularityを geometry や群論を用いないで純粋に環論的に特徴付けることができるというところに我々は非常に興味を覚えるのである。

更にAuslander は、一般論として次のことを示している。

定理４［Ａ２］；*RがCM完備局所環のとき、もしC(R)がｆｒｔならばRは isolated singularity である。特に、Rが1次元ならば reduced、2次元ならば normal となる。*

定理４及び２次元の場合の更に詳しい事柄については、後の佐藤英雄氏によって述べられると思うから、ここでは、次に１次元の場合について特に考えてみよう。

Ｒを１次元の完備ＣＭ環で、剰余体は以前の通り標数０の代数閉体としておく。我々は、いつＣ(R)がｆｒｔかを議論したいから、定理４によって、始めからＲは reducedであるとしておいて構わない。環ＲとＳが与えられたとき、もしＲがＳとＳの全商環の中での整閉包との間の中間環であるとき、ＲはＳを dominate すると云うことにする。ＲがＳを dominate しているとき、もしＭが torsion free （＝ＭＣＭ）Ｒ加群ならば $\mathrm{End}_R(M) = \mathrm{End}_S(M)$ が成立することは容易に分かる。特にこのときＭがＲ加群として直既約ということと、Ｓ加群として直既約ということは同値である。従ってつぎの補題を得た。

補題；*RがSを dominate するとき、不等式；n(R) ≦ n(S) が成立する。特に、C(S) がｆｒｔならば、C(R) もｆｒｔである。*

最近 Greuel と Knörrerによって次の定理が得られた。

定理５［ＧＫ］；*Rが1次元の完備 reduced ring とするとき、C(R) がｆｒｔであるための必要十分条件はRがsimple plane curve を dominate することである。*

もしＲがどのような simple plane curve をも dominate しないなら、任意の整数ｎに対して、無限個の rank ｎの直既約ＭＣＭ加群を実際に構成することで、一方の証明が遂行される。他方、もしＲが simple plane curve Ｓを dominate するときには、上の補題によって、C(S) がｆｒｔであると云えば良いことが分かる。従って、始めからＲ自身が simple plane curve として良い。ところが、この時には Dedekind 環上の order の表現の分類という形で、既に Jacobinsky ［Ｊ］、Green-Reiner［ＧＲ］によってやられていた。実際に、Ｒが simple plane curveであるときに、直既約ＭＣＭ加群を全て書き下すことができる。ここでは、各 simple plane curve に対して、その直既約ＭＣＭ加群の個数を表にして書いてみよう。

type of R	n(R)
A_n （ｎ；偶数）	（ｎ＋２）／２
A_n （ｎ；奇数）	（ｎ＋５）／２
D_n （ｎ；偶数）	（３ｎ＋６）／２
D_n （ｎ；奇数）	２ｎ－２
E_6	７
E_7	１５
E_8	１７

更に１次元の simple plane curve については、C(R) の Auslander-Reiten quiver を書くことできる。（［Ｋｎ］）ここでは、A_n（ｎ：偶数）のみに対して、その Auslander-Reiten quiver を示す。

R~　　　　　　　　　　　　　　　　R

ここで、R~ はＲの normalizationを表わす。

次にＲが Gorenstein でないけれども、C(R) がｆｒｔとなる例があることを見るために、次の様な例を考えよう。

例（後藤四郎）；次の環を考える。

$$R_n = k[[x_1, x_2, \ldots, x_n]]/(x_i x_j \mid i \neq j)$$

R_n は reducedな１次元の局所環である。後藤四郎氏は、この環について次のことを示した。

$$n(R_n) = \begin{cases} 3 & (n=2) \\ 8 & (n=3) \\ \infty & (n \geqq 4) \end{cases}$$

このことを定理５の見地から考えてみよう。

$$\begin{aligned} R_2 &= k[[x_1, x_2]]/(x_1 x_2) \\ &= k[[x, y]]/(x^2 + y^2) \end{aligned}$$

（ｋは代数閉体であった。）が成立するから、実はR_2 はA_1型の simple plane curve である。このとき、上の表から、$n(R) = 3$となる。実際 $\{R_2, R_2/(x_1), R_2/(x_2)\}$

は直既約ＭＣＭ加群の全部である。この時、$C(R_2)$ の Auslander-Reiten quiver を書いてみると、次の様になる。

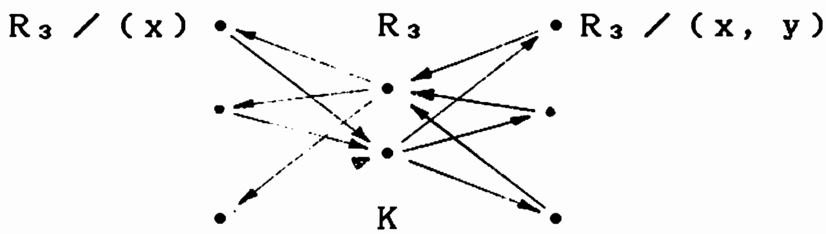
$R_3 = k[[x,y,z]]/(xy,yz,zx)$ は幾何学的には、３次元の affine空間内で３本の軸（直線）が原点で交わるところを表わしている。一方で D_4 型の singularityは、$x^2y+y^3=y(x+iy)(x-iy)$ だから平面内で３本の直線が交わるものである。結局３次元の空間を適当な方向で、平面に射影することによって、R_3 は D_4 型の simple plane curve を dominate することが分かる。特に、補題と上の表によって、$n(R_3) \leqq 9$ を得る。ところが、D_4 の座標環自身は R_3 加群とはなりえないから、実は、$n(R_3) \leqq 8$　となることが分かる。一方で次の８個の加群は同型でないＭＣＭ加群である。

R_3, $R_3/(x)$, $R_3/(y)$, $R_3/(z)$

$R_3/(x, y)$, $R_3/(y, z)$,

$R_3/(z, x)$, $K=(x+y,\ x+z)R_3$

従って、$n(R_3)=8$ となる。この R_3 は Gorenstein でないことを注意しておこう。$C(R_3)$ の Auslander-Reiten quiverを書いてみると次の様になる。



次に$n \geqq 4$の時のR_nを考えてみよう。このときには、R_nはn個の既約成分をもつ曲線に対応する。ところで、A－D－E型の曲線の中には既約成分を４個以上持つものはない！従って、R_nは$n \geqq 4$のときには、どのような simple plane curve singularity をも dominate しない。結局、$n(R_n)=\infty$となるのである。

最後に、高次元の場合について最近 Knorrer [Kn] によって示されたことを紹介して本稿を終えることとしよう。

定理６； *Rが一般次元の simple hypersurface singularity のとき、$C(R)$はｆｒｔである。*

更に、この場合には$C(R)$の Auslander-Reiten quiverを実際に書くことができる。但し、一般次元では、１次元や２次元の場合のように$C(R)$がｆｒｔとなる環を特徴付けることは未だできていないようである。今後の問題であろう。

以上大ざっぱにＭＣＭ加群に対する現況を眺めてきた。$C(R)$のｆｒｔ性を問題にするとき、今までの可換環論或いは代数のみでは、他の hypersurface と区別することができなかった simple hypersurface singularityが登場してくることは大変注目に値することである。可換環論においても、今後、$C(R)$上の Auslander-Reiten 理論を含む表現論的な考え方が重要となることは確実であろう。

REFERENCES

[A 1] M.Auslander;Rational singularities and almost split sequences,in preprint.

[A 2] M.Auslander;Isolated singularity and existence of almost split sequnces,in preprint.

[A R] M.Auslander and I.Reiten;Representation theory of artin algebras,Communication in Algebra,

I vol.1(no3)(1974),117-268,

II vol.1(no4)(1974),269-314,

III vol.3(no3)(1975),239-294,

IV vol.5(no5)(1977),443-518,

V vol.5(no5)(1977),519-554,

VI vol.6(no3)(1978),257-300.

[A V] M.Artin and J.-L.Verdier;Reflexive modules over rational double points,Math.Ann.270(1985),79-82.

[G K] G.-M.Greuel and H.Knörrer;Einfach Kurvesingularitaten und torsionfreie Moduln,Math.Ann.270 (1985),417-425.

[G R] E.Green and I.Reiner;Integral representations and diagrams,Michigan Math.J.25(1978),53-84.

[H] J.Herzog;Ringe mit nur endlich vielen Isomorphie klassen von maximalen,unverlegbaren Cohen-Macaulay-Moduln,Math.Ann.233(1978),21-34.

[HK] J.Herzog and M.Kühl;Maximal Cohen-Macaulay modules over Gorenstein rings and Bourbaki sequences,to appear in the proceeding of Japan-USA Symposium on Combinatorics and Commutative Algebra at Kyoto,Aug.(1985).

[J] H.Jacobinsky;Sur les orders commutatifs avec an nombre fini de résaux indécomposables,Acta.Math. 118(1967),1-31.

[K1] F.Klein;Vorlesungen uber das Ikosaheder und die Auflosung der Gleichungen vom fünften Grade, Teubner,Leibzig(1884).

[Kn] H.Knörrer;The Cohen-Macaulay modules over simple hypersurface singularities, in preprint.

[M] 松村英之；可換環論、共立出版社（1980）

[W] K.Watanabe;Certain invariant subrings are Gorenstein,I,II.Osaka J.11(1974),1-8,379-388.

名古屋大学理学部数学教室
名古屋市千種区不老町

多元環の表現に於けるsingularity 及び Cohen-Macaulay 加群 II

—AR列とsingularity—

和歌山大学教育　佐藤英雄

§0 序

アルチン多元環の表現論では AR列 (= Auslander-Reiten列) は中心的な概念であり極めて有効である。(山形氏の概説参照) 一方, Roggenkamp 等は古典的な整環の表現であるが, この場合にも AR列が利用されることを示唆した。Auslanderは以下に述べるように整環の定義を拡張してその表現を考えるとき, AR列が singularity と関連することを見出した。

以下に整環と言うのは可換完備局所ネター環 (R, M) 上の多元環であって R-

加群としてΛは有限生成自由なものを指す。アルチン多元環の表現論と決定的に異るのは表現加群としては有限生成Λ加群すべてを考えるのではなく，例えば，R加群としてCohen-MacaulayになるΛ加群に制限したり，R加群として自由になるものに制限したりする。考える問題に応じて，何を表現加群と考えるかは変わるが，それをΛ-latticeと呼ぶことにする。これに応じてAR列の定義もΛ-latticesのsubcategoryで与えられる。

ここで紹介する話題と用語は後述することにして簡単に触れておく。

(1) isolated singularityについて。

$(R, \mathfrak{m})$を完備局所正則環，ΛをR上の整環とする。Λ-latticeとしてはR上自由なもの全体$\mathcal{S}_R(\Lambda)$をとる。

定理I：次の2条件は同値である。

(i) $\mathcal{S}_R(\Lambda)$はAR列を持つ。(定義§1)

(ii) $^{\forall}\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$ について
$$\mathrm{gl.dim}\,\Lambda_{\mathfrak{p}} = \dim R_{\mathfrak{p}}$$

(Λが可換ならば isolated singularity のことである。)

(2) quotient singularity について。
Gが$GL(2,\mathbb{C})$ ($\mathbb{C}$=複素数体)の有限部分群のとき，RをGに associate した singularity とすれば Rの desingularity graph は，McKay quiver (ただし，trivial module は除く) と同型になることは知られていた。Gは$S=\mathbb{C}[[X,Y]]$に作用するが，この作用により自然に skew group ring $S[G]$が構成される。このとき，単純$S[G]$加群の極小射影分解を考えることは$R=S^G$の reflexive 加群 (Cohen-Macaulay 加群と一致)の category に於けるAR列を考えることであることに Auslander は注目した。

こうした方法で吉野氏の紹介した Artin-Verdier の仕事の別証を Auslander は得たのである。

§1. AR列

今節に限らず R は完備局所環で，Λ は R 多元環で R 加群として有限生成とする。また，$\mathrm{mod}(\Lambda)$ は有限生成左 Λ-加群のなす category とする。次に注意しよう。

(1.1) $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ について

$${}_\Lambda M : \text{直既約} \Leftrightarrow \mathrm{End}({}_\Lambda M) : \text{局所環}$$

従って，$M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ について直既約分解の一意性が成り立つ。

(1.2) $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ は射影被覆をもつ。

以下，$\mathcal{C} \subset \mathrm{mod}(\Lambda)$ は R 加群として MCM 加群 (maximal Cohen-Macaulay module)になるもの全体のなすsubcategoryとする。

定義　$\mathcal{C}$内の非分解(non-split)完全列

(E)：$0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$

に対して函手$S_C: \mathcal{C} \to \mathcal{Ab}$ (=Abel群の圏)を完全列

$$0 \to [-,A] \xrightarrow{[-,f]} [-,B] \xrightarrow{[-,g]} [-,C] \to S_C \to 0$$

で定義する。

(E)がAR列とは，A及びCが直既約でS_C: simple，$S_C(C) \neq 0$であることをいう。

更に(1.1)から

(1.3)　(AR列の一意性)

$0 \to A \to B \to C \to 0$，$0 \to A' \to B' \to C' \to 0$が共に$\mathcal{C}$のAR列ならば次は同値である。

(i) 上記は同値な完全列，

(ii) $A \cong A'$, (iii) $C \cong C'$

がわかる。(アルチン多元環の場合と全く同様)

<u>定義</u> ${}^\forall A \in \mathcal{C}$, s.t. ${}_\Lambda A$: 直既約に対して

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

なるAR列 (in $\mathcal{C}$) があるとき, $\mathcal{C}$は左AR列を持つという。双対的に右AR列を持つことが定義される。左右ともにAR列を持つとき単にAR列を持つという。

§2. 定理Iについて。

今節を通して Rは 完備局所正則環とする。Λ は R上の整環とする。($\mathfrak{m} = \mathrm{rad}\, R$)

Λ が nonsingular $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathrm{gl\,dim}\,\Lambda = \dim R$ と定める。

序に書いた isolated singularity の定義はこの意味で nonsingular も含めたものであった。

<u>例</u>. isolated singularity で nonsingular

でない例。 R：完備DVRとする。

$$\Lambda = \begin{bmatrix} R & R \\ \mathfrak{m}^t & R \end{bmatrix} \qquad (t \geqq 0)$$

とおくと、 Λ : hereditary $\Leftrightarrow$ $t \leqq 1$

$\forall t < \infty$ について $\mathrm{id}_\Lambda \Lambda = \mathrm{id}\, \Lambda_\Lambda = 1$

従って、$t \geqq 2$ とすれば Λ は nonsingular isolated singularity であることは明らか。

さて、$\mathcal{P}_R(\Lambda)$ は序に述べたものとし、更に $\mathcal{P}(\Lambda)$ は射影加群のなす category とする。

(2.1) Λ : nonsingular $\Leftrightarrow$ $\mathcal{P}_R(\Lambda) = \mathcal{P}(\Lambda)$

がパラメーター系をとることにより知られる。

<u>定義</u> category $\mathcal{P}_R(\Lambda)/\mathcal{P}(\Lambda)$

objects $=$ $\mathcal{P}_R(\Lambda)$ の objects.

morphism :

$\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_\Lambda(X, Y)/\mathcal{P}(X, Y)$

ただし

$$\mathcal{P}(X,Y)=\{f\in \mathrm{Hom}_\Lambda(X,Y) \mid \begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \\ & {}^\exists P\in\mathcal{P}(\Lambda) \arrow[ur] & \end{tikzcd}\}$$

さて，$\mathcal{A}$ を additive category で Krull-Schmidt の定理が成立するものとし，

$\mathrm{Mod}\,\mathcal{A}$ で $\mathcal{A}\to\mathcal{A}b$ なる additive covariant functors のなす category とする。　$M\in\mathrm{Mod}\,\mathcal{A}$ について

(i) M : f.g. $\underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\exists A\in\mathcal{A}$ s.t. $[-,A]\to M\to 0$ 完全

(ii) M : f.p. (finitely presented)

$\underset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\exists A\in\mathcal{A}$, ${}^\exists B\in\mathcal{A}$

$[-,A]\to[-,B]\to M\to 0$: 完全

そこで　$\mathrm{mod}\,\mathcal{A}=\{M\in\mathrm{Mod}\,\mathcal{A}\mid M : \text{f.p.}\}$

とおく。然らば $\mathrm{mod}(\mathcal{P}_R(\Lambda)/\mathcal{P}(\Lambda))$ は abelian category となることが知られる。

また　$\mathrm{mod}(\mathcal{P}_R(\Lambda)/\mathcal{P}(\Lambda))$ は

$\{F\in\mathrm{mod}(\mathcal{P}_R(\Lambda))\mid F(\Lambda)=0\}$

と同一視できる。$A \in \mathcal{P}_R(\Lambda)$ に対して
$\mathrm{Ext}^1(-,A) \in \mathrm{mod}\,\mathcal{P}_R(\Lambda)$ は明らか。

さて，$0 \to A \to B \to C \to 0$ が AR列と
すれば §1の記号で $S_C \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1(-,A)$
だから，$\mathrm{Ext}^1(-,A)$ こそが重要である。

(2.2) $\{\mathrm{mod}(\mathcal{P}_R(\Lambda)/\mathcal{P}(\Lambda))$ の injective objects$\}$
$= \{\mathrm{Ext}^1(-,A) \mid A \in \mathcal{P}_R(\Lambda)\}$

定理Ｉの Auslander の証明を sketch する。

(2.3) $\mathcal{P}_R(\Lambda)$ が AR列を持つとする。
$X, Y \in \mathcal{P}_R(\Lambda) \Rightarrow l_R(\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y)) < \infty$
ただし，l_R は R加群としての組成列
の長さを表わす。

(方針) $0 \to A \to P \to Y \to 0$: 完全，$P \in \mathcal{P}(\Lambda)$
とすれば $\underline{\mathrm{Hom}}(X,Y) \hookrightarrow \mathrm{Ext}^1(X,A)$
$0 \to A \to B \to C \to 0$: AR列

とすれば (2.2) から $S_C = \mathrm{soc}(\mathrm{Ext}^1(-, A))$ なること，及び $0 \to A \to Q \to L \to 0$：完全列 in $\mathcal{P}_R(\Lambda)$ で，Q は右 projective Λ-module の R-dual とするとき，$A' = C \oplus Q \oplus L$ とおけば $\mathrm{Ext}^1(X \oplus A', A)$ が $\underline{\mathrm{End}}(X \oplus A')$ 加群として有限生成 injective となることがわかる。これから容易に $l_R(\mathrm{Ext}^1(X, A)) < \infty$ が出る。

「$l_R(X) < \infty$，$\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m} \Rightarrow X_{\mathfrak{p}} = 0$」だから

(2.4) $l_R(\underline{\mathrm{Hom}}(X, Y)) < \infty$ for ${}^{\forall}X, {}^{\forall}Y \in \mathcal{P}_R(\Lambda)$
$\Rightarrow C_{\mathfrak{p}}$：$\Lambda_{\mathfrak{p}}$-projective for ${}^{\forall}C \in \mathcal{P}_R(\Lambda)$
ただし，$\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m}$.

次は R 加群としての射影分解を考えれば容易に出る。

(2.5) ${}^{\forall}C \in \mathcal{P}_R(\Lambda)$ ${}^{\forall}\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ $(\mathfrak{p} \neq \mathfrak{m})$ に対し $C_{\mathfrak{p}} \in \mathcal{P}(\Lambda_{\mathfrak{p}}) \Rightarrow \Lambda_{\mathfrak{p}}$：non-singular.

定理Iの証明(のsketch)に関しては、次が残っている。

(2.6) Λ: isolated singularity ならば $\mathcal{P}_R(\Lambda)$ は AR列を持つ。

まず $C \in \mathcal{P}_R(\Lambda)$, C: 直既約に関し、

$$\operatorname{rad}[-,C](X) = \left\{ X \xrightarrow[g]{} C \;\middle|\; C \xrightarrow[\forall f]{} X \xrightarrow[g]{} C \in \operatorname{rad}(\operatorname{End} C) \right\}$$

と定義する。更に 完全列 in Mod(mod Λ)

$$0 \to \operatorname{rad}[-,C] \to [-,C] \to S_C \to 0$$

により S_C を定義すれば、simple functor で、$S_C(C) \neq 0$, $S_C(X) = 0$ ($^\forall X \ncong C$; 直既約)

ここで $S_C|\mathcal{P}_R(\Lambda)$: f.p. が示されるならば

$0 \to A \to B \to C \to 0$: AR列 in $\mathcal{P}_R(\Lambda)$

を得るのは容易である。

そのためには (2.6)の条件下で $\mathcal{P}_R(\Lambda)$が どのような categoryになるかを記述することが必要である。

定義. $\mathcal{P}_R(\Lambda)$ が coherent

$\Leftrightarrow$ ${}^\forall f : A_1 \to A_2$ in $\mathcal{P}_R(\Lambda)$

${}^\exists g : A_0 \to A_1$ in $\mathcal{P}_R(\Lambda)$

s.t. induce される次の列が完全

$$[-, A_0] \to [-, A_1] \to [-, A_2]$$

このとき, mod $\mathcal{P}_R(\Lambda)$ が abelian となる。まず R: 完備局所正則だけで帰納法により次が示される。

(2.7.) $\mathcal{P}_R(\Lambda)$ は coherent.

次は極めて一般的に成立する。

(2.8) ${}^\forall F \in \mathrm{mod}((\mathrm{mod}\,\Lambda)^{op})$ (i.e. f.p. covariant functor) に対して.

${}^\exists A \to B \to C \to 0$: 完全 in mod Λ^{op}

s.t. $0 \to F \to A\otimes - \to B\otimes - \to C\otimes - \to 0$

この証明には $D : \mathrm{mod}((\mathrm{mod}\,\Lambda)^{op}) \to$

$\mathrm{mod}((\mathrm{mod}\,\Lambda^{op})^{op})$; $(DF)(X) \overset{\mathrm{def}}{=} [F, X\otimes -]$
$(F \in \mathrm{mod}((\mathrm{mod}\,\Lambda)^{op}),\ X \in \mathrm{mod}\,\Lambda^{op})$
が duality であり, D で tensor と Hom
が入れ換わることに注意すれば良い。

さて, Λ : isolated singularity とする。(2.1)から, $L \in \mathcal{P}_R(\Lambda)$, $X \in \mathrm{mod}\,\Lambda^{op}$ について
$l_R(\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(X, L)) < \infty$ が出る。R は正則だから, $0 \to R \to I_0 \to \cdots \to I_d \to 0$ を極小移入分解とすれば I_i は zero socle だから ($i<d$), $L \in \mathcal{P}_R(\Lambda^{op})$ について上記から
$\mathrm{Hom}_R(L, I_i)$ が injective Λ-加群である。
従って $\mathrm{Ext}_R^i(L\otimes -, R) \simeq \mathrm{Ext}_\Lambda^i(-, \mathrm{Hom}_R(L,R))$
が $0 \leq i \leq d$ について成立する。これから,
$\mathrm{Ext}_R^i(L\otimes, R) | \mathcal{P}_R(\Lambda)$ $(0 \leq i \leq d)$ が f.p.
であることがわかる。これから induction を用いて ($\mathrm{pd}_R M$ についての) 次が得られる。

(2.9) ${}^\forall M \in \mathrm{mod}(\Lambda^{op})$ について
$\mathrm{Ext}_R^i(M\otimes, R) | \mathcal{P}_R(\Lambda)$ 及び

$\mathrm{Ext}_R^i(\mathrm{Tor}_1^\Lambda(M,\ ),R)\,|\,\wp_R(\Lambda)$ は f.p.

次に (2.8) を用いれば，(2.9) から

(2.10) ${}^\forall F \in \mathrm{mod}((\mathrm{mod}\,\Lambda)^{op})$ について

$\mathrm{Ext}_R^i(F,R)\,|\,\wp_R(\Lambda)$: f.p. $({}^\forall i \geq 0)$

更に，${}^\forall M \in \mathrm{mod}\,R$ について

$\mathrm{Ext}_R^i(F,M)\,|\,\wp_R(\Lambda)$: f.p. $({}^\forall i \geq 0)$

後半部は $\mathrm{pd}_R M$ に関する induction による。

そこで (2.6.) の証明にもどる。

$$0 \to \mathrm{rad}[-,C] \to [-,C] \xrightarrow[\alpha]{} \mathrm{Hom}_R([C,-],\Delta)$$

ただし，$\Delta = \mathrm{End}(C)/\mathrm{rad}(\mathrm{End}(C))$

なる完全列がある。(2.10) より last term は f.p. 従って (2.7) から $\mathrm{rad}[-,C]$ もf.p. また S_C も f.p. である。

以上では AR列と言っても左AR列しか使わなかった。しかし，nonsingular なる条件は左右に関係しないから，左AR列を持つことと右AR

列を持つことは同値である。

この節を終えるにあたり次のことを述べておく。

<u>定義</u> $\mathcal{P}_R(\Lambda)$ が有限型
$\Leftrightarrow$ $\mathcal{P}_R(\Lambda)$ の直既約の非同型類は有限。

<u>定理</u> Λ, R はこの節の設定で $\mathcal{P}_R(\Lambda)$ が有限型ならば序に述べた意味で Λ は isolated singularity である。

証明は $C \in \mathcal{P}_R(\Lambda)$ を直既約とするとき、S_C が f.p. であることを示せば良い。従って $\operatorname{rad}[-, C]$ が f.g. であることを示すのであるが $B_1, \cdots, B_m$ を $\mathcal{P}_R(\Lambda)$ の直既約の完全代表系とするとき $\operatorname{rad}(B_i, C)$ が有限生成 R 加群だから、その生成元をとることにより $\exists m_i$ s.t.

$$[-, \bigoplus_{1 \le i \le m} B_i^{(m_i)}] \to \operatorname{rad}[-, C] \to 0$$

を完全列にとれる。

§3. AR列と quotient singularity

今節では、序に述べた(2)の話題について紹介する。より一般に述べられる(べき)ことであっても筋道を明確にするために、強い条件で述べることを予め お断りしておきたい。

まず McKay quiver の定義を述べる。以下、G は有限群、$k=\mathbb{C}$ (複素数体) とする。$k[G]$ を通常の群環とすれば、semisimple だから、その既約加群のすべてを $V_0, \cdots, V_d$ とする。ここに $V_0=k$ は trivial な表現とする。V を2次の表現として固定する。

定義 V の McKay quiver $\Gamma(V)$ とは

vertices $=\{V_0, \cdots, V_d\}$

arrows : $V_i \underset{(m\text{本})}{\overset{}{\rightrightarrows}} V_j \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} V \underset{k}{\otimes} V_j$ の中の V_i の重複度 m

とする directed graph のことである。

$S=k[[X,Y]]$ (formal power series)

とおく。Gはνを通してSに線型に作用する。その作用を$\sigma(s)$ $(\sigma\in G,\ s\in S)$で表わす。このとき skew group ring $S[G]$は

$$(s_1\sigma_1)(s_2\sigma_2)=s_1\sigma_1(s_2)\sigma_1\sigma_2\quad(s_i\in S,\sigma_i\in G)$$

により定義される。

Mが$S[G]$加群とは、S加群かつG加群になっているもので$\sigma(sm)=\sigma(s)\sigma(m)$と作用するものとする。

更にM,Nを$S[G]$加群とするとき$\mathrm{Hom}_S(M,N)$を次のようにして$S[G]$加群にすることができる。

$$(\sigma f)(m)=\sigma(f(\sigma^{-1}m))$$

ただし、$\sigma\in G$, $f\in\mathrm{Hom}_S(M,N)$, $m\in M$

また$S[G]$加群Xに対し$X^G=\{x\in X\mid\sigma(x)=x$ for $\sigma\in G\}$とおく。このとき

$$\mathrm{Hom}_{S[G]}(M,N)=\mathrm{Hom}_S(M,N)^G$$

$(\ )^G$は exact functor だから、$S[G]$加群Xについて $X:S[G]$-projective $\Leftrightarrow$ $X:S$-free が容易にわかる。特にSは

$S[G]$-projectiveである。

次に ${}_{S[G]}M$, ${}_{k[G]}W$ に対して $M \otimes_k W$ は $(s\sigma)(m \otimes w) = s\sigma(m) \otimes \sigma(w)$ により、$S[G]$ 加群になる。ここで ${}_{S[G]}P$ が projective ならば $P \otimes_k W$ はまた projective である。特に、$P = S$ のときも成立する。

S は完備局所環で、$\mathfrak{m} = \mathrm{rad}\, S = (X, Y)$。$S/\mathfrak{m} = k$。更に $\mathfrak{m} S[G] = \mathrm{rad}(S[G])$。このことから次は明らか。

(3.1) (i) ${}_{S[G]}P$: projective $\Rightarrow$ $P \cong S \otimes_k (P/\mathfrak{m}P)$

(ii) $k[G]$-modules W_1, W_2 について
$S \otimes_k W_1 \cong S \otimes_k W_2 \Rightarrow W_1 \cong W_2$

(iii) $S \otimes_k V_i$ $(1 \le i \le d)$ が非同型直既約 projective $S[G]$-modules のすべて。

さて projective S-resolution

$$0 \to S \to S \amalg S \to S \to \underset{\underset{k}{\parallel}}{S/\mathfrak{m}} \to 0$$

から，$k=V_0$ の極小な projective $S[G]$-resolution

$$0 \to S \otimes_k (\overset{2}{\wedge} V) \to S \otimes_k V \to S \to k \to 0$$

が得られる。更に $\otimes_k V_j$ を施して

$$0 \to S \otimes_k (\overset{2}{\wedge} V \otimes_k V_j) \to S \otimes_k (V \otimes_k V_j) \to S \otimes V_j \to V_j \to 0$$

これを $0 \to Q_2^{(j)} \to Q_1^{(j)} \to Q_0^{(j)} \to V_j \to 0$ と書けば，

$$\begin{cases} P_j = S \otimes_k V_j \overset{1:1}{\longleftrightarrow} V_j \\ \\ Q_1^{(j)} \text{に於ける } P_i \text{ の重複度} \end{cases}$$

$= V \otimes_k V_j$ に於ける V_i の重複度

となる。これも McKay quiver $\Gamma(V)$ と言うことにする。実にこれは アルチン多元環の quiver (Gabriel quiver) と類似する。

さて，以下では G は pseudo-reflection を持たないとしよう。このとき $R=S^G$ は次の性質を持つ。：完備 normal domain で $\dim R$

$=2$ かつ，S は R 加群とみて有限生成．
従って reflexive R-modules = maximal Cohen-Macaulay modules，特に，S は R-reflexive である。

$\mathrm{add}\,S = \{{}_RX < \oplus\, S^{(t)}\}$ とおく。次が成り立つ。

(3.2) $\{$直既約 reflexive R-modules$\}$
$= \{{}_RX$: 直既約 $< \oplus\, S\}$
従って $\mathrm{add}\,S$ は 非同型直既約 reflexive R-modules を有限ヶしか持たない。

実際，R-mono : $0 \to R \to S$ が split することに注意すれば良い。

(3.3) $\mathbb{P}$ = the category of projective $S[G]$-modules
とおく。
$P \in \mathbb{P} \to P^G \in \mathrm{add}_R S$

は category-equivalence

実際、 $S[G]^G = \{ \sum_{\sigma \in G} \sigma(s)\sigma \mid s \in S \}$ だから

$S \to S[G]^G$; $s \mapsto \sum \sigma(s)\sigma$ により同一視できる。従って $P^G \in \mathrm{add}_R S$. この対応が equivalence であるためには fully faithful であることを示さねばならない。それには次を示せば十分である。

$$\gamma : S[G] \to S[G]^{op} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{S[G]}(S[G]) \to \mathrm{End}_R S$$
$$s\sigma \mapsto \sigma^{-1}(s)\sigma^{-1} \qquad f \mapsto f|S$$

これをつづければ $\gamma(s\sigma)(x) = s\sigma(x)$

ここで、G が pseudo reflection を持たないから R の height one primes は S で不分岐。
従って、γ の同型が出る。

p19 の notation で $\bigwedge^2 V \otimes_k V_j$ は 単純 $k[G]$ 加群，これを $\tau(V_j)$ で表わせば，明らかに，$\tau(V_i) \cong \tau(V_j) \Leftrightarrow V_i \cong V_j$

$\tau(P_i) = S \otimes_k \tau(V_j)$ とおき

$$0 \to \tau(P_i) \xrightarrow{u_i} Q_i \xrightarrow{v_i} P_i \to V_i \to 0$$

と書いておく。 $P_i^G = L_i$, $Q_i^G = E_i$, $\tau(P_i)^G = \tau(L_i)$ と書く。 $i=0$ の場合を考える。

(3.4) $$0 \to \tau(R) \xrightarrow{g_0} E_0 \xrightarrow{f_0} R \to k \to 0 \quad (*)$$

で、$h: L \to R$ が non splittable epi. ならば $L \to E_0$ に lift される. 上記の(*)は、この性質で特徴付けられる。

実際、前半は(3.3)から出る。後半は

$$0 \to A \to B \to R \to k \to 0$$

をかかるものとすれば

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "s"'] & B \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d, equal] & k \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \tau(R) \arrow[r] \arrow[d, "t"'] & E_0 \arrow[r] \arrow[d] & R \arrow[r] \arrow[d, equal] & k \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & R \arrow[r] & k \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

なる可換図式を得るが $ts \notin \operatorname{rad} \operatorname{End}_R A$
だから, ts は unit である。A : indec. と
するから s は同型である。

完全列 (*) は fundamental exact sequence
と呼ばれる。

仮定から, $V_i \neq k$ とすれば $V_i^G = 0$ だから
$$0 \to \tau(L_i) \xrightarrow[g_i]{} E_i \xrightarrow[f_i]{} L_i \to 0 \quad (**)$$
を得る。(3.4) と同様にして次を得る。

(3.5) $0 \to A \to B \to L_i \to 0$, $A, B \in \operatorname{add} S$
が (**) と同値になるのは
(a) A : 直既約, (b) non-split,
(c) ${}^\forall h : L \to L_i$ in $\operatorname{add} S$, non splittable
epi. は $L \to B$ に lift される.

