研究集会
「環論とその周辺」
報告集

2006 年 11 月 3 日 ～6 日
於 名古屋大学 多元数理科学研究科

平成 18 年度日本学術振興会科学研究費補助金
基盤研究(B)　課題番号　18340011
研究代表者　大城紀代市(山口大学大学院理工学研究科)

研究集会
「環論とその周辺」
報告集

2006 年 11 月 3 日 ～ 6 日
於 名古屋大学 多元数理科学研究科

平成 18 年度日本学術振興会科学研究費補助金
基盤研究 (B)　課題番号　18340011
研究代表者　大城紀代市 (山口大学大学院理工学研究科)

はじめに

近年の導来圏や量子群などの研究において、環論が代数幾何学や表現論と密接な関係があることが明らかにされてきており、今後研究の進展が期待されております。また、非可換代数幾何の最近の進展、フロベニュース環の研究での非可換体のなす役割、有限群のモジュラー表現のブルーエ予想の研究で使われたカテゴリフィケーションなど有益な道具の話題など、興味ある対象も環論研究に多く出てきております。

このように環論研究は裾野が広く、また他分野の研究に密接に関わっています。その宿命として個々の研究者が環論全体を概観するのは難しく、重要な概念や結果を研究に取り入れるのに多くの努力と時間を必要とするのも事実です。本研究集会は、現時点に置いて重要かつ最先端の研究について、基本的な事項をその研究の第一線の研究者に解説をして頂き、出発点での困難を回避し環論研究の共通基盤を築くことを目的に開催しました。

また、報告集は、大学院生あるいは研究者がこれを参照することで、基本的な考え方や底流を流れる根本原理を見て取れ、すぐに最先端の研究に向かえる教科書的役割を担うことを目的に執筆して頂いております。上記の趣旨のもと、多くの方に役立ち、環論の研究進展と他分野との交流を今後さらに進めていく一助になることを願っております。

本研究集会は、山口大学理学部・大城紀代市先生の科学研究費 (基盤研究B：Quasi-Frobenius 環を中心とした環論・表現論の総合的研究：課題番号 18340011) により開催致しました。快くこの趣旨の研究集会の開催をお引き受け頂きましたことに感謝申し上げます。また、講演者の皆様方には、趣旨をご理解頂き、多大な労力を払い、分かりやすく丁寧な解説および執筆をして頂きましたことに深く感謝申し上げます。

2007 年 1 月

世話人　佐藤眞久・伊山修・花木章秀

研究集会
「環論とその周辺」

日本学術振興会科学研究費補助金, 基盤研究 (B)(研究代表者: 大城紀代市 (山口大学大学院理工学研究科)) による上記研究集会のプログラムが決まりましたので, お知らせ致します。

プログラム責任者　佐藤眞久 (山梨大学)、花木章秀 (信州大学)、伊山修 (名古屋大学)

——— 記 ———

期間：　2006 年 11 月 3 日（金）～ 6 日（月）

会場：　3 日～ 5 日 名古屋大学多元数理科学研究科理 1 号館 509 号室
6 日　同　409 号室
〒 464-8602 名古屋市千種区不老町 名古屋大学大学院多元数理科学研究科

会場責任者： 伊山修 (名古屋大学)

プログラム責任者： 佐藤眞久 (山梨大学)、花木章秀 (信州大学)、伊山修 (名古屋大学)

懇親会：

- 日時： 11 月 4 日（土）
- 場所： グランピアット山手通店
- 会費： 3000 円

研究集会「環論とその周辺」
プログラム

11 月 3 日（金曜日）

13:15 – 14:15 大城 紀代市（山口大学） アルチン環 (1)

14:30 – 15:30 大城 紀代市（山口大学） アルチン環 (2)

16:00 – 17:00 宮地 淳一 (東京学芸大学) 傾斜理論入門 (1)

17:15 – 18:15 宮地 淳一 (東京学芸大学) 傾斜理論入門 (2)

11 月 4 日 (土曜日)

09:30 – 10:30 大城 紀代市（山口大学） アルチン環 (3)

10:45 – 11:45 宮地 淳一 (東京学芸大学) 傾斜理論入門 (3)

13:15 – 14:15 吉野 雄二 (岡山大学) Cohen-Macaulay 表現入門 (1)

14:30 – 15:30 吉野 雄二 (岡山大学) Cohen-Macaulay 表現入門 (2)

16:00 – 17:00 斉藤 義久 (東京大学) 箙と量子群 (1)

17:15 – 18:15 斉藤 義久 (東京大学) 箙と量子群 (2)

11 月 5 日（日曜日）

09:30 – 10:30 毛利 出 (静岡大学) 非可換代数幾何 (1)

10:45 – 11:45 毛利 出 (静岡大学) 非可換代数幾何 (2)

13:15 – 14:15 毛利 出 (静岡大学) 非可換代数幾何 (3)

14:30 – 15:30 斉藤 義久 (東京大学) 箙と量子群 (3)

16:00 – 17:00 斉藤 義久 (東京大学) 箙と量子群 (4)

17:15 – 18:15 飛田 明彦 (埼玉大学) 対称群のブルエ予想 (1)

11 月 6 日（月曜日）

09:30 – 10:30 飛田 明彦 (埼玉大学) 対称群のブルエ予想 (2)

10:45 – 11:45 飛田 明彦 (埼玉大学) 対称群のブルエ予想 (3)

13:15 – 14:15 髙橋 篤史 (京都大学) Matrix factorization とミラー対称性 (1)

14:30 – 15:30 髙橋 篤史 (京都大学) Matrix factorization とミラー対称性 (2)

吉野雄二氏の講演が都合によりキャンセルされましたので、以下の講演を行いました。会場において突然依頼したにもかかわらず、興味深い講演を行って頂いたことに感謝致します。

11 月 4 日（土曜日)

13:30 – 14:00	高橋 亮 (信州大学)	加群の圏の分類
14:15 – 14:45	大貫 洋介 (鈴鹿工業高専)	Syzygy functor の周期性について
15:00 – 15:30	若松 隆義 (埼玉大学)	Injective resolutions of finite dimensional algebras

目次

目次

Artin 環

大城　紀代市
山口大学

概要
タイトルを Artin 環としたが，それは体上有限次元多元環を含む一般の純然たる環rtin　を意味する．本稿の目的は，古典的 Artin 環である Quasi-Frobenius 環 (QF-環) の構造論を旧来とは違う方法で考察しながら，関連する他の Artin 環への応用に視点をおき，最近のいくつかの話題を紹介することである．

話題のタイトルは下記の通りである．

（１）Harada 環と QF-環

（２）Harada 環と frame QF-部分環

（３）Nakayama 環の classification

（４）代数閉体上の Nakayama 群多元環

（５）局所 QF-環の構成と Faith 予想

一般の環rtin　といっても，その源流は群の表現論，多元環の表現論にあり，特に 1903 年の Frobenius の次の論文が原点の一つになっている：

W. Von Frobenius, Theoriw der hyperkomplexen Groeβen, *Sitzung der phys.-math.* K1(1903), 504-538. 634-645.

この論文で，右正則表現と左正則表現が同値である体上有限次元多元環（hypercomplex system）が研究された．その後，1937年の Brauer-Nesbitt [9] でこの多元環の重要性が主張され，1939，1941年の有名な Nakayama の Frobenius Algebra I, II [45] につながり，この環の構造論が展開された．この史実については，中山-東屋の代数学 II [46]，Nagao-Tushima [43]，Lam [33]，Yamagata の Handbook [64] を参照されたい．Nakayama は Frobenius 多元環を純環論的にとらえ，その性質で Quasi-Frobenius 環（QF-環）を定義した．この Artin 環は，際立って豊かな構造をもつ環として多くの環論研究者を魅了して止まず，今日まで連綿と研究されている．筆者の独断だが，この環は，おそらく永遠に研究されていく Artin 環であろう．Nakayama は Frobenius 多元環の研究から，[44] で generalized uniserial 環（Artinian serial 環）というもう一つの Artin 環も考

察している．本稿では，この環を Nakayama 環と呼ぶ．可換な Nakayama 環は，いわゆる Koethe 環（すべての加群が巡回加群の直和に書ける環）というものである．本稿の話題 3 で，この Nakayama 環の構造論を，Harada 環の応用により，局所 QF-環上の skew-matrix ring なるものを考察して展開する．

本論に入る前にもう少し詳しく Frobenius 多元環と quasi-Frobenius 多元環（QF-多元環）の足跡を見てみよう．

R を semiperfect 環とし，$E(R)$ を直交原始ベキ等元の完全集合とする．二つの 元 $e, f \in E(R)$ に対して，

$$S(eR_R) \cong T(eR_R), \quad S(_RRe) \cong T(_RRe)$$

が成り立つとき $(eR; Rf)$ を i-pair という．ただし，$S(X)$ は X の socle，$T(X)$ は $X/Rad(X)$（ここで，$Rad(X)$ は X の Jacobson radical)．R が片側 Artin 環のとき $(eR; Rf)$ が i-pair ならば，Fuller [16] の結果から eR_R，$_RRf$ はともに injective になる．

さて，R を体 K 上 n 次元多元環とする：$R = u_1F \oplus \cdots \oplus u_nF$．$R$ の元 a に対して，n 次の正方行列 $L(a)$ と $R(a)$ による，次の様な二つの表現が考えられる：

$$a(u_1, \cdots, u_n) = (u_1, \cdots, u_n)L(a), \quad {}^T(u_1, \cdots, u_n)a = R(a)^T(u_1, \cdots, u_n).$$

この $L(a)$，$R(a)$ をそれぞれ右正則表現，左正則表現というが，或る正則行列 P により $PL(a) = R(a)P$ となるとき，これらの表現は同値であるという．Frobenius 多元環とは，すべての a に対して $L(a)$ と $R(a)$ が同値になることである．Frobenius 多元環にはいくつかの言い換えがある．そのうち三つをここで紹介する．R を体 K 上有限次元多元環とする．

（1）$R^* = \mathrm{Hom}_K(R, K)$ とおくと，R^* は (R, R)-bimodule になる．R が Frobenius 多元環であることが，右，或いは左 R-module として $R \cong R^*$ であることで特徴付けられる．ついでながら，$(R, R)-$module として $R \cong R^*$ のとき，R を対称多元環といい，すべての 原始ベキ等元 e に対して $S(eR_R) \cong T(eR_R)$ and $S(_RRe) \cong T(_RRe)$ のとき，R を弱対称多元環という．

（2）Frobenius 多元環は，R の右 ideal A と左 ideal B に対して，次の条件が成り立つことで特徴付けられる．

$$rl(A) = A, \quad lr(B) = B$$

$$\dim(A) + \dim(r(B)) = \dim(R), \quad \dim(B) + \dim(l(A)) = \dim(R)$$

ただし，$l(X)$，$r(X)$ はそれぞれ X の左 annihilator ideal，右 annihilator ideal，$\dim(X)$ は X の K 上次元．

（3）Rの任意の原始ベキ等元 e に対して，原始ベキ等元 f があって $(eR; Rf)$ が i-pairになり，R の直既約分解の中で eR_R と同型なものの個数と ${}_RRf$ (或いは fR_R）と同型なものの個数が等しい，という条件で，Nakayama は Frobenius 多元環を特徴付けた．さらに,「同型なものの個数」に関する条件を除いた，始めの部分の条件で quasi-Frobenius 多元環を定義したのだが，このような形にすれば Frobenius 多元環も quasi-Frobenius 多元環も体の作用が見えなくなる．そしてこの見地から，そのままの形で有限次元多元環を Artin 環に換えて Frobenius 環と quasi-Frobenius 環（QF-環）が定義されたのである．ここで，basic な Artin 環では Frobenius 環と quasi-Frobenius 環の区別がない点に注意.

QF-環は，Nakayama，Thrall，Ikeda，Morita，Tachikawa，Faith，Osofsky，Harada 等の研究を経て，他の環についてもそうであるように，Category Theory，Homological Algebra の手法により研究領域が広がっていった．まず，1948 年，Thrall [60] は QF 環を分析し，その環のもつ性質で QF-1，QF-2，QF-3 という三つの Artin 環を導入した：

右 QF-1：右 faithful module は balance module である．
右 QF-2：右 indecomposable projective module の socle は simple である．
右 QF-3：R の右 injective hull は projective である．

QF-環については，現在次のような特徴付けが出来ている．

定理 A． 次の条件は同値である．

(1) R : QF-環.
(2) R : 右 Noetherian，右 self-injective.
(3) R : 左 Noetherian，左 self-injective.
(4) R : 右 Noetherian かつ次の条件をみたす：
$rl(A) = A$ $\forall$ 右 ideal A，$lr(B) = B$ $\forall$ 左 ideal B.
(5) R : Artinian かつ (4) の条件 (a), (b) をみたす.
(6) $\mathrm{Hom}_R(*, R)$ は有限生成 左 R-modules の class と有限生成 右 R-modules の class の間の Morita duality を与える．
(7) すべての 右 injective module は projective である．
(8) すべての 右 projective module は injective である．

QF-環の研究は，このように QF-環の性質を探求し，その性質で QF-環の特徴付けを与えるというスタイルで進展している．そして不思議なことに，このような問題が提起されると，問題の中にはとてつもなく難問となって何十年も

の間未解決になっているものがある．たとえば，Nakayama 予想，Faith 予想，FGF-予想 等．Nakayama 予想 については Chang Chang Xi [63]，Faith 予想，FGF-予想については Nicholson-Yousif [47] を参照．

筆者は冒頭で旧来とは違う視点で QF-環を論ずると述べたが，その意味は，QF-環の特徴付け，あるいはその周辺の表現論を調べるといった研究ではなく，この環の内部構造を応用した研究の話題を紹介するということである．

QF-環は，環論，群論以外の分野でも有用な環のようである．Lam [33] に次のような記述がなされている (原文のまま):

Besides the connection to group representation theory, Frobenius rings appear also in other brances of algebra. For instance, commutative local Frobenius rings are precisely the zero-dimensional local Gorenstein rings: these rings play an interesting role in number theory, algebraic geometry, and combinatorics. Frobenius algebras have also shown up in the recent study of Hopf algebras and Koszul algebas. Today, the use of Frobenius rings has reached way beyond the realm of pure algebra and ring theory. For instance, some applications of Frobenius rings to coding theory are presented in J. A. Wood's recent article. In topology and geometry, Frobenius algebras occur as cohomology rings of compact oriented manifolds and as quantum cohomology rings of certain compact Kaehler manifolds, and they have also shown up in the recent work on the solutions of the Yang-Baxter equation. In March/April 1996 I attended the series of Hitchcock Lectures on geometry and phisics given by Chern Professor Sir Michael F. Atiyah at Berkeley, and was delighted to see that one of his transparencies in Lecture 3 displayed the impressive equation

$$\text{“TOP QFT } (d = 1) = \text{Frobenius algebra”}$$

この記述を読めば，Frobenius 多元環および QF-環が群論，環論を含む広い領域にわたって重要な環であることが了解できよう．

さて，これから本論に入るが，詳しい証明等についてはすべて馬場-大城の Lecture Note [6] を参照．本稿は，この Lecture Note に収録した内容の要約である．

List of Symbols

以下の記号を断りなしに使用する．

M_R : R 上の unitary 右 module.