(**) は かくして L_i により決定される。これを
L_i の決定する AR 列と呼ぶ。

$\underline{\underline{L}} = \mathrm{add}\, S$ とおく。$\underline{\underline{L}}$ の AR quiver を次のように定義する。(AR($\underline{\underline{L}}$) と書く。)

vertices $= \{L_0, \cdots, L_d\}$

arrows $L_j \overset{\to}{\underset{m本}{\vdots \to}} L_i$

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ E_i の中の L_j の重複度が m.

AR($\underline{\underline{L}}$) と $\Gamma(V)$ の対応は明らかである。

fundamental exact sequence の意味に触れておく。R は 完備局所正則環 T で次元2のものを含む。このとき $\tau(R) = \mathrm{Hom}_T(R, T)$ で canonical module となることが知られている。これを ω で表わす。次に L を reflexive R-module, X を R-module とする。$X^* = \mathrm{Hom}_R(X, R)$ と表わす。しからば canonical map : $X \to X^{**}$ は $\mathrm{Hom}_R(X^{**}, L) \overset{\sim}{\to} \mathrm{Hom}_R(X, L)$ を導く。$L_i \in \underline{\underline{L}}$ に対して $L_1 \bullet L_2 = (L_1 \otimes_R L_2)^{**}$ とおき、これを tensor product と呼ぶ。

実際上述のことから functorial isomorphism
$\mathrm{Hom}_R(L_1\cdot L_2, L)\cong \mathrm{Hom}_R(L_1, \mathrm{Hom}_R(L_2, L))$
がある。

(3.6) $L_j \neq R$ について次が成り立つ。
(i) $\tau(L_j) = \omega\cdot L_j$
(ii) 完全列 $0\to\omega\to E_0\to R$ に対し
L_j の AR 列
$$0\to\omega\cdot L_j\to E_0\cdot L_j\to L_j\to 0$$
を得る。

最後に Artin-Verdier の結果に別証の sketch を与えよう。
以下, R は normal noetherian domain で商体を K とする。L を K の finite Galois extension で Galois group を G, S は R の L 内での integral closure で $_RS$: f.g. で R の height one primes は S で不分岐としよう。この設定でも (3.3) 等は成立する。

更に $k=\mathbb{C}$ とし，以下では考えるのは完備 Krull 一次元環で局所環で剰余体も k となるものとする。

$$F: \mathcal{P}(S[G]) \to \operatorname{mod} k[G] \quad (\mathfrak{m}=\operatorname{rad} S)$$
$$P \mapsto P/\mathfrak{m}P$$

とすれば (3.3)′ から $\operatorname{add}_R S \to \operatorname{mod} k[G]$ が導びかれる。これも F で表わそう。
F により {indec. reflexive R-modules} と {simple $k[G]$-modules} は同型類の意味で一対一に対応する。

R の商体 K の finite extension L での R の integral closure を S で R の height one primes が不分岐とする。このような L の合成体を Ω とすれば Ω は K 上 Galois である。さて $K \subset L \subset L' \subset \Omega$ で L'/K, L/K は finite Galois でその Galois 群を G', G とする。更に R の integral closure を L, L' の中にとったものをそれぞれ

S, S' とする。このとき、$\operatorname{add}_R S \supset \operatorname{add}_R S'$ で

$\operatorname{add}_R S' = \operatorname{add}_R S \iff S = S'$

が容易に示される。

定理 (Artin-Verdier)

$\dim R = 2$ で indecomposable reflexive R-modules は同型類の意味で有限個とする。このとき

(a) Ω は finite Galois extension of K でその Galois 群を G とすれば

(b) R の Ω での integral closure S は regular であり、$S^G = R$. そこで analytically independent elements $X, Y \in S$ を $S = \mathbb{C}[[X, Y]]$ととることができて、G の S への作用は linear である。

実際、(a) は infinite とすれば

$R \subsetneqq S_1 \subsetneqq \cdots$

なる無限列があり、S_i は R-reflexive

だから、これは成立しない。
(b) は Mumford の定理による。

文献案内

本稿で紹介したのは

- M. Auslander, Isolated singularities and existence of almost split sequences, Proc. of Ottawa Conference (1985)
- M. Auslander, Rational singularities and almost split sequences (preprint)

話題(1)については

- M. Auslander, Functors and morphisms determined by objects, Proc. of Conference on Representation Theory, Philadelphia 1976, Marcel Dekker,

(1978), 1-244

話題(2)については.

- M. Artin-J.L. Verdier, Reflexive modules over rational double points, Ann. 270 (1985), 78-82
- J. Mckay, Graphs, singularities and finite graphs, Proc. Symp. Pure Math. 37, (1980), 183-186.

なお体上の多元環の表現論の概要については, 山形氏の稿を参照されたい。また本稿の可換環論の準備的知識及び本稿で紹介したAuslanderの仕事の可換環論に於ける意味については 吉野氏の稿を参照されたい。

また本稿では具体例及び(古典的な)整環の表現に於けるAR列及びAR quiverについては 1984年に数理研での整数表現についてのシンポジウムでの岩永氏の

講演録がある。その References も併わせて参照されたい。

◦ 岩永恭雄, 整環の表現に於ける Auslander-Reiten Quiver. (1984)

有限表現型多元環の multiplicative basis の存在

小山法孝（筑波大学・数学系）

本稿では次の論文　R. Bautista, P. Gabriel, A.V. Roiter, L. Salmerón "Representation-finite algebras and multiplicative bases" Invent. math. 81, 217–285 (1985) の主要部分の解説をする。

k を algebraically closed field, A を k 上有限次元の associative algebra ($\ni 1$) とする。A の vector-space basis はその任意の2つの basis-vector の積が basis vector かまたは 0 になるとき multiplicative であるという。full matrix-algebras, group algebras, quiver-algebras は明らかに multiplicative basis をもつが、もちろんそうでない例がある。本論文の主定理は A が representation-finite, すなわち有限次元直既約左(右) A-加群の同型類が有限個しか存在しないならば、

Aはmultiplicative basisをもつということである。ただし、ここで構成するmultiplicative basisは互いに直交する原始的巾等元の完全系を1つ含み、またradicalの生成元も含む。従ってgroup algebrasにおける標準的なそれと異なり、algebraのstructureを考えるのに便利なものである。実はこの定理は先にRoiterが単独で証明しているのであるが(R)、本論文では他の問題とも関連してより証明方法が整理されている。

この定理の系として、各次元におけるrepresentation-finite algebrasの同型類の数が有限個であることがわかる。これは、Gabrielの研究(G1)と合わせて、k^n上のalgebra-structuresのgenerically non-isomorphic irreducible infinite algebraic familyの各memberがrepresentation-infiniteであることを示す(G2, 7.2)。

また主定理と関連して、いくつかの興味深い結果が得られる。まず、char $k \neq 2$のとき、representation-finite algebrasはすべてstandardであることが示され、一般には、Aがideal-finiteであるという仮定の下でAがrepresentation-finiteであることと、Aのstandard form (degeneration)がrepresentation-finiteであることの同値が示される。

また standard性の応用例として、Bongartzらの研究(Bなど)と合わせて、representation-finite algebrasの分類問題が、quiver(有向グラフ)の組み合わせの問題に帰することがわかる。さらにこの分類をもとにして、second Brauer-Thrall conjectureを肯定的に解決したNazarova-Roiterの定理(NR)のわかりやすい別証明が与えられている(BFT)。

本論文の主部をなすのは 1) singular pathsの構造 2) contoursの分類 3) cohomology group $H^2(\vec{\Lambda}, k^*)$ の研究である。手法の中心は cleaving functors(主に full embeddings, Galois coverings)の使用によって Gabriel-quiverのつながり方、およびrelationsの可能性を限定していくことにある。本稿では、上の1) 2) 3)の概念を解説し、それらを用いて、char $k \neq 2$ のときの主定理の証明方法を述べた。紙数の関係で cleaving functorsの使用例や、char $k = 2$ のときの Riedtmann contoursの話(これもおもしろいのだが)はごきなかった。

§1. 主な結果

k上有限次元の algebrasの表現を考えるのであるが、

covering theory への応用のため、また整理がしやすいこともあって、locally bounded category と、そこから k-vector space category への k-linear functors を考える。

<u>Definitions</u> • category Λ は各 morphism set $\Lambda(x,y)$, $x,y\in\Lambda$, が k-vector space の構造をもち、composition が bilinear であるとき、k-category であるという。

• k-category Λ は次の条件をみたすとき locally bounded であるという。 1) $x,y\in\Lambda$ に対し、$x\cong y \Rightarrow x=y$

2) 各 $x\in\Lambda$ について、$\Lambda(x,x)$ は local k-algebra

3) 各 $x\in\Lambda$ について $\sum_{y\in\Lambda}[\Lambda(x,y):k]<\infty$ かつ $\sum_{y\in\Lambda}[\Lambda(y,x):k]<\infty$

• I が k-category Λ の ideal であるとは各 $x,y\in\Lambda$ に対し、subspaces の family $I(x,y)\subseteq\Lambda(x,y)$ が与えられ、すべての $x,y,z\in\Lambda$ に対し、$I(x,y)\Lambda(y,z)\subseteq I(x,z)$, $\Lambda(x,y)I(y,z)\subseteq I(x,z)$ をみたすことをいう。(compositions は左から右へ書く。)

• locally bounded category Λ の ideal J は、すべての non-invertible morphisms によって生成されているとき、radical であるという。

• k-category Λ から k-vector space category への contravariant k-linear functor M を Λ-module という。

以後 $\dim M = \sum_{x\in\Lambda}[M(x):k] < \infty$ のものだけを考える。submodules, factor modules, direct sums などは自然なものとする。

• locally bounded category Λ は、各 $x \in \Lambda$ に対して、$M(x) \neq 0$ なる indecomposable Λ-modules が高々有限個しか存在しないとき、locally representation-finite であるという。

locally bounded category Λ に対し、その Gabriel-quiver $Q = Q_\Lambda$ をつぎのようにつくる。

$$\left\{\begin{array}{lll} \text{vertices} & \cdots\cdots & \text{objects of } \Lambda \\ \text{arrows} & \cdots\cdots & [J(x,y)/J^2(x,y) : k] = d \text{ のとき} \\ & & x \underbrace{\rightrightarrows}_{d\text{本}} y \end{array}\right.$$

Q は Λ に対して一意的に定まり、Q からつくられる k-free category kQ から Λ への presentation (surjective k-linear functor) $\pi : kQ \to \Lambda$ をつくることができる。(以後 Q の arrow α に対して $\pi(\alpha) = \bar{\alpha}$ などと書く。) この kernel を $R = R^\pi$ とおく。presentation のとり方はいろいろ考えられるのだが、そのうちできるだけわかりやすいものをとることがこれからの課題になる。

Definition locally bounded category Λに対する presentation π が normed

$\underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow}$ R^{π}の生成系として

i) paths u

ii) differences $v-w$

ここに v, w は始点, 終点をともにする paths $x \underset{\underset{w}{\cdots}}{\overset{\overset{v}{\cdots}}{\rightrightarrows}} y$ (parallel paths)

から成るものが取れる。

Roiter's normalization theorem [RNT]

Λ : locally representation-finite

$\Rightarrow$ Λに対し, normed presentationがある。

以下, 関連する諸結果についての説明をする。

locally bounded category Λ はその idealsのなす lattice が distributive であるとき, distributive であるという。よく知られているように, この条件は「各$x \in \Lambda$に対し, $\Lambda(x, x) \cong k[T]/T^{d_x}$, $\exists d_x \geqq 1$ かつ 各$x, y \in \Lambda$に対し $\Lambda(x, y)$は$\Lambda(x, x)$または$\Lambda(y, y)$上でcyclicである」ということと同値である。

Λ: locally representation-finite
$\Rightarrow \Lambda$: distributive　(Jans (J))

distributive category Λ は各 ideal $I \neq 0$ に対し Λ/I が locally representation-finite であるという性質をもつとき mild であるという。 locally bounded category Λ に対し presentation π は、R^{π} の生成系として、

i) paths u
ii) differences $v - \lambda w$
　ここに v, w は parallel paths, $\lambda \in k$

から成るものが取れるとき semi-normed ということにすると、次の定理が成り立つ。

<u>Roiter's semi-normalization theorem [RST]</u>

Λ: mild $\Rightarrow$ Λ に対し、semi-normed presentation がある。

この定理は [RNT] への重要な step になる。

<u>Example</u>　distributive category で semi-normed presentation が存在しない例。

$$\mathrm{char}\,k = p > 0, \quad \begin{tikzcd} 1 \arrow[loop left, "\sigma"] \arrow[r, "v"] & 2 \arrow[loop right, "\rho"] \end{tikzcd}, \quad \begin{cases} \sigma^2 = \rho^{p+2} = 0 \\ \sigma v = v\rho^{p}(1+\rho) \end{cases}$$

以後 distributive category Λ に対して、その骨格にあたるような次の category $\vec{\Lambda}$ を考える。まず、$\mu, \nu \in \Lambda(x, y)$ に対し次のような同値関係を考える。

$$\mu \sim \nu \underset{\text{def.}}{\Longleftrightarrow} \exists \text{automorphisms } \rho, \sigma \; ; \; \nu = \sigma\mu\rho$$

μ の同値類を $\vec{\mu}$ と書き、x から y への ray という。

category $\vec{\Lambda}$ は次から成る。

- objects ……　Λ と同じ
- morphisms from x to y ……rays from x to y
- compositions ……　$\vec{\mu} \in \vec{\Lambda}(x, y)$, $\vec{\nu} \in \vec{\Lambda}(y, z)$ に対し、μ, ν の代表元の取り方によらず $\mu\nu$ の類が定まるならば $\vec{\mu}\vec{\nu} = \overrightarrow{\mu\nu}$ とし、そうでないときは $\vec{\mu}\vec{\nu} = \vec{0}$ とする。

$P = \vec{\Lambda}$ は次の性質をもつ。

1) 各 $x, y \in P$ に対し、$P(x, y)$ は zero-morphism をもつ。
(以後、P は zeros をもつという。)

2) $\rho \in P(x, x)$ に対し、ρ : nilpotent $\Leftrightarrow$ $\rho \neq 1\!\!1_x$

3) $x, y \in P$ に対し、$x \cong y \Rightarrow x = y$

4) 各 $x \in P$ に対し、$\displaystyle\sum_{y \in P} |P(x, y) \setminus \{{}_x0_y\}| < \infty$

$\displaystyle\sum_{y \in P} |P(y, x) \setminus \{{}_y0_x\}| < \infty$

5) 各 $x, y \in P$ に対し、$P(x, y)$ は次によって linearly ordered.

$\mu, \nu \in \mathcal{P}(x, y)$ に対し、

$\mu \leqq \nu \underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} {}^{\exists}$endomorphisms ρ, σ ; $\nu = \sigma\mu\rho$

6) $\mu\nu = \mu\rho\nu \neq 0 \Rightarrow \rho$ は identity.

一般に上の 1)〜4) をみたす $\mathcal{P}$ を base-category, さらに 5) 6) をみたすとき ray-category ということにする。これらの category に対しても その Gabriel-quiver $Q_{\mathcal{P}}$ を考えることができる。そこでは $\mathcal{P}$ の irreducible morphisms (non-invertible morphism で 2つ以上の non-invertible morphisms の合成にはなりえないもの) と $Q_{\mathcal{P}}$ の arrows が 1:1 に対応する。以後 $Q_{\mathcal{P}}$ の arrow α に対し、対応する irreducible morphism を $\vec{\alpha}$ と書き、path $u = \alpha_1 \cdots \alpha_n$ に対し、$\vec{u} = \vec{\alpha_1} \cdots \vec{\alpha_n}$ とする。さて、zeros をもつ category $\mathcal{P}$ に対して、morphisms sets を線型化することによって k-category $k(\mathcal{P})$ がつくられるが、このとき次が成り立つ。

$\mathcal{P}$: base category $\Leftrightarrow k(\mathcal{P})$: locally bounded

(この状況において $Q_{\mathcal{P}}$ から自然に $k(\mathcal{P})$ の normed presentation が与えられることに注意。)

$$P : \text{ray-category} \Leftrightarrow k(P) : \text{distributive}$$
$$\text{かつ } P \cong \overrightarrow{k(P)}$$

distributive category Λ に対し、$k(\vec{\Lambda})$ をその standard form (degeneration) という。特に $\Lambda \cong k(\vec{\Lambda})$ のとき、Λ は standard であるという。Λ が locally representation-finite のとき、これらの定義は (BoG, 5) のものと一致する (BrG)。これらの概念のもとでいくつかの大切な結果が与えられる。

Theorem 1.　　char $k \neq 2$ とするとき

Λ : mild かつ infinite chain を含まない

$\Rightarrow \Lambda$: standard

ここに base-category P に対し、non-zero morphisms の列

$$x_0 \xrightarrow{\rho_1} z_1 \xleftarrow{\sigma_1} x_1 \xrightarrow{\rho_2} z_2 \xleftarrow{\sigma_2} x_2 \quad \cdots\cdots \quad z_{n-1} \xleftarrow{\sigma_{n-1}} x_{n-1} \xrightarrow{\rho_n} z_n$$

(最後はどちら向きで終わっても可)

で、各 i に対し、$\sigma_{i-1} = \rho_i \xi$, $\rho_i = \sigma_{i-1}\xi$, $\rho_i = \xi\sigma_i$, $\sigma_i = \xi\rho_i$ のどの1つも解 ξ をもたないようなものを chain という。distributive category Λ は $\vec{\Lambda}$ がそのような無限の列を含むとき、infinite chain を含むという。

Lemma 1.

Λ : locally representation-finite

$\Rightarrow$ Λ は infinite chain を含まない.

char $k=2$ のとき, representation-finite category で standard でない例をあとで示す。(penny-farthing)

Theorem 2

Λ : mild かつ infinite chain を含まない

$\Rightarrow$ Λ に対して normed presentation が存在する.

Lemma 1 と合わせて, この定理は [RNT] を含むものである。主定理はこの形で証明されるのである。

Theorem 3

distributive category Λ に対して,

Λ が locally representation-finite (resp. mild)

$\Leftrightarrow$ $k(\vec{\Lambda})$ が locally representation-finite (resp. mild)

この定理は特に char $k=2$ のとき大切である。Λ が locally representation-finite のときは, Λ と $k(\vec{\Lambda})$ の Auslander-Reiten quiver が一致することも調べられている (BoG, 5)。

§2. 主定理の証明方法（char $k\neq 2$のとき）

1. singular paths の構造

<u>Definition</u> distributive category Λ の（Q_Λの）paths $v=\alpha_1\cdots\alpha_n$ は次の3種に分けられる。
presentationsの取り方によらず $\overline{\alpha_1}\cdots\overline{\alpha_n}\neq 0$ のとき v は stable であるといい、presentationsの取り方によらず $\overline{\alpha_1}\cdots\overline{\alpha_n}=0$ のとき v は zero-path であるという。どちらでもないとき、v は singular であるという。

<u>Example</u>

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha"'] & 2 \arrow[r, "\beta"'] \arrow[loop above, "\rho"] & 3 \end{tikzcd}, \quad 0=\rho^2=\alpha\beta$$

において、path $\alpha\beta$ は singular.

singular paths について次が成り立つ。

<u>Lemma 2.</u> mild category Λ に対して

1) $x_0 \xrightarrow{\alpha_1} x_1 \cdots\cdots x_{n-1} \xrightarrow{\alpha_n} x_n$ が singular path
$\Rightarrow \exists 1\ i\in\{1,\cdots,n-1\}$; $\alpha_i\alpha_{i+1}$ が singular path. このとき $\Lambda(x_{i-1},x_i)$ は $\Lambda(x_{i-1},x_{i-1})$ 上で cyclic でないし、$\Lambda(x_i,x_{i+1})$ は $\Lambda(x_{i+1},x_{i+1})$ 上で cyclic でない。

2) 1つの arrow を共有するような 2つの singular paths は一致する。

<u>Corollary 1.</u> mild category Λ に対して、各 singular path を annihilate する presentation が存在する。

ここで path についての定義を1つしておく。

Λ: distributive とする。$J(x,y)\neq 0$ なる各 $x,y\in\Lambda$ に対し、stable path $x=x_0\xrightarrow{\alpha_1}x_1\cdots x_{n-1}\xrightarrow{\alpha_n}x_n=y$ で $\overline{\alpha_1}\cdots\overline{\alpha_n}$ が bimodule $J(x,y)$ を生成するものを1つ選んで $\pi(x,y)$ とおく。Λ の path v; $a-\cdots\rightarrow x$ は $\pi(a,a)v$ も $v\pi(x,x)$ も zero-path になるとき deep という。

2. contours の分類

P を base-category としていくつか定義をする。

<u>Definitions</u> • P の (Q_P の) 2つの paths v, w は次の relation R で生成される同値関係に含まれるとき interlaced ($v\approx w$) という。すなわち、

$(v,w)\in R \underset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \exists$ paths p, v_1, w_1, q ; $v=pv_1q$, $w=pw_1q$, $\vec{v_1}=\vec{w_1}\neq 0$, $\mathrm{length}(p)+\mathrm{length}(q)\geq 1$

• P の2つの paths の pair (v,w) は $\vec{v}=\vec{w}\neq 0$ のとき

contourであるという。contour (v,w) は $v \neq w$ のとき essential であるという。また contour (v,w) は v,w が deep であるとき deep という。

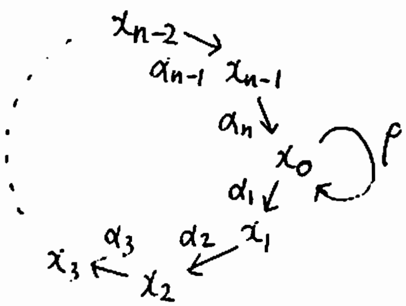
<u>Examples</u>

1) category B が

$$\begin{tikzcd} y \arrow[loop left, "\sigma"] \arrow[r, "v"] & x \arrow[loop right, "\tau"] \end{tikzcd}, \qquad \left| \begin{array}{l} 0 = \sigma v - v\tau = \sigma^s = \tau^r \\ \inf(s,r) = 3 \\ \sup(s,r) \leqq 5 \end{array} \right.$$

で定められているとき、$(\sigma v, v\tau)$ は non-deep essential contour になる。$(\sigma v, v\tau)$ を dumb-bell という。

2) category P が



<u>case 1</u> (standard case)

$$0 = \alpha_{i+1} \cdots \alpha_n \rho \alpha_1 \cdots \alpha_{fi} = \alpha_n \alpha_1 = \alpha_1 \cdots \alpha_n - \rho^2$$

または <u>case 2</u> (non-standard case)

$$0 = \alpha_{i+1} \cdots \alpha_n \rho \alpha_1 \cdots \alpha_{fi} = \alpha_n \alpha_1 - \alpha_n \rho \alpha_1 = \alpha_1 \cdots \alpha_n - \rho^2$$

(どちらの case においても $f : \{1, \cdots, n-1\} \to \{1, \cdots, n\}$ は non-decreasing function を表わし、case 2 に

おいては．さらに char $k=2$ で，$f=1$ (constant) ではないとする。

で定められているとき，$(\alpha_1\cdots\alpha_n, f^2)$ は non-deep essential contour になる。$(\alpha_1\cdots\alpha_n, f^2)$ を penny-farthing という。（この non-standard case は．representation-finite であり．standard でない例になる。）

3) category D が

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & y \arrow[dl, shift left, "\kappa"] \arrow[dr, shift left, "\beta"] & \\ t \arrow[ur, shift left, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & x \arrow[ul, shift left, "\lambda"] \\ & z \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd}, \quad 0=\alpha\beta-\gamma\delta=\kappa\alpha=\beta\lambda=\lambda\kappa$$

で定められているとき，$(\alpha\beta, \gamma\delta)$ は non-deep essential contour になる。$(\alpha\beta, \gamma\delta)$ を diamond という。

上の3種類の category はいずれも representation-finite である。

<u>Lemma 3.</u> mild category Λ において

1.) Λ の non-deep essential contour は，dumb-bell, penny-farthing または diamond である。

2) 1つの arrow を共有するような2つの non-deep essential contours は等しい。

上の1)の意味をきちんというと次のようになる。まず(v,w)をnon-deep essential contourとするとき，$\Gamma = \Lambda\{v,w\}$（v,wが通るobjects全体によるfull sub-category）はB, $\mathcal{L}$, $\mathcal{D}$のいずれかと同型である。するとExamplesの中のようにQ_Γとpresentationが取れるわけだが，そのQ_Γの中で(v,w)に対応するものが先のdumb-bell，penny-farthingまたはdiamondになっているということである。

3. cohomology group $H^2(\vec{\Lambda}, k^{\cdot})$

category $\mathcal{L}$はzerosをもつとする。$\mathcal{L}$のn-simplex $(n \geqq 1)$とは$\mathcal{L}$のmorphismsの列$(\sigma_1, \cdots, \sigma_n)$で$\sigma_1 \cdots \sigma_n \neq 0$であるものをいう。$0$-simplexとは$\mathcal{L}$のobjectのこととする。$n$-simplicesの全体をbasisとする$\mathbb{Z}$-linear combinationsのなすsetを$C_n\mathcal{L}$として，次の$\mathbb{Z}$-linear degeneracy operators $d_n^i : C_n\mathcal{L} \to C_{n-1}\mathcal{L}$を考える。

$$\begin{cases} d_1^0\sigma = \text{range of } \sigma, \quad d_1^1\sigma = \text{domain of } \sigma \\ d_n^0(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = (\sigma_2, \cdots, \sigma_n), \quad 2 \leqq n \\ d_n^i(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = (\sigma_1, \cdots, \sigma_{i-1}, \sigma_i\sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}, \cdots, \sigma_n), \quad 0 < i < n \\ d_n^n(\sigma_1, \cdots, \sigma_n) = (\sigma_1, \cdots, \sigma_{n-1}), \quad 2 \leqq n \end{cases}$$

$$d_n\sigma = d_n^0\sigma - d_n^1\sigma + d_n^2\sigma - \cdots + (-1)^n d_n^n\sigma, \quad \sigma \in C_n\Gamma$$

とおいて chain-complex

$$\cdots \to C_{n+1}\Gamma \xrightarrow{d_{n+1}} C_n\Gamma \xrightarrow{d_n} C_{n-1}\Gamma \to \cdots \to C_1\Gamma \xrightarrow{d_1} C_0\Gamma$$

をつくる。これから induce される cochain-complex

$$C^{\cdot}(\Gamma, Z) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_{\cdot}\Gamma, Z), \quad Z: \text{abelian group}$$

の cohomology groups を $H^n(\Gamma, Z)$ とかく。

Λ: distributive とする。各 non-zero ray $r \in \vec{\Lambda}(x, y)$ に対し、$\overline{g(r)} = r$ なる代表元 $g(r) \in \Lambda(x, y)$ を fix する。すると、各 2-simplex (r, s) に対し、$c(r, s) \in k^{\cdot} = k \setminus \{0\}$ を $g(r)g(s) - c(r, s)g(rs)$ が $g(rs)$ で生成される bimodule $\Lambda_{g(rs)}$ の radical に含まれるように取れる。$c: C_2\vec{\Lambda} \to k^{\cdot}$ は cocycle condition をみたし、さらに $\bar{c} \in H^2(\vec{\Lambda}, k^{\cdot})$ は $g(r)$ の取り方によらない。逆に、Γ: base-category, $c \in C^2(\Gamma, k^{\cdot})$ を 2-cocycle とするとき、locally bounded category $k^c(\Gamma)$ が次のように構成できる。

objects ..... $k(\Gamma)$ と同じ

morphisms ..... 〃

compositions ..... $\begin{cases} 0 \neq rs \in \Gamma \text{ のとき } r \overset{c}{\cdot} s = c(r, s)rs \\ 0 = rs \quad \text{ のとき } r \overset{c}{\cdot} s = 0 \end{cases}$

このとき，c, d が cohomologous $\Rightarrow k^c(\mathcal{P}) \cong k^d(\mathcal{P})$

Lemma 4.

$\mathcal{P}$：ray-category かつ infinite chain を含まないとし，
$\mathcal{P}$の各点から始まる arrows は高々3本
〃　に終わる　〃　〃　とする。
$\Rightarrow$ 各 abelian group Z とすべての $n \geqq 2$ に対して
$H^n(\mathcal{P}, Z) = 0$

4. char $k \neq 2$ のときの主定理の証明

Theorem 1 の証明

まず Corollary 1. により各 singular path を annihilate するような presentation $\xi \mapsto \overline{\xi}$ が取れる。これから新しい presentation $\xi \mapsto \tilde{\xi}$ を次のように定める。各 dumbbell $(\sigma v, v\tau)$ に対しては $\overline{\sigma}\overline{v} = \overline{v}\overline{\tau}$ち なる ち によって $\tilde{\tau} = \overline{\tau}$ち とする。各 penny-farthing $(\alpha_1 \cdots \alpha_n, \rho^2)$ に対しては $\overline{\alpha_1} \cdots \overline{\alpha_n} = \overline{\rho}^2(a^2 + b\overline{\rho})$ なる $a, b \in k$ を取り，$\tilde{\rho} = \overline{\rho}(a + 2^{-1}a^{-1}b\overline{\rho})$ とする。各 diamond $(\alpha\beta, \gamma\delta)$ に対しては $\overline{\gamma}\overline{\delta} = \overline{\alpha}\overline{\beta}\eta$ なる η によって $\tilde{\beta} = \overline{\beta}\eta$ とする。さらにこれら以外のものに対しては $\tilde{\xi} = \overline{\xi}$ とする。すると Lemma 2. より長さ2の singular path は τ, ρ, β を決して含まないことが言えるので，

Lemma3. より新しいpresentationは各singular pathをannihilateしていてさらにsemi-normedである。すると、Λはある$k^c(\vec{\Lambda})$に同型であるから、$H^2(\vec{\Lambda}, k^*) = \{1\}$が言えれば$\Lambda \cong k(\vec{\Lambda})$が示せたことになる。$\vec{\Lambda}$がLemma4.の仮定をみたしていないときは、$\Lambda$が次の2つのcategoriesのどちらか、またはそのdualに同型になることは明らかであり、この場合$H^2(\vec{\Lambda}, k^*) = \{1\}$はすぐわかる。

1)
$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr] & \\
2 \arrow[r] & 5 \\
3 \arrow[ur] & \\
4 \arrow[uur] &
\end{tikzcd}$$

2)
$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[dr, "\alpha"] & \\
2 \arrow[r, "\beta"] & 4 \arrow[loop right, "\rho"] \\
3 \arrow[ur, "\gamma"] &
\end{tikzcd}$$

$$0 = \alpha\rho = \beta\rho = \gamma\rho = \rho^2$$

References

(B) Bongartz, K. ; A criterion for finite representation type. Math. Ann. 269, 1-12 (1984)

(BoG) Bongartz, K., Gabriel, P. ; Covering spaces in representation theory. Invent. Math. 65, 331-378 (1982)

(BrG) Bretscher, O., Gabriel, P. ; The standard form of a representation-finite algebra.