$E(R)$: semiperfect ring R の直交原始べキ等元の完全集合．

id_X，或いは単に $id : X$ の identity map.
$J(M)$: module M の Jacobson radical.
$J(R)$，或いは単に J : 環 R の Jacobson radical.
$S(M)$: module M の socle.
$S_k(M)$: 右 (resp. 左) R-module M の k-th socle
$T(M)$: M の factor module $M/J(M)$.
$I(M)$: M の injective hull.
$N \subseteq_e M$: N は module M の essential submodule.
$N \subseteq_c M$: N は M の co-essential submodule.
$N \ll M$: N は M の superfluous (small) submodule.
$r_S(T)$ 或いは単に $r(S)$: T の S での 右 annihilator ideal.
$l_S(T)$ 或いは単に $r(S)$: T の S での 左 annihilator ideal.
$|X|$: X の cardinal.
$(Q)_{\sigma,c,n}$: the skew matrix ring over Q with respect to (σ, c, n).
$\langle a \rangle_{ij}$: (i,j)-entry が a で他の成分が 0 なる matrix.
$F(R)$: R の frame QF-部分環.
$\dim(V_D)$: vector space V_D の次元.

準備

後に使う，Nakayama 置換，Algebra としての Nakayama 自己同型写像，環としての Nakayama 自己同型写像などについて述べる．

R を K 上の Frobenius 多元環とし，$\phi : R_R \cong R^* = \mathrm{Hom}_K(R,K)_R$ とする．写像 $f : R \times R \to K$, $(r,s) \mapsto \phi(r)(s)$ は nonsingular associative K-bilinear mapping である．ここで "nonsingular" とは $f(a,A) = 0$ ならば $a = 0$ のことで，"associative" とは $f(ab,c) = f(a,bc)$ $\forall a, b, c \in R$ のことである．任意の $a \in R$ に対して，$\exists$ unique $b \in R$ s.t. $f(a,x) = f(x,b)$ $\forall x \in R$. このとき，写像 $\tau : R \to R$, $a \mapsto b$ は R の K-algebra 自己同型写像になる．この写像を本稿では，後で定義する環としての Nakayama 自己同型写像と区別するために，多元環としての R の Nakayama 自己同型写像と呼ぶ．Nakayama 自己同型写像は，内部自己同型写像の違いを除いて一意的に決まることが知られている．Nakayama 自己同型写像は，Nakayama 置換を引き起こすという顕著な性質を有する．(Nakayama 置換については後で説明する.)

次に，環としての Nakayama 自己同型写像について説明をする．R を QF-環とし，$E(R)$ を $E(R) = \{e_{ij}\}_{i=1,j=1}^{m\ \ p(i)}$，ただし (i) $i = k \Leftrightarrow e_{ij}R_R \cong e_{kl}R_R$,

(ii) $j \neq l \Rightarrow e_{ij}R_R \not\cong e_{il}R_R$, と表そう．このとき，置換

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{21} & \cdots & e_{m1} \\ e_{\pi(1)1} & e_{\pi(2)1} & \cdots & e_{\pi(m)1} \end{pmatrix}$$

で，$S(e_{i1}R) \cong T(e_{\pi(i)1}R)$ $\forall i$ をみたすものがとれる．特に，$p(i) = p(\sigma(i))$ $\forall i$ が成り立つとき，R を Frobenius 環といい，

$$\begin{pmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1p(1)} & \cdots & e_{m1} & \cdots & e_{mp(m)} \\ e_{\sigma(1)1} & \cdots & e_{\pi(1)p(\sigma(1))} & \cdots & e_{\pi(m)1} & \cdots & e_{\sigma(m)p(\sigma(m))} \end{pmatrix}$$

を R の Nakayama 置換という．

この Nakayama 置換に対して，R の自己同型写像 τ で $\tau(e_{ij}) = e_{\sigma(i)j}$ $\forall i = 1, \ldots, m$, $\forall j = 1, \ldots, p(i)$ をみたすものを，R の環としての Nakayama 自己同型写像という．一般には，Frobenius 環は，環としての Nakayama 自己同型写像を持たない (Koike [27])．Frobenius 多元環では，多元環としての Nakayama 自己同型写像は，環としての Nakayama 自己同型写像になるが，環としての Nakayama 自己同型写像は，多元環としての Nakayama 自己同型写像になるとは限らない．その意味では，環としての Nakayama 自己同型写像は，多元環としての Nakayama 自己同型写像を含む広い意味での概念として使用する．以後，Nakayama 自己同型写像といえば，環としての Nakayama 自己同型写像を意味する．

Artin 環 R が Nakayama 環であるとは，R のすべての原始ベキ等元 e に対して，eR_R および $_RRe$ が uniserial であるときをいう．次の結果はよく知られている．

定理 B ([45])．R が Nakayama 環であれば，すべての右 R−module は uniserial modules の直和で表される．また，この逆も成り立つ．

この結果から，Nakayama 環は有限表現型であることが分かる．

話題 1: Harada 環と frame QF-部分環

R-module M_R は，M を含む任意の injective module の small submodule であるとき small module とよび，small submodule でないとき non-small module という．双対的に，任意の projective module P と，P から M への epimorphism f に対して，$\mathrm{Ker}\, f$ が essential submodule であるとき，M を cosmall module とよび，cosmall でないとき non-cosmall module という．

これらの概念を用いて，Harada は [18]，[19] でこれから述べる新しい Artin 環の基となる，次の二つの条件を考察している．

(*) すべての non-small 右 R-module は，0 でない injective module を含む．
$(*)^*$ すべての non-cosmall 右 R-module は，0 でない projective summand 含む．

Harada は，これらの条件を ideal 論的に次のように特徴付けた．

定理 1.1. 右 Artin 環 R について，次の条件は同値である．

(1) R は (*) をみたす．
(2) eR_R が non-small module となる任意の $e \in E(R)$ に対して，$\exists\, n(e) \in \mathbb{N}_0$:
  (a) $eR/S_{i-1}(eR_R)$ は injective $\forall i = 1, \ldots, n(e)$,
  (b) $eR/S_{n(e)}(eR_R)$ は small.

定理 1.2. 右 Artin 環 R について，次の条件は同値である．

(1) R は $(*)^*$ をみたす．
(2) 任意の $f \in E(R)$ に対して，$e \in E(R)$ で eR_R は injective かつ $\exists j \in \mathbb{N}_0$: $fR \cong eJ^j$ なるものがとれる．

定義． 定理 1.1 をみたす右 Artin 環を右 Harada 環と呼び，定理 1.2 をみたす右 Artin 環を右 co-Harada 環と呼ぶ．

右 Harada 環と右 co-Harada 環をこのように定義するのだが，意外なことに, 次はこれらの環は同じ環であることを示している．

定理 1.3. R : 左 co-Harada 環 $\Longleftrightarrow$ R : 右 Harada 環.
従って，R : 左 Harada 環 $\Longleftrightarrow$ R : 右 co-Harada 環.

これより，右 Harada 環は両側 Arin 環であることが分かる．この事実より，直ちに右 Harada 環の Morita 自己双対性が問題となる．このことについては，話題 2 で詳しく述べる．

Harada は，1970年の終わりから1980年の初めにかけて，この新しい環rtin を small modules，cosmall modules を用いて誕生させたのだが，同じ頃，injective modules，projective modules の持つ顕著な性質である extending property と lifting property の研究も行っている．これらの概念が，後に Harada 環の研究に必要不可欠な強力な武器となる．一方，この extending property，lifting property そのものの研究は国内外の多くの研究者によって研究され，現在は一つの研究領域が形成されている．

この萌芽的研究を，もう少し詳しく述べよう．Harada は module M について,「M の任意の simple submodule A が，M の直和因子に essential に拡張される」, つまり,「M の直和分解 $M = A^* \oplus A^{**}$ で，$A \subseteq_e A^*$ をみたすものがと

れる」という extending property と，その双対として，「M の任意の maximal submodule A が，M の直和因子に co-essential に lift される」，「つまり，「M の直和分解 $M = A^* \oplus A^{**}$ で，$A \cap A^* \ll A^*$ かつ $A^{**} \subseteq A$ をみたすものがとれる 」という lifting property を研究している．これらの property において，simple submodules, maximal submodules をすべての submodules にした性質をもつ module を，それぞれ extending module, lifting module と呼ぶ．歴史的には，これらの module は Utumi [61] において "von Noumann regular ring R が右 continuous であるとは，R_R が extending module である" と定義されていて，extending module が explicitly に使われている．一方，implicitly ではあるが，Bass [7] で，"環 R : semiperfect $\Longleftrightarrow$ R_R : lifting" という形で，lifting module が本質的に考察されている．

Harada の extending property および lifting property は，局所的な property である．しかし，それゆえに有用な概念となって，環論，加群論に大きな影響をもたらしている．1980年代から最近にかけて，extending property と lifting property に関する次の4冊の本が出版されていることがこの状況をよく物語る．

1. M. Harada, *Factor Categories with Applications to Direct Decomposition of Modules*; Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 88, Marcel Dekker (1983).
2. S. H. Mohamed and B. H. Müller, *Continuous Modules and Discrete Modules*, London Mathematical Society Lecture Notes 147, Cambridge Univ. Press (1990).
3. N. V. Dung, D. V. Huynh, P. F. Smith, and R. Wisbauer, *Extending Modules*, Pitman Reserach Notes in Mathematics Series, 313, London (1994).
4. J. Clark, C. Lomp, N. Vanaja and R. Wisbauer, *Lifting modules*, Birkhauser Boston, Boston (2007).

さて，話を Harada 環に戻そう．Harada は Harada 環と，extending property や lifting property との関連については何も触れていないように思える．しかし，次の二つの定理を見れば，無意識のうちに両方を考察していた，ということになるのかもしれない．(本人に未だ確認はしていないのだが．)

定理 1.4. 環 R について，次は同値である：

(1) R は右 Harada 環である．
(2) すべての injective 右 R-module は lifting module である．
(3) R は右 perfect 環で，すべての injective 右 R-modules のクラスは small

cover で閉じる．つまり，任意の全射 R-準同型 $f : M \to E$ に対して，E が injective かつ $\mathrm{Ker}\, f \ll M$ ならば，M も injective.

(4) すべての右 R-module は，injective module と small module の直和で書ける．

定理 1.5. 環 R について，次は同値である：

(1) R は 右 co-Harada 環（左 Harada 環）である．

(2) すべての projective 右 R-module は extending module である．

(3) すべての projective 右 R-modules のクラスは essential extension で閉じる．

(4) すべての右 R-module は，projective module と singular module の直和で書ける．

系.

(a) 右 Harada 環は semiprimary QF-3 環である．

(b) QF-環は自明に左,右 Harada 環であるが，Nakayama 環も左,右 Harada 環である（定理 1.5 の (4) からいえる）．

定理 1.6. 次の条件は同値である．

(x) R : QF-環.

(a) すべての右 projective R-module は injective である．

(a') すべての右 injective R-module は projective である．

この Figure での条件 (b), (b'), (c), (c') は下記に述べる条件である．

定理 1.7. 次の条件は同値である．

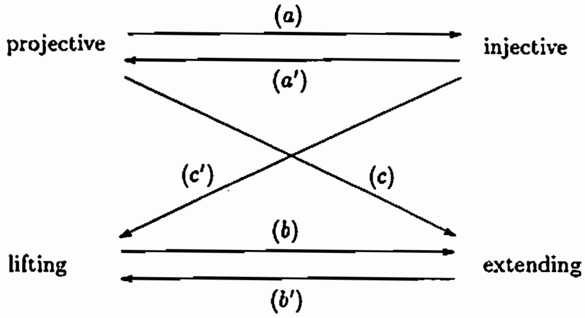
(y) R : Nakayama 環.

(b) R は右 perfect ring かつ，すべての右 lifting R-module は extending.

(b') すべての右 extending R-module は lifting.

定理 1.3 - 定理 1.6 より，Harada 環に関して次がいえる．

定理 1.8. 次の条件は同値である．



Figure

(z) R: 右 Harada 環.
(c) すべての右 projective R-module は extending である.
(c') すべての左 injective R-module は lifting である.

QF-環, Nakayama 環, 片側 Harada 環を加群論的見れば, このようにきれいな関係にある. イデアル論的にも, 次からの話題で述べるように, 三つ巴になって深く関連している. 特に, Nakayama 環は, 骨格は Harada 環で, 深部に局所 QF-環があり, この局所 QF-環上の skew-matrix 環の剰余環として実現できる構造になっている.

話題2 : Harada 環と frame QF-部分環

片側 Harada 環を考えるとき, この概念が Morita invariant であるから, basic 環の場合を考えてよい. この話題では, 次の定理を紹介する.

定理 2.1. R を basic indecomposable Harada 環とする. R は枠組みとなる QF-部分環 $F(R)$ を持ち, そのブロック拡大の上階段型剰余環として構成される.

英語で書けば "For a given basic indecomposable left Harada ring R, there exists a QF-subring $F(R)$ of R (which is called the frame QF-subring of R) and R can represented as an upper staircase factor ring of a block extension of $F(R)$" となる.

以下で, $F(R)$ とブロック拡大の上階段型剰余環について説明する.

R を basic indecomposable 左 Harada 環 (= 右 co-Harada 環) とする．直交ベキ等元の完全集合 $E(R)$ は，$E(R)=\{e_{ij}\}_{i=1,j=1}^{m\ \ n(i)}=\{e_{11},\ldots,e_{1n(1)},\ldots,e_{m1},\ldots,e_{mn(m)}\}$ が

(1) $e_{i1}R$ は injective 右 R-module $\forall i=1,\ldots,m$,
(2) $e_{ij}R\cong e_{i,j-1}J\ \ \forall i=1,\ldots,m,\ \forall j=2,\ldots,n(i)$,

をみたすようにとれる．このようにとったとき，$E(R)=\{e_{ij}\}_{i=1,j=1}^{m\ \ n(i)}$ を well-indexed set という．

各 i に対して，$e_{i1}R$ は injective だから，$(e_{i1}R;Re_{st})$ が i-pair になる $s\in\{1,\ldots,m\}$，$t\in\{1,\ldots,n(i)\}$ がとれる．これら s，t は一意的にきまるので，$\sigma(i)=s$，$\rho(i)=t$ により二つの写像：$\sigma,\rho:\{1,\ldots,m\}\to\mathbb{N}$ が定義できる．つまり，$(e_{i1}R;Re_{\sigma(i)\rho(i)})$ は，i-pair そして $1\le\rho(i)\le n(\sigma(i))$．特に，$\sigma$ が $\{1,\ldots,m\}$ の置換になるとき，R を type (♯) とよぶ．

F を basic semiperfect 環とし，$E(F)=\{e_1,\ldots,e_y\}$ とおく．$A_{ij}=e_iFe_j$ $\forall i,j$，$Q_i=A_{ii}$ $\forall i$ とおき，F を行列で表現する：

$$F=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}&\cdots&A_{1y}\\A_{21}&A_{22}&\cdots&A_{2y}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{y1}&A_{m2}&\cdots&A_{yy}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q_1&A_{12}&\cdots&A_{1y}\\A_{21}&Q_2&\cdots&A_{2y}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{y1}&\cdots&A_{y,y-1}&Q_y\end{pmatrix}.$$

$k(1),\ldots,k(y)\in\mathbb{N}$ に対して，F のブロック拡大 $F(k(1),\ldots,k(y))$ を次のように定義する：各 $i,s\in\{1,\ldots,y\}$，$j\in\{1,\ldots,k(i)\}$，$t\in\{1,\ldots,k(s)\}$ に対して

$$P_{ij,st}:=\begin{cases}Q_i & (i=s,\ j\le t\ \text{のとき}),\\ J(Q_i) & (i=s,\ j>t\ \text{のとき}),\\ A_{is} & (i\ne s\ \text{のとき}).\end{cases}$$

$$P(i,s):=\begin{pmatrix}P_{i1,s1}&P_{i1,s2}&\cdots&P_{i1,sk(s)}\\P_{i2,s1}&P_{i2,s2}&\cdots&P_{i2,sk(s)}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\P_{ik(i),s1}&P_{ik(i),s2}&\cdots&P_{ik(i),sk(s)}\end{pmatrix}.$$

つまり，$i=s$ のとき，$P(i,s)$ は $k(i)\times k(i)$ matrix

$$P(i,i) = \begin{pmatrix} Q_i & \cdots & \cdots & Q_i \\ J(Q_i) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ J(Q_i) & \cdots & J(Q_i) & Q_i \end{pmatrix}.$$

これを $Q(i)$ とおく．$i \neq s$ のとき，$P(i,s)$ は $k(i) \times k(s)$ matrix

$$P(i,s) = \begin{pmatrix} A_{is} & \cdots & A_{is} \\ & \cdots & \\ A_{is} & \cdots & A_{is} \end{pmatrix}.$$

ここで $P = F(k(1), \dots, k(y))$ を

$$P = F(k(1), \dots, k(y)) = \begin{pmatrix} P(1,1) & P(1,2) & \cdots & P(1,y) \\ P(2,1) & P(2,2) & \cdots & P(2,y) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P(y,1) & P(y,2) & \cdots & P(y,y) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} Q(1) & P(1,2) & \cdots & P(1,y) \\ P(2,1) & Q(2) & \cdots & P(2,y) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P(y,1) & P(y,2) & \cdots & Q(y) \end{pmatrix}.$$

とおく．F が basic indecomposable semiperfect 環であるから，P も basic indecomposable semiperfect 環 になる (matrix size は $k(1) + \cdots + k(y)$)．$F(k(1), \dots, k(y))$ を，$\{k(1), \dots, k(y)\}$ に対する F のブロック拡大という．P を

$$P = F(k(1), \dots, k(y)) = \begin{pmatrix} P_{11,11} & \cdots & P_{11,1k(1)} & \cdots & P_{11,y1} & \cdots & P_{11,yk(y)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{1k(1),11} & \cdots & P_{1k(1),1k(1)} & \cdots & P_{1k(1),y1} & \cdots & P_{1k(1),yk(y)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{y1,11} & \cdots & P_{y1,1k(1)} & \cdots & P_{y1,y1} & \cdots & P_{y1,yk(y)} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ P_{yk(y),11} & \cdots & P_{yk(y),1k(1)} & \cdots & P_{yk(y),y1} & \cdots & P_{yk(y),yk(y)} \end{pmatrix}.$$

と表現すれば，形がより分りやすいであろう．

$i = 1, \ldots, y$, $j = 1, \ldots, k(i)$ に対して

$$p_{ij} = \langle 1 \rangle_{ij,ij}$$

おくと，$\{p_{ij}\}_{i=1,j=1}^{y\ \ k(i)}$ は $P = F(k(1), \ldots, k(y))$ の直交ベキ等元の完全集合になる．これを $E(F(k(1), \ldots, k(y)))$ とおく．

注意．$p_{ij}P_P \cong p_{i1}J(P)_P^{j-1} \quad \forall i = 1, \ldots, y, \ \forall j = 1, \ldots, k(i)$.

定理 2.2. F が basic indecomposable QF-環ならば，$P = F(k(1), \ldots, k(y))$ は basic indecomposable type (#) 右 Harada 環で，$E(P) = \{p_{ij}\}_{i=1,j=1}^{y\ \ k(i)}$ が well-indexed set になる．

さて，F を basic indecomposable QF-環とし，その Nakayama 置換を

$$\begin{pmatrix} e_1 & \cdots & e_y \\ e_{\sigma(1)} & \cdots & e_{\sigma(y)} \end{pmatrix}$$

とする．$P = F(k(1), \ldots, k(y))$ を作り，$i \in \{1, \ldots, y\}$ に対して i-pair $(e_iP; Pe_{\sigma(i)})$ を考える．$S(A_{ij}) = S({}_{Q_i}A_{ij}) = S(A_{ij\,Q_j})$ とおく．ここで，$P(i, \sigma(i))$ のタイル $S(A_{ij})$ でできる上階段型 $(Q(i)\text{-}Q(\sigma(i)))$-subbimodule $S(i, \sigma(i))$ を次のように作る：

(I) $i = \sigma(i)$ のとき：$S(A_{ij})$ は $Q_i = A_{ii}$ の左, 右 ideal として simple である．$S_i = S(Q_i)$ とおく．このとき $k(i) \times k(i)$ matrix

$$Q(i) = \begin{pmatrix} Q_i & \cdots & \cdots & Q_i \\ J(Q_i) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ J(Q_i) & \cdots & J(Q_i) & Q_i \end{pmatrix},$$

の中で $P(i, i)$ の上階段型 $(Q(i)\text{-}Q(i))$-subbimodule $S(i, i) = S(i, \sigma(i))$ を次のように作る：

$$S(i,i) = \left(\begin{array}{c|c} \overbrace{0 \cdots 0}^{k} & \\ 0 & \mathrm{S} \\ & \end{array} \right), \quad k \geq 1, S = S(Q_i)$$

ただし階段は対角線を横切る場合は1回のみとし，横切らない場合は

$$S(i,i)=\begin{pmatrix} \overbrace{0\ \cdots\ 0}^{k} & & \mathrm{S} \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix},\quad k\geq 1$$

なる形である．S_i が Q_i の ideal であるから，$S(i,i)=S(i,\sigma(i))$ は $Q(i)$ の ideal になる．

$\overline{Q(i)}=\overline{P(i,\sigma(i))}=P(i,\sigma(i))/S(i,\sigma(i))$ とおき，これを次のように表現する：

$$\overline{Q(i)}=\begin{pmatrix} \overbrace{Q_i\cdots Q_i}^{k} & & \overline{\mathrm{Q}_i} & \\ & Q_i & & \\ & & \overline{Q_i} & \\ \mathrm{J} & & \overline{\mathrm{J}} & \overline{Q_i} \end{pmatrix}\quad \text{或いは}\quad \overline{Q(i)}=\begin{pmatrix} \overbrace{Q_i\cdots Q_i}^{k} & & \overline{\mathrm{Q}_i} \\ & \ddots & \\ \mathrm{J} & & Q_i \end{pmatrix}$$

(II) $i\neq\sigma(i)$ のとき： $S_{i\sigma(i)}=S({}_{Q_i}A_{i\sigma(i)})=S(A_{i\sigma(i)_{Q_{\sigma(i)}}})$ とおく．$S_{i\sigma(i)}$ は $A_{i\sigma(i)}$ の $(Q_i\text{-}Q_{\sigma(i)})$-subbimodule．そして，$(Q(i)\text{-}Q(\sigma(i)))$-bimodule である

$$P(i,\sigma(i))=\begin{pmatrix} A_{i\sigma(i)} & \cdots & A_{i\sigma(i)} \\ & \cdots & \\ A_{i\sigma(i)} & \cdots & A_{i\sigma(i)} \end{pmatrix}\quad (\,k(i)\times k(\sigma(i))\ \text{matrix}),$$

の中で，$P(i,\sigma(i))$ の $S=S_{i\sigma(i)}$ タイル張りの上階段型 subbimodule $S(i,\sigma(i))$ を作る：

$$\begin{pmatrix} \overbrace{0\ \cdots\ 0}^{k} & & \\ 0 & & \mathrm{S} \\ & & \end{pmatrix},\quad k\geq 1$$

そして，$\overline{P(i,\sigma)} = P(i,\sigma(i))/S(i,\sigma(i))$ とおき，$\overline{P(i,\sigma)}$ を次のように表現する：

$$\begin{pmatrix} \overbrace{A \cdots A}^{k} & \\ \mathrm{A} & \overline{\mathrm{A}} \end{pmatrix}.$$

次に，$P = F(k(1),\ldots,k(y))$ の部分集合 X をつくる：

$$X = \begin{pmatrix} X(1,1) & X(1,2) & \cdots & X(1,y) \\ X(2,1) & X(2,2) & \cdots & X(2,y) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X(y,1) & X(y,2) & \cdots & X(y,y) \end{pmatrix},$$

ここで，$X(i,i)$ $(\subseteq Q_i)$，$X(i,j)$ $(\subseteq P(i,j))$ を次のように作る：

$$X(i,i) = \begin{cases} 0 & (i \neq \sigma(i) \text{ のとき}), \\ S(i,i) & (i = \sigma(i) \text{ のとき}), \end{cases}$$

$$X(i,j) = \begin{cases} 0 & (j \neq \sigma(i) \text{ のとき}), \\ S(i,j) & (j = \sigma(i) \text{ のとき}). \end{cases}$$

このとき，X は $P = F(k(1),\ldots,k(y))$ の ideal になる．剰余環 $F(k(1),\ldots,k(y))/X$ を $P = F(k(1),\ldots,k(y))$ の上階段型剰余環と呼ぶのである．

$$P = F(k(1),\ldots,k(y)) = \begin{pmatrix} P(1,1) & P(1,2) & \cdots & P(1,y) \\ P(2,1) & P(2,2) & \cdots & P(2,y) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P(y,1) & P(y,2) & \cdots & P(y,y) \end{pmatrix},$$

において，$P(i,\sigma(i))$ を $\overline{P(i,\sigma(i))}$ で置き換え，$\overline{P} = F(k(1),\ldots,k(y))/X$ とお

く．$\overline{P}$ を次のように表現しよう：

$$\overline{P} = \begin{pmatrix} P(1,1) & \cdots & \overline{P(1,\sigma(1))} & \cdots & \cdots & \cdots & P(1,y) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P(i,1) & \cdots & \cdots & \overline{P(i,\sigma(i))} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P(y,1) & \cdots & \cdots & \cdots & \overline{P(y,\sigma(y))} & \cdots & P(y,y) \end{pmatrix}.$$