Bull. Soc. Math. Fr. 111, 21-40 (1983)

(BrT) Bretscher, O., Todorov, G.; On a theorem of Nazarova and Roiter. Preprint

(G1) Gabriel, P.; Finite representation type is open. Proc. Ottawa 1974. Springer Lect. Notes 488, pp. 132-155

(G2) Gabriel, P.; Auslander-Reiten sequences and representation finite algebras. Proc. Ottawa 1979. Springer Lect. Notes 831, pp. 1-71

(J) Jans, J.; On the indecomposable representations of algebras. Ann. Math. 66, 418-429 (1957)

(NR) Nazarova, L.A., Roiter, A.V.; Categorical matrix problems and the Brauer-Thrall conjecture. Preprint Kiev (1973). German version in: Mitt. Math. Semin. Giessen 115, 1-153 (1975)

(R) Roiter, A.V.; Generalization of Bongartz's theorem. Preprint Math. Inst. Ukranian Acad. of Sciences, pp. 1-32, Kiev (1981)

Vector Space Category とその整環の表現への応用

西田憲司　　長崎大 教養

整環の表現をより扱い易い，あるいは計算可能な他のカテゴリーへ移して研究することが最近の多元環の表現論の展開により可能になってきた。ここではどのように移すか＝表現同値の方法を次の2つの型の整環に対して述べる。

1) ある遺伝的整環 Γ があって $\mathrm{Rad}\,\Gamma \subset \Lambda \subset \Gamma$ となっている整環 Λ,

2) 巡回 p-群 C 上の群環 $\Lambda = RC$,

ここで R は完備な離散付値環である。1) については [5,6,7,9] の，2) は [4] の結果の紹介である。

§1 Vector space category とその factor space category

R は環，$\mathcal{K}$ は加法的かつ $\forall X \in \mathcal{K}$ に対し $\mathrm{End}_{\mathcal{K}} X$ は局所環，を満たすカテゴリーとする。このとき $(\mathcal{K}, |\cdot|)$

が $(R-)$ module category とは $^{\exists}|\ |: \mathcal{K} \to \mathrm{mod}\,R$ は加法的共変関手なることとする。R が体のときは $(\mathcal{K}, |\ |)$ を vector space category と呼ぶ（[8], [11]）。$(\mathcal{K}, |\ |)$ の factor space category $V(\mathcal{K})$ を次のように定める。$V(\mathcal{K})$ のの object は組 (U, X, φ) で $U \in \mathrm{mod}\,R$, $X \in \mathcal{K}$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(|X|, U)$ とし、射 $(u, f) \in V(\mathcal{K})(Z, Z')$, $Z = (U, X, \varphi)$, $Z' = (U', X', \varphi')$ は $u \in \mathrm{Hom}_R(U, U')$, $f \in \mathcal{K}(X, X')$ で $u\varphi = \varphi'|f|$ を満たすものとする。vector space category に関する話題については [8] [11] 等を参照されたい。

§2 整環の表現

整環の表現についてはデデキンド環上の場合は [2, 3章, 4章], より一般的な場合は [1, I章 §7～] に系統的に記されている。以下ではここで必要な定義を与える。

定義 2.1　R; デデキンド環, K; R の商体, Σ; 有限次 K-多元環とする。環 Λ が（Σ における）R-整環とは次の1)～3)を満たすこと：

1) R は Λ の中心に含まれる,

2) Λ は有限生成 R-加群，

3) $K\Lambda = \Sigma$，即ち，Λ は Σ の K-基を含む。

<u>定義 2.2</u>　M が Λ-<u>格子</u>（lattice）とは M は Λ-加群かつ有限生成射影的 R-加群であること。

${}_\Lambda\mathcal{L}$ を（左）Λ-格子のなすカテゴリーとする。以下 R は完備付値環で πR はその極大イデアル，Σ は半単純とする。一般に加法的カテゴリー $\mathcal{C}$ に対しその直既約 object のなす full 部分カテゴリーを $\mathrm{ind}\,\mathcal{C}$ と記す。整環の表現の基本的な問題は $\mathrm{ind}\,{}_\Lambda\mathcal{L}$ と $\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$，$^\forall M, N \in {}_\Lambda\mathcal{L}$，を決定することである。さて ${}_\Lambda\mathcal{L}$ の Auslander-Reiten クイバはこの基本問題に関する情報を非常に多く含んでいる。その A R クイバを定義しよう。尚以下で述べることは多元環の場合は講演 I（山形）で述べられたもので，整環の場合も多元環と大体同じことが成り立つ（[10] 等参照）。

<u>定義 2.3</u>　i) $M, N \in \mathrm{ind}\,{}_\Lambda\mathcal{L}$。$\varphi : M \to N$ が<u>既約写像</u>とは；φ は分解する全射でも分解する単射でもなくかつ $\varphi = \beta\alpha$，$\alpha : M \to X$，$\beta : X \to N$，$X \in {}_\Lambda\mathcal{L}$，ならば，$\alpha$ は分解する単射か又は β は分解する全射となる，こととする。

ii) ${}_\Lambda\mathcal{L}$ での完全列 $0 \to L \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} N \to 0$ が <u>almost</u>

split列とは次を満たすこと;

1) この列は分解しない，

2) $L, N \in \mathrm{ind}_\Lambda \mathcal{L}$,

3) $\alpha: N' \to N$, $N' \in {}_\Lambda\mathcal{L}$, が分解する全射でないとき $\alpha': N' \to M$があって$\alpha = \psi\alpha'$となる。

3)' $\beta: L \to L'$, $L' \in {}_\Lambda\mathcal{L}$が分解する単射でないとき $\beta': M \to L'$があって$\beta = \beta'\varphi$となる。

almost split列の定義よりもしこれが存在すれば同型を除いて一意的なので $N = \tau^{-1}L$, $L = \tau N$と記す。

<u>定理2.1</u> 1) $N \in \mathrm{ind}_\Lambda \mathcal{L}$が射影格子でないならば$N$で終るalmost split列が存在する。

2) $L \in \mathrm{ind}_\Lambda \mathcal{L}$が入射格子でないならば$L$から始まるalmost split列が存在する。

注意．射影格子は射影的Λー加群と一致するが入射格子は入射的Λー加群(こちらはR-torsion)と一致しない。

<u>定理2.2</u> $0 \to N \xrightarrow{\oplus \varphi_i} \oplus E_i \xrightarrow{\oplus \psi_i} L \to 0$は almost split列で各$E_i \in \mathrm{ind}_\Lambda \mathcal{L}$とする。このとき

1) 各 φ_i, ψ_i は既約写像である。

2) 逆に $\alpha: X \to L$, $\beta: N \to Y$, $X, Y \in \mathrm{ind}_\Lambda \mathcal{L}$, が既約写像ならば，ある i, j があって $X \cong E_i$, $Y \cong E_j$ となりこの同型により同一視すると $\alpha = \varphi_i$, $\beta = \psi_j$ である。

$M, N \in \mathrm{ind}_\Lambda \mathcal{L}$ に対し

$\mathrm{rad\,Hom}_\Lambda(M, N) = \{ f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N) \mid f$ は非同型写像$\}$

$\mathrm{rad}^2\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N) = \{ f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, N) \mid f = \sum h_i g_i,\ g_i \in \mathrm{rad\,Hom}_\Lambda(M, Z_i),\ h_i \in \mathrm{rad\,Hom}_\Lambda(Z_i, N),\ Z_i \in \mathrm{ind}_\Lambda \mathcal{L} \}$

$\mathrm{Irr}(M, N) = \mathrm{rad\,Hom}_\Lambda(M, N) / \mathrm{rad}^2\mathrm{Hom}_\Lambda(M, N)$

とおく。$\mathrm{Irr}(M, N)$ は左 $\mathrm{End}_\Lambda(M)$, 右 $\mathrm{End}_\Lambda(N)$ − 加群で，R−加群としては長さ有限，従って $\mathrm{End}_\Lambda(M)$, $\mathrm{End}_\Lambda(N)$ − 加群としても長さ有限である。そこで

$$a_{M,N} = \ell\left({}_{\mathrm{End}_\Lambda(M)} \mathrm{Irr}(M, N) \right)$$
$$a'_{M,N} = \ell\left(\mathrm{Irr}(M, N)_{\mathrm{End}_\Lambda(N)} \right)$$

とおく。

<u>定義 2.4</u>　Λ の <u>Auslander-Reiten クイバ</u> $\mathcal{A}(\Lambda)$ (以下 AR クイバと略) とは頂点の集合 $\mathcal{A}_0(\Lambda) = \{ [M] \mid M \in \mathrm{ind}_\Lambda \mathcal{L} \}$, 矢の集合 $\mathcal{A}_1(\Lambda)$ は $\mathrm{Irr}(M, N) \neq 0$ のとき $[M] \xrightarrow{(a_{M,N}, a'_{M,N})} [N]$ からなる。ただし $[M]$ は M を含む Λ−格子の同型類である。又 $a_{M,N} = a'_{M,N} = 1$

のときは $[M] \longrightarrow [N]$ と表わす。

$f \in \mathrm{rad}\,\mathrm{Hom}_\Lambda(M,N)$ が $\bar{f} \neq 0$ in $\mathrm{Irr}(M,N)$ のとき f は既約写像であり，N が非射影 Λ-格子のとき $a_{M,N}$ は N で終る almost split 列の中間項に現れる M の個数であり，M が非入射 Λ-格子のとき $a'_{M,N}$ は M から始まる almost split 列の中間項に現れる N の個数である。このことから AR クイバは almost split 列をはり合わせたものと考えることができる。AR クイバを求めるときはその大まかな形を決めたり，almost split 列のあれこれの性質を調べたり，既約写像の鎖の情報を得たり等してアプローチしていく場合が多い。ここでは factor space カテゴリーとの表現同値を通して $\mathcal{A}(\Lambda)$ に関する情報を得るという研究の一端を紹介する。ここで加法的カテゴリーの間の<u>表現同値</u>とは加法的関手があってそれが dense, full かつ同型を保存することである。

§3 遺伝的整環 Γ があって $\mathrm{rad}\,\Gamma \subset \Lambda \subset \Gamma$ となる Λ の表現

$A = \Lambda/\mathrm{rad}\,\Gamma$，$B = \Gamma/\mathrm{rad}\,\Gamma$ とおくと $A \subset B$ はともに有限次 k-多元環で B は半単純である。ただし

$\bar{k}=R/\mathfrak{r}R$ は R の剰余体。単純左 B-加群の非同型完全代表系を $S_1,\cdots,S_t$ とし $G=\bigoplus_{i=1}^{t} S_i$, $K_i=\mathrm{End}_B S_i$, $K=K_1\times\cdots\times K_t$ とおく。有限生成射影 A-加群からなる mod A の full 部分カテゴリーを pr A と記す。K-module category $(\mathcal{K},|\ |)$ を $\mathcal{K}=\{P\otimes_A G \mid P\in \mathrm{pr}A\}$, $|\ |:\mathcal{K}\to \mathrm{mod}K$ は $|P\otimes_A G|=P\otimes_A G_K$ とおく。$\mathcal{K}(P\otimes_A G, P'\otimes_A G)=\mathrm{Hom}_K(P\otimes_A G, P'\otimes_A G)\cong \mathrm{Hom}_A(P,P')$ である。factor space category $V(\mathcal{K})$ の full 部分カテゴリー $V_1(\mathcal{K})$ を $(0,V_K,0)$ 又は $(P\otimes_A G,0,0)$ を直和因子に持たない objects から成るものとする。

以下しばらく I は Γ-イデアルで $I\subset \mathrm{rad}\,\Gamma$ かつ $I\subset\Lambda\subset\Gamma$ となっている場合を考え, $A=\Lambda/I$, $B=\Gamma/I$ とおく。A, B は $R/R\cap I$-多元環よりアルティン多元環である。カテゴリー $\mathcal{C}$ を その objects は組 (U,V,φ), $U\in \mathrm{mod}A$, $V\in \mathrm{pr}B$, $\varphi:U\to V$ は単射的 A-準同型, $\mathrm{Im}\,\varphi\cdot B=V$ なるもの, 射 $(\alpha,\beta)\in\mathcal{C}((U,V,\varphi),(U',V',\varphi'))$ は $\alpha\in\mathrm{Hom}_A(U,U')$, $\beta\in\mathrm{Hom}_B(V,V')$ で $\beta\varphi=\varphi'\alpha$ を満たすものとする。このとき [5] [9] により次が示された。

<u>定理3.1</u>　表現同値 $\mathbb{F}: {}_\Lambda\mathcal{L}\approx\mathcal{C}$ がある。

<u>証明</u>　<u>$\mathbb{F}$ の構成</u>: $M\in{}_\Lambda\mathcal{L}$ に対し $M\subset M\Gamma$ から

誘導される inclusion を $\varphi: \overline{M} \to \overline{M\Gamma}$, $\overline{M}=M/MI$, $\overline{M\Gamma}=M\Gamma/MI$, とおく。このとき $\mathbb{F}(M)=(\overline{M}, \overline{M\Gamma}, \varphi) \in \mathcal{C}$ は容易に示せる。次に $\alpha \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, M')$, $M, M' \in {}_\Lambda\mathcal{L}$, とする。$\beta: M\Gamma \to M'\Gamma$ は α を拡張したもの, $\overline{\alpha}: \overline{M} \to \overline{M'}$, $\overline{\beta}: \overline{M\Gamma} \to \overline{M'\Gamma}$ は α, β を modulo MI で考えたものとする。このとき $\mathbb{F}(\alpha)=(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$ は $\mathcal{C}$ での射と成る。明らかに $\mathbb{F}: {}_\Lambda\mathcal{L} \to \mathcal{C}$ は関手であり，加法的。<u>$\mathbb{F}$ が dense</u>: $(U, V, \varphi) \in \mathcal{C}$ をとる。$B=\Gamma/I$ で V_B は射影的だから Γ-格子 N があって $N/NI \cong V$。$p: N \to V$ を射影とし $M=p^{-1}(U)$ とおくと $M \in {}_\Lambda\mathcal{L}$。$\varphi(U)B=V$ より $M\Gamma + NI = N$。$I \subset \mathrm{rad}\,\Gamma$ より中山の補題によって $M\Gamma = N$。更に $MI = M\Gamma I = NI$ だから，次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} M/MI & \xrightarrow{\varphi'} & M\Gamma/MI \\ \alpha\downarrow & & \downarrow\beta \\ U & \xrightarrow{\varphi} & V \end{array} \quad , \alpha = (\varphi|_{\mathrm{Im}\,\beta\varphi'})^{-1}\beta\varphi'$$

ここで明らかに α, β は同型であるから $\mathbb{F}(M) \cong (U, V, \varphi)$.
<u>$\mathbb{F}$ が full</u>: $(\alpha, \beta) \in \mathcal{C}(\mathbb{F}(M), \mathbb{F}(M'))$, $M, M' \in {}_\Lambda\mathcal{L}$ とする。$p: M\Gamma \to M\Gamma/MI$, $p': M'\Gamma \to M'\Gamma/M'I$ を各々射影とする。このとき $g: M\Gamma \to M'\Gamma$ があって次は可換

$$\begin{array}{ccc} M\Gamma & \xrightarrow{p} & M\Gamma/MI \\ g\downarrow & & \downarrow\beta \\ M'\Gamma & \xrightarrow{p'} & M'\Gamma/M'I \end{array} 。$$

行完全な可換図式

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M/MI \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"] & M\Gamma/MI \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] & M\Gamma/M \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M'/M'I \arrow[r, "\varphi'"] & M'\Gamma/M'I \arrow[r, "\psi'"] & M'\Gamma/M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

より，$\gamma\psi p = \psi'\beta p = \psi' p' g$ だから次も可換

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & M\Gamma \arrow[r, "\psi p"] \arrow[d, "g"] & M\Gamma/M \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r] & M'\Gamma \arrow[r, "\psi' p'"] & M'\Gamma/M' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

。

従って $\exists f: M \to M'$ で明らかに $\mathbb{F}(f) = (\alpha, \beta)$.

<u>$\mathbb{F}$は同型を保存する</u>：$(\alpha, \beta) = \mathbb{F}(f)$, $f: M \to M'$, $M, M' \in \mathfrak{L}$ とする。(α, β) は $\mathcal{C}$ で同型と仮定する。βが同型だからfから誘導された $g: M\Gamma \to M'\Gamma$ は全型である。従って $M\Gamma = X \oplus \ker g$。$M\Gamma/MI = \beta^{-1}\beta p(M\Gamma) = \beta^{-1}p'g(X) = \beta^{-1}\beta p(X) = p(X)$ $\therefore X + MI = M\Gamma$。中山の補題より $X = M\Gamma$。従って gは同型。よってfも同型。（証明終り）

$I = \mathrm{Rad}\,\Gamma$ の場合にもどる。このとき次がなりたつ。

<u>定理3.2</u>　カテゴリー同値 $\mathbb{G}: \mathcal{C} \approx V_1(\mathcal{X})$ がある.

<u>証明</u>　$Z = (U_A, V_B, \varphi) \in \mathcal{C}$ とし $p: P \to U$ は射影coverに対し $\mathbb{G}(Z) = (P \otimes_A G, V \otimes_B G, \psi)$，$\psi: P \otimes_A G \to V \otimes_B G$，$\psi = \varphi p \otimes 1$，とおく。$P \otimes_A G = 0$ なら $U \otimes_A B \cong U \otimes_A G \otimes_K \mathrm{Hom}_B(G, B) = 0$ だから $UB = 0$ となる。従って $P \otimes_A G \neq 0$。$\therefore G(Z) \in V_1(\mathcal{X})$。射については

canonical に与える。一方 $V_1(\mathcal{K}) \ni Z' = (P \otimes_A \mathfrak{T}, W_K, \psi)$, ψ: $P \otimes_A \mathfrak{T}_K \to W_K$ が与えられたとき ψ の adjoint を $\tilde{\psi}: P_A \to \mathrm{Hom}_K({}_B\mathfrak{T}_K, W_K)_B$ とする。このとき $U_A = \mathrm{Im}\,\tilde{\psi}$, $V_B = \mathrm{Hom}_K(\mathfrak{T}, W)$, φ は canonical inclusion $U \hookrightarrow V$ とおく。W_K 射影的より関手の間の同型 $\mathrm{Hom}_K(\mathfrak{T}, W) \otimes_B - \cong \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Hom}_B(-, \mathfrak{T}), W)$ があり, ${}_B\mathfrak{T}, W_K$ が入射的より右側の関手は完全である。従って $V = \mathrm{Hom}_K(\mathfrak{T}, W)$ は射影的。ψ は全型だから $UB = V$. よって $(U, V, \varphi) \in \mathcal{C}$ となる。$\mathbb{H}(Z) = (U, V, \varphi)$ とおくと, 射についても定められて, 関手 $\mathbb{H}: V_1(\mathcal{K}) \to \mathcal{C}$ が得られ, 作り方から $\mathfrak{G}\mathbb{H} \approx 1_{V_1(\mathcal{K})}$ かつ $\mathbb{H}\mathfrak{G} \approx 1_{\mathcal{C}}$ である。(証明終り)

<u>系</u>. 表現同値 $\mathfrak{G}\mathbb{F}: {}_\wedge\mathcal{L} \approx V_1(\mathcal{K})$ がある。

更に $V_1(\mathcal{K})$ は以下に述べる割合と調べ易いカテゴリー $\mathrm{mod}_{sp}^1 C$ と表現同値になる。

$C = \begin{pmatrix} A & \mathfrak{T} \\ 0 & K \end{pmatrix}$ とおくと C は有限次元多元環である。$\mathrm{mod}_{sp} C$ を射影 socle をもつ有限生成右 C-加群のなすカテゴリー, $\mathrm{mod}_{sp}^1 C$ を射影単純加群を直和因子にもたないものからなる $\mathrm{mod}_{sp} C$ の full 部分カテゴリーとする。$\mathrm{mod}_{sp} C$ が何故容易かというと, 完全列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$, $X, Y, Z \in \mathrm{mod}_{sp} C \Longrightarrow 0 \to \mathrm{soc}\,X \to \mathrm{soc}\,Y \to \mathrm{soc}\,Z \to 0$ も完全, がなりたつからである。さて次がなりたつ。

<u>定理3.3</u>　表現同値 $\mathbb{E}: V_1(\mathcal{X}) \simeq \mathrm{mod}_{sp}^{\urcorner} C$ がある。

<u>証明</u>　一般に C-加群は $X = (U, V, \varphi)$, $U \in \mathrm{mod}\,A$, $V \in \mathrm{mod}\,K$, $\varphi: U \otimes_A \mathbb{G} \to V$ と表わせる。$\tilde{\varphi}: U \to \mathrm{Hom}_K(\mathbb{G}, V)$ を φ の adjoint とする。すると $\mathrm{soc}\,X = (\ker\tilde{\varphi}, V, \varphi')$, $\varphi': \ker\tilde{\varphi} \otimes \mathbb{G} \to V$ は φ から誘導されたもの、である。一方、C の形と $K = \prod K_i$, K_i は斜体, より単純射影加群は $(0, K_i, 0)$ の形をしている。従って $X \in \mathrm{mod}_{sp} C \Leftrightarrow \tilde{\varphi}$ は mono. である。
$V_1(\mathcal{X}) \ni Z = (Y \otimes_A \mathbb{G}, W, \psi)$ とする。$U_A = \mathrm{Im}\,\tilde{\psi}$ とおき canonical inclusion $U_A \hookrightarrow \mathrm{Hom}_K(\mathbb{G}, W)$ の adjoint を $\varphi: U \otimes_A \mathbb{G} \to W$ とする。$\mathbb{E}(Z) = (U, W, \varphi) \in \mathrm{mod}_{sp}^{\urcorner} C$ であり、射について canonical に定めると $\mathbb{E}$ は表現同値となる(証明終り)

<u>系.</u> 表現同値 $\mathbb{E}\mathbb{G}\mathbb{F}: {}_{\Lambda}\mathcal{L} \simeq \mathrm{mod}_{sp}^{\urcorner} C$ がある。

<u>注意.</u> 1.　B が半単純(即ち, $I = \mathrm{rad}\,\Gamma$)が効いて, わかり易い $\mathrm{mod}_{sp}^{\urcorner} C$ が現われた。

2.　$\mathbb{E}\mathbb{G}\mathbb{F}$ は AR quiver をほとんど保っている。その関係も完全にわかっている([7, 定理C])。

3.　$\mathrm{mod}_{sp} C$ については Simson [11] 等を参照されたい。

§4 巡回 p-群の表現

Dieterich [4] の結果を紹介する。彼の行き方は従来から整数表現で用いられてきた方法，即ち，extension group を用いる方法（例えば [2] 4章§34参照）を module category の factor space category へ adapt するのである。これを見ると module category は案外広い範囲に適用できる考えであることがわかる。

次の記号を使う。

$\Lambda = RC$；C は巡回 p-群で位数 $|C|$

R；完備付値環で素元は π，その商体を K とする

v；R の指数付値で $0 < v(p) < \infty$。従って $\mathrm{char}\, K = 0$，$\mathrm{char}\, R/\pi R = p$。

§4A カテゴリー $\mathcal{F}(\Lambda)$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{N}\delta$

X を不定元として $\sigma(X) = X^{|C|-1} + \cdots + X + 1$ とおく。$C = \langle g \rangle$，g は C の生成元，とする。

$$\bar{\Lambda} = \Lambda/\sigma(g)\Lambda \cong R[X]/\sigma(X)R[X]$$

$$K\bar{\Lambda} = K\Lambda/\sigma(g)K\Lambda \cong K[X]/\sigma(X)K[X]$$

とおくと，$\bar{\Lambda}$ は $K\bar{\Lambda}$ の中の R-整環である。標準全射 $\Lambda \to \bar{\Lambda}$ による g の像を γ とおく。$\sigma(1) = |C|$ だから

$\sigma(X) = |C| - (X-1)\tau(X)$, $\tau(X) \in R[X]$, とかけるので $\bar{\Lambda}$ へ移って $|C| = (\gamma - 1)\bar{\delta}$, $\gamma = X + \sigma(X)R[X]$, $\bar{\delta} = \tau(X) + \sigma(X)R[X]$, とかける。これをまとめて

<u>補題4.1</u>　$\bar{\Lambda}$ において $|C| = (\gamma-1)\bar{\delta}$ である。

注意.　$M \in {}_{\bar{\Lambda}}\mathcal{L}$ のとき $(\gamma-1)m = 0$ 又は $\bar{\delta} m = 0$ $(m \in M)$ ならば $m = 0$ であり，この事実はしばしば使われる。

$\bar{R} = R/|C|R$ とおく。補題4.1より ${}^{\forall}N \in {}_{\bar{\Lambda}}\mathcal{L}$ に対し $N/(\gamma-1)N \in \mathrm{mod}\,\bar{R}$ より $\bar{R}$－線形関手 $|\ |: {}_{\bar{\Lambda}}\mathcal{L} \to \mathrm{mod}\,\bar{R}$ がある。ここで $|N| = N/(\gamma-1)N$, $\nu: N \to N'$ が ${}_{\bar{\Lambda}}\mathcal{L}$ の射のとき $|\nu|: |N| \to |N'|$ は $|\nu|(\bar{n}) = \overline{\nu(n)}$, $n \in N$, で定める。又 $\bar{R}$－線形関手とは対応する射の間の写像が $\bar{R}$－線形になっていることを意味する。$({}_{\bar{\Lambda}}\mathcal{L}, |\ |)$ は $\bar{R}$-module category である。

<u>定義4.1</u>　$V({}_{\bar{\Lambda}}\mathcal{L})$ の full 部分カテゴリー $\mathcal{F}(\Lambda)$ を，その objects は組 (N, L, φ), $N \in {}_{\bar{\Lambda}}\mathcal{L}$, L は有限生成入射的 $\bar{R}$－加群, $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\bar{R}}(|N|, L)$ とし，射 $(N, L, \varphi) \to (N', L', \varphi')$ は $(|\nu|, \lambda)$ で $\nu \in \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(N, N')$, $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\bar{R}}(L, L')$ で

$$\begin{array}{ccc} |N| & \xrightarrow{\varphi} & L \\ {\scriptstyle |\nu|}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \lambda} \\ |N'| & \xrightarrow{\varphi'} & L' \end{array}$$

は可換なもの，と定める。

$\bar{R}$は自己入射環だから上の $L \cong \bar{R}^{(m)}$ である。

<u>定義 4.2</u>　カテゴリー $\mathcal{M}$ を次で定める。その objects は $(N, L, [\varphi])$ で $N \in {}_{\bar{\Lambda}}\mathcal{L}$, $L \in {}_R\mathcal{L}$, $[\varphi] \in \mathrm{Hom}_R(N, L)/\mathrm{Hom}_R(N, L)(\gamma - 1)$ とし，射 $(\nu, \lambda) : (N, L, [\varphi]) \to (N', L', [\varphi'])$ は $\nu \in \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(N, N')$, $\lambda \in \mathrm{Hom}_R(L, L')$ で $[\lambda\varphi] = [\varphi'\nu]$ in $\mathrm{Hom}_R(N, L')/\mathrm{Hom}_R(N, L')(\gamma - 1)$ なるものとする。

<u>定義 4.3</u>　カテゴリー $\mathcal{M}_\delta$ を次で定める。$\mathcal{M}_\delta$ の objects は $(N, L, [\varphi\delta])$ で $N \in {}_{\bar{\Lambda}}\mathcal{L}$, $L \in {}_R\mathcal{L}$, $[\varphi\delta] \in \mathrm{Hom}_R(N, L)\delta/\mathrm{Hom}_R(N, L)|C|$ とし，射は $(\nu, \lambda) : (N, L, [\varphi\delta]) \to (N', L', [\varphi'\delta])$ で $\nu \in \mathrm{Hom}_{\bar{\Lambda}}(N, N')$, $\lambda \in \mathrm{Hom}_R(L, L')$ s.t. $[\lambda\varphi\delta] = [\varphi'\delta\nu]$ in $\mathrm{Hom}_R(N, L')\delta/\mathrm{Hom}_R(N, L')|C|$ なるものとする。

§4B　表現同値 ${}_\Lambda\mathcal{L} \approx \mathcal{F}(\Lambda)$ について

求める表現同値について詳しく述べる。$\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_\delta$ の役割も明らかになるであろう。AR クイバーに関連したことは一部の結果のみ挙げておく。興味を持たれた方は直接 [4] を読んでいただきたい。

<u>定理 4.1</u>　表現同値 ${}_\Lambda\mathcal{L} \approx \mathcal{F}(\Lambda)$ がある。

<u>証明</u>　3つの関手 $\Phi_1 : {}_\Lambda\mathcal{L} \to \mathcal{M}$, $\Phi_2 : \mathcal{M} \to \mathcal{M}_\delta$,

$\Phi_3 : \mathcal{A}_\delta \to \mathcal{F}(\Lambda)$をつくる。このうち$\Phi_1$, Φ_2はカテゴリー同値, Φ_3は表現同値である.