(I), (II) における matrix において $k \geq 1$ であることと $\overline{P}$ の形から $\overline{P} = F(k(1),\ldots,k(y))/X$ は basic indecomposable 左 Harada 環であることが分かる．更に，$S(i,\sigma(i))$ が上階段型であることから，左 Harada 環 $P = P_1 = F(k(1),\ldots,k(y))$, P_2, $P_3, \ldots, P_{l-1}$, $P_l = \overline{P}$ が得られ，自然な上への環準同型 $\varphi_i : P_i \to P_{i+1}$ で $\mathrm{Ker}\,\varphi_i$ が P_i の simple ideal になるものが作れる：

$$P_1 \xrightarrow{\varphi_1} P_2 \xrightarrow{\varphi_2} P_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots \xrightarrow{\varphi_{l-2}} P_{l-1} \xrightarrow{\varphi_{l-1}} P_l = \overline{P} = F(k(1),\ldots,k(y))/X.$$

かくして次の定理を得る．

定理 2.3. basic indecomposable QF-環 F に対して，F のブロック拡大 $P = F(k(1)\ldots,k(y))$ の上階段型剰余環 P/X は basic indecomposable 左 Harada 環になり，さらに次のような basic な左 Harada 環の自然な surjective 環準同型 φ_i で Kernel が simple になるものが作れる：

$$P_1 \xrightarrow{\varphi_1} P_2 \xrightarrow{\varphi_2} P_3 \xrightarrow{\varphi_3} \cdots \xrightarrow{\varphi_{l-2}} P_{l-1} \xrightarrow{\varphi_{l-1}} P_l = \overline{P} = F(k(1),\ldots,k(y))/X.$$

例 2.1. F として局所 QF-環をとり，ブロック拡大環 $Q(4)$ を作る:

$$Q(4) = \begin{pmatrix} Q & Q & Q & Q \\ J & Q & Q & Q \\ J & J & Q & Q \\ J & J & J & Q \end{pmatrix}$$

そして

$$X = \begin{pmatrix} 0 & S & S & S \\ 0 & 0 & S & S \\ 0 & 0 & S & S \\ 0 & 0 & 0 & S \end{pmatrix} \quad (\text{ここで，} S = S(Q))$$

を作ると

$$Q(4)/X = \begin{pmatrix} Q & \overline{Q} & \overline{Q} & \overline{Q} \\ J & Q & \overline{Q} & \overline{Q} \\ J & J & \overline{Q} & \overline{Q} \\ J & J & J & \overline{Q} \end{pmatrix}$$

は basic indecomposable 左 Harada 環である.

例 2.2. F として, basic indecomposable QF-環 R で, $E(R) = \{e, f\}$ かつ

$$\begin{pmatrix} e & f \\ f & e \end{pmatrix}$$

が Nakayama 置換であるものを考える.

$$R = \begin{pmatrix} Q & A \\ B & W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} eRe & eRf \\ fRe & fRf \end{pmatrix}.$$

とおき, R のブロック拡大 $R(3,3)$ を作る:

$$R(3,3) = \begin{pmatrix} Q & Q & Q & A & A & A \\ J & Q & Q & A & A & A \\ J & J & Q & A & A & A \\ B & B & B & W & W & W \\ B & B & B & K & W & W \\ B & B & B & K & K & W \end{pmatrix}$$

X として

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(A) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S(A) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S(B) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

をとると

$$R(3,3)/X = \begin{pmatrix} Q & Q & Q & A & A & \overline{A} \\ J & Q & Q & A & A & \overline{A} \\ J & J & Q & A & A & A \\ B & B & \overline{B} & W & W & W \\ B & B & B & K & W & W \\ B & B & B & K & K & W \end{pmatrix}$$

は basic indecomposable 左 Harada 環になる．

さて，本話題の最初に述べた定理の主張は

"R を basic indecomposable Harada 環とすると，R は枠組みとなる QF-部分環 $F(R)$ を持ち，そのブロック拡大の上階段型剰余環として構成される"

であったが，これは要するに，すべての basic indecomposable 左 Harada 環が上の定理のようにして構成されるということである．この定理の証明は易しくはない．詳しくは Baba-Oshiro [6] を参照．ここでは，簡単な例を挙げて，$F(R)$ が R のどの部分に現れるのか，ということを見るにとどめる．

R を basic indecomposable 左 Harada 環 とし，直交ベキ等元の完全集合 $E(R) = \{e_{ij}\}_{i=1,j=1}^{m\ \ n(i)} = \{e_{11}, \ldots, e_{1n(1)}, \ldots, e_{m1}, \ldots, e_{mn(m)}\}$ を well-index set とする．このとき，$\{e_{11}, e_{21}, \ldots, e_{m1}\}$ の部分集合 $F = \{e_1, \ldots, e_y\}$ がとれて，R はブロック拡大 $F(n(1), \ldots, n(m))$ の上階段型剰余環になる．そして，この F がただ一組であることから，$(\sum_{i=1}^{y} e_i)R(\sum_{i=1}^{y} e_i)$ を，R の frame QF-部分環と呼び $F(R)$ と記す．

例 2.3. R を basic indecomposable 左 Harada 環とし，$E(R) = \{e_{11}, e_{12}, e_{13}, e_{21}, e_{22}\}$ を well-indexed set とする．$Q_i = e_{i1}Re_{i1}$，$J_i = J(Q_i)$，$A = e_{11}Re_{21}$，$B = e_{21}Re_{11}$ とおく（$i = 1, 2$）．$(e_{11}R; Re_{21})$, $(e_{21}R; Re_{12})$ が i-pair のとき，σ, ρ :

$\{1,2\} \to \mathbb{N}$ は $\sigma(1)=2,\ \rho(1)=1,\ \sigma(2)=1,\ \rho(2)=2$ となる．これより，

$$P(1,1)=\begin{pmatrix} Q_1 & Q_1 & Q_1 \\ J_1 & Q_1 & Q_1 \\ J_1 & J_1 & Q_1 \end{pmatrix},\quad P(1,2)=\begin{pmatrix} A & A \\ A & A \\ A & A \end{pmatrix},$$
$$P(2,1)=\begin{pmatrix} B & B & B \\ B & B & B \end{pmatrix},\quad P(2,2)=\begin{pmatrix} Q_2 & Q_2 \\ J_2 & Q_2 \end{pmatrix},$$
$$K(1,1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad K(1,2)=\begin{pmatrix} 0 & S(A_{Q_2}) \\ 0 & S(A_{Q_2}) \\ 0 & S(A_{Q_2}) \end{pmatrix},$$
$$K(2,1)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & S(B_{Q_1}) \\ 0 & 0 & S(B_{Q_1}) \end{pmatrix},\ K(2,2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

よって

$$\begin{aligned} R \cong P/K &= \begin{pmatrix} P(1,1) & P(1,2) \\ P(2,1) & P(2,2) \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} K(1,1) & K(1,2) \\ K(2,1) & K(2,2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q_1 & Q_1 & Q_1 & A & A \\ J_1 & Q_1 & Q_1 & A & A \\ J_1 & J_1 & Q_1 & A & A \\ B & B & B & Q_2 & Q_2 \\ B & B & B & J_2 & Q_2 \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & S(A) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S(A) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S(A) \\ 0 & 0 & S(B) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S(B) & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

これを簡単に

$$\begin{pmatrix} Q_1 & Q_1 & Q_1 & A & \overline{A} \\ J_1 & Q_1 & Q_1 & A & \overline{A} \\ J_1 & J_1 & Q_1 & A & \overline{A} \\ B & B & \overline{B} & Q_2 & Q_2 \\ B & B & \overline{B} & J_2 & Q_2 \end{pmatrix}$$

と書く．このとき，

$$F(R)=\begin{pmatrix} Q_1 & A \\ B & Q_2 \end{pmatrix}.$$

次に，$(e_{11}R; Re_{21})$, $(e_{21}R; Re_{22})$ が i-pair とすると

$$R \cong \begin{pmatrix} Q_1 & Q_1 & Q_1 & A & \overline{A} \\ J_1 & Q_1 & Q_1 & A & \overline{A} \\ J_1 & J_1 & Q_1 & A & \overline{A} \\ B & B & B & Q_2 & Q_2 \\ B & B & B & J_2 & Q_2 \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} Q_1 & Q_1 & Q_1 & Q_1 & \overline{Q_1} \\ J_1 & Q_1 & Q_1 & Q_1 & \overline{Q_1} \\ J_1 & J_1 & Q_1 & Q_1 & \overline{Q_1} \\ J_1 & J_1 & J_1 & Q_1 & Q_1 \\ J_1 & J_1 & J_1 & J_1 & Q_1 \end{pmatrix}$$

と表現される．よって，$F(R) = Q_1$ である．

frame QF-subring の説明をしたついでに，左 Harada 環についての Morita の意味の自己双対性の状況を見てみよう．左 Harada 環 = 右 Harada 環であることや，加群論的に十分な自己双対性を有していることから，この環の自己双対性が成り立つことが予想される．しかし結論は Koike [27] によって否定的に解決された．Koike は Kraemer [31] の例を用いて反例を与えている．Koike はさらに [28] で Harada 環は自己双対的とまではいかないが Simson [58] の意味の almost 自己双対性をもつという結果も出している．

一般に Artin 環が Morita 双対を持つためには，Morita-Azumaya の定理から，その環が左，或いは右有限生成 injective cogenerator を有することの確認が必要となる．左 Harada 環は左, 右に関して有限生成 injective cogenerator を持つ．左に関しては定理 1.2 より分かり，右に関しては almost 自己双対性より確認できる．

R を basic indecomposable 左 Harada 環とし，$E(R) = \{e_{ij}\}_{i=1,j=1}^{m\ \ n(i)}$ を well-indexed set とする．各 $e_{i1}R$ に対して

(1) $Re_{\sigma(i)\rho(i)}/S_{j-1}({}_RRe_{\sigma(i)\rho(i)}) \cong I(T({}_RRe_{ij}))\ \forall i = 1, \dots, m,\ \forall j = 1, \dots, n(i)$.

(2) $\sum_{i=1}^{m}\oplus \sum_{j=1}^{n(i)}\oplus\, Re_{\sigma(i)\rho(i)}/S_{j-1}({}_RRe_{\sigma(i)\rho(i)}) \cong I(T({}_RR))$.

よって，$G := I(T({}_RR))$ は有限生成 injective cogenerator であり，$T = \mathrm{End}({}_RG)$ とおくと，有限生成左 R-mod のクラスと有限生成右 T-mod のクラスの間に Morita duality がある．一般には $R \ncong T$，つまり R は自己双対ではないが，次の結果がいえる．

定理 2.4. basic indecomposable 左 Harada 環 R について，次は同値である．

(1) R の frame QF-subring $F(R)$ が Nakayama 自己同型をもつ．

(2) $F(R)$ から作られるすべてのブロック拡大の上階段剰余環は（従って R も）自己双対的である．

この定理から，QF-環が Nakayama 自己同型をもつかどうかが問題となるのだが，上記 Koike により反例を与えられ，Harada 環は一般には自己双対的でないことが分かっている．

定理 2.3 は Nakayama 環の自己双対性の確認に応用される．このことについて触れておこう．

Nakayama 環は Harada 環であるから，Harada 環に関する結果はそのまま Nakayama 環についても成り立つ：

定理 2.5.

(1) basic indecomposable Nakayama 環は，枠組みとなる QF-Nakayam 部分環 を持ち，そのブロック拡大の上階段型剰余環として表現される．
(2) basic indecomposable QF-Nakayama 環は，Nakayama 自己同型写像を持つから自己双対的である．

このようにして，広い枠組みの中で Nakayama 環の自己双対性が，概念的方法で確認できる．1980年代，Nakayama 環の自己双対性が問題になり，Mano [34]，Haack [17]，Dischinger-Mueller [13] 等が研究していたのだが，Waschbusch [62] により，これは既に次の論文で解決されているというショッキングな報告があった．

K. Amdal and F. Ringdal, Catégories unisérialles, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série A-B* 267 (1968), A85–A87, B247–B249.

そして彼自身この論文のアイデアをなぞって証明を与えている．当時，筆者は Harada 環の応用として，定理 2.5 の形で証明を与えた（[53], [51]）．Haack は Nakayama 環の自己双対性を示すことには成功しなかったが，basic QF-Nakayam 環が Nakayama 自己同型を持つという結果には到達している．手法がテクニカルゆえに，その先が見えなかったのであろう．

Nakayama 環が QF-Nakayama 環から構成されるという結果で，Nakayama 環の構造論が終るのではない．QF-Nakayama 環のタイプを分析して，Nakayama 環が幾層もの構造を持つ Artin 環であるということを，次節で見ることにする．

話題 3：Nakayama 環の classification

Nakayama 環の 構造を列記すれば次のようになっている．

定理 3.1.

(1) basic indecomposable Nakayama 環は，frame QF-部分環のブロック拡大の上階段型剰余環として表現される．
(2) Nakayama 置換が identity でない basic indecomposable Nakayama QF 環は，局所 Nakayama 環上の skew matrix ring の剰余環になる．これより，frame QF-部分環の Nakayama 置換が identity でない basic indecomposable Nakayama 環は，局所 Nakayama 環上の skew matrix ring のブロック拡大上階段型剰余環として表現される．
(3) frame QF-部分環が identity でない Nakayama 置換をもつ basic indecomposable Nakayama 環は，さらに直接，局所 Nakayama 環上の skew matrix ring の剰余環になる．
(4) basic indecomposable Nakayama 環 R で，その frame QF-部分環が identity である Nakayama 置換をもつとき，剰余環 $R/S(R)$ は，局所 Nakayama 環上の skew matrix ring の剰余環として表現される．
(5) basic QF-Nakayama 環は Nakayama 自己同型写像を持つ．
(6) Nakayama 環は自己双対的である．

(1)，(5)，(6) については説明済み．(2) と (3) を見れば，Nakayama 環の本質が，局所 Nakayama 環上の skew-matrix ring であることが分る．この定理における skew-matrix ring と QF-Nakayama 環のタイプについて少し説明するが，詳細は Baba-Oshiro [6] を参照されたい．

通常の matrix ring を一般化したのが skew-matrix ring である．その説明の前に，QF-Nakayama 環のタイプについて分析をする．

F を basic indecomposable Nakayama QF-環とし，$e_nF, \dots, e_1F$ を F の Kupisch series とする．つまり，e_iF の projective cover が $e_{i+1}R$ $\forall i = 1, \dots, n-1$．よく知られているように，$F$ の Nakayama 置換 は，ある i があって

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_{n-i+1} & e_{n-i+2} & \cdots & e_n \\ e_i & e_{i+1} & \cdots & e_n & e_1 & \cdots & e_{i-1} \end{pmatrix}$$

となる．このとき，R を KNP($1 \to i$)-タイプと呼ぶ．KNP($1 \to 1$)-タイプ，KNP($1 \to 2$)-タイプ，KNP($1 \to n$)-タイプが重要である．

定理 3.2. $Q = e_1Fe_1$, $\overline{F} = F/S(F_F)$ とおく．

(1) 各 $i \in \{2, \dots, n\}$ に対して，F が KNP($1 \to i$)-タイプならば，$\overline{F}$ は KNP($1 \to i-1$)-タイプの Nakayama QF-環である．
(2) F が KNP($1 \to 1$)-タイプならば，$\overline{F}$ は KNP($1 \to n$)-タイプの Nakayama QF-環である．

(3) F が KNP$(1 \to n)$-タイプならば，$c \in J(Q)$ と $\sigma \in \mathrm{Aut}(Q)$ があって，F は Q 上の $\{\sigma, c, n\}$ に関する skew-matrix ring になる．

(4) $1 < i$ で F が KNP$(1 \to i)$-タイプならば，KNP$(1 \to n)$-タイプの basic indecomposable Nakayama QF-環があって，F はその環の自然な形の剰余環として表現される．

注意．(3) における $c \in J(Q)$, $\sigma \in \mathrm{Aut}(Q)$ を見つけるのに，KNP$(1 \to 2)$-タイプを用いる．

さて (4) より定理 3.1 の (3) が示されるのである．

話は前後するが，次に skew-matrix ring について説明する．

Q を環とする．$c \in Q$，$\sigma \in \mathrm{End}(Q)$ は，$\sigma(c) = c$，$\sigma(q)c = cq \quad \forall q \in Q$ をみたすとする．R を，Q の元を成分とする $n \times n$ 行列の全体とする：

$$R = \begin{pmatrix} Q & \cdots & Q \\ & \cdots & \\ Q & \cdots & Q \end{pmatrix}$$

R に和を通常の行列の和で，積を次のように定義する．(x_{ik})，$(y_{ik}) \in R$ に対して，

$$(z_{ik}) = (x_{ik})(y_{ik})$$

ここで，z_{ik} は次のようなものである：

$$z_{ik} = \sum_{j<i} x_{ij}\sigma(y_{jk})c + \sum_{i \le j \le k} x_{ij}y_{jk} + \sum_{k<j} x_{ij}y_{jk}c \quad (i \le k \text{ のとき}),$$
$$z_{ik} = \sum_{j \le k} x_{ij}\sigma(y_{jk}) + \sum_{k<j<i} x_{ij}\sigma(y_{jk})c + \sum_{i \le j} x_{ij}y_{jk} \quad (k < i \text{ のとき}).$$

次のように理解してもよい：

$$\langle a \rangle_{ij} \langle b \rangle_{kl} = 0 \quad (j \neq k \text{ のとき}),$$

$$\langle a \rangle_{ij} \langle b \rangle_{jk} = \begin{cases} \langle a\sigma(b) \rangle_{ik} & (j \le k < i \ \text{ のとき}), \\ \langle a\sigma(b)c \rangle_{ik} & (k < j < i \ \text{ または } \ j < i \le k \ \text{ のとき}), \\ \langle ab \rangle_{ik} & (i = j \ \text{ のとき}), \\ \langle abc \rangle_{ik} & (i \le k < j \ \text{ のとき}), \\ \langle ab \rangle_{ik} & (k < i < j \ \text{ または } \ i < j \le k \ \text{ のとき}). \end{cases}$$

検証は一寸面倒であるが，結合法則

$$(\langle x \rangle_{ij} \langle y \rangle_{jk}) \langle z \rangle_{kl} = \langle x \rangle_{ij} (\langle y \rangle_{jk} \langle z \rangle_{kl})$$

が成り立ち，R は環になる．この環を，(σ, c, n) に関する Q 上の skew matrix ring と呼び，

$$R = \begin{pmatrix} Q & \cdots & Q \\ & \cdots & \\ Q & \cdots & Q \end{pmatrix}_{\sigma,c,n}$$

或いは，単に $(Q)_{\sigma,c,n}$ で表す．σ が 恒等写像 id_Q で $c=1$ のとき，$(Q)_{id_Q,1,n}$ は通常の行列環である．しかし，(σ, c, n) の取り方で，通常の行列環とはまったく違ってくる．

例 3.1. Q を体，$\sigma = id_Q$，$c=0$ とすると

$$I = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ Q & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ Q & \cdots & Q & 0 \end{pmatrix}_{\sigma,c,n}$$

は R の ideal であり，R/I は通常の上三角行列環と同型になる．体上の上三角行列環は Nakayama 環であり，確かにこのように skew-matrix ring の剰余環として表現される．

定理 3.3. $R = (Q)_{\sigma,c,n}$ について次が成り立つ．

(1) Q が局所環ならば，R は basic indecomposable semiperfect ring である．

(2) Q が右 Artin (Noether) 環ならば，R も右 Artin (Noether) 環である．

(3) Q が局所 QF-環で $c \in J(Q)$ ならば，R は basic indecomposable QF-環で

$$\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & \cdots & e_n \\ e_n & e_1 & \cdots & e_{n-1} \end{pmatrix}$$

が Nakayama 置換となる．ここで，e_i は ii-成分が 1 でほかは 0 なる行列．

(4) 写像 $\tau : R \to R$,

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ & \cdots & \cdots & \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x_{nn} & x_{n1} & \cdots & x_{n,n-1} \\ \sigma(x_{1n}) & \sigma(x_{11}) & \cdots & \sigma(x_{1,n-1}) \\ & \cdots & \cdots & \\ \sigma(x_{n-1,n}) & \sigma(x_{n-1,1}) & \cdots & \sigma(x_{n-1,n-1}) \end{pmatrix}$$

は環準同型である．特に，$\sigma \in \mathrm{Aut}(Q)$ ならば $\tau \in \mathrm{Aut}(R)$ である．

(5) Q が局所 Nakayama 環で $cQ = J(Q)$ ならば，R は Nakayama 自己同型写像 τ を持つ KNP$(1 \to n)$-タイプの basic indecomposable Nakayama QF-環になる．

さて，ここで話をもとに戻す．この (5) の逆がいえる．つまり，basic indecomposable KNP$(1 \to n)$-タイプの basic indecomposable Nakayama QF-環は，このような skew-matrix ring $(Q)_{\sigma,c,n}$ として表されるのである．また，(5) を用いて，すべての basic indecomposable Nakayama QF-環が Nakayama 自己同型写像を持つことが示されて，我々の見地から Nakayama 環の自己双対性が確認できるのである．

skew-matrix ring は，1975 年の Kupisch [32] で VPE-ring として定義されている．しかし，上述とは多少異なった形で定義されているため，"skew-matrix ring" のようには見えない．ここでは，1987 年の Oshiro [51] に従った．

以上見てきたとおり，Harada 環は局所 QF-環から構成され，Nakayama 環は Harada 環を枠組みとし，概観は局所 QF-環のタイル張りになっているとたとえてよい．Nakayama 環は，実に類まれな自己完結的型の Artin 環である．

さて次の話題では，Nakayama 環の構造論の代数閉体上の Nakayama 群多元環への応用を紹介する．

話題 4: 代数閉体上の Nakayama 群多元環

定理 3.2 で，体 K 上の indecomposable Nakayama 多元環 R で，その frame QF-部分環 $F(R)$ の Nakayama 置換が恒等置換でないものは，ある局所 Nakayama 多元環 Q 上の skew-matrix ring $(Q)_{\sigma,c,n}$ の剰余環として表現できることを知った．K が代数閉体上の場合は，この Q が $K[x]/(x^{d+1})$ （ここで，d は Q の組成列の長さ）と取れて，しかも $\sigma = id_Q$ となる．さらに $F(R)$ の Nakayama 置換が恒等置換の場合も，R は $Q = K[x]/(x^{d+1})$ 上の skew-matrix ring $(Q)_{id_Q,c,n}$ の剰余環として表現できる．この後半の部分の状況を説明する．（詳しくは baba-Oshiro [6]，Hanaki-Koshitani-Oshiro [30] を参照.）

Q を体 K 上多元環とし，skew matrix ring

$$R = \begin{pmatrix} Q & \cdots & Q \\ & \cdots & \\ Q & \cdots & Q \end{pmatrix}_{\sigma,c,n}$$

を考える．ここで，σ は環準同型写像．K を次の写像で R の部分環とみる：

$$k \longmapsto \begin{pmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix}$$

このとき，次がいえる：

(1) $n=1$ のとき，$R=Q$.
(2) $n\geq 2$ のとき，
$R:K$ 上多元環 $\Longleftrightarrow$ σ: K-algebra 準同型写像，i.e., $\sigma(k)=k\ \ \forall k\in K$.

さて，以後扱う K は代数閉体とする．

命題 4.1. Q を K 上局所 Nakayama 多元環とする．$J=J(Q)=cQ$ とおき，$d+1$ を Q の組成列の長さとする．つまり，$J^d\neq 0$, $J^{d+1}=0$. このとき

(1) $Q\cong K[x]/(x^{d+1})$
(2) σ が Q の algebra 自己同型写像で，$\sigma(c)=c$, $\sigma(q)c=cq\ \ \forall q\in Q$ をみたせば，$\sigma=id_Q$. 従って，

$$(Q)_{id_Q,c,n}=\begin{pmatrix} Q & \cdots & Q \\ & \cdots & \\ Q & \cdots & Q \end{pmatrix}_{id_Q,c,n} \cong \begin{pmatrix} K[x]/(x^{d+1}) & \cdots & K[x]/(x^{d+1}) \\ & \cdots & \\ K[x]/(x^{d+1}) & \cdots & K[x]/(x^{d+1}) \end{pmatrix}_{id,\bar{x},n}$$

次の定理は，Nakayama 群多元環の研究において重要である．

定理 4.2. R を Nakayama 置換が恒等置換である K 上 basic indecomposable Nakayama QF-多元環とし，$e_nR,\ldots,e_1R$ を Kupisch series とする．$Q=e_1Re_1, Q=Qc$ とおき，$d+1$ を Q の組成列の長さとする．このとき

(1) $Q=e_1Re_1\cong e_2Re_2\cong\cdots\cong e_nRe_n\cong K[x]/(x^{d+1})$,
(2) ij-成分を ij-成分に移す algebra epimorphism $\varphi=(\varphi_{ij})$:

$$(Q)_{id,c,n}=\begin{pmatrix} Q & \cdots & Q \\ & \cdots & \\ Q & \cdots & Q \end{pmatrix}_{id,c,n} \longrightarrow R=\begin{pmatrix} e_1Re_1 & \cdots & e_1Re_n \\ & \cdots & \\ e_nRe_1 & \cdots & e_nRe_n \end{pmatrix}$$

で，その Kernel が

$$\operatorname{Ker}\varphi=\begin{pmatrix} 0 & & S(Q) \\ & \ddots & \\ & & \ddots & \\ S(Q) & & 0 \end{pmatrix}$$

であるものがとれる．従って，

$$R \cong \begin{pmatrix} K[x]/(x^{d+1}) & \cdots & K[x]/(x^{d+1}) \\ & \cdots & \\ & \vdots & \\ K[x]/(x^{d+1}) & & K[x]/(x^{d+1}) \end{pmatrix}_{id,\overline{x},n} \Big/ \begin{pmatrix} 0 & & (x^d)/(x^{d+1}) \\ & 0 & \\ & & \ddots & \\ (x^d)/(x^{d+1}) & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overset{put}{=} \begin{pmatrix} K[x]/(x^{d+1}) & K[x]/(x^d) & \cdots & K[x]/(x^d) \\ K[x]/(x^d) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & K[x]/(x^d) \\ K[x]/(x^d) & \cdots & K[x]/(x^d) & K[x]/(x^{d+1}) \end{pmatrix}_{id,\overline{x},n}$$

定理 4.2 を応用して，対称群や交代群に対する代数閉体上の群多元環が Nakayama 多元環になる場合の行列表現を見てみよう．

Nakayama group algebra については，環論や群論の多くの研究者によって研究されている（例えば，Osima [48]，Morita [38]，Brauer [10]，Dade [12], Higman [22], Murase [41]，[42]，Michler [36]，Isaacs [23] 等)．その歴史については，Kositani [29]，Puninski [56] を参照．

G を有限群とし，K を標数 p の体とする．次は，よく知られた結果である．

定理 4.3.

(1) (Maschkke [35])
p が 0 或いは G の位数 $|G|$ を割らない $\Longleftrightarrow$ kG : semisimple.