1) <u>Φ_1について</u>: $M \in {}_\Lambda\mathcal{L}$をとる。$L = \{m \in M \mid \gamma m = m\}$, $N = M/L$とおくと, $L, N \in {}_\Lambda\mathcal{L}$, ここで$\gamma$の作用は$L$上は自明に, N上はγとしてである。完全列$\varepsilon : 0 \to L \to M \to N \to 0$とおくと$M$は対$(N, L) \in {}_{\bar\Lambda}\mathcal{L} \times {}_R\mathcal{L}$と$[\varepsilon] \in \mathrm{Ext}^1_\Lambda(N, L)$をwell-defineする。次の$R$-加群の同型を考える。

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(N,L) \overset{\eta}{\cong} H^1(\Lambda, \mathrm{Hom}_R(N,L))$$
$$\overset{\zeta}{\cong} \mathrm{Hom}_R(N,L)/\mathrm{Hom}_R(N,L)(\gamma-1)。$$

ここで$H^1(\Lambda, \mathrm{Hom}_R(N,L)) = \mathrm{Der}(\Lambda, \mathrm{Hom}_R(N,L))/\mathrm{In}(\Lambda, \mathrm{Hom}_R(N,L))$であり, 微分$F \in \mathrm{Der}(\Lambda, \mathrm{Hom}_R(N,L))$とは$F$は$R$-準同型$\Lambda \to \mathrm{Hom}_R(N,L)$で$F_{\lambda'\lambda} = \lambda' F_\lambda + F_{\lambda'} \lambda$ $(\lambda, \lambda' \in \Lambda)$を満たすもの。微分$F$が内部微分(その全体を$\mathrm{In}(\Lambda, \mathrm{Hom}_R(N,L))$と表す)とは$\exists f \in \mathrm{Hom}_R(N,L)$で$F_\lambda = f\lambda - \lambda f$ $(\lambda \in \Lambda)$となることである。同型ηは一般にR-多元環Λに対してなりたち, 次のようにつくる([2] §25 参照)。標準射影$p : M \to N$のR-加群としてのsection $\chi : {}_RN \to {}_RM$とするとき, $\eta([\varepsilon]) = [F]$, $F_\lambda = \lambda\chi - \chi\lambda$ $(\lambda \in \Lambda)$, と定める。次にζは次のようにつくる。R-準同型$F : \Lambda \to \mathrm{Hom}_R(N,L)$に対し次の(#)がなりたつ(ここで$C$が巡回群を使う):

(#) Fが微分 $\Leftrightarrow F_{g^n} = F_g(\gamma^{n-1}+\cdots+\gamma+1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

∵) ⇒: $F_{gg} = gF_g + F_g g$ で $gF_g(n) = F_g(n)$,
$F_g g(n) = F_g(\gamma n)$ より $F_{g^2} = F_g + F_g\gamma = F_g(\gamma+1)$, 以下同様にして $F_{g^n} = F_g(\gamma^{n-1}+\cdots+\gamma+1)$。逆は自明である。

$\tilde{\zeta} : \mathrm{Der}(\Lambda, \mathrm{Hom}_R(N,L)) \to \mathrm{Hom}_R(N,L)$ を $\tilde{\zeta}(F) = F_g$ と定めると。(#)により $\tilde{\zeta}$ は同型でありかつ，Fが内部微分 $\Leftrightarrow F_g = gf - fg$ $(\exists f \in \mathrm{Hom}_R(N,L)) \Leftrightarrow F_g = f(\gamma-1)$ より $\tilde{\zeta}$ は同型 $\zeta : H^1(\Lambda, \mathrm{Hom}_R(N,L)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_R(N,L)/\mathrm{Hom}_R(N,L)(\gamma-1)$ を誘導する，ここで $\zeta([F]) = [F_g]$ である。従って $\Phi_1(M) = (N, L, [F_g]) \in \mathcal{N}$ とおける。射について考える。$\mu \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, M')$, $M, M' \in {}_\Lambda\mathcal{L}$ とする。次の図式を考える。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"'] & M \arrow[r, shift right, "\rho"'] \arrow[d, "\mu"'] & N \arrow[l, shift right, "\chi"'] \arrow[r] \arrow[d, "\nu"] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] & M' \arrow[r, shift right, "\rho'"'] & N' \arrow[l, shift right, "\chi'"'] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

一般に $N \in {}_{\bar{\Lambda}}\mathcal{L}$, $L \in {}_R\mathcal{L}$ のとき $\mathrm{Hom}_\Lambda(N,L) = \mathrm{Hom}_\Lambda(L,N) = 0$ だから上図を可換にする λ, ν が存在する。$\rho'(\mu\chi - \chi'\nu) = \rho'\mu\chi - \rho'\chi'\nu = \nu\rho\chi - \nu = 0$ より $\mu\chi - \chi'\nu \in \mathrm{Hom}_R(N, L')$,
$\lambda(g\chi - \chi g) - (g\chi' - \chi' g)\nu = \mu(g\chi - \chi g) - (g\chi' - \chi' g)\nu =$
$g(\mu\chi - \chi'\nu) - (\mu\chi - \chi'\nu)g = (\mu\chi - \chi'\nu) - (\mu\chi - \chi'\nu)g$
$= (\chi'\nu - \mu\chi)(\gamma - 1) \in \mathrm{Hom}_R(N, L')(\gamma - 1)$ である。

$F_g = g\chi - \chi g$, $F'_g = g\chi' - \chi' g$ とすると, $[\lambda F_g] = [F'_g \nu]$ in
$\mathrm{Hom}_R(N,L')/\mathrm{Hom}_R(N,L')(\gamma-1)$. 従って $(\nu,\lambda)\in\mathcal{A}(玉_1(M),玉_1(M'))$
である。玉$_1$ dense について：$\forall(N,L,[\varphi])\in\mathcal{A}$ に対し $[\varepsilon]=$
$\eta^{-1}\zeta^{-1}([\varphi])$, $\varepsilon: 0\to L\to M\to N\to 0$ とするとき,
$\mathrm{Hom}_\Lambda(N,L)=\mathrm{Hom}_\Lambda(L,N)=0$ が効いて $玉_1(M)\cong(N,L,[\varphi])$ が示せる。
玉$_1$忠実について：$\mu\in\mathrm{Hom}_\Lambda(M,M')$, $M,M'\in{}_\Lambda\mathcal{L}$ が $玉_1(\mu)=(\nu,\lambda)$
$=(0,0)$ だったとする。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & L \arrow[r] \arrow[d, "\lambda"'] & M \arrow[r, shift right, "\rho"'] \arrow[d, "\mu"'] & N \arrow[l, shift right, "\chi"'] \arrow[r] \arrow[d, "\nu"] \arrow[dl, dotted, "\mu'"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & L' \arrow[r] & M' \arrow[r, "\rho'"'] & N' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \qquad \lambda=\nu=0$$

Mは R-直和 $M=L\oplus\chi N$ だから μ が各成分上で 0 を示す。
$\mu L=\lambda L=0$ である. 従って $\exists\mu': N\to M'$ s.t. $\mu=\mu'\rho$. $\therefore \nu=$
$\rho'\mu'=0$ より $\mu'\in\mathrm{Hom}_\Lambda(N,L')=0$ $\therefore \mu\chi=0$ $\therefore \mu=0$。よって
玉$_1$は忠実。 玉$_1$ full について：$M,M'\in{}_\Lambda\mathcal{L}$, $(\nu,\lambda)\in$
$\mathcal{A}(玉_1(M),玉_1(M'))$ とする。Λ-準同型 $\mu: M\to M'$ をつくりたい。$M=L\oplus\chi N$, $M'=L'\oplus\chi'N'$ と R-直和になっている。$F_g=g\chi-\chi g$, $F'_g=g\chi'-\chi'g$ とおくと, これらの R-直和への g の action は

(##) $g(l,0)=(gl,0)$, $g(l',0)=(gl',0)$, $l\in L$, $l'\in L'$.
$g(0,\chi n)=(F_g n,\chi g n)$, $g(0,\chi' n')=(F'_g n',\chi' g n')$, $n\in N$, $n'\in N'$

である。(ν,λ) は $\mathcal{A}$ での射より $[\lambda F_g]=[F'_g\nu]$ だから

$\lambda F_g - F'_g\nu = \xi(\delta-1)$, $\exists \xi \in \mathrm{Hom}_R(N, L')$. そこで、$\mu \in \mathrm{Hom}_R(M, M')$ を $\mu(l,0) = (\lambda l, 0)$, $\mu(0, \chi n) = (-\xi n, \chi'\nu n)$, $l\in L$, $n\in N$ によって定めると (##) を使って μ が Λ-準同型なることが確かめられる。定義より $\mu|L = \lambda$ であり、かつ
$\rho'\mu(l, \chi n) = \rho'(\lambda l - \xi n, \chi'\nu n) = \nu n = \nu\rho(l, \chi n)$
だから $\rho'\mu = \nu\rho$。従って $\Phi_1(\mu) = (\nu, \lambda)$ である。
以上より Φ_1 はカテゴリー同値である。

2) Φ_2 について: $\forall (N, L) \in {}_{\bar\Lambda}\mathcal{L} \times {}_R\mathcal{L}$ に対して R-同型

$$\mathrm{Hom}_R(N,L)/\mathrm{Hom}_R(N,L)(\delta-1) \cong \mathrm{Hom}_R(N,L)\delta/\mathrm{Hom}_R(N,L)|C|,\ [\varphi]\mapsto[\varphi\delta]$$

がある。$\varphi \in \mathrm{Hom}_R(N,L)$, $\varphi' \in \mathrm{Hom}_R(N', L')$, $\lambda \in \mathrm{Hom}_R(L, L')$, $\nu \in \mathrm{Hom}_{\bar\Lambda}(N, N')$, $(N,L), (N',L') \in {}_{\bar\Lambda}\mathcal{L}\times{}_R\mathcal{L}$, とする。このとき

$$\lambda\varphi - \varphi'\nu \in \mathrm{Hom}_R(N,L')(\delta-1) \Leftrightarrow \lambda\varphi\delta - \varphi'\delta\nu \in \mathrm{Hom}_R(N,L')|C|$$

である。そこで $\Phi_2(N, L, [\varphi]) = (N, L, [\varphi\delta])$, $\Phi_2(\nu,\lambda) = (\nu,\lambda)$ と定めると、この Φ_2 は well-defined でかつカテゴリー同値である。

3) Φ_3 について: $(N, L, [\varphi\delta]) \in \mathcal{N}_\delta$ は一意的に写像 $\overline{\varphi\delta} \in \mathrm{Hom}_{\bar R}(|N|, \bar L)$ を与える。ここで $|N| = N/N(\delta-1)$, $\bar L = L/L|C|$。そこで $\Phi_3(N, L, [\varphi\delta]) = (N, \bar L, \overline{\varphi\delta})$, $\Phi_3(\nu,\lambda) = (|\nu|, \bar\lambda)$ とすると Φ_3 は well-defined 関手 $\mathcal{N}_\delta \to \mathcal{F}(\Lambda)$。
Φ_3 dense について: $\forall (N, \bar L, \varphi) \in \mathcal{F}(\Lambda)$, $(N, L) \in {}_{\bar\Lambda}\mathcal{L}\times{}_R\mathcal{L}$ とする。

$\tilde{\varphi} \in Hom_R(N,L)$ を図式

$$\begin{tikzcd} |N| \arrow[r, "\varphi"] & \bar{L} \\ N \arrow[u] \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & L \arrow[u] \\ N(\delta-1) \arrow[u] \arrow[r, "\tilde{\varphi}|_{N(\delta-1)}"] & L|C| \arrow[u] \end{tikzcd}$$

が可換なるように定める。$Im\,\tilde{\varphi}|_{N(\delta-1)} \subset L|C|$ より $\psi = \frac{1}{|C|}\tilde{\varphi}(\delta-1) \in Hom_R(N,L)$, 従って $\tilde{\varphi}(\delta-1) = \psi|C| = \psi\delta(\delta-1)$。よって $\tilde{\varphi} = \psi\delta$。故に $(N,L,[\psi\delta]) \in \mathcal{H}_\delta$ かつ $\Phi_3(N,L,[\psi\delta]) = (N,\bar{L},\varphi)$。

Φ_3 full について: $\forall(|\nu|,\bar{\lambda}) \in \mathcal{F}(\Lambda)(\Phi_3(N,L,[\varphi\delta]),\Phi_3(N',L',[\varphi'\delta]))$ を取る。ここで $\nu \in Hom_{\bar{\Lambda}}(N,N')$, $\bar{\lambda} \in Hom_{\bar{R}}(\bar{L},\bar{L}')$ である。$\bar{\lambda}$ は $\lambda \in Hom_R(L,L')$ から誘導されるので次の図式が得られる。

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl] \arrow[rr, "\tilde{\varphi}=\psi\delta"] \arrow[dd, "\nu"] & & L \arrow[dl] \arrow[dd, "\lambda"] \\ |N| \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dd, "|\nu|"] & & \bar{L} \arrow[dd, "\bar{\lambda}"] & \\ & N' \arrow[dl] \arrow[rr, "\tilde{\varphi}'=\psi'\delta"] & & L' \arrow[dl, "\alpha"] \\ |N'| \arrow[rr, "\varphi'"] & & \bar{L}' & \end{tikzcd}$$

図式より $\alpha\lambda\tilde{\varphi} = \alpha\tilde{\varphi}'\nu$ $\therefore \lambda\psi\delta - \psi'\delta\nu \in Hom_R(N,L')|C|$
$\therefore [\lambda\psi\delta] = [\psi'\delta\nu]$ in $Hom_R(N,L')\delta / Hom_R(N,L')|C|$。
従って $(\nu,\lambda) \in \mathcal{H}_\delta((N,L,[\varphi\delta]),(N',L',[\varphi'\delta]))$ かつ $\Phi_3(\nu,\lambda) = (|\nu|,\bar{\lambda})$。

Φ_3 は同型を保存する: $(\nu,\lambda) \in \mathcal{H}_\delta((N,L,[\varphi\delta]),(N',L',[\varphi'\delta]))$

とする。$\Phi_3(\nu,\lambda)=(|\nu|,\bar{\lambda})$ が同型とする。$\bar{\lambda}:\bar{\Gamma}\to\bar{\Gamma}'$ が同型より λ が同型が示される。$\gamma^{|C|}-1=0$ より $(\gamma-1)^{|C|}$ の2項展開を考えて $(\gamma-1)^{|C|}\in\pi\bar{\Lambda}$ だから $(\gamma-1)^{|C|}=\pi\xi$, $\exists\xi\in\bar{\Lambda}$ となる。$|\nu|:N/N(\gamma-1)\to N'/N'(\gamma-1)$ は同型より $N(\gamma-1)^i/N(\gamma-1)^{i+1}\cong N'(\gamma-1)^i/N'(\gamma-1)^{i+1}$ $(i=1,\cdots,|C|-1)$。従って $N/N(\gamma-1)^{|C|}\cong N'/N'(\gamma-1)^{|C|}$, 即ち, $N/N\pi\xi\cong N'/N'\pi\xi$ でこの同型は ν から誘導されたものである。この逆を $\bar{\mu}$ とかき $\mu\in Hom_R(N',N)$ より誘導されたとする。$\mu\nu(N)+\pi N=N$, $\nu\mu(N')+\pi N'=N'$ より, 中山の補題により $\mu\nu$, $\nu\mu$ は全射, 従って R-同型である(例えば[2] §5 (5.8) 参照)。よって μ は単射であるので $\bar{\Lambda}$-同型。従って (ν,λ) は同型である。逆は明らか。(証明終り)

ARクイバについては次が成り立つ。

定理4.2 $v(|C|)>1$ とする。このとき表現同値 $\Phi_3:\mathcal{N}_\delta\to\mathcal{F}(\Lambda)$ は AR quivers の同型 $\Phi_3:\mathcal{A}(\mathcal{N}_\delta)\cong\mathcal{A}(\mathcal{F}(\Lambda))$ を誘導する。

証明は[4]を参照されたいが, $\mathcal{N}_\delta$, $\mathcal{F}(\Lambda)$ のARクイバの定義については, 整環の場合の

定義2.4を見れば容易にわかるように $\mathrm{Irr}(H,H')=\mathrm{rad}\,\mathcal{D}(H,H')/\mathrm{rad}^2\mathcal{D}(H,H')$ ($\mathcal{D}=\mathcal{H}_\delta$ 又は $\mathcal{F}(\Lambda)$) が定まれば $\mathcal{A}(\mathcal{D})$ は決まる。従って証明は、Φ_3 が誘導する写像 $\mathcal{H}_\delta(H,H')\to\mathcal{F}(\Lambda)(\Phi_3(H),\Phi_3(H'))$ の核が $\mathrm{rad}^2\mathcal{H}_\delta(H,H')$ に含まれることを示せばよい。すると R-同型 $\mathrm{Irr}(H,H')\cong\mathrm{Irr}(\Phi_3(H),\Phi_3(H'))$ が得られる。

注意. $v(|C|)>1$ を満たさない $\Longleftrightarrow v(|C|)=1$ $\Longleftrightarrow |C|=p$ かつ $v(p)=1$。このときは ϑ を1の原始p乗根とすれば直既約Λ-格子は(同型をのぞき) $R, R[\alpha], \Lambda$ の3つで

$$\mathcal{A}(\Lambda)=\begin{tikzcd} R \arrow[dr] \arrow[dd, dash, dotted] & & R[\alpha] \arrow[dd, dash, dotted] \\ & \Lambda \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ R[\alpha] \arrow[ur] & & R \end{tikzcd},$$

ここで点線の部分は捻じって同一視する。

<u>系</u>. 表現同値 $\Phi=\Phi_3\Phi_2\Phi_1 : {}_\Lambda\mathcal{L}\to\mathcal{F}(\Lambda)$ はARクイバの同型 $\mathcal{A}({}_\Lambda\mathcal{L})\cong\mathcal{A}(\mathcal{F}(\Lambda))$ を誘導する。

§4C 例

$\Lambda = RC_3$, C_3 は位数 3 の巡回群, $v(3)=3$, 即ち, $3R=\pi^3 R$ とする。$-3=\pi^3 \alpha$ $(\alpha \in u(R))$ とおく。$\bar{R}=R/\pi^3 R$, $\bar{R}^{m\times n}$ は $\bar{R}$ 上の (m,n) 行列の集合, $(m,n)\in \mathbb{N}_0\times\mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\cdots\}$ とする。特に I は $\bar{R}^{1\times 0}$ の, $\longmapsto$ は $\bar{R}^{0\times 1}$ の各々唯一の元とする。γ を 1 の原始 3 乗根とし $\bar{\Lambda}=R[\gamma]$ とおき $\bar{\Lambda}$ の R-基として $\langle 1, \gamma-1\rangle$ をとる。$(\gamma-1)^2=-3\gamma=\pi^3\alpha\gamma=\pi^3\alpha+\pi^3\alpha(\gamma-1)\cdots$(###) がなりたつ。$\bar{\Lambda}$ は Bass 整環 ([2] 参照) で $K(\gamma)$ における $\bar{\Lambda}$ の拡大整環は $R[\gamma]+\frac{\gamma-1}{\pi}R[\gamma]$ のみでこれは極大整環である。($3=(\gamma-1)^2\theta'$, $\theta'\in u(R[\gamma])$ が一般になりたち, 従って $\pi^3=(\gamma-1)^2\theta$, $\theta\in u(R[\gamma])$ である。故に $(\gamma-1)/\pi\cdot(\gamma-1)/\pi=\pi\theta''\in R[\gamma]$ だから $R[\gamma]+\frac{\gamma-1}{\pi}R[\gamma]$ は整環となっている。詳しくは [3] 参照)。従って直既約 $\bar{\Lambda}$-格子の同型類は 2 つでその代表として $\bar{\Lambda}$, $R[\gamma]+\frac{\gamma-1}{\pi}R[\gamma]\cong \mathrm{rad}\,\bar{\Lambda}$ がとれる ([3] 補題 4,3)。$S_0=\bar{\Lambda}$ の基 $\langle 1,\gamma-1\rangle$, $S_1=\mathrm{rad}\,\bar{\Lambda}$ の基 $\langle \pi, \gamma-1\rangle$ をとる。(###) より $(\gamma-1)S_0$ の基 $\langle \pi^3, \gamma-1\rangle$, $(\gamma-1)S_1$ の基 $\langle \pi^3, \pi(\gamma-1)\rangle$ であるから $|S_0|\cong R/\pi^3 R$, $|S_1|\cong R/\pi R\oplus R/\pi^2 R$

である。従って $\mathcal{F}(\Lambda)$ の object は $(S_0^{n_0}\oplus S_1^{n_1}, \overline{R}^{l}, \varphi)$, $\varphi\in \mathrm{Hom}_{\overline{R}}(|S_0|^{n_0}\oplus|S_1|^{n_1}, \overline{R}^{l})$ である。ここで $S_0^{n_0}\oplus S_1^{n_1}$ の R-基, $\overline{R}^{l}$ の $\overline{R}$-基を定めると, φ は行列 $M\in \overline{R}^{l\times(n_0+2n_1)}$ を一意的に定める。

$M=(M_0 \| \pi^2 M_1 | \pi M_1')$ と表わす。ここで $M_0\in\overline{R}^{l\times n_0}$, $M_1, M_1'\in\overline{R}^{l\times n_1}$ であり, $|S_1|^{n_1}\cong(R/\pi R)^{n_1}\oplus(R/\pi^2R)^{n_1}$ だから π^2M_1 は $(R/\pi R)^{n_1}\longrightarrow\overline{R}^{l}$ を, $\pi M_1'$ は $(R/\pi^2R)^{n_1}\longrightarrow\overline{R}^{l}$ を表わす。$\mathcal{M}$ をこのような行列のなす"行列カテゴリー"とする。$\mathcal{M}$ での射 (T,S): $M\to M'$ は $\nu\in\mathrm{Hom}_{\Lambda}(S_0^{n_0}\oplus S_1^{n_1}, S_0^{m_0}\oplus S_1^{m_1})$, $\lambda\in\mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{R}^{l},\overline{R}^{l'})$ より得られ, $(T,S)\in\overline{R}^{(m_0+2m_1)\times(n_0+2n_1)}\times\overline{R}^{l'\times l}$

s.t. (i)

$$T=\begin{array}{c}\left(\begin{array}{c||c|c} T_1 & \pi^2T_2 & \pi T_3 \\ \hline\hline T_4 & T_5 & T_6 \\ \hline T_7 & \pi d T_6 & T_5 \end{array}\right)\begin{array}{l} m_0 \\ m_1 \\ m_1 \end{array} \\ \begin{array}{ccc} n_0 & \quad n_1 & \quad n_1 \end{array}\end{array}$$

(ii) $SM=M'T$

を満たす。T は $|\nu|$ を S は λ を表わす行列である。(ii) は $\lambda\varphi=\varphi'|\nu|$ より得られる。T の (i) の形については, $|S_1|^{n_1}\cong(R/\pi R)^{n_1}\oplus(R/\pi^2R)^{n_1}\longrightarrow|S_0|^{m_0}\cong\overline{R}^{m_0}$ の像は各々 π^2R/π^3R, $\pi R/\pi^3R$ へ入ることから $\pi^2T_2, \pi T_3$ が得られる。又、$S_1^{n_1}$ の R-基を $\langle e_1,\cdots,e_{n_1}, f_1,\cdots,f_{n_1}\rangle$

ただし $e_i=\pi, f_i=\gamma-1$ とする。すると $\bar{\Lambda}$ の作用は $\gamma-1$ で決まるので (###) より

$$(\gamma-1)e_i=\pi f_i,\quad (\gamma-1)f_i=\pi^2 d e_i+\pi^3 d f_i$$

である。$S_1^{m_1}$ も同様である。従って $\gamma-1$ の基への作用と両立するように定めると $T_5, T_6, \pi d T_6, T_5$ の部分が得られる。

$\mathcal{M}\ni M$ が $M\in \bar{R}^{l\times(n_0+2n_1)}$ のとき $\dim M=(l;n_0,n_1)$ とおく。$\mathcal{M}$ における直和は、$\dim M=(l;n_0,n_1)$ $\dim M'=(l';n_0',n_1')$ のとき $\dim(M\oplus M')=(l+l';n_0+n_0',n_1+n_1')$ で

$$M\oplus M'=\left(\left(\begin{array}{c|c} M_0 & 0 \\ \hline 0 & N_0 \end{array}\right)\middle\|\ \pi^2\left(\begin{array}{c|c} M_1 & 0 \\ \hline 0 & N_1 \end{array}\right)\middle|\ \pi\left(\begin{array}{c|c} M_1' & 0 \\ \hline 0 & N_1' \end{array}\right)\right)$$

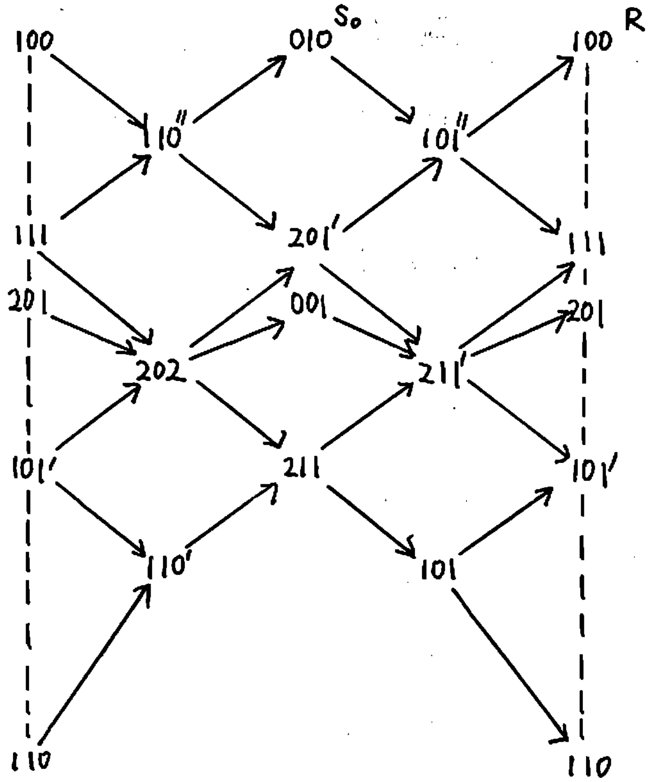
である。ind $\mathcal{M}$ の同型類の代表として次がとれる。もちろんこれらは変換 SMT, S,T は共に可逆で T は (i) の形のもの、による標準形で"直既約"なものである。

ind M の代表系

M	$\dim M$	対応する $\mathcal{L}$ の格子で目に付くもの.
I	$(1;0,0)$	R
$\vdash\!\dashv$	$(0;1,0)$	S_0
$\vdash\!\!+\!\!\dashv$	$(0;0,1)$	S_1
(1)	$(1;1,0)$	Λ
(π)	$(1;1,0)'$	
(π^2)	$(1;1,0)''$	
$(0 \mid \pi)$	$(1;0,1)$	$\mathrm{rad}\,\Lambda$
$(0 \mid \pi^2)$	$(1;0,1)'$	
$(\pi^2 \mid 0)$	$(1;0,1)''$	
$\left(\begin{smallmatrix}\pi^2\\0\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}0\\\pi\end{smallmatrix}\right)$	$(2;0,1)$	
$\left(\begin{smallmatrix}\pi^2\\0\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}0\\\pi^2\end{smallmatrix}\right)$	$(2;0,1)'$	
$\left(\begin{smallmatrix}\pi^2&0\\0&0\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}0&\pi^2\\\pi&0\end{smallmatrix}\right)$	$(2;0,2)$	
$(\pi \,\|\, \pi^2 \mid 0)$	$(1;1,1)$	
$\left(\begin{smallmatrix}\pi\\0\end{smallmatrix}\middle\|\begin{smallmatrix}\pi^2\\0\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}0\\\pi\end{smallmatrix}\right)$	$(2;1,1)$	
$\left(\begin{smallmatrix}\pi\\0\end{smallmatrix}\middle\|\begin{smallmatrix}\pi^2\\0\end{smallmatrix}\middle|\begin{smallmatrix}0\\\pi^2\end{smallmatrix}\right)$	$(2;1,1)'$	

$\dim M$ でダッシュを付けたのは次のARクイバの表記のため dim 写像を1対1にしたかったからである。

$\mathcal{M}$ のARクイバ $\mathcal{A}(\mathcal{M})$, 従って $_{\Lambda}\mathcal{L}$ の絵



ind $\mathcal{M}$ は dim で表わしてあり, ( ) ; , は省いてある。
R, S_0 で終る AR列 を τ で移したものから決めて
(1番上の ＼／＼／), 以下, 下へ向って "編物" をして
いく。もちろん左右の点線は同一視する。

REFERENCES

[1] Auslander, M.: Functors and morphisms determined by objects, in Proc. Conf. on Representation Theory (Philadelphia, 1976), Marcel Dekker(1978) 1-244.

[2] Curtis, C.W., Reiner, I.: Methods of Representation Theory, vol.I. John Wiley and Sons, New York(1981).

[3] Dieterich, E.: Construction of Auslander-Reiten quivers for a class of group rings, Math. Z.,184(1983)43-60.

[4] Dieterich, E.: Lattices over group rings of cyclic p-groups and generalized factor space categories, J. London Math. Soc. (2) 31(1985)407-424.

[5] Green, E.L., Reiner, I.: Integral representations and diagram, Michigan Math. J.,25(1978)53-84.

[6] Nishida, K.: Representations of orders and vector space categories, J.P.A.Algebra, 33(1984)209-217.

[7] Nishida, K.: Auslander-Reiten quivers of orders,preprint.

[8] Ringel, C.M.: Tame Algebras and Integral Quadratic Forms, Springer LNM 1099(1984).

[9] Ringel, C.M., Roggenkamp, K.W.: Diagrammatic methods in the representation theories of orders, J.Algebra 60 (1979)11-42.

[10] Roggenkamp, K.W.: The lattice type of orders II, in Integral Representations and Applications, Springer LNM 882(1981)430-477.

[11] Simson, D.: Vector space categories, right peak rings and their socle projective modules, J. Algebra 92, 2 (1985)532-571.

新傾向：有限群のモデュラー表現論 I

群環と Auslander-Reiten 列

大阪市大.理　奥山哲郎

多元環の表現論における Auslander-Reiten の理論の群の表現論への応用は、我々に新しい道具、新しい刺激をあたえている。が、貴重な成果もあらわれていると同時に、本当に"楽しい"ものかどうかの見極めは（講演者にとって）できていない。昨年の金沢での代数学シンポジウムの際の内容のくり返しの部分が多くあるが、現状について報告する。この方面での読むべき3大論文は、Benson-Parker [3] Webb [8]、Green [4] である。[3] では Auslander-Reiten 列の応用として、Green 環における彼らの内積の正則性を証明している。"直交関係"を与えることによって、証明を実行しているが、この"直交関係"は指標の直交関係を加群全体へ拡張したもので、加群の考察にとって有難いものとなるはずである。§3で取り上げる。[8] では群環の Auslander-Reiten quiver の tree class についての必要条件を cohomology 理論によって与えている。おどろくほど制約された class しかあらわれてないことが示されており、それ自身興味深いことであると同時に、群環（の加群）の性質を調べる道具となるであろうと思う。§4で解説するが、ここでは [5] の方法によった。[4] では Auslander-Reiten の理論と彼（Green）の vertex の理論との関わりを考察している。そもそものはじまりである functorial な方法によっていて（講演者にとって）読みにくいが、

今後の進むべき道のひとつであろう。ここでは詳しく触れなかったが、§2でいくらか述べる。

引用文献について詳しく明示しなかったが、Bensonの本[1]で補なっていただきたく思う。

§1. 群環上の加群

§1.1. Green環

kを標数$p>0$の体，Gを有限群，kGをその群環とする。kGは有限次元多元環である。kG-加群とは有限生成左-加群のこととする。kG-加群の全体を$\mathrm{Mod}\, kG$，直既約kG-加群の全体を$\mathrm{Ind}\, kG$と略記する。$V, W \in \mathrm{Mod}\, kG$に対し$V\otimes W = V\otimes_k W$，$\mathrm{Hom}_k(V,W)$は次の様にまた$kG$-加群となる。

$g(v\otimes w) = gv\otimes gw$，$(v)(g\sigma) = g((g^{-1}v)\sigma)$; $v\in V$, $w\in W$, $g\in G$, $\sigma\in \mathrm{Hom}_k(V,W)$。$k = k_G$で自明な$kG$-加群をあらわす。$\mathrm{Hom}_k(V,k)$を$V$の双対加群と呼び$V^*$とかく。$\otimes$は"結合"，"対換"法則をみたし，$\oplus$とについて"分配"法則をみたす。$\mathrm{Mod}\, kG$の同型類を基底とする自由アーベル群を関係$V\oplus W - V - W$; $V, W\in \mathrm{Mod}\, kG$で割ったアーベル群を$a(G)$と書く。$a(G)$は$\mathrm{Ind}\, kG$の同型類を基底とする自由アーベル群である。$a(G)$に$\otimes$で積を導入することによって可換環がえられるが，これをGreen環と呼ぶ。

補題1.1. 次の自然な同型がある。

$$\mathrm{Hom}_k(V, W)\simeq V^*\otimes W, \quad \mathrm{Hom}_k(U\otimes V, W)\simeq \mathrm{Hom}_k(U, V^*\otimes W).$$

$V \in \mathrm{Mod}\,kG$ に対し、その projective cover $P(V) \to V \to 0$ の kernel を $\Omega(V)$ とかく。ある $n > 0$ があって $\Omega^n(V) \simeq V$ となるとき V は periodic とよばれる。一般に $\Omega^n(k) \otimes V = \Omega^n(V) \oplus \mathrm{proj}$ である。$V \in \mathrm{Mod}\,kG$ に対し $\mathrm{Inv}_G(V) = \{v \in V ; gv = v, {}^{\forall}g \in G\}$ とおく。$G \supset H$, $G = \cup g_i H$ とおくとき $T_{H,G} : \mathrm{Inv}_H(V) \to \mathrm{Inv}_G(V)$ を $T_{H,G}(v) = \sum_i g_i v$ で定義し、trace map という。定義より $\mathrm{Hom}_{kG}(V, W) = \mathrm{Inv}_G(\mathrm{Hom}_k(V, W))$ である。V が W の直和因子に同型であるとき記号 $V | W$ を用いる。

§1.2. 加群の vertex の理論

$G \supset H$ とする。$V \in \mathrm{Mod}\,kG$ に対し、kH へ制限した kH-加群を V_H, $W \in \mathrm{Mod}\,kH$ に対し、kG へ拡大した加群 $kG \otimes_{kH} W$ を W^G とかく。

補題1.2、次の自然な同型がある。

$$V \otimes W^G \simeq (V_H \otimes W)^G, \quad \mathrm{Hom}_k(V_H, W)^G \simeq \mathrm{Hom}_k(V, W^G)$$

補題1.3. (Mackey 分解)　$G \supset H, L$, $W \in \mathrm{Mod}\,kH$ に対し

$$W^G{}_L = \oplus \sum_{g \in L \backslash G / H} (g^{-1} \otimes W_{H^g \cap L})^L \quad , \text{ここで } g^{-1} \otimes W \text{ は } kH^g\text{-加群}$$

$$(h^g (g^{-1} \otimes w) = g^{-1} \otimes hw \quad h \in H, w \in W)$$

補題1.4 (Frobenius の相互律)

$$\mathrm{Hom}_{kH}(V_H, W) \simeq \mathrm{Hom}_{kG}(V, W^G)$$

$\mathcal{H}$ を G の部分群からなるある集合とする。$V \in \mathrm{Mod}\,kG$ について $V \,|\, \oplus \sum_{H \in \mathcal{H}} V_H{}^G$ となるとき V を $\mathcal{H}$-projective という。kG-加群の完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$

は，$^{\forall}H\in\mathcal{H}$に対し，$kH$-加群の列としてsplitするとき$\mathcal{H}$-split列という。$\mathcal{H}=\{H\}$のとき，単に$H$-projective，$H$-split列という。

補題1.5（Higmanの判定法）　$G\supset H$，$V\in\mathrm{Mod}\,kG$に対し次は同値。
(1) VはH-proj.　(2) $V\mid W^G$，$\exists W\in\mathrm{Mod}\,kH$，(3) $0\to A\to B\to V\to 0$がH-splitならsplit列　(4) $1_V\in T_{H,G}(\mathrm{End}_{kH}(V))$

補題1.3，1.5により，次を得る。

補題1.6．$V\in\mathrm{Ind}\,kG$とする。次の条件(1),(2)をみたすGの部分群Dが共役を除いて唯一つ定まる。(1) VはD-proj，(2) $G\supset H$，VはH-proj.なら$D\underset{G}{\subseteq}H$。このとき$D$は$p$-部分群となる。

このDをVのvertexと呼び，$\mathrm{vx}(V)$とかく。$\mathrm{vx}(V)=1$とVがprojectiveとは同じことである。kのvertexはSylow p-部分群である。

定理1.7（Green対応）．$G\supset D$をp-部分群，Hを$H\supset N_G(D)$なる部分群とする。このとき$\{V\in\mathrm{Ind}\,kG\mid\mathrm{vx}(V)=D\}\leftrightarrow\{W\in\mathrm{Ind}\,kH\mid\mathrm{vx}(W)=D\}$に1対1対応がある。$V\leftrightarrow W$とは，$V$は$W^G$のvertex Dをもつ唯一つの直和因子，あるいは（同時に）WはV_Hのvertex Dをもつ唯一つの直和因子であるときである。

§2、群環のAuslander-Reiten列

§2.1. Auslander-Reiten列と既約写像

kG-加群の短完全列 $0 \to A \to B \xrightarrow{f} C \to 0$ は次の条件をもつときAuslander-Reiten列(A-R列)と呼ばれる。(1) non-split (2) A, C は直既約, (3) split epi ではない $X \xrightarrow{\sigma} C$ は

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\exists \tau"'] \arrow[d, "\sigma"] & \\ B \arrow[r, "f"'] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

と分解される。

定理2.1 (Auslander-Reiten). $\forall V \in \mathrm{Ind}\, kG$, non-proj に対し、$0 \to U \to X \to V \to 0$ なるA-R列が同型を除いて唯一つ存在する。このとき $U = \Omega^2(V)$ である。

存在の一意性は定義より簡単に導かれる。存在はたとえば次の様に示される。一般に $\mathrm{Ext}^1_{kG}(V, \Omega^2(V)) \cong \mathrm{Hom}_{kG}(V, \Omega(V))/\mathrm{proj.maps}$ である。さらに、補題1.1より これは $\mathrm{Hom}_{kG}(V \otimes V^*, \Omega(k))/\mathrm{proj.maps}$ と同様で、結局 $\mathrm{Ext}^1_{kG}(V, \Omega^2(V)) \simeq \mathrm{Hom}_k(\mathrm{End}_{kG}(V)/\mathrm{proj.maps}, k)$ となる。$\alpha \in \mathrm{Hom}_k(\mathrm{End}_{kG}(V)/\mathrm{proj.maps}, k)$ を $\alpha(J(\mathrm{End}_{kG}(V))) = 0$, $\alpha(1_V) \neq 0$ となるようにとるとき、αに対応する拡大がA-R列となる。

系2.2. $0 \to A \to B \to C \to 0$ をA-R列, $X \in \mathrm{Ind}\, kG$ とする。

(1) $X \not\cong C$ ならば $0 \to \mathrm{Hom}_{kG}(X, A) \to \mathrm{Hom}_{kG}(X, B) \to \mathrm{Hom}_{kG}(X, C) \to 0$ は完全.