(2) (Higman [22]，Kasch–Kneser-Kupisch [25]) $p>0$ で p が $|G|$ を割るとき KG が有限表現型である $\Longleftrightarrow$ G は巡回シロー p-部分群をもつ．

従って，KG が Nakayama 多元環であるためには，G は巡回シロー p-部分群を持つことが必要である．正確に記せば：KG のブロック B が有限表現型である $\Longleftrightarrow$ B の “defect group” が巡回群である．(Alperin [1]，Benson [8])

G を有限群，pを 素数とする．G の正規部分群の descending chain: $G = H_0 \rhd H_1 \rhd H_2 \rhd \cdots \rhd H_k = \{e\}$ で，H_i/H_{i+1} が p-群，或いは p'-群 (i.e.，p が $|H_i/H_{i+1}|$ を割らない) となるものがあるとき，G を p-可解群（p-solvable group) という．

次の定理は重要である．

定理 4.4. (Morita [38], Isaacs [23]) K を代数閉体, G を p-可解群とする. このとき, cyclic defect group を持つ KG のブロックは Nakayama 多元環である.

さて, $n \leq 5$ の場合, 標数 p の代数閉体 K と n 次の対称群 S_n, 交代群 A_n との群多元環 が Nakayama 多元環になっているとき, それらを skew-matrix ring で表現してみる.

注意 :

(1) Klein 群を含む有限群シロー 2-部分群は巡回群でないから, $4 \geq n$ に対して, KS_n, KA_n は Nakayama 多元環ではない.
(2) $p=3$ のとき, S_3, A_3, S_4, A_4 は巡回 3-シロー部分群をもつから, 定理 4.4 より, KS_3, KA_3, KS_4, KA_4 は Nakayama 多元環である.
(3) A_5 は non-abelian simple であるので, A_5, S_5 は 3-可解群でない.

KS_n, KA_n の構造を知るには, 次を調べる必要がある:

(1) ブロック分解 $KG = B_1 \oplus \cdots \oplus B_t$.
(2) 各 B_i の simple submodule のタイプ.
(3) 各 B_i, およびその simple submodule の K-次元.
(4) 知られている結果の利用 .

しかし, このアルゴリズムを実行するのはそれほど易しくはないようである.

下記は千葉大の越谷さん, 信州大の花木さんの協力のもとでの記録である.

[I] $p=2$ のとき;
(1) KS_2 は局所 Nakayama 多元環で, $KS_2 \cong K[x]/(x^2)$.
(2) KS_3 は Nakayama 多元環で, $KS_3 \cong K[x]/(x^2) \oplus M_2(K)$.
(3) KA_3 は Nakayama 多元環で, $KA_3 \cong K[x]/(x^3)$.

[II] $p=3$ のとき:
(1) KS_3 は basic indecomposable Nakayama 多元環で, 次元 1 の二つの simple modules をもち

$$KS_3 \cong A = \begin{pmatrix} Q & \overline{Q} \\ \overline{Q} & Q \end{pmatrix}_{id,x,2}$$

ここで, $Q = K[x]/(x^2)$, $\overline{Q} = Q/((x)/(x^2))$.

(2) KA_3 は局所 Nakayama 多元環で，$KA_3 \cong K[x]/(x^3)$.

(3) KS_4 は Nakayama 多元環で，そのブロック分解は $KS_4 \cong A \oplus (K)_3 \oplus (K)_3$. ここで，$A$ は [II] (1) における A.

(4) KA_4 は Nakayama 多元環で，$KA_4 \cong K[x]/(x^3) \oplus (K)_3$.

(5) KS_5 は Nakayama 多元環で，そのブロック分解は $KS_5 = B_1 \oplus B_2 \oplus B_3$. ここで，$B_1$ と B_2 は同型で，その次元は 42 で，次元が 1, 4 二つの simple modules を持つ.

$$B_3 \cong (K)_6 \text{（行列環）},$$

$$B_1 \cong B_2 \cong \begin{pmatrix} Q & Q & Q & Q & X \\ Q & Q & Q & Q & X \\ Q & Q & Q & Q & X \\ Q & Q & Q & Q & X \\ Y & Y & Y & Y & T \end{pmatrix}.$$

ここで，

$$\begin{pmatrix} Q & X \\ Y & T \end{pmatrix}$$

は，[II] (1) の A で，$Q = eAe$, $T = fAf$, $X = eAf$, $Y = fAe$

$$\text{（ただし，} e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\text{）}.$$

(6) KA_5 は Nakayama 多元環で，$KA_5 \cong A \oplus B_1 \oplus B_2 \oplus B_3 \oplus B_4 \oplus B_5 \oplus B_6 \oplus B_7$. ここで，$A$ は [II] (1) の A. $B_i \cong B_1 \cong B_2 \cong B_3 \cong B_4 \cong K[x]/(x^9)$, $B_6 \cong B_7 \cong (K)_9$.

[III] $p = 5$ のとき，

(1) KS_5 のブロック分解：$KS_5 \cong B_1 \oplus (K)_5 \oplus (K)_5$. ここで，$B_1$ の次元は 70 で，1, 1, 3 の次元の 3 つの simple modules をもつ. B_1 は次元 35 の有限表現型だが，Nakayama 多元環でない.

(2) KA_5 のブロック分解：$KA_5 \cong B_1 \oplus (K)_5$. B_1 は有限表現型だが，Nakayama 多元環ではない.

以上，$n \leq 5$ 場合の Nakayama KS_n, KA_n を調べたが，$n > 5$ のときはどうであろうか. あるとすれば無限に散在しているであろうか.

話題 5: 局所 QF-環の構成と Faith 予想

Harada 環も Nakayama 環も局所 QF-環が基本になっている．それゆえ，局所 QF-環の探求へと新たな展開が始まる．局所 QF-環は，QF-環に関する有名な Faith 予想との関連でも究明すべき局所 QF-環である．

ここの話題では Faith 予想の一考察から，局所環の一般的構成法について紹介する．(詳しくは Kikumasa-Oshiro-Yoshimura [26] を参照.)

本稿の概要で述べたように

$$R : \text{QF-環} \iff R : \text{右 perfect ring かつ左, 右 self-injective ring}$$

という Osofsky の結果がある．この結果における左,右の self-injective 性を，片側だけの self-injective 性で置き換えられないか，というよく知られた問題がある．Faith は彼の著書 [14] で，semiprimary 環でもこの問題は否定的だろうと予想した．これが Faith 予想の由来である．Faith 予想は，局所 semiprimary 環で Jacobson radical 3 乗ゼロの場合でも未解決である．おそらく，この場合が解決されれば一気に解決にいたるであろう．

Baba-Oshiro [6] の次の定理は，Faith 予想に関連する結果である．

定理 5.1. semiprimary 環 R が右 self-injective であるための必要十分条件は，R が右 simple-injective であることである．特に，Jacobson radical 3 乗ゼロの semiprimary 局所環 R が右 self-injective であるための必要十分条件は，J^2 が左,右に関して simple であり，J の任意の極大右 submodule M に対して $\exists a \in J \setminus J^2 : aM = 0$ となることである．

注意：R が右 simple injective とは，R の右 ideal から R の simple submodule への homomorphism は，R からの homomorphism に拡張できることである．

さて，$J_2 \neq 0$，$J_3 = 0$ なる局所 semiprimary 環 R を分析しよう．$D = R/J$，$S = J^2$，$\overline{J} = J/S$ とおく．このとき，$\overline{J}$，S は (D, D)-bispace である．次のことがいえる：

(1) R が QF-環のとき，graded type と呼ばれる新しい Jacobson radical 3 乗ゼロの局所 QF-環 T が，次のようにして作れる：$T := D \times J \times S$．T の元 $t_1 = (d_1, a_1, s_1)$，$t_2 = (d_2, a_2, s_2)$ の積を

$$t_1 t_2 = (d_1 d_2,\ d_1 a_2 + a_1 d_2,\ d_1 s_2 + s_1 d_2 + a_1 a_2)$$

と定義すれば，$J(T) = 0 \times J \times 0$，$J(T)^2 = 0 \times 0 \times S$，$J(T)^3 = 0$ （一般には $R \ncong T(R)$）．

(2) R が右 injective だが QF-環でないならば，$\dim {}_DJ = \dim \overline{{}_DJ} > \dim \overline{J_D} = \infty$.

これらの情報をもとに，Jacobson radical 3 乗ゼロの局所 semiprimary 環 についての Faith 予想の分析と，Jacobson radical 3 乗ゼロの QF-環の一般的構成法について述べる.

D を division ring とし，${}_DV_D$ を (D,D)-bispace とする. $T = D\times V\times(V\otimes_D V)$ とおく. この (D,D)-bispace T の元 $t_1 = (d_1, v_1, x_1)$，$t_2 = (d_2, v_2, x_2)$ の積を次のように定義する：

$$t_1t_2 = (d_1d_2,\ d_1v_2 + v_1d_2,\ d_1x_2 + x_1d_2 + v_1\otimes v_2)$$

このとき，T は Jacobson radical 3 乗ゼロの局所 semiprimary 環になる. $J(T) = 0\times V\times 0$，$J(T)^2 = 0\times 0\times V\otimes_D V$，$(D\times 0\times 0)$，$(0\times V\times 0)$，$(0\times 0\times V\otimes_D V)$ をそれぞれ D，V，$V\otimes_D V$ と同一視し，$T = T = \langle D, V, V\otimes_D V\rangle$ とおく. このとき，次がいえる.

命題 5.2.

(1) $V\otimes_D V$ の (D,D)-bisubspace I が，$\dim((V\otimes_D V)/I_D) = \dim((V\otimes_D V)/{}_DI) = 1$，$vD\otimes_D V \not\subset I$，$V\otimes_D Dv \not\subset I \quad 0\neq\forall v\in V$ をみたすとき，I は T の ideal となり，$J(T/I)^2 = S(T/I)$ は，左そして右 T/I-module として simple となる.

(2) $\dim(V_D)$ が有限次元で，かつ (1) の (D,D)-bisubspace I が存在すれば，T/I は Jacobson radical 3 乗ゼロの局所 QF-環となる.

pD を 1 次元右 D-space とし，ρ を D の自己同型とする. D の元 d に対して $dp = p\rho(d)$ と定義すれば，pD は 1 次元左 D-space になる. この (D,D)- bispace を pD^ρ で記す. $V^* = \mathrm{Hom}_D(V_D, pD^\rho_D)$ とおくと，V^* は自然に (D,D)-bispace になる.

ここで次の条件が成り立つと仮定する.

仮定 A: V と V^* の間に (D,D)-同型写像 θ がある.

$v\in V$ に対して，$v^* = \theta(v)$ とおく. $V\times V\to pD^\rho$，$(v,w)\mapsto v^*(w)$ なる写像は，上への bilinear (D,D)-写像になる. 従って，写像 $\lambda : V\otimes_D V\to pD^\rho$，$\sum_i v_i\otimes w_i\mapsto \sum_i v_i^*(w_i)$ は上への (D,D)-準同型写像となる. 容易に分かるように，$\mathrm{Ker}\,\lambda$ は T の ideal. 剰余環 $\overline{T} = T/\mathrm{Ker}\,\lambda$ を $R = D\langle V,\theta,\rho,pD^\rho\rangle$ で表す. $s = \overline{\lambda^{-1}(p)}\in\overline{V\otimes_D V}$ とおくと，次がいえる.

定理 5.3.

(1) $J = J(R) = \overline{V},\ J^2 = \overline{V \otimes_D V} = Rs = sR,\ J^3 = 0.$
(2) $S(R) = J^2$: 左, 右 simple ideal.
(3) R : 右 self-injective.
(4) R : QF-環 $\iff \dim(V_D) < \infty$.

この定理より，Jacobson radical 3 乗ゼロの局所 semiprimary 環についての Faith 予想は，次のように言い換えられる．

Problem : 次の条件をみたす division ring D と (D,D)-bispace V は存在するか：

$$\dim(V_D) = \infty, \quad {}_DV_D \cong {}_DV_D^* \ \ ((D,D)\text{-isomorphism})$$

この問題の意味は明快である．しかし，一寸挑戦してみると分かることだが，たちまち pathological な状況に直面してしまう．

Faith 予想は難しい．しかし，徒労には終りたくない．上述の分析から，我々は，局所 QF-環の構成に関する一原理を得ることが出来るのである．最後にこのことを紹介する．

次の条件をみたす division ring D と (D,D)-bispace V が存在するとする：

$$\dim(V_D) = n < \infty, \quad {}_DV_D \cong {}_DV_D^* \ \ ((D,D)\text{-isomorphism})$$

このとき，$\dim(V_D) = n$ となり，$\exists x_1, \ldots, x_n \in V : V = Dx_1 \oplus \cdots \oplus Dx_n = x_1D \oplus \cdots \oplus x_nD$ となる．この等式から，環準同型写像 $\sigma = (\sigma_{ij}) : D \to (D)_n$, $\xi = (\xi_{ij}) : D \to (D)_n$ があって，σ, ξ について，次の関係式 (♯) が成り立つことが分かる：

$$\sum_j \sigma_{kj}(\xi_{ij}(d)) = \begin{cases} d & (k = i \text{ のとき}), \\ 0 & (k \neq i \text{ のとき}), \end{cases}$$

$$\sum_j \xi_{jk}(\sigma_{ji}(d)) = \begin{cases} d & (k = i \text{ のとき}), \\ 0 & (k \neq i \text{ のとき}). \end{cases}$$

逆に，話をもとに戻して，(D,D)-bispace $V\langle x_1, \ldots, x_n; \sigma\rangle$ と pD^ρ を考え，上の関係式をみたす $\sigma = (\sigma_{ij}) : D \to (D)_n$ と $\xi = (\xi_{ij}) : D \to (D)_n$ があって，$\rho\xi_{ij} = \sigma_{ij}$ とする．このとき，V と $V^* = \mathrm{Hom}_D(V_D, pD^\rho)$ の間に自然な

(D,D)-同型写像が作れる．実際，各 i に対して，$\alpha_i \in V^* = \mathrm{Hom}_D(V_D, pD^\rho_D)$ を

$$\alpha_i : x_1 d_1 + \cdots + x_n d_n \mapsto p d_i,$$

によって定義すれば，${}_DV^* = D\alpha_1 \oplus \cdots \oplus D\alpha_n$ となり写像

$$\theta^* : {}_DV_D \to {}_DV^*_D,\ \ d_1x_1 + \cdots + d_nx_n \mapsto d_1\alpha_1 + \cdots + d_n\alpha_n$$

は (D,D)-bispace 同型写像になる．従って，局所 QF-環 $D\langle V,\sigma,\xi,\theta^*,\rho,pD^\rho\rangle$ が作れる．

特に，ξ として σ がとれる場合は，必然的に $\rho = id_D$ となり，局所 QF-環 $D\langle V,\sigma,\sigma,\theta^*,id_D,1D^{id_D}\rangle$ が作れる．この観点からいくつか例を展示してみよう．

例 5.1. d を division ring とし，$V_D = x_1D \oplus \cdots \oplus x_nD$ を D 上 n 次元 space とする．π を D の環同型写像とし，次のような環準同型写像 $\sigma = (\sigma_{ij})$，$\xi = (\xi_{ij})$ を考える：

$$\sigma : D \to (D_n),\ \ d \mapsto \begin{pmatrix} \pi(d) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pi(d) \end{pmatrix}$$

$$\xi : D \to (D_n),\ \ d \mapsto \begin{pmatrix} \pi^{-1}(d) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \pi^{-1}(d) \end{pmatrix}$$

この σ，ξ に関して関係式 $(\sharp)$ が成り立ち，$\pi^2\xi_{ij} = \sigma_{ij}$ がいえる．従って局所 QF-環 $D\langle V,\sigma,\xi,\theta^*,\pi^2,pD^{\pi^2}\rangle$ が作れる．

例 5.2. $\mathbb{C}$ を複素数体とし，$V = x_1\mathbb{C} \oplus x_2\mathbb{C}$ を $\mathbb{C}$ 上 2 次元 space とする．写像

$$\sigma : \mathbb{C} \to (\mathbb{C})_2,\ \ a + bi \mapsto \begin{pmatrix} a & bi \\ bi & a \end{pmatrix}$$

は環準同型写像で，σ，σ に関して $(\sharp)$ が成り立つ．よって局所 QF-環 $\mathbb{C}\langle V,\sigma,\sigma,\theta^*,id_{\mathbb{C}},1\mathbb{C}^{id_{\mathbb{C}}}\rangle$ が作れる．

例 5.3. k を可換体とし，$f(x) = x^n - a \in k[x]$ を α を根とする既約多項式とする．$D = k(\alpha)$ とおき，n 次元 space $V = \sum_{i=1}^n \oplus x_iD$ を考える．写像 σ

を

$$\sigma : D \to (D)_n\,,\quad \sum_{i=0}^{n-1} a_i\alpha^i \;\mapsto\; \begin{pmatrix} a_0 & a_1\alpha & a_2\alpha^2 & \cdots & a_{n-1}\alpha^{n-1} \\ a_{n-1}\alpha^{n-1} & a_0 & a_1\alpha & \cdots & a_{n-2}\alpha^{n-2} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_2\alpha^2 & \ddots & \ddots & \ddots & a_1\alpha \\ a_1\alpha & a_2\alpha^2 & \cdots & a_{n-1}\alpha^{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

と定義すれば，σ は環準同型写像で σ，σ に関して ($\sharp$) が成り立つ．よって，局所 QF-環 $D\langle V,\sigma,\sigma,\theta^*,id_D,1D^{id_D}\rangle$ が作れる．

例 5.4. $\mathbb{H}$ をハミルトンの 4 元数体とし，4 次元 space $V = x_1\mathbb{H}\oplus x_2\mathbb{H}\oplus x_3\mathbb{H}\oplus x_4\mathbb{H}$ を考える．写像

$$\sigma : \mathbb{H} \to (\mathbb{H})_4\,,\quad a+bi+cj+dk \;\mapsto\; \begin{pmatrix} a & bi & cj & dk \\ bi & a & dk & cj \\ cj & dk & a & bi \\ dk & cj & bi & a \end{pmatrix}$$

は環準同型写像であり，σ，σ に関して ($\sharp$) が成り立つ．よって，局所 QF-環 $\mathbb{H}\langle V,\sigma,\sigma,\theta^*,id_{\mathbb{H}},1\mathbb{H}^{id_{\mathbb{H}}}\rangle$ が作れる．

例 5.5. E を可換体，π を E の自己同型写像で，次をみたすものとする：

(1) $\pi^2 = id_E$.

(2) $\alpha,\beta\in E : \alpha\pi(\alpha)+\beta\pi(\beta) = 0 \;\Rightarrow\; \alpha = 0$ かつ $\beta = 0$.

ここで，E 上の 2 次元 space $D = E\oplus Ei = \{\alpha+\beta i \mid \alpha,\beta\in E\}$ を作り，$i^2 = -1$ とし，$\alpha\in E$ と i の積を，

$$i\alpha = \pi(\alpha)i$$

と定義することにより，D は division ring になる：

$$(\alpha+\beta i)(\pi(\alpha)-\beta i) = \alpha\pi(\alpha)+\beta\pi(\beta)$$

ここで，$\alpha+\beta i\neq 0$ ならば，$\alpha\pi(\alpha)+\beta\pi(\beta)\neq 0$ が成り立ち，D の center が $K := \{a\in E \mid \pi(a) = a\}$ となる．

$V = x_1D\oplus x_2D$ を D 上の 2 次元 space とし，環準同型写像

$$\sigma : D\to (D)_2\,,\quad \alpha+\beta i \;\mapsto\; \begin{pmatrix} \alpha & \beta i \\ \beta i & \alpha \end{pmatrix}.$$

を考える．このとき，σ，σ に関して関係式 (♯) が成り立ち，局所 QF-環 $D\langle V,\sigma,\sigma,\theta^*,id_D,1D^{id_D}\rangle$ が作れる．

次に，局所 QF-環 R で，その center K が体をなし，R が K 上有限次元でない例を作る．

例 5.6. E を division ring で，その center K 上 infinite dimensional なるものとし，$x^2 \neq -1$ $\forall x \in E$ がみたされるとする．このとき，E 上の 2 次元 space $D = E \oplus Ei = \{\alpha + \beta i \mid \alpha, \beta \in E\}$ を考え，

$$i^2 = -1, \qquad i\alpha = \alpha i \ \ \forall \alpha \in E$$

なる積をいれる．これにより D は環になり，しかも division ring になることが確かめられる．

次に，$V = x_1 D \oplus x_2 D$ を D 上の 2 次元 space とする．写像

$$\sigma : D \to (D)_2,\ \ \alpha + \beta i \ \mapsto \ \begin{pmatrix} \alpha & \beta i \\ \beta i & \alpha \end{pmatrix}.$$

は環準同型写像で，(♯) をみたす．よって，局所 QF-環 $D\langle V,\sigma,\sigma,\theta^*,id_D,1D^{id_D}\rangle$ が作れる．

注意：上の例における division ring E はいくらでも存在する．例えば，実数体上の関数体 $L = \mathbb{R}(x)$ を考え，中への monomorphism $\sigma : L \to L$, $f(x)/g(x) \mapsto f(x^2)/g(x^2)$ を定義し，$L[y;\sigma]$ を σ による skew-polynomial ring とすると，この環は non-commutative domain で，classical quotient を持ち，それは division ring になる．この division ring を E とおく．このとき，E の center は $\mathbb{R}$ で，E は $\mathbb{R}$ 上の infinite dimensional space である．$a^2 \neq -1$ $\forall 0 \neq a \in E$ も成り立つ．

結び

以上見てきたように，QF-環，Nakayama 環，そして Harada 環は純然たる Artin 環であり，局所 QF-環が基盤になっている．そして，体上の有限次元でない局所 QF-環がいくらでも作れることを知った．Artin 環の世界は群多元環や有限次元多元環を超えた広大無辺なる広がりで形成されていってもよい世界の筈だと筆者は思っている．有限次元多元環における定理が Artin 環の定理にまで拡張されたとき，品格は格段に増す．第 1 Brauer-Thrall 予想が 有限次元多元環の場合に Roiter (1968, [57]) によって解決され，一般の Artin 環の場合

は Auslander (1974, [3]) によって神業のごとく解決されたという話は，その典型である．

参考文献

[1] J. L. Alperin, "Local Representation Theory", Cambridge Univ. Press, Cambridge (1986).

[2] K. Amdal and F. Ringdal, Catégories unisérialles, *C. R. Acad. Sci. Paris, Série A-B* 267 (1968), A85–A87, B247–B249.

[3] M. Auslander, Representation theory of Artin algebras, II, *Comm. in Algebra, 1 (1974), 269-310.*

[4] G. Azumaya, A duality theory for injective modules, *Amer. J. Math.* 81 (1959), 249–278.

[5] Y. Baba and K. Oshiro, On a Theorem of Fuller, *J. Algebra* 154, 1 (1993), 86–94.

[6] Y. Baba and K.Oshiro, Classical Artinian Rings and Related Topics (Lecture Note)

[7] H. Bass, Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* 95 (1960), 466–486.

[8] D. J. Benson, "Representations and Cohomology. I", Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 30, Cambridge University Press, Cambridge (1991).

[9] R. Brauer and C. Nesbitt, On regular representations of algebras, *Proc. Nat. Acad. Sci.* 23 (1937), 236–240.

[10] R. Brauer, Investigations on group characters, *Ann. Math.* 42 (1941), 936–958.

[11] J. Clark, C. Lomp, N. Vanaja and R. Wisbauer, Lifting modules, *Frontiers in Math., Birkhauser Boston, Boston, 2006*

[12] E. C. Dade, Blocks with cyclic defect groups, *Ann. Math.* 84 (1966), 20–48.

[13] F. Dischinger and W. Mueller, Einreihig zerlegbare artinsche Ringe sind selbstdual, *Arch. Math. 48 (1984), 132-136*

[14] C. Faith, "Algebra II. Ring Theory", Grundlehren Math. Wiss. 192, Springer-Verlag, Heidelberg/New York/Berlin (1976).

[15] W. Von Frobenius, Theoriw der hyperkomplexen Groβben, *Sitzung der phys.-math.* K1(1903), 504-538. 634-645.

[16] K. R. Fuller, On indecomposable injectives over artinian rings, *Pacific J. Math* 29 (1968), 115–135.

[17] J. K. Haack, Self-duality and serial rings, *J. Algebra* 59 (1979), 345–363.

[18] M. Harada, Non-small modules and non-cosmall modules, in "Ring Theory. Proceedings of 1978 Antwerp Conference" (F. Van Oystaeyen, Ed.) Dekker, New York (1979), 669–690.

[19] M. Harada, On one-sided *QF-2* rings I, *Osaka J. Math.* 17 (1980), 421–431.

[20] M. Harada, On one-sided *QF-2* rings II, *Osaka J. Math.* 17 (1980), 433–438.

[21] M. Harada, "Factor Categories with Applications to Direct Decomposition of Modules," Lect. Notes Pure Appl. Math. 88, Dekker, New York (1983).

[22] D. G. Higman, Indecomposable representations at characteristic p, *Duke Math. J. 21 (1954), 377-381*

[23] I. M. Isaacs, Lifting Brauer characters of p-solvable groups, *Pacific J. Math.* 53 (1974), 171–188.

[24] J. Kado and K. Oshiro, Self-duality and Harada rings, *J. Algebra* 211 (1999), 384–408.

[25] F. Kasch, M.Kneser and H. Kupisch, Unzerlegbare modulare Darstellungen endlicher Gruppen mit zyklischer p-Sylow-Gruppen, *Archiv der Math. 8i1957j320-321*

[26] I. Kikumasa, K. Oshiro and H. Yoshimura, A construction of local QF-rings with radical cube zero, *preprint.*

[27] K. Koike, Examples of *QF* rings without Nakayama automorphism and H-rings without self-duality, *J. Algebra* 241 (2001), 731–744.

[28] K. Koike, Almost self-duality and Harada rings, *J. Algebra* 254 (2002), 336–361.

[29] S. Koshitani, Some topics on modular group algebras of finite groups, *Proceeding 30th Symp. Ring Theory, Shinsyu (1997), 81-90*

[30] A. Koshitani, Hanaki and K. Oshiro, Nakayama algebras over algebraically closed fields, *preprint.*

[31] J. Kraemer, "Characterizations of the existence of (quasi-)selfduality for complete tensor rings" Algebra Berichte 56, München (1987).

[32] H. Kupisch; Uber ein Klasse von Ringen mit Minimalbedingung II, *Arch. Math.* 26 (1975), 23–35.

[33] T. Y. Lam, "Lectures on Modules and Rings", Graduate Texts in Mathematics 189, Springer-Verlag, Heidelberg/New York/Berlin (1998).

[34] T. Mano, The invariant system of serial rings and their applications to the theory of self-duality, *Proceeding 16th Symp. Ring Theory,* Tokyo (1983), 48–53.

[35] H. Maschke, *Ü*ver den arithmetischen Character der Koeffizienten der Substitutionen endlicher linearer Substitutiongruppen, *Math. Ann. 50 (1898), 482-498*

[36] G. O. Michler, Green Correspondence between Blocks with Cyclic Defect groups, *J. Algebra* 39 (1976), 26-51.

[37] S. H. Mohamed and B. J. Müller, "Continuous Modules and Discrete Modules", London Math. Soc. Lect. Notes 147, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1990).

[38] K. Morita, On group rings over a modular field which possess radicals expressible as principal ideals, *Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku, Kyoiku Daigaku (Sec.A) 4 (1951), 177-194*

[39] K. Morita, Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition, *Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku* 6 (1958), 89–142.