(2) $X = C$ ならば $0 \to \mathrm{Hom}_{kG}(C, A) \to \mathrm{Hom}_{kG}(C, B) \to \mathrm{End}_{kG}(C) \to \mathrm{End}_{kG}(C)/J(\mathrm{End}_{kG}(C)) \to 0$ は完全

例. Sをnon-proj. simple, UをSのprojective coverとすると、次のA-R列がある。 $0\to \mathrm{Rad}\,U \to \mathrm{Rad}\,U/\mathrm{Soc}\,U \oplus U \to U/\mathrm{Soc}\,U \to 0$

($\mathrm{Rad}\,U=\Omega(S)$, $U/\mathrm{Soc}\,U=\Omega^{-1}(S)$ である)

Auslander-Reiten列は次の既約写像の概念と密接な関係にある。

$M,N\in \mathrm{Ind}\,kG$, $f\in \mathrm{Hom}_{kG}(M,N)$について、$f$が既約写像であるとは、$f$は非同型で

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & N \\ & X \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

とかければ、gはsplit mono、またはhはsplit epiとなるときをいう。既約写像はepiかmonoである。

$\mathrm{Rad}(M,N)=\{f\in\mathrm{Hom}_{kG}(M,N)$, 非同型$\}$, $\mathrm{Rad}^2(M,N)=\langle f=gh\,;\ g\in \mathrm{Rad}(M,L),\ h\in\mathrm{Rad}(L,N),\ \exists L\in \mathrm{Ind}\,kG\rangle_k$ とおくとき、$\mathrm{Rad}(M,N)\setminus\mathrm{Rad}^2(M,N)$の元が既約写像のことである。$\mathrm{Irr}(M,N)=\mathrm{Rad}(M,N)/\mathrm{Rad}^2(M,N)$とおくと、これは $\mathrm{End}_{kG}(M)/J(\mathrm{End}_{kG}(M))$ - $\mathrm{End}_{kG}(N)/J(\mathrm{End}_{kG}(N))$ - moduleとなるが、斜体 $\mathrm{End}_{kG}(M)/J(\mathrm{End}_{kG}(M))$ 上の次元を a'_{MN}, $\mathrm{End}_{kG}(N)/J(\mathrm{End}_{kG}(N))$ 上の次元を a_{MN} とおく。定義より $a_{MN}=0 \Leftrightarrow a'_{MN}=0$ である。

補題2.3. $M,N\in \mathrm{Ind}\,kG$とする。

(1) Mがnon-proj (したがってnon-inj)のとき a_{MN}は$\overbrace{0\to M\to X\to\Omega^{-2}(M)\to 0}^{A\text{-}R列}$ のXにおけるNの重複度である。

(2) Nがnon-projのとき a'_{MN}はA-R列 $0\to\Omega^{2}(N)\to Y\to N\to 0$ のYにおけるMの重複度である。

proj. ind module Uとつながる既約写像は $0\to \mathrm{Rad}\,U\to U$, $U\to U/\mathrm{Soc}\,U\to 0$ の形である。

§2.2. 部分群と Auslander-Reiten 列

Green の vertex の理論と．Auslander-Reiten の理論との関わりを調べることは、群環 kG の加群を考察する上で．何か良い事，何か新しい事をもたらしてくれるのではないかと期待している。Green [4] の方向の今後を注目している。そこでは次のことについて調べられている。

問題．Auslander-Reiten 列の制限，誘導について考察せよ。

$V \in \mathrm{Mod}\,kG$ について先にふれたように．$\mathrm{Ext}^1_{kG}(V, \Omega^2(V)) \simeq \mathrm{Hom}_k(\mathrm{End}_{kG}(V)/\mathrm{proj.maps}, k)$ である。$\mathrm{End}_{kG}(V)/\mathrm{proj.maps} = \overline{\mathrm{End}_{kG}(V)}$ とおく。

$G \supset H$。$V \in \mathrm{Mod}\,kG$ とする。$\mathrm{End}_{kH}(V) \xrightarrow{T_{H,G}} \mathrm{End}_{kG}(V)$ は $\overline{\mathrm{End}_{kH}(V)} \xrightarrow{T_{H,G}} \overline{\mathrm{End}_{kG}(V)}$ を誘導する。また $W \in \mathrm{Mod}\,kH$ に対し Mackey 分解より自然に $W^G{}_H = W \oplus \sum (g \otimes W_{H^g \cap H})^H \quad g \in H\backslash G/H,\ g \notin H$ と分解できる。この分解の projection $W^G{}_H \xrightarrow{\pi} W$ によって $\mathrm{End}_{kG}(W^G) \xrightarrow{R_{G,H}} \mathrm{End}_{kH}(W)$ が定義でき、さらに $\overline{\mathrm{End}_{kG}(W^G)} \xrightarrow{R_{G,H}} \overline{\mathrm{End}_{kH}(W)}$ が誘導される。

$\Omega(V_H) \equiv \Omega(V)_H$，$\Omega(W)^G \equiv \Omega(W^G)$ mod. projs なることに注意して次の補題が成立する。

補題2.4 (Green)　$V \in \mathrm{Mod}\,kG$，$W \in \mathrm{Mod}\,kH$ とする。

(1) 拡大 $0 \to \Omega^2(V) \to X \to V \to 0$ に $\alpha \in \mathrm{Hom}_k(\overline{\mathrm{End}_{kG}(V)}, k)$ が対応するとき $0 \to \Omega^2(V)_H \to X_H \to V_H \to 0$ に $T_{H,G} \cdot \alpha \in \mathrm{Hom}_k(\overline{\mathrm{End}_{kH}(V)}, k)$ が対応する。

(2) 拡大 $0 \to \Omega^2(W) \to Y \to W \to 0$ に $\beta \in \mathrm{Hom}_k(\overline{\mathrm{End}_{kH}(W)}, k)$ が対応するとき $0 \to \Omega^2(W)^G \to Y^G \to W^G \to 0$ に $R_{G,H} \cdot \beta \in \mathrm{Hom}_k(\overline{\mathrm{End}_{kG}(W^G)}, k)$ が対応する。

上の補題で α, β が A-R列に対応しているとき $T_H{}^G\alpha$, $R_{G,H}\beta$ を調べることが問題である。たとえば次の様なことが導かれる。

定理2.5 (Erdmann, Green, Benson-Parker)

Green対応とAuslander-Reiten列は仲良しである。つまり、定理1.7における仮定のもとで $\mathrm{Mod}\,kG \ni V \leftrightarrow W \in \mathrm{Mod}\,kH$ が Green対応しているとし、

$\mathcal{V}: 0\to\Omega^2(V)\to X\to V\to 0$, $\mathcal{W}: 0\to\Omega^2(W)\to Y\to W\to 0$ をA-R列とする。

(1) $\mathcal{W}^G$ は $\mathcal{V}$ と split する完全列の直和である。

(2) $\mathcal{V}_H$ は $\mathcal{W}$ と D-split する完全列の直和である。

問題. $0\to\Omega^2(V)\to X\to V\to 0$ をA-R列とする。$W\in \mathrm{Mod}\,kG$ に対し $0\to\Omega^2(V)\otimes W\to X\otimes W\to V\otimes W\to 0$ の性質を調べよ。

$\mathrm{End}_{kG}(V\otimes W)\xrightarrow{T_W}\mathrm{End}_{kG}(V)$ を次の様に定義する。Wの k-基底を w_i $(i=1,\cdots)$ とし、$\mathrm{End}_{kG}(V\otimes W)\ni f$ について $(v\otimes w_i)f=\sum_j (v)f_{ij}\otimes w_j$ とかく。このとき $T_W(f)=\sum_i f_{ii}\in\mathrm{End}_{kG}(V)$ である。さらに T_W は $\overline{\mathrm{End}_{kG}(V\otimes W)}\to\overline{\mathrm{End}_{kG}(V)}$ を誘導する。$\Omega(V)\otimes W\equiv\Omega(V\otimes W)$ に注意して

補題2.6. 拡大 $0\to\Omega^2(V)\to X\to V\to 0$ に $\alpha\in\mathrm{Hom}_k(\overline{\mathrm{End}_{kG}(V)},k)$ が対応しているとする。$W\in\mathrm{Mod}\,kG$ に対し、$0\to\Omega^2(V)\otimes W\to X\otimes W\to V\otimes W\to 0$ には $T_W\cdot\alpha\in\mathrm{Hom}_k(\overline{\mathrm{End}_{kG}(V\otimes W)},k)$ が対応する。

上の補題において $W=k_H{}^G$, $G\supset H$, α はA-R列に対応している

とする。Higmanの判定法を用いて，$T_W \alpha = 0 \Leftrightarrow V$ が not H-proj が導かれる。つまり

命題2.7 (Roggenkamp) $V \in \mathrm{Ind}\,kG$, $G \supset H$, $0 \to \Omega^2(V) \to X \to V \to 0$ をA-R列とする。このとき 列が H-split $\Leftrightarrow$ V が not H-proj

また，$V = k$, $W \in \mathrm{Ind}\,kG$, α がA-R列に対応しているとき kが代数閉体の仮定のもとで，$\dim W \equiv 0 \mod p$ なら $T_W \alpha = 0$
$\dim W \not\equiv 0 \mod p$ なら $T_W \alpha$ はA-R列に対応する。つまり

命題2.8 (Benson-Carlson) kを代数閉体とし，$0 \to \Omega^2(k) \to X \to k \to 0$ をA-R列，$W \in \mathrm{Ind}\,kG$ とする。このとき

$\dim W \equiv 0 \mod p$ なら $0 \to \Omega^2(k) \otimes W \to X \otimes W \to W \to 0$ はsplit列

$\dim W \not\equiv 0 \mod p$ なら $0 \to \Omega^2(k) \otimes W \to X \otimes W \to W \to 0$ はA-R列

(とsplit列の直和) である。

既約写像とvertexの理論との関わりについて次がわかる。

命題2.9. $M, N \in \mathrm{Ind}\,kG$, $\exists f$: 既約写像 $\in \mathrm{Hom}_{kG}(M, N)$ とする。(1) $v_x(M) \supset v_x N$ または $v_x(M) \subset v_x(N)$ である。

(2) $W \in \mathrm{Mod}\,kG$ について M, N : non-proj のとき

$M \otimes W$ が proj. $\Leftrightarrow$ $N \otimes W$: proj

部分群とA-R列の関係については他に Uno[7], Okuyama[6] がある。

§3. Green環における内積

§3.1. 内積の定義とその正則性

Green環 $a(G)$ に次の様に内積 $(\ ,\ )$ を導入する。$M, N \in \mathrm{Mod}\,kG$ に対し $(M,N) = \dim_k \mathrm{Hom}_{kG}(M,N)$ とし、$a(G)$ 全体へ線型に拡張する。$V \in \mathrm{Mod}\,kG$, $W \in \mathrm{Mod}\,kH$ について Frobenius の相互律より $(V_H, W) = (V, W^G)$ である。$M \in \mathrm{Ind}\,kG$ に対し、$H(M) \in a(G)$ を次の様に定める。M が projective のとき $H(M) = M - \mathrm{Rad}\,M$。$M$ が non-projective で、$0 \to \Omega^2(M) \to X \to M \to 0$ を A-R 列とするとき $H(M) = M + \Omega^2(M) - X$. 次の定理は A-R 列の理論の群環への"最大"の成果である。

定理3.1 (Benson-Parker) $M \in \mathrm{Ind}\,kG$ に対し $d_M = \dim_k \mathrm{End}_{kG}(M)/J(\mathrm{End}_{kG}(M))$ とおく。$M, N \in \mathrm{Ind}\,kG$ に対し

$$(M, H(N)) = \begin{cases} d_M & M \simeq N \text{ のとき} \\ 0 & M \not\simeq N \text{ のとき} \end{cases}$$

これは命題2.2を書きなおしたものである。"直交関係"とよんでいいもので、内積の正則性をいっている。

系3.2. $M, N \in \mathrm{Mod}\,kG$ に対し

$\dim_k \mathrm{Hom}_{kG}(M, X) = \dim_k \mathrm{Hom}_{kG}(N, X)$, ${}^{\forall}X \in \mathrm{Ind}\,kG$ が成立すれば $M \simeq N$.

この"直交関係"は既約指標の直交関係を加群全体へ拡げたものといえる。加群の同型の判定が"数"でできることをいっており、加群の

考察にとって有難いものとなるはずである。実際これを応用して Green 環の構造を調べることが Benson-Parker [3] でおこなわれている。まだ"とても"有難いものというところまではいっていないようであるが今後に期待しよう。

§3.2. Green 環の nilpotent elements

Green 環（あるいは $A(G) = a(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$）がいつ nilpotent elements をもつかという問題が古くからある。cyclic p-群のとき Green が $A(G)$ は nilpotent elements をもたないことを示して以来，現在次の様な段階にある。$A(G)$ が nilpotent elements をもたなければ，G の Sylow p-部分群は cyclic かあるいは $p=2$ で elementary abelian である。また G の Sylow p-部分群が cyclic，あるいは $p=2$ で位数 4 の elementary abelian であれば $A(G)$ は nilpotent elements をもたない。したがって，$p=2$ で Sylow p-部分群が位数 8 以上の elementary abelian のときどうなっているのかが問題となっている。Benson-Carlson の仕事は、この問題に対する A-R 列の応用の可能性を示唆している。k を代数閉体とすると命題 2.8 より，次元が p で割れる直既約加群ではられる $a(G)$ の部分群はイデアルをなす。これを $a(G;p)$ とかく。

定理 3.3 (Benson-Carlson)．k を代数閉体，$A(G;p) = a(G;p) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{C}$ とおく。このとき $A(G)/A(G;p)$ は nilpotent elements をもたない。

A-R列をもちいて nilpotent elements を作る例をひとつあげておく.

例. $p=2$, Q を位数8の Quaternion group とする。

§2.例より. $0\to\Omega(k_Q)\to X\oplus kQ\to\Omega^{-1}(k_Q)\to 0$ なるA-R列がある。

$X={}^{\mathrm{Rad}\,kQ}/_{\mathrm{Soc}\,kQ}$ である。簡単な計算で X は period 4 の periodic な直既約加群であることが分かる。命題2.8より $X\otimes X=\Omega(X)\oplus\Omega^{-1}(X)\oplus\mathrm{proj}$ である。このことより $(X+kQ-\Omega^{2}(X))^2=0$ となる。

作り方より. $p=2$ で Q を含むような群について Green環に nilpotent elements が存在することが分かる(もち論.すでに知られている事実であるが)

§3.3. Relative Grothendieck rings

内積の"直交関係"は $a(G)$ の元を $H(M)$, $M\in\mathrm{Ind}\,kG$ を用いてあらわすことを可能にする。"直交関係"より $V\in\mathrm{Mod}\,kG$ に対し. $V=\sum_{M\in\mathrm{Ind}kG}{}^{(M,V)}/_{d_M}\,H(M)$ とかける。一般に右辺の和は無限和になることがあり,"形式的"な和であることに注意しなければならない。いつでも有限和であることは $a(G)=\langle H(M)\,;\,M\in\mathrm{Ind}\,kG\rangle_{\mathbb{Z}}$ ということであり.これは kG が有限表現型(つまり Sylow p-部分群が cyclic)であることと同じである。(多元環の一般論としてButlerのいうところである)

もうすこし一般的に次の設定でも述べることができる。

$\mathcal{H}$ を G の部分群からなるある集合とする。$i_{\mathcal{H}}(G)=\langle A+C-B\,;\,0\to A\to B\to C\to 0$ は $\mathcal{H}$-split列$\rangle$ とおくと.これは $a(G)$ のイデアルとなる。

$a(G)/i_{\mathcal{H}}(G) = a_{\mathcal{H}}(G)$ を $\mathcal{H}$ に関する relative Grothendieck ring と呼ぶ。$\mathcal{H} \ni G$ のとき $i_{\mathcal{H}}(G)=0$ で もとの Green 環のこと，$\mathcal{H}=\{1\}$ のとき $a_{\mathcal{H}}(G)$ は普通の Grothendieck ring である。

定理3.4

$$a(G) = \underset{\mathbb{Z}}{\langle} H(M) ; M \in \mathrm{Ind}\,kG, \mathcal{H}\text{-proj} \rangle + i_{\mathcal{H}}(G)$$

$\Leftrightarrow$ $\mathcal{H} \ni {}^{\forall}H$ について その Sylow p-部分群は cyclic

Lam-Reiner は $a_{\mathcal{H}}(G)$ はアーベル群としていつ free となるかという問題を提起したが、上の系として次の結果を得る。

定理3.5. $\mathcal{H} \ni {}^{\forall}H$ について その Sylow P-部分群は cyclic とする。このとき $a_{\mathcal{H}}(G)$ は free で 実際 $H(M)+i_{\mathcal{H}}(G)$; $M \in \mathrm{Ind}\,kG$, $\mathcal{H}$-proj. がその基底で 有限階数である。

§4. 群環の Auslander-Reiten quiver

§4.1. Auslander-Reiten quiver

kG の Auslander-Reiten quiver (A-R quiver) $A(kG)$ は有向付値グラフで次の様に定義される。点の集合は $\mathrm{Ind}\,kG$ (の同型類) で，$M, N \in \mathrm{Ind}\,kG$ に対し $\mathrm{Irr}(M,N) \neq 0$ のとき 矢 ; $M \xrightarrow{(a_{MN}, a'_{MN})} N$ をおく。§2で述べた理由から $A(kG)$ は A-R 列をつなぎあわせたものといってよい。kG の stable Auslander-Reiten quiver $A_s(kG)$ は，$A(kG)$ から projective modules (とそれにつながる矢) を取り除いたものをいう。$A_s(kG)$ の connected component Δ に対し、Riedtmann の structure theorem より、その tree class が次の様に定まる。Δ の点 x をひとつとり (それを固定して) x からはじまる道 (矢の合成) で "あたりまえ" の道 $\Omega^2 y \to z \to y$ を含まないようにできるだけ "大きく" とったものを考える。(群環では Ω^2 がいわゆる Auslander-Reiten の translation である)。こうしてできる絵は点 x の取り方によらずきまり、tree となる。さらにもとの付値を使って付値 tree Γ が定まる。これを Δ の tree class という。さらに Δ は "universal quiver" $\mathbb{Z}\Gamma$ の "admissible" automorphisms からなるある群による商 quiver として実現される。

Δ の点集合を Δ_0 とする。$d : \Delta_0 \to \mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$ は次の条件をもつとき Δ 上の subadditive function とよばれる。

$$d(M) + d(\Omega^2(M)) \geq \sum_{N \to M} a'_{NM}\, d(N)$$

いつでも等号が成立するとき additive であるという。また付値 tree Γ について Γ の点集合を Γ_0 とするとき、$l : \Gamma_0 \to \mathbb{N}$ は次の条件をもつとき Γ の subadditive function とよばれる。

$$2l(x) \geq \sum_{y - x} a_{yx}\, l(y) \qquad (\text{ただし付値は } x \xrightarrow{(a_{xy},\ a_{yx})} y)$$

等号が成立するとき additive という。

Webb は Δ 上の subadditive function を構成し、次の定理を適用することによって群環の tree class についておどろくほど制約された

必要条件を与えた。

定理4.1 (Happel-Preiser-Ringel) Γ を connected 付随 tree とする。Γ が subadditive function ℓ をもてば

(1) Γ は ① Dynkin $A_n, B_n, C_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2$ ② infinite Dynkin. $A_\infty, B_\infty, C_\infty, D_\infty, A_\infty^\infty$, ③ Euclidean. $\tilde{A}_n$ $\tilde{B}_n, \tilde{C}_n, \tilde{D}_n, \tilde{BC}_n, \tilde{BD}_n, \tilde{CD}_n, \tilde{A}_{11}, \tilde{A}_{12}, \tilde{E}_6, \tilde{E}_7, \tilde{E}_8, \tilde{F}_{41}, \tilde{F}_{42}$ $\tilde{G}_{21}, \tilde{G}_{22}$ のいずれかである。

(2) ℓ が additive でなければ Γ は Dynkin か A_∞ である

(3) ℓ が unbounded なら Γ は A_∞ である。

§4.2. 群環の Auslander-Reiten quiver の tree class

Δ を $A_s(kG)$ の connected component とする。ここでは Δ 上の subadditive function を [5] にしたがって構成し、Webb の定理を述べる。

$\Delta_0 \ni V$ をひとつ固定する。p-部分群 P を V_P が non-projective となるような最小位数のものととる。$Y \in \mathrm{Ind}\, kP$ を $Y | V_P$ で non-projective なものとする。このとき P のとり方より $\Omega^2(Y) = Y$ である。さらに $V_P \otimes Y^*$, したがって $V \otimes Y^{*G}$ は non-projective である。命題2.9 により ${}^\forall W \in \Delta_0$ に対し、$W \otimes Y^{*G}$ は non-projective である。$0 \to Y \to I \to \Omega^{-1}(Y) \to 0$ を Y の injective hull とし、$d: \Delta_0 \to \mathbb{Z}$ を次の様に定義する。$\Delta_0 \ni W$ に対し $d(W) = (Y + \Omega^{-1}(Y) - I, W_P)$

Frobeniusの相互律によって $d(W) = (Y^G + \Omega^2(Y)^G - \dot{I}^G, W)$ である。

命題4.2.

(1) $d(W) > 0$, (2) $d(H(W)) \geqq 0$, $d(H(W)) > 0$ なら W は periodic である。 (3) $d(\Omega^2(W)) = d(W)$ $\quad {}^{\forall} W \in \Delta_0$

内積の定義より $d(W) \geqq 0$ である。 $W \otimes Y^{*G}$ が non-projective より $d(W) > 0$ を得る。 (2)は Benson-Parker の直交関係と Y が periodic なことによる。 (3)は $\Omega^2(Y) = Y$ の事実による。

また(2)は a'_{MN} の定義にもどれば, subadditive function の不等式の条件そのものである。 したがってこの系として, 定理4.1を適用することによって 次の定理を得る。

定理4.3 (Webb) Δ の tree class は Dynkin, infinite Dynkin, Euclidean のいずれかである。

注意 (1) Dynkinは, 群環では A_n のみおこる。これは cyclic defect group をもつ block においてあらわれる。また, そのときに限る。

(2) Δ が periodic な加群 V を含んでいれば additive ではない d を最初から作ることができる。 P を V の vertex とし, Y を V_P の vertex P の直和因子として, d を上の様に定義する。このとき $V | Y^G$ なることより V の場所で $d(H(V)) > 0$ となる。したがって tree class は定理4.1(2)より A_n, A_∞ となる。

実際にあらわれる class の例は A_n, A_∞, A_∞^∞, $\tilde{A}_{12}$, $\tilde{C}_4$ しか知られていない。A_n は cyclic defect group をもつ block として特徴づけられる。A_∞^∞ は dihedral group の群環 $p=2$ であらわれる。また $\tilde{A}_{12}$, $\tilde{C}_4$ は 位数4の elementary abelian group を defect group としてもつ block で $p=2$ であらわれている。したがって次の問題が考えられる。

問題 (1) B_∞, C_∞, D_∞ はあらわれるか。

(2) A_∞^∞ をもつ Δ を特徴づけよ

(3) Euclidean diagram をもつ Δ を特徴づけよ。

問題(3)について [5] で 奇素数の場合に答を出している。

定理4.4

p が奇素数のとき Euclidean diagram はあらわれない。

$p=2$ で 問題(3)について、知られている例 $\tilde{A}_{12}$, $\tilde{C}_4$ のみと確信し、議論をすすめているが、まだ完全なものとなっていない。

また問題(1)は 定理4.1 (3) をどう利用するかということと関係すると思う。subadditive function を構成するいろいろな方法を開発すべきであろう。

最後に Webb の定理の系をのべておく。

系4.5. S を non-projective, simple, U をその projective cover とする。このとき $\mathrm{Rad}\,U/\mathrm{Soc}\,U$ は 4個以下の直既約加群の直和。

上で、3個の直既約加群の直和となっている例が知られている。問題(3)が思うようにかたづけば 系4.5 の 4 を 3 にできる。

参考文献

[1] Benson ; Modular Representation Theory ; New Trends and Methods S.L.N. in Math. 1081

[2] Benson-Carlson ; Nilpotent elements in the Green ring.

[3] Benson-Parker ; The Green Ring of a finite group, J. Alg 87 (1984)

[4] Green ; Functors on categories of finite group representations J. Pure, Appl. Alg 37 (1985)

[5] Okuyama : On the Auslander-Reiten quiver of a finite group

[6] Okuyama ; Subgroups and Auslander-Reiten sequences of a finite group

[7] Uno ; On the sequences induced from Auslander-Reiten sequences.

[8] Webb ; The Auslander-Reiten quiver of a finite group Math. Z. 179 (1982)

新傾向：有限群のモデュラー表現 II
加群の代数的集合

佐々木洋城
(山口大学教育学部)

1. はじめに

k を標数 $p>0$ の体とする。考える有限群 G の位数はつねに p で割りきれるものとする。有限生成左 kG 加群の圏を $\mathrm{mod}\,kG$ で表わし，M が有限生成左 kG 加群であることを $M\in\mathrm{mod}\,kG$ と表わす。有限群 G の $M\in\mathrm{mod}\,kG$ を係数にもつ i 次 cohomology 群とは $\mathrm{Ext}^i_{kG}(k,M)$ のことであり $H^i(G,M)$ と書く。ここで k は自明な kG 加群とみる。$H^*(G,M)=\bigoplus_{i=0}^{\infty}H^i(G,M)$ とおく。$H^*(G,k)$ は cup 積により k 上の次数環であるが，Evens[14] により Noether 的である。$H^*(G,M)$ は cup 積により Noether 的 $H^*(G,k)$ 次数付加群である。$p>2$ のとき $H(G)=\bigoplus_{i=0}^{\infty}H^{2i}(G,k)$，$p=2$ のとき $H(G)=H^*(G,k)$ とおく。$V_G=\mathrm{Spec}\,H(G)$ と定義する。$H(G)$ は可換 Noether 的次数環である。G の部分群 T に対

し、$\mathrm{res}_{G,T}: H(G) \to H(T)$ がひきおこす写像 $V_T \to V_G$ を ρ_T で表わす。G の基本可換 p 部分群全体の集合を $EA(G)$ で表わす。Quillen [16, 17] は

$$V_G = \bigcup_{E \in EA(G)} \rho_E(V_E)$$

を示した。Chouinard [12] はこの方法を用いて

$$M \in \mathrm{mod}\, kG \text{ が射影的} \Leftrightarrow \forall E \in EA(G)\ M_E \text{ が自由}$$

を示した。Alperin-Evens [1] は M にその complexity $cx_G(M)$ という非負整数を対応させ、この結果を拡張した。M が射影的 $\Leftrightarrow cx_G M = 0$ であり

$$cx_G(M) = \max\{cx_E(M_E) \mid E \in EA(G)\}.$$

程なく Avrunin [3] と Alperin-Evens [2] は（たぶん）独立に、M に対し V_G の閉集合 $V_G(M)$ を定義し、これらの結果を拡張した。すなわち $V_G(k) = V_G$, $\dim V_G(M) = cx_G(M)$ であり

$$V_G(M) = \bigcup_{E \in EA(G)} \rho_E(V_E(M_E)).$$

一方 Dade [13] は k が代数的閉体のとき、基本可換 p 群 E に対し

$$M \in \mathrm{mod}\, kE \text{ が射影的} \Leftrightarrow \forall x \in J(kE) - J^2(kE)\ \ M_{\langle 1+x \rangle} \text{ が自由}$$

であることを示していた。以下では k が代数的閉体と

する。Carlsonは Dade, Alperin-Evensらの結果をもとに斉次代数的集合 rank variety $V_E^r(M)$ の概念を得た。$M \in \mathrm{mod}\,kE$ が射影的 $\Leftrightarrow V_E^r(M)=\{0\}$ である。$X_E = \mathrm{Max}(H(E))$, $X_E(M) = X_E \cap V_E(M)$ とおくと、ある同一視によって $V_E^r(M) \subseteq X_E(M)$ であることを示し、これらが一致することを予想した [6,7]。この予想は Avrunin-Scott [4] によって証明された。ここでは以上のことを概観する。

Avrunin-Scott は Quillen の V_G に対する stratification 定理を $V_G(M)$ に拡張し、さらにいくつかの定理を得た。Carlson はその後 $V_G(M)$ が $V_G(\mathrm{End}\,M)$ に一致することから cohomology 環 $H^*(G, \mathrm{End}\,M)$ の研究に進んでいる。

2. 加群の cohomological support

$M = \bigoplus_{i=0}^{\infty} M_i$ を次数付加群で、各 M_i は k 上有限次であるものとする。このとき

$$\gamma(M) := \min\left\{ c \geq 0 \mid c \in \mathbb{Z},\ \lim_{i\to\infty} \frac{\dim M_i}{i^c} = 0 \right\}$$

を M の growth rate という。

$A = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A_i$ を k 上の可換 Noether 的次数環で

$A_0 = k$ であるものとする。A は有限個の斉次元で k上の線型環として生成される。M が有限生成次数付 A 加群のとき

$$\gamma(M) = \text{Krull dim } A/\text{ann} M$$

であることが知られている。

さて $M \in \text{mod}\, kG$ の極小射影分解を

$$\mathbb{P} : \quad \cdots \to P_n \to \cdots \quad \to P_1 \to P_0 \to M \to 0$$

とするとき，次数付加群 $\bigoplus_{i=0}^{\infty} P_i$ の growth rate を M の complexity といい $cx_G(M)$ と表わす：

$$cx_G(M) := \min \{ c \geqq 0 \mid c \in \mathbb{Z},\ \lim_{n\to\infty} \frac{\dim P_n}{n^c} = 0 \}.$$

群環 kG は self-injective であることから

$$M \text{ が射影的} \Leftrightarrow cx_G(M) = 0.$$

$\mathbb{P}$ を用いて $\text{Ext}^*_{kG}(M, \cdot\,)$ を考えることにより，既約 kG 加群の同型類の代表元を $S_1, \cdots, S_\ell$ とすると

$$cx_G(M) = \gamma\ \text{Ext}^*_{kG}(M, \bigoplus_{i=1}^{\ell} S_i)$$

を得る。

さて次数環 $H(G)$ の斉次イデアル $r_G(M)$ を

$$r_G(M) := \{ x \in H(G) \mid \forall S \in \text{mod}\, kG \ \exists j > 0 \text{ s.t. } x^j H^*(G, M \otimes S) = 0 \}$$

によって定義する。cohomology 完全系列を考えることにより

mod kG の完全系列

$$0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$$

に対し

$$\mathrm{ann}_{H(G)} H^*(G, M_i)\ \mathrm{ann}_{H(G)} H^*(G, M_j) \subset \mathrm{ann}_{H(G)} H^*(G, M_k) \qquad \{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$$

であるから

$$r_G(M) = \sqrt{\mathrm{ann}_{H(G)} H^*(G, M \otimes S)},$$

ここで $S = \bigoplus_{i=1}^{l} S_i$ である。よって

$$\mathrm{cx}_G(M) = \gamma(H^*(G, M^* \otimes S)) = \mathrm{Krull\ dim}\ H(G)/r_G(M^*)$$

とかける。ここで $M^* = \mathrm{Hom}_k(M, k)$ である。そこで

$$V_G(M) := \{ \mathfrak{p} \in V_G \mid \mathfrak{p} \supset r_G(M) \}$$

と定義する。

Lemma 2.1

$V_G(M) = \{ \mathfrak{p} \in V_G \mid \exists N \in \mathrm{mod}\,kG \quad H^*(G, M \otimes N)_{\mathfrak{p}} \neq 0 \}.$

この Lemma により $V_G(M)$ を M の cohomological support とよぶ。$M = k$ のとき $r_G(k) = \sqrt{0}$ であるから $V_G(k) = V_G$ である。$\dim V_G(M^*) = \mathrm{cx}_G(M)$ である。

M が射影的のとき $H(G)$ の正次元の元からなるイデアル $H_+(G)$ が $r_G(M)$ であるから $V_G(M)$ は 1 点だけからなる。逆

に $V_G(M)$ が 1 点 だけからなるとき $cx_G(M^*) = \dim V_G(M)$ $=0$. ∴ M^* が射影的. よって M も射影的である. i.e.

M が射影的 $\Leftrightarrow$ $V_G(M) = \{*\}$.

簡単な性質を挙げてみると

Lemma 2.2.

(1) $\mathrm{mod}\, kG$ での完全系列 $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ に対し, $V_G(M_i) \subset V_G(M_j) \cup V_G(M_k)$ for $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$

(2) $V_G(M) = V_G(\Omega^n(M))$.

(3) $V_G(M_1 \oplus M_2) = V_G(M_1) \cup V_G(M_2)$.

(2) は $M \otimes \Omega^n(k) = \Omega^n(M) \oplus$ 射影加群 であることから得られる. これから

Lemma 2.3. $M, N \in \mathrm{mod}\, kG$ が kG の安定 Auslander-Reiten quiver の同一の連結成分に含まれていれば $V_G(M) = V_G(N)$ である

次に部分群との関係を述べる. G の部分群 H と任意の $N \in \mathrm{mod}\, kH$ に対し, 同型

$$H^*(G,\ kG \otimes_{kH} N) \longrightarrow H^*(H, N)$$

を用いると

Lemma 2.4 $M \in \mathrm{mod}\, kG$, $N \in \mathrm{mod}\, kH$ に対し

$r_G(M) \subset \mathrm{res}_H^{-1}(r_H(M_H))$, $\mathrm{res}_H^{-1}(r_H(N))$ $\quad r_G(kG \otimes_{kH} N)$.

従って

$$\rho_H(V_H(M_H)) \subset V_G(M), \quad \rho_H(V_H(N)) = V_G(kG \otimes_{kH} N).$$

次の定理は基本的である.

Theorem 2.5. (Alperin-Evens [2], Avrunin [3])

$$V_G(M) = \bigcup_{E \in EA(G)} \rho_E(V_E(M_E)) \quad \text{for } M \in \mathrm{mod}\, kG.$$

Corollary 2.6.

$$\dim V_G(M) = \max\{\dim V_E(M_E) \mid E \in EA(G)\}.$$

定理を得るためには

$$r_G(M) = \bigcap_{E \in EA(G)} \mathrm{res}_E^{-1}\, r_E(M_E)$$

を示せばよい. P を G の Sylow p 部分群とすると

$$r_G(M) = \mathrm{res}_P^{-1}\, r_P(M_P)$$

であるから G は p 群であると仮定してよい. G が p 群で基本可換群でないとき

$$r_G(M) = \bigcap \mathrm{res}_H^{-1}(M_H),$$

ここで H は G の極大部分群を動く.

が示され, 位数に関する帰納法によって所要の結果を得る. 上のことには Serre の定理が本質的である. Serre の定理を述べるために, Bockstein について説明する. 完全系列 $0 \to \mathbb{Z}/(p) \to \mathbb{Z}/(p^2) \to \mathbb{Z}/(p) \to 0$ から得

される連結準同型

$$\beta : H^1(G, \mathbb{Z}/(p)) \to H^2(G, \mathbb{Z}/(p))$$

を Bockstein 準同型という。$\mathbb{Z}/(p)$ であるからこれは

$$\beta : H^1(G, k) \to H^2(G, k)$$

をひきおこす。これも Bockstein 準同型という。G が p 群のとき、その極大部分群 H に対し、$\eta \in H^1(G, k)$ で $res_H \eta = 0$ となるものがスカラー倍を除いて定まる。これは $H^1(G/H, k)$ の生成元の $\inf : H^1(G/H, k) \to H^1(G, k)$ による像である。$\zeta = \beta(\eta) \in H^2(G, k)$ を H に対応する Bockstein という。これは $H^2(G/H, k)$ の生成元の inf による像である。$res_H(\zeta) = 0$ である。

Theorem (Serre [18]). G が p 群で基本可換群でないとき、G の極大部分群 $H_1, \cdots, H_r$ で対応する Bockstein を β_i $(1 \leq i \leq r)$ とするとき

$$\beta_1 \cdot \cdots \cdot \beta_r = 0$$

となるものが存在する。

3. 基本可換 p 群と rank variety

$E = \langle x_1, \cdots, x_n \rangle$ を位数 p^n の基本可換 p 群とし、$J = J(kE)$ とおく。J は k 上 $\{x-1 \mid x \in E, x \neq 1\}$ で

張られる。特に L を k 上 $\{x_i-1 \mid i=1,\cdots,n\}$ で張られる部分空間とすれば $J = L \oplus J^2$ である。

Lemma 3.1. $u_1,\cdots,u_t$ を kE の単元とする。$u_1-1,\cdots u_t-1 \in J$ が k 上 1 次独立で

$$\langle u_1-1,\cdots,u_t-1\rangle_k \cap J^2 = \{0\}$$

ならば $H = \langle u_1,\cdots,u_t\rangle$ とおくと H は位数 p^t の基本可換群であり，kE は自由 kH 加群である。$t=n$ のとき埋めこみ $H \hookrightarrow kE$ は同型 $kH \cong kG$ をひきおこす。

$(\alpha)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)\in k^n$ に対し $u_{(\alpha)} = 1+\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(x_j-1)$ とおく。1 次独立な $(\alpha)_1,\cdots,(\alpha)_t \in k^n$ に対し $H=\langle u_1,\cdots,u_t\rangle$，$u_i = u_{(\alpha)_i}$ を kG の shifted 部分群という。このとき $u_{t+1},\cdots,u_n$ を補って

$$J = \langle u_1-1,\cdots,u_n-1\rangle_k \oplus J^2$$

とできる。

H が kE の shifted 部分群のとき $J(kH) \subset J(kE)$ であり，$J(kH)$，$J(kE)$ はそれぞれ添加写像 $kH\to k$，$kE\to k$ の核であるから，$M\in \mathrm{mod}\,kE$ に対し入射 $kH \hookrightarrow kE$ は cohomology 群の準同型

$$res_H : H^*(E,M) \to H^*(H,M)$$

をひきおこす。res_H は cup 積と可換である：

$$\begin{tikzcd}
H^*(E, k) \otimes H^*(E, M) \arrow[r, "\cup"] \arrow[d, "\mathrm{res}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & H^*(E, M) \arrow[d, "\mathrm{res}"] \\
H^*(H, k) \otimes H^*(H, M) \arrow[r, "\cup"] & H^*(H, M).
\end{tikzcd}$$

また kH 加群 L に対し同型

$$H^*(E,\ kE \otimes_{kH} L) \simeq H^*(H, L)$$

が成り立つ。

次に cohomology 環 $H^*(E, k)$ の構造を調べる。

Lemma 3.1. $p > 2$ とし、$U = \langle u \rangle$ を位数 p の巡回群とする。$\eta \in H^1(U, k) \simeq \mathrm{Hom}(U, k)$ を $\eta(u) = 1$ なるものとする。β を Bockstein 準同型とし、$\gamma = \beta(\eta) \in H^2(U, k)$ とおくと、次数環として

$$H^*(U, k) \simeq k[\gamma] \otimes \Lambda(\eta),$$

ここで $\Lambda(\eta)$ は $1, \eta$ を基底とする外積代数である。

Künneth の定理により次数環として

$$H^*(E, k) \simeq H^*(\langle x_1 \rangle, k) \otimes \cdots \otimes H^*(\langle x_n \rangle, k)$$

であるから

Lemma 3.2. $H^*(E, k) \simeq k[\zeta_1, \cdots, \zeta_n] \otimes \Lambda(\eta_1, \cdots, \eta_n)$, $\eta_i \in H^1(E, k)$ は $\eta_i(x_j) = \delta_{ij}$ ととれる。ζ_i は極大部分群 $\langle x_1, \cdots, x_{i-1}, x_{i+1}, \cdots, x_n \rangle$ に対応する Bockstein である。

Lemma 3.3 $p>2$ とし，$(\alpha)\in k^n$ に対して $H^2(\langle u_{(\alpha)}\rangle, k)$ の生成元 $\gamma_{(\alpha)}$ を Lemma 3.1 のようにとれば，Lemma 3.2 の記号の下で

$$res_{E,\langle u_{(\alpha)}\rangle}(\zeta_i) = \alpha_i^p \gamma_{(\alpha)}.$$

従って f が k 係数の n 変数 t 次斉次多項式ならば

$$\zeta = f(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in H^{2t}(E, k)$$

に対し $\quad res_{E,\langle u_{(\alpha)}\rangle}(\zeta) = f(\alpha_1^p, \cdots, \alpha_n^p)\, \gamma_{(\alpha)}^t.$

Lemma 3.4. $p=2$ とし，$U=\langle u\rangle$ を位数 2 の巡回群，$\gamma\in H^1(U,k)$ を $\gamma(u)=1$ なるものとすると

$$H^*(U, k) \simeq k[\gamma].$$

従って $\zeta_i \in H^1(E,k)$ を $\zeta_i(x_j)=\delta_{ij}$ ととると

$$H^*(E,k) \simeq k[\zeta_1, \cdots, \zeta_n].$$

Lemma 3.5. $p=2$ とする $(\alpha)\in k^n$ に対して $H^1(\langle u_{(\alpha)}\rangle, k)$ の生成元 $\gamma_{(\alpha)}$ を Lemma 3.4 のようにとれば Lemma 3.4 の記号の下で

$$res_{E,\langle u_{(\alpha)}\rangle}(\zeta_i) = \alpha_i \gamma_{(\alpha)}.$$

従って f が k 係数の n 変数 t 次斉次多項式ならば

$$\zeta = f(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in H^t(E,k)$$

に対し $\quad res_{E,\langle u_{(\alpha)}\rangle}(\zeta) = f(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\, \gamma_{(\alpha)}^t.$

k^n 上の Frobenius 写像 φ を

$$\varphi : (\alpha) \mapsto \begin{cases} (\alpha_1^p, \cdots, \alpha_n^p) & p>2 \\ (\alpha_1, \cdots, \alpha_n) & p=2 \end{cases}$$

と定義すると，斉次元 $\zeta = f(\zeta_1, \cdots, \zeta_n)$ に対し

$$\mathrm{res}_{E, \langle u_{(\alpha)} \rangle} (\zeta) = f(\varphi(\alpha))\, \gamma_{(\alpha)}^{t}, \quad t = \deg f.$$

特に $\mathrm{res}_{E,\langle u_{(\alpha)}\rangle} : H(E) \to H(\langle u_{(\alpha)} \rangle)$ は全型である。

以下では k は代数的閉体であると仮定する。

有限群 G に対し $X_G = \mathrm{Max}\, H(G)$ とおく。k は代数的閉体であるから G の部分群 H に対し $\rho_H : V_H \to V_G$ は $\rho_H : X_H \to X_G$ をひきおこす。$M \in \mathrm{mod}\, kG$ に対し $X_G(M) = X_G \cap V_G(M)$ とおく。

$$r_G(M) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V_G(M)} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{m} \in X_G(M)} \mathfrak{m}$$

である。

さて E は p 群であるから既約 kE 加群は k のみであるから $r_E(M) = \sqrt{\mathrm{ann}_{H(E)} H^*(E, M)}$ である。$r_E(k) = \mathrm{rad}\, H(E) = \sqrt{0}$ であるから

$$H(E)/\mathrm{rad}\, H(E) \simeq k[\zeta_1, \cdots, \zeta_n].$$

$M \in \mathrm{mod}\, kE$ に対し2つの代数的集合を定義する：

$$V_E^r(M) := \{ (\alpha) \in k^n \mid (\alpha) \neq (0),\ M_{\langle u_{(\alpha)} \rangle} \text{ は自由でない} \} \cup \{(0)\},$$

$$W(M) := \{ (\alpha) \in k^n \mid \mathrm{res}_{E,\langle u_{(\alpha)}\rangle}(\zeta) = 0 \text{ for } {}^\forall\zeta \in r_E(M) \}$$

とおく。$V_E^r(M)$ は M の rank variety と呼ばれている。

Lemma 3.6 $(\alpha) \in k^n$, $M \in \mathrm{mod}\,kE$ に対し

$$\mathrm{rank}(u_{(\alpha)} - 1) \leq \frac{p-1}{p}\dim_k M$$

であり，等号が成立するのは $(\alpha) \notin V_E^r(M)$ のときに限る。

このことから $V_E^r(M)$ は斉次代数的集合であることがわかる。

また $r_E(M)$ は有限個の斉次元で生成され，前項より

$$(\alpha) \in W \Leftrightarrow f(\varphi(\alpha)) = 0 \quad \forall f(\zeta_1, \cdots, \zeta_n) \in r_E(M)$$

であるから W も斉次代数的集合である。

k は代数閉体であり，$H(E)/\mathrm{rad}\,H(E) \simeq k[\zeta_1, \cdots, \zeta_n]$ であるから $\mathfrak{m} \in X_E$ と $(\alpha) \in k^n$ を

$$\mathfrak{m} \equiv (\zeta_1 - \alpha_1, \cdots, \zeta_n - \alpha_n) \mod \mathrm{rad}\,H(E)$$

によって対応させることにより X_E と k^n は1対1に対応する。$(\alpha) \in k^n$ に対応する極大イデアルを $\mathfrak{m}_{(\alpha)}$ とかけば $\mathfrak{m}_{(\alpha)} \supset r_E(M)$

$$\mathfrak{m}_{(\alpha)} \supset r_E(M) \Leftrightarrow f(\alpha_1, \cdots, \alpha_n) = 0 \quad \forall f(\zeta_1, \cdots \zeta_n) \in r_E(M).$$

であるから，$\varphi(W(M))$ と $X_E(M)$ がこの対応で対応する。

簡単な rank variety の例をあげる。$(\alpha) \in k^n$ に対し $\mathfrak{s}_{(\alpha)} = kE/kE(u_{(\alpha)}-1)$ とおく。$u_{(\alpha)} = u_1$ とし、$u_2, \cdots, u_n$ を補って $H = \langle u_1, \cdots, u_n \rangle$ を kE の shifted 部分群とする。このとき $\mathfrak{s}_{(\alpha)} \simeq kH \otimes_{k\langle u_1 \rangle} k$ である。よって $\mathfrak{s}_{(\alpha)}\langle u_2, \cdots, u_n \rangle$ は自由 $k\langle u_2, \cdots, u_n \rangle$ 加群である。従って $(\beta) \in k^n$ が 0 と (α) を通る直線 $\underset{\ell(\alpha)}{L}$ になければ $u_2 = u_{(\beta)}$ ととれるから $(\beta) \notin V_E^r(\mathfrak{s}_{(\alpha)})$.
i.e. $V_E^r(\mathfrak{s}_{(\alpha)}) = \ell_{(\alpha)}$.

次の定理は Carlson によって予想され、Avrunin-Scott によって証明された。その後 Carlson 自身も別証を与えている。

Theorem 3.7 (Avrunin-Scott [4], Carlson [9])

$$V_E^r(M) = W(M)$$

同じことであるが $\varphi(V_E^r(M))$ と $X_E(M)$ が 1 対 1 に対応する。

Corollary 3.8 (Dade [13]) $M \in \mathrm{mod}\,kE$ とする。
M が射影的 $\Leftrightarrow$ $\forall x \in J - J^2$ $M_{\langle 1+x \rangle}$ が射影的.

Corollary 3.9 $M \in \mathrm{mod}\,kG$ に対し

$$V_G(M) = V_G(M^*).$$

これは $V_E^r(M) = V_E^r(M^*)$ であることと Theorem 2.5

Theorem 3.7 から得られる。この系から

$$cx_G(M) = \dim V_G(M^*) = \dim V_G(M)$$

であるから

$$cx_G(M) = \max\{ cx_E(M_E) \mid E \in \mathcal{E}A(G) \}$$

がわかる。

最後に Theorem 3.7 の証明を概説する。

$(\alpha) \in V_E^r(M)$ とする。$\gamma_{(\alpha)}$ を Lemma 3.1 又は 3.4 のようにとると，極大イデアル $(\gamma_{(\alpha)}-1) \subset H(\langle u_{(\alpha)}\rangle)$ に対し $\rho(\gamma_{(\alpha)}-1) = (\zeta_1-\varphi(\alpha_1), \cdots, \zeta_n-\varphi(\alpha_n))$ であるところで $M_{\langle u_{(\alpha)}\rangle}$ は自由でないから $H(\langle u_{(\alpha)}\rangle, M) \neq 0$ で，$\gamma_{(\alpha)}$ 又は $\gamma_{(\alpha)}^2$ による cup 積は同型 $H^i(\langle u_{(\alpha)}\rangle, M) \cong H^{i+2}(\langle u_{(\alpha)}\rangle, M)$ を与えるから $r_U(M)=\{0\}$, $U=\langle u_{(\alpha)}\rangle$. i.e. $V_U = V_U(M)$. よって

$$(\zeta_1-\varphi(\alpha_1), \cdots, \zeta_n-\varphi(\alpha_n)) \in \rho(X_U) = \rho_U(X_U(M)) \subset X_E(M).$$

i.e. $\varphi(\alpha)$ は $r_E(M)$ の零点集合であり $(\alpha) \in W(M)$, 逆に $(\alpha) \in W(M)$ とし，$U = \langle u_{(\alpha)}\rangle$ とおく。このとき $\mathrm{res}_{E,U}(r_E(M)) = 0$ であるから $r_E(M) \subset \operatorname{Ker} \mathrm{res}_{E,U} = \mathrm{res}^{-1}_{E,U}\{0\} \subset \mathrm{res}^{-1}\mathfrak{p}$ for $\mathfrak{p} \in V_U$. よって

$$\rho_U(V_U) \subset V_E(M).$$

M_U が自由であると仮定する。$u_{(\alpha)} = u_1$ とし、$u_2, \cdots, u_n$ を補って shifted 部分群 $F = \langle u_1, \cdots, u_n \rangle$ をつくる。$j \geqq 1$ に対し $H^j(U, M) = 0$ であるから inflation-restriction 系列を用いることにより同型

$$\inf : H^j(F/U, M^U) \simeq H^j(F, M) = H^j(E, M)$$

を得る。$\inf : H^0(F/U, M^U) \to H^0(F, M)$ を恒等写像とすると同型

$$\inf : H^*(F/U, M^U) \simeq H^*(F, M)$$

を得る。$\inf : H(F/U) \to H(F)$ を通して $H^*(F, M)$ を $H(F/U)$ 加群とみると、上の同型は $H(F/U)$ 同型である。よって $H^*(F, M)$ は $H(F/U)$ 上有限生成である。$H(F/U)$ の正次元の元全体から成るイデアル $H_+(F/U)$ の inflation による像 $\inf(H_+(F/U))$ は $\ker \mathrm{res}_{E,U}$ に含まれるから $k \simeq H(F/U)/H_+(F/U)$ は $H^*(F, M)/\mathfrak{P} H^*(F, M)$, $\mathfrak{P} = \ker \mathrm{res}_{E,U}$, に作用し、有限生成である。特に $H^*(F, M)/\mathfrak{P} H^*(F, M)$ は k 上有限次ベクトル空間である。次数は $H(F)$ 加群 $H^*(F, M)/\mathfrak{P} H^*(F, M)$ が有限次元であるから、$H(F)$ におけるこの加群の零化イデアルはある次数以上の斉次元を全て含まなければならない。特にその剰余環

は Artin 環である。よって $\mathrm{supp}_{H(F)} H^*(F,M)/\wp H^*(F,M)$ は有限個の点しか含まない。

ところで

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{supp}_{H(F)} H^*(F,M)/\wp H^*(F,M) \\
&= \{ \mathfrak{p} \in H(F) \mid \mathfrak{p} \supset \wp + \mathrm{ann}_{H(F)} H^*(F,M) \} \\
&= \{ \mathfrak{p} \in H(F) \mid \mathfrak{p} \supset \wp \} \cap V_E(M) \\
&= \rho_U(V_U) \cap V_E(M) \\
&= \rho_U(V_U).
\end{aligned}
$$

$\forall \beta \in k$ に対し $(\gamma(\alpha) - \beta) \in V_U$ で

$$\rho_U(\gamma(\alpha) - \beta) = (\zeta_1 - \varphi(\alpha_1)\beta, \cdots, \zeta_m - \varphi(\alpha_m)\beta)$$

で k は無限個の元を含むから、$\rho_U(V_U)$ も無限個の点を含む。これは矛盾である

文献

[1] J. L. Alperin & L. Evens, Representations, resolutions and Quillen's dimension theorem, J. Pure Appl. Algebra, vol 22 (1981), 1-9.

[2] J. L. Alperin & L. Evens, Varieties and elementary abelian groups, J. Pure Appl. Algebra, vol 26 (1982), 221-227.

[3] G. S. Avrunin, Annihilators of cohomology modules, J. Algebra, vol 61 (1981), 150-154.

[4] G. S. Avrunin & L. Scott, Quillen stratification theorem for modules, Invent. Math., vol 66 (1982), 227-286.

[5] D. Benson, 'Modular representation theory: new trends and methods,' Springer L. N. S. vol 1081, 1984, Springer-Verlag, Berlin/Hidelberg/New York/Tokyo.

[6] J. F. Carlson, The complexity and varieties of modules, in 'Integral representations and their applications', Springer L. N. S. vol 882, 415-422, 1981, Springer-Verlag, Berlin/Hidelberg/New York.

[7] J. F. Carlson, The cohomology ring of a module, J. Algebra, vol 85 (1983), 104-143.

[8] J. F. Carlson, The variety of an indecomposable module is connected, Invent. Math., vol 77 (1984), 291-299.

[9] J. F. Carlson, The cohomology ring of a module, J. Pure Appl. Algebra, vol 36 (1985), 105-121.

[10] J. F. Carlson, 'Module varieties and cohomology rings of finite groups', Essen Univ., 1985, Essen.

[11] H. Cartan & S. Eilenberg, 'Homological Algebra', Princeton Univ. Press, 1956, Princeton.

[12] L. G. Chouinard, Projectivity and relative projectivity over group rings, J. Pure Appl. Algebra, vol 7 (1976), 287-302.

[13] E. C. Dade, Endo-permutation module over p-groups II, Ann. Math., vol 108 (1978), 317-346.

[14] L. Evens, The cohomology ring of a finite group, Trans. Amer. Math. Soc., vol 101 (1961), 224-239.

[15] S. MacLane, 'Homology', Springer-Verlag, 1963, Berlin / Hidelberg / New York.

[16] D. Quillen, A cohomological criterion for p-nilpotence, J. Pure Appl. Algebra, vol. 1 (1971), 361-372.

[17] D. Quillen & B. B. Venkov, Cohomology of finite groups and elementary abelian subgroups Topology, vol. 11 (1972), 317-318.

[18] J. P. Serre, Sur la dimension cohomologique des groupes profinis, Topology, vol. 3 (1965), 413-420.

歪群環と多元環の表現

池畑秀一（岡山大・教養）

Reiten と Riedtmann による論文 "Skew Group Algebras in the Representation Theory of Artinian algebras", J. Algebra 92 (1985), 224-282. の紹介をする。

Λ を ring, G を finite group で Λ に act していて, $\gamma : G\times G \to U(\Lambda)$ (Λ の単元全体) を次の(1)~(3) をみたすものとする.

(1) $\gamma(g,g')\gamma(gg',g'') = g(\gamma(g',g''))\gamma(g,g'g'')$

(2) $\gamma(e,g) = 1 = \gamma(g,e)$

(3) $\gamma(g,g')(gg')(\lambda) = g(g'(\lambda))\gamma(g,g')$

(e は Λ の単位元. $\lambda\in\Lambda$, $g,g',g''\in G$).

このとき, crossed product algebra $\Lambda *_\gamma G$ (以下簡単に, $\Lambda * G$ とあらわす。) とは.

$$\left\{ \sum_{g_i\in G} \lambda_i \bar{g}_i \;\middle|\; \lambda_i\in\Lambda \right\}$$ で

和は componentwise で, multiplication は

$$\bar{g}\lambda = g(\lambda)\bar{g} \qquad (\lambda\in\Lambda)$$
$$\bar{g}_1\bar{g}_2 = \gamma(g_1,g_2)\,\overline{g_1g_2}$$

によって定義されるものとする. このとき $\Lambda * G$ は

associative algebra with identity $1 = u_e$ となる。

以下では γ の値が Λ の center $Z(\Lambda)$ の中に入るときのみを考える。

特別な場合として，$\gamma \equiv 1$ のとき，$\Lambda * G$ を単に ΛG と書き，skew group ring と呼ぶ。

skew group algebras や crossed products に関しではたくさんの論文がでている。Λ のどのような性質が $\Lambda * G$ や Λ^G (G による fixed ring) に伝わるかをしらべているものが多く，それらの研究のあるものは，環のガロア理論の立場からなされている (See [1][2][3][4])

ここでは，アルチン環上で skew group algebra を構成するとき，アルチン環の表現論であらわれてくる種々の性質がどのように関連しているかをしらべている。多くの性質は，skew group construction で保たれるが、このことは次の意味で大事であると考えられる。artin algebra Γ がある性質をみたすことを証明したいとする。Γ は Λ から skew group construction によって得られ，Λ がその性質をみたすとする。このとき Γ もその性質をみたすことがわかるわけである。

以下 3 つの部分にわける。

§1. どのような性質が skew group construction で保たれるかについて.

§2. 具体的な例をいくつかあげる.

§3. almost split sequences によって定義される性質が skew group construction でどのようになるかについて.

§1に入る前に. 非常に簡単な skew group algebras の例をあげておく.

(1) $G = H \ltimes N$; Semidirect product. k: 体とする.
$kG = (kN)H$ (H の kN への作用は. conjugates)
つまり. k上の通常の group algebra は kN 上の Hによる skew group algebra とみなせるということ.

(2) $G = \langle g \rangle$, cyclic of order n. $\Lambda = k \times k \times \cdots \times k$ (nコの直和). $g(r_1, r_2, \cdots, r_n) = (r_2, r_3, \cdots, r_n, r_1)$.
このとき. $\Lambda G = M_n(k)$ (k上の $n \times n$ matrix の環)

(3) A/B が G-Galois 拡大 $\Longleftrightarrow$ ${}_BA$: finitely generated projective で $\mathrm{Hom}({}_BA, {}_BA) = AG$ (See [3]).

§1. Λ, Γ を artin algebras で.
$i : \Lambda \to \Gamma$ を ring monomorphism とする。

次の functors

$$F = \Gamma \otimes_\Lambda \; : \; \mathrm{mod}\,\Lambda \longrightarrow \mathrm{mod}\,\Gamma$$

$$H = \text{restriction} : \mathrm{mod}\,\Gamma \longrightarrow \mathrm{mod}\,\Lambda$$

について，次の性質を考える．

(A) (i) ${}_\Lambda\Lambda_\Lambda <\!\oplus\; {}_\Lambda\Gamma_\Lambda$

(ii) ${}_\Gamma\Gamma \otimes_\Lambda \Gamma_\Gamma \longrightarrow {}_\Gamma\Gamma_\Gamma$ は split

$$x \otimes y \longmapsto xy$$

epimorphism. ((ii) が成立するとき Γ/Λ は分離拡大とよばれる)

(B) (H, F) は adjoint pair である．

(C) $\Gamma\mathfrak{r} = \mathfrak{r}\Gamma = \mathrm{rad}\,\Gamma$，ここで $\mathfrak{r}$ は Λ の radical とする．

Theorem 1. Λ を artin algebra. G を finite group でその order n が Λ で invertible とする．

$i : \Lambda \longrightarrow \Lambda * G$ (natural ring monomorphism)

このとき，(A), (B), (C) が成りたつ．

(注) 上の中で n の可逆性は重要．標数 2 の体上の algebra Λ で，その上で位数 2 の群で skew group algebra を構成したとき (A), (B), (C) のいずれも不成立となる例がつくれる。

Theorem 2. $i : \Lambda \to \Gamma$ を ring monomorphism とする.

(a) (A)が成立するとき. Λ : finite representation type $\Leftrightarrow \Gamma$ is.

(b) (B)が成立するとき. Λ : 1-Gorenstein $\Leftrightarrow \Gamma$ is.

(c) (A)と(B)がともに成立するとき.

(i) $\mathrm{gl.dim}\,\Lambda = \mathrm{gl.dim}\,\Gamma$

(ii) $\mathrm{dom.dim}\,\Lambda = \mathrm{dom.dim}\,\Gamma$

(iii) Λ : selfinjective $\Leftrightarrow \Gamma$ is

(iv) Λ : Auslander algebra $\Leftrightarrow \Gamma$ is

(d) (C)が成りたつとき.

(i) $\underline{r}^i \Gamma = \Gamma \underline{r}^i = (\mathrm{rad}\,\Gamma)^i$ for all $i \geq 1$.

(ii) $\underline{r}\,\Gamma \cap \Lambda = \underline{r}$

(iii) X is simple in $\mathrm{mod}\,\Lambda \Rightarrow \Gamma \otimes_\Lambda X$ is semisimple in $\mathrm{mod}\,\Gamma$.

(iv) Y is simple in $\mathrm{mod}\,\Gamma \Rightarrow Y$ is semisimple in $\mathrm{mod}\,\Lambda$.

(e) (A)と(C)がともに成立するとき.

(i) $\underline{r}^i \Gamma \cap \Lambda = \underline{r}^i$

(ii) $\mathcal{L}(\Lambda) = \mathcal{L}(\Gamma)$. ここで $\mathcal{L}$ は Loewy length.

(iii) $\mathcal{L}(X) = \mathcal{L}(\Gamma \otimes_\Lambda X)$ for $X \in \mathrm{mod}\,\Lambda$

(iv) $\mathcal{L}({}_\Gamma Y) = \mathcal{L}({}_\Lambda Y)$ for $Y \in \mathrm{mod}\,\Gamma$

(f) (B)と(C)がともに成りたつとき. $X \in \mathrm{mod}\,\Lambda$ に対して

(i) $\Gamma\otimes_\Lambda \underline{r}^iX/\underline{r}^{i+1}X \cong (\mathrm{rad}\,\Gamma)^iFX/(\mathrm{rad}\,\Gamma)^{i+1}FX$

(ii) $\Gamma\otimes_\Lambda \mathrm{soc}^{i+1}X/\mathrm{soc}^iX \cong \mathrm{soc}^{i+1}FX/\mathrm{soc}^iFX.$

(g) (A), (B), (C) がすべて成りたつとき.

Λ が Nakayama algebra $\Leftrightarrow$ Γ : Nakayama.

次に, $X\in \mathrm{ind}\,\Lambda$ に対して, $\Lambda*G\otimes_\Lambda X$ は $\mathrm{mod}\,\Lambda*G$ でどのように分解するか, また $Y\in\mathrm{ind}\,\Lambda*G$ に対して, ${}_\Lambda Y$ は $\mathrm{mod}\,\Lambda$ でどのように分解するかについて述べる。

$X\in\mathrm{ind}\,\Lambda$, $g\in G$ に対して, ${}^gX$ という Λ-module を次の様に define する. 加法的には X と同じ構造で, $\lambda\in\Lambda$ の作用を, $\lambda x \coloneqq g^{-1}(\lambda)x$ $(x\in X)$ として, 左 Λ-module の構造を入れる。このとき ${}^gX$ は Λ-modules として $\bar{g}\otimes X = \{\bar{g}\otimes x \mid x\in X\}\ (\subseteq \Lambda*G\otimes_\Lambda X)$ と同型となる。次は後で基本的な役割をはたす.

Proposition 3. Λ, $\Lambda*G$ を通常のものとし.
$F=\Lambda*G\otimes_\Lambda : \mathrm{mod}\,\Lambda\to\mathrm{mod}\,\Lambda*G$, H=restriction : $\mathrm{mod}\,\Lambda*G \to \mathrm{mod}\,\Lambda$ とする. このとき次が成りたつ

(a) $HF(X)\cong {}^eX \amalg {}^{g_1}X \amalg\cdots\amalg {}^{g_n}X$, ここで $G=\{e, g_1,\cdots, g_n\}$.

(b) $FX\cong FY \Leftrightarrow \exists g\in G\ ;\ X\cong {}^gY$

(c) FX の直既約分解における直和因子の個数は高々 H の位数でおさえられる. ここで $H=\{g\in G \mid {}^gX\cong X\}$.

更に，Λ が代数閉体 k 上の algebra であるとき，

(d) G : cyclic order n で ${}^{g}X \cong X$ $(\forall g \in G)$ のとき，
FX は丁度 n 個の直和因子をもつ。

(e) $H = \{ g \in G \mid {}^{g}X \cong X \}$ が cyclic of order m ならば，FX は丁度 m 個の直和因子をもつ。

§2. この節を通して，Λ：代数閉体 k 上の finite dimensional algebra, G : finite group でその order n は invertible in Λ, G の Λ への作用は k 上では自明であるものとする。

(1) Λ を次の quiver で与えられる basic hereditary algebra とする。

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[dl, "\alpha_1"'] \arrow[dr, "\alpha_1'"] & \\
2 \arrow[d, "\alpha_2"'] & & 2' \arrow[d, "\alpha_2'"] \\
\vdots \arrow[d, "\alpha_{n-1}"'] & & \vdots \arrow[d, "\alpha_{n-1}'"] \\
n & & n'
\end{tikzcd}$$

$g(i) = i'$ $(2 \leq i \leq n)$, $g(\alpha_i) = \alpha_i'$ $(1 \leq i \leq n-1)$ とすれば g は Λ の位数 2 の automorphism となる。$G = \langle g \rangle$ とおく。
このとき，ΛG の quiver は次のもので与えられる。

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
1 \arrow[dr] & & 1' \arrow[dl] \\
& 2 \arrow[d] & \\
& \vdots \arrow[d] & \\
& n &
\end{tikzcd}
$$

一般に、A_{2n-3} 型の hereditary algebra Λ でその quiver の上に位数 2 の automorphism g が存在するとき、ΛG は D_n 型の hereditary algebra となる。($G=\langle g\rangle$)。このとき、$\alpha(\Lambda)=\beta(\Lambda)=2$、$\alpha(\Lambda G)=\beta(\Lambda G)=3$ となり、α, β の値は skew group construction で変わってしまう。

(2) Λ を basic with quiver Q, G: cyclic とする。このとき、ΛG の quiver Q_G を書くことができる。

$\mathcal{E}$: a set of representatives of the G-orbits of vertices of Q。$\varepsilon \in \mathcal{E}$ について、その G-orbit が size s をもつとき、Q_G の n/s 個の vertices をひきおこす。$\varepsilon, \varepsilon' \in \mathcal{E}$ について、それぞれの G-orbit の size が s, s' とする。

$\alpha : \varepsilon \to g^{-t}(\varepsilon')$ を Q の arrow とする。$\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_{m-1}$ と $\eta'_0, \eta'_1, \dots, \eta'_{m'-1}$ を $G\varepsilon$ と $G\varepsilon'$ から生ずる vertices とする。このとき、$\eta_\mu \to \eta'_{\mu'}$ なる arrow が存在する (in Q_G) $\iff$ $\mu \equiv \mu' + a$ (modulo (m, m')).

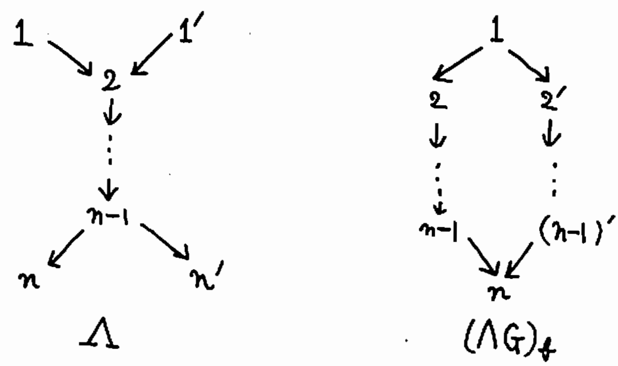
ここで，(m, m') は m と m' の最大公約数，a は

$g^{[s,s']}(\alpha) = \zeta^{[s,s']a}\alpha$ （$[s,s']$ は s と s' の最小公倍数，ζ は 1 の原始 n 乗根）により定まる整数とする。

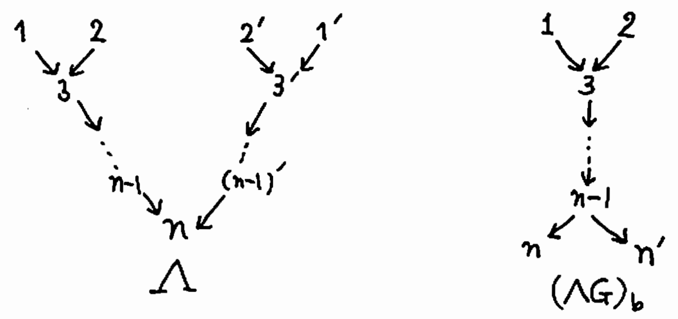
上のことを簡単な例でみてみる．

(a),(b),(c) では Λ は hereditary で $G=\langle g\rangle$ は order 2. Λ への作用は quiver の reflection によるものとする．このとき．

(a)

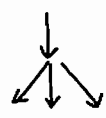


(b)

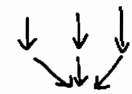


(c)

(d) Λ : hereditary で $G=\langle g\rangle$. (位数 3) が quiver に non trivial に作用しているとする.



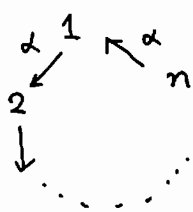
Λ



$(\Lambda G)_b$

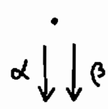
(e) Λ が 

, $\alpha^r=0$ で与えられ,
$G=\langle g\rangle$ (位数 n) が $g(\alpha)=\zeta\alpha$ (ζ は 1 の原始 n 乗根) によって作用している. このとき, ΛG は



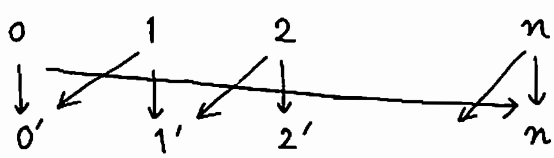
all relations $\alpha^r=0$.

によって, 与えられる。

(f) Λ が 

$G=\langle g\rangle$.
$g(\alpha)=\alpha$, $g(\beta)=\zeta\beta$
ζ は 1 の原始 n 乗根

によって与えられるとき, ΛG は hereditary となり,



によって, 与えられる。

(3) orientation reversing automorphism をもつ A_{2n-3} 型の self injective algebras の set と two-cornered algebra of D_n 型の set が skew group construction によって1対1に対応することも述べられている。

§3. この節では，almost split sequences と irreducible maps によって定義される環論的性質に関して，Λ と ΛG (or $\Lambda * G$) の間にどのような関係が成りたつかを述べる．

Theorem 4. Λ : artin algebra. G : finite group でその order n は invertible in Λ. $\Gamma = \Lambda G$ or $\Lambda * G$ とし．
$F = \Gamma \otimes_\Lambda$: $\mathrm{mod}\,\Lambda \to \mathrm{mod}\,\Gamma$, H=restriction : $\mathrm{mod}\,\Gamma \to \mathrm{mod}\,\Lambda$.

(a) $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ が $\mathrm{mod}\,\Lambda$ (resp. $\mathrm{mod}\,\Gamma$) における almost split sequences ならば，$0 \to FX \to FY \to FZ \to 0$ (resp. $0 \to HX \to HY \to HZ \to 0$) は $\mathrm{mod}\,\Gamma$ (resp. $\mathrm{mod}\,\Lambda$) における almost split sequences の直和である。

(b) $X \to Y$ が minimal left or right almost split map in $\mathrm{mod}\,\Lambda$ (resp. $\mathrm{mod}\,\Gamma$) のとき，$FX \to FY$ (resp. $HX \to HY$) は minimal left or right split maps in $\mathrm{mod}\,\Gamma$ (resp. $\mathrm{mod}\,\Lambda$) の直和である。

この結果として，mod Λ と mod ΛG (or mod $\Lambda * G$) の irreducible maps の間の緑密な関係を得る。少し記号を導入する.

$X \in \operatorname{ind}\Lambda$ に対して.

$[X] \equiv$ the set of indecomposable Λ-modules in the G-orbit of X.

$Z \in \operatorname{ind}\Lambda * G$ に対して，$X \in \operatorname{ind}\Lambda$ を Z が $\Lambda * G \otimes_\Lambda X$ の summand になるように選ぶ。$[Z] \equiv$ the set of all non-isomorphic indecomposable summand of $\Lambda G \otimes_\Lambda X$. X と Z が上の様に関係しているとき．$[\tilde{X}] = [Z]$ とかく．このとき．

$[\tilde{X}] = [Z] \Leftrightarrow Z \mid FX \Leftrightarrow {}^g X \mid HZ \ (\exists g \in G)$，ここで $A \mid B$ は A が B の summand という意味。$[X]$ のある object から $[Y]$ のある object への irreducible map が存在するとき，irreducible map $[X] \to [Y]$ が存在すると言うことにする.

Lemma. 上の条件のもとで次は同値．$(X, Y \in \operatorname{ind}\Lambda)$

(a) $[X] \to [Y]$: irreducible map が存在する。

(b) $\forall X' \in [X], \exists Y' \in [Y]$; $\exists$ irreducible map : $X' \to Y'$.

(c) $\forall Y' \in [Y], \exists X' \in [X]$; $\exists$ irreducible map : $X' \to Y'$.

(d) irreducible map $[\tilde{X}] \to [\tilde{Y}]$ が存在する。

(e) $\forall Z \in [\tilde{X}], \exists U \in [\tilde{Y}]$; $\exists$ irreducible map : $Z \to U$

(f) $\forall U \in [\tilde{Y}], \exists Z \in [\tilde{X}]$; $\exists$ irreducible map : $Z \to U$

artin algebra Λ に対して，ind Λ は"related"という関係から導入される同値関係をもつ。その同値類を component とよぶ。$\mathcal{C}$ を一つの component とする. このとき ${}^g\mathcal{C} = \{{}^gX \mid X \in \mathcal{C}\}$ $(g \in G)$ もまた component になる. そこで，$[\mathcal{C}] \equiv$ the set of the component of the form ${}^g\mathcal{C}$. $[\tilde{\mathcal{C}}] \equiv$ the set of components in ind$\Lambda * G$ having an object from some $[\tilde{X}]$ with X in $\mathcal{C}$. このとき次が成りたつ

Theorem 5. Λ を artin algebra. G : finite group でその order n が invertible in Λ とする

(a) ind Λ のある component $\mathcal{C}$ で irreducible maps の oriented cycles が存在しない $\Leftrightarrow$ 同じことが $[\tilde{\mathcal{C}}]$ のすべての components $\mathcal{D}$ で成りたつ。

(b) mod Λ の indecomposable modules の間では，oriented cycles は存在しない $\Leftrightarrow$ 同じことが mod $\Lambda * G$ で成立.

(c) indΛ のある component $\mathcal{C}$ で DTr- property が成りたつ. (i.e., $\forall X \in \mathcal{C}$, $DTr^i X$ is projective for some $i \geq 0$). $\Leftrightarrow$ $[\tilde{\mathcal{C}}]$ の each component $\mathcal{D}$ は DTr- property をもつ.

(d) Λ が DTr- property をもつ $\Leftrightarrow$ $\Lambda * G$ がもつ.

(e) $\mathcal{C}$ が ind Λ の preprojective component of ind Λ $\Leftrightarrow$

$[\tilde{\mathcal{E}}]$ の each component $\mathcal{D}$ が preprojective component of ind $\Lambda * G$.

次の定理は，preprojective partition に関するものである．

Theorem 6. $\operatorname{ind}\Lambda = (\bigcup_{0\le i<\infty} \mathcal{P}_i) \cup \mathcal{P}_\infty$, $\operatorname{ind}\Lambda * G = (\bigcup_{0\le i<\infty} Q_i) \cup Q_\infty$ を それぞれ preprojective partitions とする．このとき，$X \in \operatorname{ind}\Lambda$ について，次は同値

(a) $X \in \mathcal{P}_i$

(b) $\forall X' \in [X]$, $X' \in \mathcal{P}_i$

(c) Some Z in $[\tilde{X}]$ is in Q_i

(d) All Z in $[\hat{X}]$ are in Q_i.

とくに，$p(\Lambda) = p(\Lambda * G)$．ここで $p(\Lambda)$ は preprojective partition における nonempty layers の個数である．

最後に，tilted algebras に関する次の結果をあげておく．

Theorem 7. Λ : artin algebra of finite type. G : finite group でその order は invertible in Λ とする．このとき，Λ が tilted algebra $\Longleftrightarrow$ $\Lambda * G$ も so.

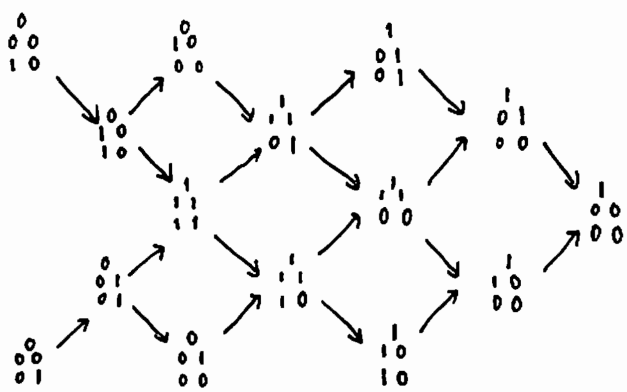
附記

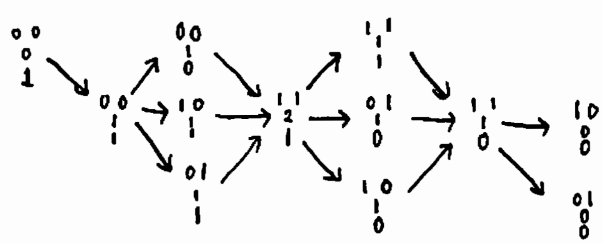
1. 定理4の状況がどのようになっているかを知るために次の例をあげておく.

Λ を quiver
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & 1 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ 2 \arrow[d] & & 2' \arrow[d] \\ 3 & & 3' \end{tikzcd}$$
で定まる basic algebra とし.

automorphism g を §2 例(1) でのものとする。 $G=\langle g\rangle$.

このとき, $(\Lambda G)_b$ の quiver は
$$\begin{tikzcd}[column sep=small] 1 \arrow[dr] & & 1' \arrow[dl] \\ & 2 \arrow[d] & \\ & 3 & \end{tikzcd}$$
であったが、それらの Auslander Reiten quivers は次の様になる.





2. preprojective partition と tilted algebras についての定義を書き落したので、つけ加えておきます。くわしくは、[7] および [8] を参照して下さい。

disjoint sets $\mathcal{P}_i$ $(0\leq i\leq\infty)$ への分解 ind Λ $= (\bigcup_{0\leq i<\infty}\mathcal{P}_i)\cup\mathcal{P}_\infty$ が preprojective partition であるとは、$\mathcal{P}_n$ $(n<\infty)$ は finite で $\mathcal{P}_n$ は $\mathrm{ind}\,\Lambda - \bigcup_{i=0}^{n-1}\mathcal{P}_i$ の projective generator となっているときに言う。

Artin algebra Λ が tilted algebra であるとは、hereditary algebra Σ と tilting module T が存在して、$\Lambda = \mathrm{End}_\Lambda(T)^{op}$ となるときいう。ここで tilting module T (over hereditary algebra) とは、$\mathrm{Ext}^1_\Sigma(T,T)=0$ かつ T の nonisomorphic summands の数と nonisomorphic simple Σ-modules の数が等しいときに言う。

References

[1] M. Auslander and O. Goldman, The Brauer group of a commutative ring, TAMS 97(1960), 367-409.

[2] J.W. Fisher and J. Osterburg, Finite group actions on noncommutative rings, A survey since 1970, in "Proceedings, 3rd Oklhoma Conference", 357-393, 1980.

[3] Y. Miyashita, On Galois extensions and crossed products, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 21 (1970), 97-121.

[4] S. Montgomery, Fixed rings of finite automorphism groups of associative rings, Lecture Notes in Math. 818, Springer, 1980

[5] I. Reiten, The use of almost split sequences in the representation theory of artin algebras, Lecture Notes in Math. 944, 29-104 (1982)

[6] I. Reiten and C. Riedmann, Skew group algebras in the Representation Theory of Artin algebras, J. Alg. 92, (1985), 224-282.

[7] M. Auslander and S. SMALØ, Preprojective modules over artinian algebras. J. Alg. 66 (1980), 61-122.

[8] D. Happel and C. Ringel, Tilted algebras, TAMS 274 (2) (1982), 399-443.

[9] K. BONGARTZ, Tilted algebras, Representations of Algebras, Proceedings, ICRA III, Puebla, Mexico, 1980.

[10] O. Bretscher and C. Läser, and Riedtmann, Selfinjective and simply connected algebras, Manuscripta Math. 36 (1981/82), 253–309.

[11] C. Riedtmann, Algebren Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück, Comment. Math. Helv. 55 (1980), 199–224.

斜体の構成とそのアルティン環の表現への応用

浅芝秀人

大阪市立大学理学部

有限表現型の遺伝的アルティン環はそれに対応するグラフがコクスター・グラフであるということによって特徴づけられる（Dowbor, Ringel, Simson［１］）。しかしディンキンでないコクスター・グラフに対応する環は多元環のなかにはなく、じっさいに存在するのかどうか不明のままであった。そのような環が構成できるためにはまず、いままでずっと解かれずにいたアルティンの問題が否定的に解かれる必要があった。これらの問題にこれまで手をつけることができなかったのは、斜体を構成する方法があまりなかった、ということにある。これらはしかし Schofield［３］、［４］によって解かれた（I_2(ｐ)，ｐ≧７の構成は残っているが）。ここでの目的は、彼の斜体の構成法を解説することにある。もっとも重要な道具は、はじめは意味のよくわからない定理３．４である。うえのふたつの問題はこれを使う簡単で明解な議論によって解かれる。§§４－５にこの議論をくわしくかいておいた。また§§１－２では有限表現型の遺伝的アルティン環の分類と、ディンキンでないコクスター・グラフ（とくにI_2(５)）に対応する環を構成するための斜体にかんする条件をまとめておいた。§３では定理３．４の証明の

あらましと、そのなかにあらわれる斜体構成について、このようなものか、と思える程度の解説をおこなった。最後に$I_2(5)$に対応する二種類のアルティン環のもつ興味ある性質に一言ふれておいた。全内容の目次はつぎのとおりである。

§ 1　有限表現型の遺伝的アルティン環とコクスター・グラフ

この節では環はすべてアルティン環とする。

1．1　環の種

斜体　F_i　と（F_i，F_j）－両側加群　${}_iM_j$　の組　$S=(F_i, {}_iM_j)_{1\leq i,j\leq n}$　を環の種とよぶ。S　からつぎのようにして環　T（S）をつくる：　まず

$$A:=\prod_{i=1}^{n} F_i \quad , \quad M:=\bigoplus_{i,j=1}^{n} {}_iM_j$$

とおく。すると　M　には、自然に（A，A）－両側加群の構造がはいる。そこで　T（S）　をテンソル環

$$T(S)=A\oplus M\oplus(\overset{2}{\otimes}_A M)\oplus(\overset{3}{\otimes}_A M)\oplus\cdots$$

として定義する。T（S）　を　S　のテンソル環とよぶ。

つぎに　A　を基本的（アルティン）環とし、J　をそのジャコブソン根基とする。$1=e_1+\cdots+e_n$ を１の直交原始巾等元へのひとつの分解とする。すると　A　から環の種

$$S(A)=(e_iAe_i/e_iJe_i,\ e_iJe_j/e_iJ^2e_j)$$

をつくることができる。S（A）を　A　の種とよぶ。（注。自然に定義される環の種のあいだの同型の違いを除けば、S（A）は　A　の１の分解の仕方によらずにきまる。）さて環が有限表現型であるとは、その環が（有限生成）直既約右加群の同型類を有限個しかもたないことであった。（注。右加群を左加群としても条件は同値。）この性質は森田不変であるから環の表

現論を考えるかぎり、環を基本的であるとしてよい。以後この節を通じて環はすべて基本的であると仮定する。するとつぎのことはよく知られている。

定理 環 A が有限表現型かつ遺伝的であれば、

$$A \cong T(S(A))。$$

これによって有限表現型の遺伝的な環にかんしては、その分類問題は環の種の分類問題に帰着されることになる。

1．2 斜体上の両側加群の表現と次元列

一般にふたつの斜体 D，E と （D，E）－両側加群 X にたいして

$$X^L := \mathrm{Hom}_D(X, D), \quad X^R := \mathrm{Hom}_E(X, E)$$

とおく。 X^L も X^R も自然に（E，D）－両側加群となる。（右かたの L および R はそれぞれ左および右にかんする双対をとることを意味する。）F，G を斜体、M を（F，G）－両側加群とする。すると、

$$M^{L(0)} := M =: M^{R(0)}, \quad M^{L(i)} := (M^{L(i-1)})^L, \quad M^{R(i)} := (M^{R(i-1)})^R$$

によって帰納的に、任意の整数 $i \geqq 0$ にたいして、$M^{L(i)}$，$M^{R(i)}$が定義できる。このとき右次元 $[M : G]_r$ が有限ならば、$M^{RL} \cong M$，左次元 $[M : F]_\ell$ が有限ならば、$M^{LR} \cong M$ がなりたつ。i が偶数のとき（F_i，G_i)

$=(F, G)$，i が奇数のとき $(F_i, G_i)=(G, F)$ とおく。すると $M^{L(i)}$ はいつも (F_i, G_i)－両側加群であるということができる。すべての自然数 i にたいして、$a_i := [M^{L(i-1)} : G_{i-1}]_r$ とおく。すべての a_i が有限のとき、M は<u>有限的な双対化</u>をもつという。いま $(x_0, y_0) := (-1, 0)$，$(x_1, y_1) := (0, 1)$ とおき帰納的に $i \geqq 2$ にたいして、$(x_i, y_i) := a_{i-1}(x_{i-1}, y_{i-1}) - (x_{i-2}, y_{i-2})$ と定義する。このとき $1 \leqq i \leqq m$ なるすべての i にたいして、x_i，$y_i \geqq 0$ かつ $(x_m, y_m) = (1, 0)$ となる自然数 m が存在するとき（容易にわかるように、これは存在すれば一意的にきまる。）、M は<u>次元列をもつ</u>といい、$d(M) = (a_1, a_2, \cdots, a_m)$ を M の<u>次元列</u>、m を $d(M)$ の<u>長さ</u>と呼んで、$m = |d(M)|$ とかく。さらに $\{(x_i, y_i) \mid 1 \leqq i \leqq m\}$ を M および $d(M)$ の<u>ブランチ系</u>という。このときつぎの命題がなりたつことが知られている（これからとくに、M が次元列をもてば M は有限的な双対化をもつことがわかる）。

<u>命題</u>（[1]）　F，G を斜体とする。(F, G)－両側加群 M にたいして、つぎは同値である。

（1）環 $R_M := \begin{pmatrix} F & M \\ 0 & G \end{pmatrix}$ は有限表現型である。

（2）M は次元列をもつ。

（3）R_M の（有限生成）直既約右加群の同型類の個数 $= |d(M)|$。

（4）R_Mの直既約右加群の<u>次元型</u>の全体 ＝ Mのブランチ系。

ただし右R_M－加群 X にたいして、X の次元型 <u>dim</u> X とは組（$[X\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}:F]_r$, $[X\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}:G]_r$）のことである。またこれらがなりたつとき直既約右$R_M$－加群の同型類の完全代表系$P_1$ ，・・・，P_m を、<u>dim</u> P_i ＝（x_i, y_i）とおくとき $x_i/y_i < x_{i+1}/y_{i+1}$ となるように並べることができ、右R_M－加群のAR－系列

$$0\to P_{i-1}\to P_i^{(a_i)}\to P_{i+1}\to 0 \quad (2\leqq i\leqq m-1)$$

が存在する。また $\mathrm{rad}\,P_2 \cong P_1^{(a_1)}$, $P_{m-1}/\mathrm{soc}\,P_{m-1}\cong P_m^{(a_m)}$ となり P_1 ，P_2 は射影的、P_{m-1}, P_m は入射的である。さらに M は有限的な双対化をもち、ある i で $a_i=1$となり、（F，G）－両側加群 M は（F_m, G_m）－両側加群 $M^{L(m)}$ と同型である。とくに m が奇数ならば $F\cong G$ となる。

抽象的にm個の自然数列 $a=(a_1, \cdots, a_m)$ にたいして、これがさきの次元列とおなじ性質をもつとき、a を<u>次元列</u>とよぶ。ただしこの性質は（a_1, ・・・，a_{m-1}）によってきまっているため a_m は不確定になる。そこで｛（x_i, y_i）｝を a のブランチ系としたとき $a_m=x_{m-1}$ とおく。すると両側加群から得られる次元列はすべていま定義した意味の次元列になっている。次元列のつくられかたはつぎのとおりである。

(i)（0，0）は次元列である。

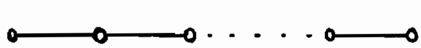
(ii) $(a_1, \cdots, a_m)$ が次元列ならば、任意の $1 \leqq i < m$ にたいして、$(a_1, \cdots, a_{i-1}, a_i+1, 1, a_{i+1}+1, a_{i+2}, \cdots, a_m)$ はまた次元列である。

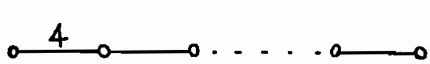
(iii) 以上のようにして得られた列がすべての次元列をつくしている。

1．3　コクスター・グラフ

A を有限表現型の環とし、$S(A) = (F_i, {}_iM_j)_{1 \leq i, j \leq n}$ の図 Q をつぎのように定義する：Q の頂点の集合：＝｛1，・・・，n｝、Q の矢の集合：＝$\{ i \to j \mid {}_iM_j \neq 0 \}$。さらに A のグラフ $\Gamma(A)$ を Q からつぎのようにきめる：Q の各矢 $i \to j$ のうえに $|d({}_iM_j)|$ の値をかいて、つぎに図のすべての矢を辺にとりかえて $\Gamma(A)$ をつくる。ただし $|d({}_iM_j)| = 3$ のときは、この値をかくことを省略する。以上の準備のもとで、有限表現型の遺伝的アルティン環の分類を与えるつぎの定理をのべることができる。

定理 （［1］）。 遺伝的アルティン環 A が有限表現型であるための必要十分条件は、$\Gamma(A)$ のすべての連結成分がつぎに示すコクスター・グラフのどれかであることである。（nは頂点の数をあらわす。）

A_n 

$B_n (= C_n)$  $(n \geqq 2)$

D_n　　$(n \geqq 4)$

E_n　　$(n = 6, 7, 8)$

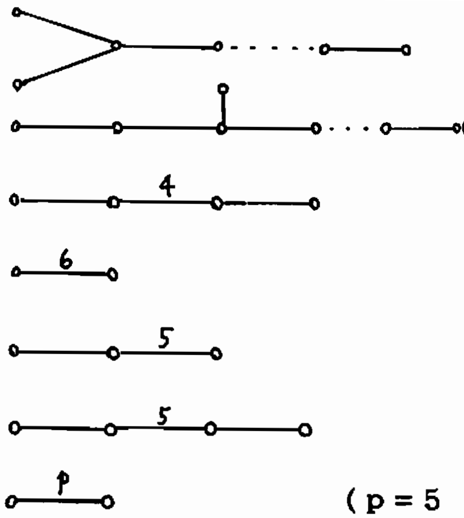
F_4

G_2

H_3

H_4

$I_2(p)$　　$(p = 5$　または　$p \geqq 7)$



<u>§2</u>　<u>ディンキンでないコクスター・グラフに対応するアルティン環の構成問題とアルティンの問題</u>

コクスター・グラフ　A_n から　G_2 まではディンキン・グラフともよばれていて、これらをΓ（A）にもつアルティン環　A　は多元環（つねにある体上で有限次元と仮定する）として構成することができる。しかしディンキンでないコクスター・グラフ　H_3, H_4, $I_2(p)$ に対応する多元環は存在しないし、これまでその存在は不明であった。ここではとくに　H_3, H_4, $I_2(5)$ に対応するアルティン環を構成する問題を扱う。$I_2(5)$ が構成されれば、これからただちに　H_3 , H_4 も構成されるから、$I_2(5)$ についてだけ考えれば十分である。またこのことは§1からわかるように、長さ5の次元列をもつ、斜体上の両側加群 ${}_EM_F$ をつくることに帰着される。ここ

では長さ5の次元列として (2,1,3,1,2)をとりあげる。この最後の値2は自動的にきまるものであるから、(E, F)−両側加群 M にたいする実質的な条件は

（＊） $[M:F]_r=2$, $[M^L:E]_r=1$, $[M^{L(2)}:F]_r=3$, $[M^{L(3)}:E]_r=1$

となる。この節の目的は条件（＊）を斜体 E, F にかんする条件にいいかえることである。つぎのことは容易にたしかめられる。

<u>命題</u> E, F, Mを上のとおりとし、$[M:F]_r$, $[M^L:E]_r$, $[M^{L(2)}:F]_r$はどれも有限であるとする。このときつぎは同値。

（1） $[M:F]_r=a$, $[M^L:E]_r=b$, $[M^{L(2)}:F]_r=c$。

（2） $[M_b(E):F]_r=ab$, $[M_b(E):F]_l=bc$。

ただし$M_b(E)$はE上のb×b全行列環であり、$M_b(E)$をF上の左または右加群と考える仕方は、$M^L_E \cong \overset{b}{\oplus} E$ とみて${}_F(M^L_E)$の左F−作用による埋め込み F→M（E）をもちいるものとする。

この命題よりただちに

<u>系</u> 次元列 (2,1,3,1,2)をもつ、斜体 E, F 上の両側加群 M を与えることは、斜体の拡大 $F \subseteq E$ でつぎをみたすものを与えることと同値である：

$$(\#)\quad \begin{cases} [E:F]_r=2,\quad [E:F]_\ell=3, \\ [M_3(F):E]_r=3,\quad [M_3(F):E]_\ell=3. \end{cases}$$

ただし　E　の　$M_3(F)$ への埋め込み方はさきの命題と同様とする。

条件（＃）はつぎにのべるアルティンの問題が否定的に解かれることを要求している。

アルティンの問題：　斜体の拡大　$F \subseteqq E$　において、$[E:F]_\ell$, $[E:F]_r$ ともに有限であれば、$[E:F]_\ell=[E;F]_r$ となるか？

Schofield は［３］でアルティンの問題を否定的に解き、つぎにそこでもちいた方法を一般化して、［４］で条件（＃）をみたす斜体拡大　$F \subseteqq E$ を構成した。これらふたつの論文で頻繁に使われる概念および道具をまとめて本にしたのが［５］である。次節で順にこれらを説明し、§４、§５でそれぞれ［３］、［４］の結果を証明する。

§３　斜体の構成

３．１　環の余積

（１をもつ）環の圏のなかでの（一般論の意味の）余積を環の余積という。

可換環　k　と集合　X　にたいして、X　を変数集合とする　k上の自由多元環を$k<X>$であらわし、$P\subseteq k<X>$が生成する$k<X>$のイデアルを$[P]$とかくことにする。剰余環　$k<X>/[P]$を　$k<X\mid P>$とあらわす。とくに　$k=\mathbb{Z}$　のときは　k　を省略してかく。すると任意の環　R　は　$R\cong<X\mid P>$　とあらわすことができる。これを使うと、環の余積は具体的につぎのようにしてえられる。

<u>命題</u>　環の圏は余積をもつ。すなわち、環の族　$F:=\{R_\lambda\mid\lambda\in\Lambda\}$ にたいして、$R_\lambda\cong<X_\lambda\mid P_\lambda>$（$\forall\lambda\in\Lambda$）とすると、$\sqcup R_\lambda:=<\sqcup X_\lambda\mid\sqcup P_\lambda>$は標準写像　$\sigma_\lambda:<X_\lambda\mid P_\lambda>\to<\sqcup X_\lambda\mid\sqcup P_\lambda>$によって　F　の余積をなす。ただし　$\sqcup X_\lambda$　は集合族$\{X_\lambda\}$の素合併である。$\sqcup P_\lambda$　も同様。

S　を環とする。環　R　と環準同型　$\phi:S\to R$　との組(R,ϕ)をS－環とよび、ふつうは　ϕ　を省略して、単に　R　をS－環という。ふたつのS－環の射を普通に定義して、S－環の圏が考えられる。

<u>系</u>　S　を任意の環とする。すると　S－環の圏は余積をもつ。すなわちS－環の族　$F:=\{(R_\lambda,\phi_\lambda)\mid\lambda\in\Lambda\}$にたいして、$\sigma_\lambda:R_\lambda\to\sqcup R_\lambda$を標準写像とすると、$\underset{S}{\sqcup}R_\lambda:=\sqcup R_\lambda/[\sigma_\lambda\phi_\lambda(s)-\sigma_\mu\phi_\mu(s)\mid\lambda,\mu\in\Lambda,s\in S]$が　F　の余積となる。S－環としての構造射および標準射

$R_\lambda \to \bigsqcup_S R_\lambda$ は普通に定義する。

3．2　環の融合

A，B　を環、M　を（A，B）－両側加群、x　を　M　の元とする。$M = A \times B$　のとき組（M，x）を生成元を指定した巡回（A，B）－両側加群あるいは略して指定巡回（A，B）－両側加群とよぶ。環の圏のなかでつぎのふたつの性質にかんして普遍的な対象　R　は存在すれば同型を除いて一意的であるから、$R = A \underset{(M,x)}{\sqcup} B$　とかき、これを　A　と　B　の（M，x）に沿った融合とよぶ：

（1）環準同型　$\alpha : A \to R$，$\beta : B \to R$　が存在する。

（2）α，β　によって　R　を（A，B）－両側加群とみるとき、指定巡回両側加群のあいだの全射準同型　ϕ：（M，x）→（$\alpha A \cdot \beta B$，1）が存在する。

ただしふたつの指定巡回両側加群（U，u）から（V，v）への準同型とは両側加群としての準同型で　u　を　v　に写すもののことをいう。（2）の　ϕ　は　ϕ（x）＝1　より存在すれば一意的である。

命題　上の記号のもとで、$A \underset{(M,x)}{\sqcup} B$　は存在する：　$A \underset{(M,x)}{\sqcup} B =$

$$A \sqcup B / [\textstyle\sum_i \alpha(a_i)\beta(b_i) \mid a_i \in A,\ b_i \in B,\ \sum_i a_i x b_i = 0]$$

ただし　$\alpha : A \to A \sqcup B$，$\beta : B \to A \sqcup B$　は標準写像である。

注意　容易に確かめられるように、S　を環とし、A，B　を　S－環とすればつぎがなりたつ：

$$A \underset{S}{\sqcup} B \cong A \underset{(A \otimes_S B,\ 1\otimes 1)}{\sqcup} B \ 。$$

3．3　普遍的局所化

R　を環、$\mathcal{P}$（R）を有限生成射影的左R－加群のなす圏とする。Σ　を $\mathcal{P}$（R）の射からなるある集合とする。このときつぎのふたつの性質にかんして普遍的な環　R_Σ を考える：

（1）環準同型　$\sigma : R \to R_\Sigma$ が与えられている。

（2）σ　によって　R_Σ を（R_Σ，R）－両側加群とみると、任意の Σ　の元　$\alpha : P \to Q$　にたいして、

$$R_\Sigma \otimes_R \alpha : R_\Sigma \otimes_R P \to R_\Sigma \otimes_R Q$$

は左 R_Σ －加群のあいだの同型である。

普遍性により　R　は存在すれば同型を除いて一意的である。この　R_Σ を　R　の　Σ　における<u>普遍的局所化</u>とよぶ。

命題　上の記号のもとで、R_Σ は存在する。

具体的に　R_Σ をあらわすために少し準備をする。Q＝（Q_0，Q_1，d，c）を図（＝quiver）とする。すなわち　Q_0 は頂点の集合、Q_1 は矢の集合で

$d, c: Q_1 \to Q_0$ は写像で各 $\alpha \in Q_1$ にたいして $d(\alpha), c(\alpha)$ はそれぞれ α の始点、終点をあらわす。k を可換環として $k\langle Q\rangle$ で Q からつくられる自由k－圏（＝path category over k）をあらわす。$k\langle Q\rangle$の射からなる集合 I の生成するイデアルを [I] とするとき、剰余圏 $k\langle Q\rangle/[I]$ を $k\langle Q \mid I\rangle$ とかく。任意の k－圏 C は必ず$k\langle Q \mid I\rangle$の形であらわされる。たとえば $Q=C^{\circ}$（＝C の合成を忘れたもの）ととれる。とくにすべての加法圏は$\mathbb{Z}\langle Q \mid I\rangle$の形にかける。（注。集合 X にたいして $Q_X := (pt, X, f, f)$ とおくと $k\langle Q_X\rangle$ はさきに3．1で定義した $k\langle X\rangle$ と同型である。ただし pt は一点集合、f はただひとつ存在する X から pt への写像である。）そこで $\mathcal{P}(R)=\mathbb{Z}\langle\mathcal{P}(R)^{\circ} \mid I\rangle$, $\mathcal{P}(R)^{\circ}=(O, M, d, c)$ とあらわし、$Q:=(O, M \sqcup \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \Sigma\}, d', c')$; $\alpha \in M$ のとき $(d'(\alpha), c'(\alpha)) := (d(\alpha), c(\alpha))$, $\alpha \in \Sigma$ にたいして $(d'(\bar{\alpha}), c'(\bar{\alpha})) := (c(\alpha), d(\alpha))$ ときめる。これらを使って加法圏 $\mathcal{P}(R)_{\Sigma} :=$

$$\mathbb{Z}\langle Q \mid I \sqcup \{\alpha\bar{\alpha}-1_{d(\alpha)}, \bar{\alpha}\alpha-1_{c(\alpha)} \mid \alpha \in \Sigma\}\rangle$$

を定義する。ただし各 $X \in O$ の恒等写像を 1_X とあらわした。$R \cong \mathcal{P}(R)({}_RR, {}_RR)$ であることに注意して、

$$R_{\Sigma} := \mathcal{P}(R)_{\Sigma}({}_RR, {}_RR)$$

とおくとこれが求めるものになっている。

R のグロタンディク群 $K_0(R)$ から $\mathbb{R}$ への pre-ordered群としての準同型 $\rho : K_0(R) \to \mathbb{R}$ が. $\rho(R)=1$ をみたすとき、ρ を R上の<u>（射影的）階数写像</u>とよぶ。（$P \in \mathcal{P}(R)$ にたいして、p を P の属する $K_0(R)$ の元とするとき $\rho(P)=\rho(p)$ とかく。）$\alpha : P \to Q$ を$\mathcal{P}(R)$の射とする。α にもその<u>内部階数</u> $\rho(\alpha)$ を

$$\rho(\alpha) := \inf_{P'} \{\rho(P') \mid \alpha \text{ は } P' \text{ を通過する}\}$$

で定義する。$\rho(\alpha)=\rho(P)=\rho(Q)$ のとき α は<u>フル写像</u>とよばれる。ρ のフル写像の全体における R の普遍的局所化を R_ρ であらわす。単純アルティン環 $S \cong M_n(F)$（F は斜体）の n を S の<u>サイズ</u>とよんで $s(S)$ とかく。

<u>定理1</u> （［5，定理5．6］）S，S_1，S_2 を単純アルティン環で各 i にたいして埋め込み $S \to S_i$ があるとする。これによって S_1，S_2 を S－環とみれば、$S_1 \sqcup_S S_2$ は遺伝的でありただひとつの階数写像 ρ をもつ。さらに $(S_1 \sqcup_S S_2)_\rho$ は単純アルティン環であり、そのサイズは $s(S_1)$ と $s(S_2)$ との最小公倍数に等しい。

上の $(S_1 \sqcup_S S_2)_\rho$ を $S_1 \bigcirc_S S_2$ とかく。とくに $s(S_1)=s(S_2)=1$ のときすなわち S_1, S_2 ともに斜体ならば $S_1 \bigcirc_S S_2$ も斜体となる。

<u>定理2</u>（［5，定理13．2］） S_1, S_2 を単純アルティン環、（M，x）を指定巡回（S_1, S_2）－両側加群とする。すると、S_1 と S_2 の積を $S_1 \sqcup_{(M,x)} S_2$ のなかでとったものを S_1S_2 とかけば、指定巡回（S_1, S_2）－両側加群として、（M，x）と（S_1S_2, 1）とは同型である。また $S_1 \sqcup_{(M,x)} S_2$ は遺伝的である。もしさらに S_1 か S_2 のいずれかが斜体であれば $S_1 \sqcup_{(M,x)} S_2$ はただひとつの階数写像 ρ をもち $(S_1 \sqcup_{(M,x)} S_2)_\rho$ は単純アルティン環である。このとき $(S_1 \sqcup_{(M,x)} S_2)_\rho$ のサイズは max｛s（S_1），s（S_2）｝となる。

上のあとの $(S_1 \sqcup_{(M,x)} S_2)_\rho$ が単純アルティン環である場合、$S_1 \bigcirc_{(M,x)} S_2 := (S_1 \sqcup_{(M,x)} S_2)_\rho$ とかく。

<u>3．4</u> 拡大斜体の構成

これまでのべてきた余積、融合、普遍的局所化の方法を使って、導入部でその重要性を指摘しておいた、つぎの定理の証明を概説する。

<u>定理</u>（［5，定理13．13］） 斜体 E，F にたいして、自然数 n，a，b および M_n(E) の部分集合 $\{s_{kj} \mid 1 \leq k \leq a,\ 1 \leq j \leq n\}$ と $\{t_{ih} \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq h \leq b\}$ が与えられていてつぎがみたされていると仮定する：

（i）　$F \subseteqq M_n(E)$。

（ii）　$a \cdot n$，$b \cdot n > 1$。

（iii）　$\{s_{kj}\}$ は左 F－独立かつ　$s_{kj}\, e_{jj} = s_{kj}$。

（iv）　$\{t_{ik}\}$ は右 F－独立かつ　$e_{ii}\, t_{ik} = t_{ik}$。

ただし $\{e_{ij} \mid 1 \leqq i, j \leqq n\}$ は　$M_n(E)$ の行列単位とする。このとき斜体の拡大　$E \subseteqq E'$，$F \subseteqq F'$ を構成して以下がなりたつようにできる：

（v）
$$\begin{tikzcd}[arrows=dash]
 & & M_n(E') \arrow[d] \\
M_n(E) \arrow[urr] \arrow[d] & & F' \\
F \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$
，$F = F' \cap M_n(E)$。

（vi）　$\{s_{kj}\}$ は　$F' M_n(E)$ の左 F'－基底。

（vii）　$(M_n(E)F', 1) \cong (M_n(E) \otimes_F F', 1 \otimes 1)$（指定巡回 $(M_n(E), F')$－両側加群として）。

ただし（v）の図式は、下の環 $\subseteq$ 上の環、をあらわすものとする。

<u>注意</u>　上の定理において　E，F　をそれぞれ　E'，F' におきかえても条件（i）－（iv）はなりたっている。

<u>証明の概略</u>　まず　F' を構成する。定理3．3．1より　$M_{an}(F) \otimes_F M_n(E)$ はサイズ　an　の単純アルティン環であるからある斜体　D　で　$M_{an}(D)$ とかける。そこで　$F' := D$　ととる。つぎに　x　を

M_{an}(F′)の第1行、第1列に対応する行列単位とおき　M：＝xM_{an}(F′)とおく。すると　M　は(F′，M_n(E))－両側加群とみられる。このとき{xs_{kj}}が　M　の左F′－基底であることが確かめられる。これよりただちに(M，x)は指定巡回(F′，M_n(E))－両側加群であることがわかる。そこで　E′を構成する。定理3．2．2より　$F' \underset{(M,x)}{\bigcirc} M_n$(E)はサイズ　n　の単純アルティン環であるから、ある斜体　E′でM_n(E′)とかける。この同じ定理により　(M，x)≅(F′M_n(E)，1)であるから、{xs_{kj}}が　M　の左F′－基底であることより{s_{kj}}がF′M_n(E)の左F′－基底であることがわかる(：(vi))。ここで(v)：　F′∩M_n(E)＝F　はすぐに確かめられる。最後に(vii)が[4，定理13．14]による細かい考察によって示される。　//

§4　アルティンの問題の否定的解決

Schofield によって証明された以下の定理はつぎの節で　I_2(5)に対応するアルティン環の構成にとって基本的な道具となる。またこれからただちにアルティンの問題が否定的に解決される。

定理([5，定理13．12])　定理3．4とまったく同じ記号と仮定のもとで、斜体の拡大　$E \subseteq \bar{E}$，$F \subseteq \bar{F}$　が存在してつぎをみたす：

(v) $\begin{tikzcd} & M_n(\bar{E}) \arrow[d, dash] \\ M_n(E) \arrow[ur, dash] & \bar{F}. \\ F \arrow[u] \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$ ，$F=\bar{F}\cap M(E)$。

(vi) $\{s_{kj}\}$ は $M_n(\bar{E})$ の左 $\bar{F}$－基底。

(vii) $\{t_{ih}\}$ は $M_n(\bar{E})$ の右 $\bar{F}$－基底。

定理を証明するまえに、この定理からただちにアルティンの問題の否定的解決となるつぎの系が得られることを示す。

<u>系</u> 任意のふたつの自然数 $a, b>1$ にたいして、斜体の拡大 $F\subsetneqq E$ が存在して、$[E:F]_l=a$ かつ $[E:F]_r=b$ となる。

<u>証明</u> $a\leqq b$ と仮定してよい。体の拡大 $F\subsetneqq E$ で $[E:F]\geqq b$ となるものは必ずとれる。$\{v_i \mid 1\leqq i\leqq b\}$ を F 上独立な E の部分集合として、上の定理を $n=1$，$\{s_k \mid 1\leqq k\leqq a\}:=\{v_k \mid 1\leqq k\leqq a\}$，$\{t_h \mid 1\leqq h\leqq b\}:=\{v_h \mid 1\leqq h\leqq b\}$ にたいして適用すればよい。 //

<u>定理の証明</u> 定理の仮定の部分を E と F に注目して $H(E, F)$ とかくことにする。$E_0:=E$，$F_0:=F$ とおく。帰納的に斜体 E_i，F_i を

以下のように定義する。

（Ｉ）ｉ：偶数→奇数。次を仮定する（これは　$m=0$　のときＯＫ）：

(a_{2m})

(1)
$$\begin{tikzcd} & M_n(E_{2m}) \\ M_n(E_0) \arrow[ur, dash] \arrow[d, dash] & F_{2m} \arrow[u, dash] \\ F_0 \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$
，$F_0 = F_{2m} \cap M_n(E_0)$。

(2) $H(E_{2m}, F_{2m})$ がみたされている。

すると定理３．４より斜体　E_{2m+1}，F_{2m+1}　を構成して、

(b_{2m+1})

(1)
$$\begin{tikzcd} & M_n(E_{2m+1}) \\ M_n(E_{2m}) \arrow[ur, dash] \arrow[d, dash] & F_{2m+1} \arrow[u, dash] \\ F_{2m} \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$
，$F_{2m} = F_{2m+1} \cap M_n(E_{2m})$。

(2) $\{s_{kj}\}$ は　$F_{2m+1}M_n(E_{2m})$ の左 F_{2m+1} －基底である。

(3) $(M_n(E_{2m})F_{2m+1},\ 1) \cong (M_n(E_{2m}) \otimes_{F_{2m}} E_{2m+1},\ 1 \otimes 1)$。

とできる。このとき (a_{2m}) の（１）、(b_{2m+1}) の（１）および定理３．４の下の注意より、(a_{2m+1}) がなりたつ。

（ＩＩ）ｉ：奇数→偶数。(a_{2m-1}) を仮定すれば（（Ｉ）より　$m=1$　のときＯＫ）、定理３．４の左右対称命題より斜体　E_{2m}，F_{2m}　が存在して、

(c_{2m})

(1) (b_{2m}) の（１）。

(2) $\{t_{ik}\}$ は　$M_n(E_{2m-1})F_{2m}$ の右 F_{2m} －基底である。

(3) $(F_{2m}M_n(E_{2m-1}),\ 1) \cong (F_{2m} \otimes_{F_{2m-1}} M_n(E_{2m-1}),\ 1 \otimes 1)$。

となる。このときやはり（a_{2m}）がなりたっている。

そこで　$\bar{E} := \bigcup_i E_i$ ，$\bar{F} := \bigcup_i F_i$ とおく。すると明らかにこれらは斜体で、定理４の（ｖ）がすぐにわかる。（ｖｉ）を示す。任意の　$s \in M_n(\bar{E})$ にたいして、ある　$p \geqq 0$　が存在し、$s \in M_n(E_{2p}) \subsetneqq F_{2p+1} M_n(E_{2p}) = \bigoplus_{k,j} F_{2p+1} s_{kj} \subseteq \sum_{k,j} \bar{F} s_{kj}$ 。すなわち $\{s_{kj}\}$ は　$M_n(\bar{E})$ の左 $\bar{F}$－生成系をなす。つぎに　$\sum_{k,j} \alpha_{kj} s_{kj} = 0$，$\alpha_{kj} \in \bar{F}$（$\forall k, j$）とすると、ある　$q \geqq 0$　が存在して、すべての　α_{kj}　が　F_q　にはいる。H（E_q，F_q）よりすべての　$\alpha_{kj} = 0$。ゆえに（ｖｉ）がなりたつ。（ｖｉｉ）も同様である。　//

§５　I_2（５）に対応するアルティン環の構成

定理（［５，ｐｐ．２１４－２１８］参照）　長さ５の任意の次元列　ａにたいして、斜体　Ｅ，Ｆ　と（Ｅ，Ｆ）－両側加群　Ｍ　が存在して、ｄ（Ｍ）＝ａ　となる。よってとくに I_2（５）に対応するアルティン環は存在する。

証明　次元列 (2,1,3,1,2)をもつ両側加群　Ｍ　が構成できれば、これ以外の長さ５の次元列　ａ　はすべてこの次元列の巡回置換であるから、命題１．２よりある　ｉ　で　ｄ（$M^{L(i)}$）＝ａ　とできる。よって§２より条

件（#）をみたす斜体拡大を構成すれば十分である。さて系4より斜体拡大 $F_0 \subseteq E_0$ が存在して、$[E_0 : F_0]_r = 2$，$[E_0 : F_0]_\ell = 3$ となる。$B := \{1, e, f\}$ を E_0 の左 F_0－基底とする。すると $\{1, e\}$ は E_0 の右 F_0－基底にもなっている。左 F_0－基底 B によって $E_0 \hookrightarrow M_3(F_0)$ とみなし、これの行列単位を $\{g_{ij} \mid 1 \leqq i, j \leqq 3\}$ とおく。このとき指定巡回 (F_0, E_0)－両側加群として $(g_{11} M_3(F_0), g_{11}) \cong (E_0, 1)$ がなりたつ。つぎの性質をみたす斜体拡大 $\bar{F} \subseteq \bar{E}$ を構成すれば、この拡大が条件（#）をみたす：

（i）$B := \{1, e, f\}$ は $\bar{E}$ の左 $\bar{F}$－基底。

（ii）$\{1, e\}$ は $\bar{E}$ の右 $\bar{F}$－基底。

（iii）$C := \{g_{11}, g_{22}, g_{33}\}$ は $M_3(\bar{F})$ の左かつ右 E－基底。

ここで $C \subseteq M_3(E_0)$ は左かつ右 E_0－独立であることに注意する。斜体 E_i，F_i を以下のように帰納的に定義する。

（I）i：偶数→奇数。つぎを仮定する（これは $m=0$ のときOK）。

$$
(a_{2m})
\begin{cases}
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & E_{2m} \arrow[d, dash] \\
E_0 \arrow[ur, dash] \arrow[d, dash] & F_{2m} \\
F_0 \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}
\quad , \; F_0 = F_{2m} \cap E_0; \\[1ex]
B \text{ は } E_{2m} \text{ の左 } F_{2m} \text{－基底；かつ} \\[1ex]
\{1, e\} \text{ は } E_{2m} \text{ の右 } F_{2m} \text{－基底である。}
\end{cases}
$$

このとき B によって $E_{2m} \hookrightarrow M_3(F_{2m})$ とみなして

$$
\begin{tikzcd}
 & M_3(F_{2m}) \arrow[d, dash] \\
M_3(F_0) \arrow[ur, dash] \arrow[d, dash] & E_{2m} \\
E_0 \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}
$$

が得られるが、こうすると上の注意と同様に、$C \subsetneq M_3(F_{2m})$ は左かつ右 E_{2m} ー独立。よって定理４より斜体の拡大　$F_{2m} \subsetneq F_{2m+1}$, $E_{2m} \subsetneq E_{2m+1}$ が存在して、

$$
\begin{tikzcd}
 & M_3(E_{2m+1}) \arrow[d, dash] \\
M_3(F_{2m}) \arrow[ur, dash] \arrow[d, dash] & E_{2m+1} \\
E_{2m} \arrow[ur, dash] &
\end{tikzcd}
\quad , \ E_{2m} = E_{2m+1} \cap M_3(F_{2m})
$$

で　C　は　$M_3(F_{2m+1})$ の左かつ右 E_{2m+1} ー基底となる。ここで埋め込み　$F_{2m+1} \hookrightarrow E_{2m+1}$, $f' \mapsto f$ （$f' g_{11} = g_{11} f$）を考えると、これは包含写像　$F_{2m} \hookrightarrow E_{2m}$ の拡張になっている。この埋め込みのもとで　E_{2m+1} を左 F_{2m+1} ー加群とみれば、指定巡回（F_{2m+1}, E_{2m+1}）ー両側加群として $(E_{2m+1}, 1) \cong (g_{11} M_3(F_{2m+1}), g_{11})$ となる。すると　$g_{11} M_3(F_{2m+1}) \cong F_{2m+1} \otimes_{F_{2m}} g_{11} M_3(F_{2m})$ と $(g_{11} M_3(F_{2m}), g_{11}) \cong (E_{2m}, 1)$　とから　E_{2m} の左 F_{2m} ー基底である　B　は　E_{2m+1} の左 F_{2m+1} ー基底にもなる。（注。B　による埋め込み　$E_{2m+1} \hookrightarrow M_3(E_{2m+1})$ は最初の包含写像に一致する。それは、これらが E_{2m} の上で一致し、E_{2m+1} が斜体であるということからわかる。）さらに $M_3(F_{2m+1})$ のなかで　$E_{2m} \cap F_{2m+1} = F_{2m}$ となっているから　$F_0 = F_{2m+1} \cap E_0$ となる。以上をまとめると結局つぎがなりたっている：

$$(b_{2m+1})\begin{cases} \begin{tikzcd} & E_{2m+1} \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \\ E_0 \arrow[d, dash] & F_{2m+1} \arrow[dl, dash] \\ F_0 & \end{tikzcd} \quad , \ F_0 = F_{2m+1} \cap E_0 ; \\ B \ \text{は} \ E_{2m+1} \ \text{の左} F_{2m+1}\text{－基底；かつ} \\ C \ \text{は} \ M_3(E_{2m+1}) \ \text{の左かつ右} E_{2m+1}\text{－基底である。} \end{cases}$$

（II）i：奇数→偶数。（b_{2m-1}）を仮定する（これは（I）より　$m=1$　のときOK）。$e \notin F_{2m-1}$ より $\{1, e\}$ は右 F_{2m-1}－独立である。すると定理4より斜体拡大　$E_{2m-1} \subsetneqq E_{2m}$　が存在して、（a_{2m}）がなりたつ。やはり　B　によって　$E_{2m} \hookrightarrow M_3(F_{2m})$ とみなす。

以上において埋め込み　$E_i \hookrightarrow M_3(F_i)$ はつねに　B　によって与えられているから、

$$\begin{tikzcd} & M_3(F_{i+1}) \arrow[d, dash] \\ M_3(F_i) \arrow[ur, dash] \arrow[d, dash] & E_{i+1} \\ E_i \arrow[ur, dash] & \end{tikzcd}$$

とみなせる（$\forall i$）。ここで　$\bar{E} := \bigcup_i E_i$ ，$\bar{F} := \bigcup_i F_i$　とおくと、斜体拡大　$\bar{F} \subsetneqq \bar{E}$　が得られる。これが求めるものであることを確かめる。まず任意の　$x \in \bar{E}$　はある　E_{2m}　にはいっているから（a_{2m}）より　B，$\{1, e\}$ はそれぞれ　$\bar{E}$　の左 $\bar{F}$－、右 $\bar{F}$－生成系になっている。これらのそれぞれの間に　$\bar{F}$ 上一次従属関係があれば、それはある　F_{2m} 上の関係であるから、（a_{2m}）によりそれは不可能。よって　B，$\{1, e\}$ はそれ

ぞれ左$\bar{F}$－、右$\bar{F}$－独立である。したがって（ｉ），（ｉｉ）がなりたつ。

Ｂ によって $\bar{E} \hookrightarrow M_3(\bar{F})$ とみなせば、$\begin{tikzcd} M_3(F_i) \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & M_3(\bar{F}) \arrow[d, dash] \\ E_i \arrow[r, dash] & \bar{E} \end{tikzcd}$ $(\forall i)$ となる。

同様の議論により（b_{2m+1}）から（ｉｉｉ）の成立がわかる。　　　　//

§６　I_2(５)に対応するアルティン環の性質について

（１）$_FM_G$ を次元列 (2,2,1,3,1)をもつ斜体上の両側加群とすると、Ａ：＝R_M（１．２参照）は有限表現型であるが、$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}A\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ は左Ｆ上でも右Ｇ上でも２次元となる。これは多元環では起こらなかったことである（［２］，§３参照）。

（２）$_FM_G$ を次元列 (3,1,2,2,1)をもつ斜体上の両側加群とし、Ａ：＝R_Mとおく。命題１．２より Ａ のＡＲ図を計算するとつぎのようになる（右Ａ－加群をその次元型であらわした）：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right. \arrow[dr, "{(1,3)}"] \arrow[rr, dashed, no head] & & \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \arrow[dr, "{(2,2)}"] \arrow[rr, dashed, no head] & & \left.\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right] \\ & \left[\begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix}\right. \arrow[ur, "{(2,1)}"] \arrow[rr, dashed, no head] & & \left.\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right] \arrow[ur, "{(1,2)}"] & \end{tikzcd}$$

これよりただちに Ａ が右局所型 (= right local type) であることがわかる。しかしこの Ａ は太刀川条件（［６］，［７］参照）をみたしていない。すなわち $A\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ の根基は３つの単純加群の直和であり、２つの単列加群の直和にはなりえない。

文献

[1] P.Dowbor, C.M.Ringel and D.Simson: Hereditary artinian rings of finite representation type, Springer Lect. Notes 832, 232-241.

[2] Y.Kawada: On Brummund's method for representation-finite algebras, preprint; Summary: Proc. of the 17-th Symposium on Ring theory held at Univ. of Tsukuba (1984), 54-67.

[3] A.H.Schofield: Artin's problem for skew field extensions, preprint.

[4] A.H.Schofield: Hereditary artinian rings of finite representation type and extensions of simple artinian rings, preprint.

[5] A.H.Schofield: Representations of rings over skew fields, London Math. Soc. Lect. Note Series 92.

[6] T.Sumioka: Tachikawa's theorem on algebras of left colocal type, Osaka J. Math. 21 (1984), 629-648.

[7] H.Tachikawa: On rings for which every indecomposable right module has a unique maximal submodule, Math. Z. 71 (1959) 200-222.

文 献

[1] P.Dowbor, C.M.Ringel and D.Simson: Hereditary artinian rings of finite representation type, Springer Lect. Notes 832, 232-241.

[2] Y.Kawada: On Drummond's method for representation-finite algebras, preprint; Summary: Proc. of the 17-th Symposium on Ring theory held at Univ. of Tsukuba (1984), 54-67.

[3] A.H.Schofield: Artin's problem for skew field extensions, preprint.

[4] A.H.Schofield: Hereditary artinian rings of finite representation type and extensions of simple artinian rings, preprint.

[5] A.H.Schofield: Representations of rings over skew fields, London Math. Soc. Lect. Note Series 92.

[6] T.Sumioka: Tachikawa's theorem on algebras of left colocal type, Osaka J. Math. 21 (1984), 629-648.

[7] H.Tachikawa: On rings for which every indecomposable right module has a unique maximal submodule, Math. Z. 71 (1959) 200-222.