[40] I. Murase, On the structure of generalized uniserial rings III, *Sci. Papers College Gen. Educ., Univ. Tokyo* 14 (1964), 11–25.

[41] I. Murase, Generalized uniserial group rings I, *Sci. Papers College Gen. Educ., Univ. Tokyo* 15 (1965), 15–28.

[42] I. Murase, Generalized uniserial group rings II, *Sci. Papers College Gen. Educ., Univ. Tokyo* 15 (1965), 111–128.

[43] H. Nagao and Y. Tsushima, "Representations of Finite Groups", Academic Press, Boston (1989).

[44] T. Nakayama, Note on uniserial and generalized uniserial rings, *Proc. Imp. Acad. Tokyo* 16 (1940), 285–289.

[45] T. Nakayama, On Frobenius algebras I *Ann. Math.* 40 (1939), 611–633, II ibid 42 (1941), 1–21.

[46] T. Nakayama and G. Azumaya, 代数学 II, 岩波書店 (1954)

[47] W. K. Nicholson and M. F. Yousif, "Quasi-Frobenius Rings", Cambridge Tracts in Mathematics 158, Cambridge University Press, Cambridge (2003).

[48] M. Osima, On primary decomposable of group rings, *Proc. Phys.-Math. Soc. Japan 24(1942),1-9*

[49] K. Oshiro, Lifting modules, extending modules and their applications to *QF*-rings, *Hokkaido Math. J.* 13 (1984), 310–338.

[50] K. Oshiro, lifting modules, extending modules and their applications to generalized uniserial rings, *Hokkaido Math. J.* 13 (1984), 339–346.

[51] K. Oshiro, Structure of Nakayama rings, *Proceedings 20th Symp. Ring Theory*, Okayama (1987), 109–133.

[52] K. Oshiro, Theories of Harada in Artinian rings, *International Symposium on Ring Theory, (Kyongju, 1999) , Birkhauser Boston, Boston (2001), 279-328*

[53] K. Oshiro and S. Masumoto, The self-duality of H-rings and Nakayama automorphisms of *QF*-rings, *Proceedings 18th Symp. Ring Theory*, Yamaguchi (1985), 84–107.

[54] B. Osofsky, A generalization of quasi-Frobenius rings, *J. Algebra* 4 (1966), 373–387.

[55] R. S. Pierce, Associative Algebra, Graduate Texts in Mathematics, Springer (1982).

[56] G. E. Puninski, "Serial Rings", Kluwer Academic Publishers (2001).

[57] A. V. Roiter, Unboundedness of the dimensions of the indecomposable representations of an algebra which has infinitely many indecomposable representations,Izv. Acad. Nauk SSSR Ser. Mat.32, 1275-1282 (1968).

[58] D. Simson, Dualities and pure semisimple rings, in "Abelian groups, module theory, and topology (Padua, 1997)", 381–388. Dekker, New York (1998).

[59] H. Tachikawa, "Quasi-Frobenius Rings and Generalizations", Lect. Notes Math. 351, Springer-Verlag, New York/Heidelberg/Berlin (1973).

[60] R. M. Thrall, Some generalizations of quasi-Frobenius algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.* 64 (1948), 173–183.

[61] Y. Utumi, On continuous regular rings, *Canad. Math. Bull.* 4 (1961), 63–69.

[62] J. Waschbusch, Self-duality of serial rings, *Comm. Algebra* 14 (1986), 581–590.

[63] C. Xi, On the finitistic conjecture, *Advances in Ring Theory, Proc. 4th China-Japan-Korea International Conference*, 282–294, World Scientific, Singapore, 2005.

[64] K. Yamagata, Handbook of algebras, *Handbook of Algebras, Vol.1 Edited by Hazewinkel, Elsevier Science B.V., 1996, 1841-1887*

[54] B. L. Osofsky, A generalization of quasi-Frobenius rings, J. Algebra 4 (1966), 373–387.

[55] R. S. Pierce, Associative Algebras, Graduate Texts in Mathematics, Springer (1982).

[56] G. E. Puninski, "Serial Rings", Kluwer Academic Publishers (2001).

[57] A. V. Roiter, Unboundedness of the dimensions of the indecomposable representations of an algebra which has infinitely many indecomposable representations, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 32 (1968), 1275–1282.

[58] D. Simson, Dualities and pure semisimple rings, in: Abelian groups, module theory, and topology (Padova, 1997), 381–388, Dekker, New York (1998).

[59] H. Tachikawa, Quasi-Frobenius rings and generalizations, Lecture Notes in Math. 351, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin (1973).

[60] R. M. Thrall, Some generalizations of quasi-Frobenius algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 64 (1948), 173–183.

[61] Y. Utumi, On ... rings, Canad. Math. Bull. 4 (1961), 63–69.

[62] J. Waschbüsch, Self-duality of serial rings, Comm. Algebra 14 (1986), 581–589.

[63] C. Xi, On the finitistic dimension conjecture, Advances in Ring Theory, Proc. 4th China-Japan-Korea International Conference, 282–294, World Scientific, Singapore, 2005.

[64] K. Yamagata, Frobenius algebras, Handbook of Algebra, Vol. 1, North-Holland, Amsterdam, 1996, 841–887.

BGP REFLECTION, TILTING MODULES AND TILTING COMPLEXES

JUN-ICHI MIYACHI

In this note, we review the transition from the notion of Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functors to the notion of tilting complexes and triangulated equivalences.

1. Quivers and Path Algebras

Throughout this note, k is a field.

Definition 1.1. A quiver $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, h, t)$ is an oriented graph, where Δ_0 is a set of vertices and Δ_1 is a set of arrows between vertices. We use $h : \Delta_1 \to \Delta_0$, $t : \Delta_1 \to \Delta_0$ the maps defined by $h(\alpha) = j$, $t(\alpha) = i$ when $\alpha : i \to j$ is arrow from the vertex i to the vertex j. We denote by $\bar{\Delta}$ the underlying graph, that is obtained from Δ by forgetting the orientation of the arrows. Moreover, we often write $\Delta = (\bar{\Delta}, \Omega)$when we give an orientation Ω to $\bar{\Delta}$. For $x \in \Delta_0$, let

$$x^{\geq} = \{\alpha \in \Delta_1 | h(\alpha) = x\} \quad x^{\leq} = \{\alpha \in \Delta_1 | t(\alpha) = x\}$$

A vertex x in Δ is called a sink (resp., a source) if $x^{\leq} = \phi$ (resp., $x^{\geq} = \phi$). A quiver $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, h, t)$ is called a locally finite quiver if $\# x^{\geq}, \# x^{\leq} < \infty$ for any $x \in \Delta_0$, and it is called a finite quiver if $\# \Delta_0, \# \Delta_1 < \infty$. A path $w = (b|\alpha_r, \ldots, \alpha_1|a) : a \rightsquigarrow b$ from the vertex a to the vertex b in the quiver Δ is a sequence of ordered arrows $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ such that $a = t(\alpha_1), h(\alpha_i) = t(\alpha_{i+1})$ $(1 \leq i \leq r-1), h(\alpha_r) = b$. In this case, a (resp., b) is called the tail $t(w)$ (resp., the head $h(w)$) of w, and r is called the length of a path w. For every vertex i, the path $e_a = (a||a)$ of length 0 is called the empty path. A non-empty path w is called an oriented cycle if $h(w) = t(w)$.

Definition 1.2. Let $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, h, t)$ be a finite quiver with $\Delta_0 = \{1, \cdots, n\}$. For $\mathbf{x} = {}^t(x_1, \cdots, x_n), \mathbf{y} = {}^t(y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geq 0}$, we define a bilinear form, a quadratic form and a symmetric bilinear form:

$$< \mathbf{x}, \mathbf{y} >_\Delta = \sum_{i \in \Delta_0} x_i y_i - \sum_{\alpha \in \Delta_1} x_{t(\alpha)} y_{h(\alpha)}$$

$$\chi_{\bar{\Delta}}(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \Delta_0} x_i^2 - \sum_{\alpha \in \Delta_1} x_{t(\alpha)} x_{h(\alpha)}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y})_{\bar{\Delta}} = \frac{1}{2}(\chi_{\bar{\Delta}}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \chi_{\bar{\Delta}}(\mathbf{x}) - \chi_{\bar{\Delta}}(\mathbf{y}))$$

Definition 1.3. Let $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, h, t)$ be a quiver. The k-linear path category $k\Delta$ of Δ is an additive category consisting of finite direct sums $\oplus_{a \in \Delta_0} a^{\oplus n_a}$ of vertices $a \in \Delta$ as objects, matrices of which entries are k-vectors spanned by all paths in Δ as morphisms, and compositions of morphisms are defined by compositions of paths

$$(c|\alpha_s, \dots, \alpha_{r+1}|b) \circ (b|\alpha_r, \dots, \alpha_1|a) = (c|\alpha_s, \dots, \alpha_1|a).$$

For example, the Hom-set $k\Delta(a,b)$ for vertices a, b is the k-vector space spanned by all paths $a \rightsquigarrow b$ from a to b:

$$k\Delta(a,b) =< w|\ w : a \rightsquigarrow b >_k$$

Similarly, the path k-algebra $k\Delta$ is the k-vector space spanned by the set of all paths in Δ together with the multiplication induced by compositions of paths.

We often simply write $\alpha_r \dots \alpha_1$ for $(b|\alpha_r, \dots, \alpha_1|a)$.

Remark 1.4. If $\#\Delta_0 < \infty$, then $\sum_{x \in \Delta_0} e_x = 1$ in the k-algebra $k\Delta$.

Example 1.5. For a quiver

$$\Delta :\ 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

we have

$$\begin{array}{lll} e_1 k\Delta e_1 =< e_1 >_k & e_2 k\Delta e_1 =< \alpha >_k & e_3 k\Delta e_1 =< \beta\alpha >_k \\ e_1 k\Delta e_2 = O & e_2 k\Delta e_2 =< e_2 >_k & e_3 k\Delta e_2 =< \beta >_k \\ e_1 k\Delta e_3 = O & e_2 k\Delta e_3 = O & e_3 k\Delta e_3 =< e_3 >_k \end{array}$$

$$\chi_{\bar{\Delta}}(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3$$

Then we have

$$k\Delta \cong \begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ k & k & 0 \\ k & k & k \end{bmatrix}$$

Example 1.6. For a quiver

$$\Delta :\ 1 \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} 2$$

we have

$$\begin{array}{ll} e_1 k\Delta e_1 =< e_1 >_k & e_2 k\Delta e_1 =< \alpha, \beta >_k \\ e_1 k\Delta e_2 = 0 & e_2 k\Delta e_2 =< e_2 >_k \end{array}$$

$$\chi_{\bar{\Delta}}(\mathrm{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$$

Then we have

$$k\Delta \cong \begin{bmatrix} k & 0 \\ k^2 & k \end{bmatrix}$$

Example 1.7. For a quiver

$$\Delta :\ 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \circlearrowright \beta$$

we have

$$\begin{array}{ll} e_1 k\Delta e_1 =< e_1 >_k & e_2 k\Delta e_1 =< \alpha, \beta^n\alpha|\ n \in \mathbb{N} >_k \\ e_1 k\Delta e_2 = 0 & e_2 k\Delta e_2 =< e_2, \beta^n|\ n \in \mathbb{N} >_k \end{array}$$

$$\chi_{\bar{\Delta}}(\mathrm{x}) = x_1^2 - x_1x_2$$

Then we have

$$k\Delta \cong \begin{bmatrix} k & 0 \\ k[x] & k[x] \end{bmatrix}$$

Definition 2.1. Given a quiver $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, h, t)$ $(= (\bar{\Delta}, \Omega))$, a representation $M = (M(i); M(\alpha))$ of Δ over a field k is a family $(M(i))_{i \in \Delta_0}$ of k-vector spaces together with a family $(M(\alpha) : M(i) \to M(j))_{i \xrightarrow{\alpha} j \in \Delta_1}$ of k-linear maps. A representation $M = (M(i); M(\alpha))$ is called a (locally) finite dimensional representation if $M(i)$ is a finite dimensional k-vector space for every $i \in \Delta_0$. For a finite dimensional representation M, the dimension vector of M is $\underline{\dim} M = (\dim_k M(i))_{i \in \Delta_0}$.

For $(M(i); M(\alpha)), (N(i); N(\alpha))$, a morphism $f : (M(i); M(\alpha)) \to (N(i); N(\alpha))$ is a family $(f_i : M(i) \to N(i))_{i \in \Delta_0}$ of k-linear maps satisfying that we have a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} M(i) \arrow[r, "M(\alpha)"] \arrow[d, "f_i"'] & M(j) \arrow[d, "f_j"] \\ N(i) \arrow[r, "N(\alpha)"] & N(j) \end{tikzcd}$$

for any $i \xrightarrow{\alpha} j \in \Delta_1$.

We denote by $\mathsf{Rep}_k \Delta$ or $\mathsf{Rep}_k(\bar{\Delta}, \Omega)$ (resp., $\mathsf{rep}_k \Delta$ or $\mathsf{rep}_k(\bar{\Delta}, \Omega)$) the category of representations (resp., finite dimensional representations) of Δ over k.

Remark 2.2. It is easy to see that $\mathsf{Rep}_k \Delta$ (resp., $\mathsf{rep}_k \Delta$) is equivalent to the category $\mathsf{Func}_k(k\Delta, \mathsf{Mod}\, k)$ (resp., $\mathsf{Func}_k(k\Delta, \mathsf{mod}\, k)$) of k-linear additive functors from $k\Delta$ to the category of k-vector spaces (resp., finite dimensional k-vector spaces). Therefore, $\mathsf{Func}_k(k\Delta, \mathsf{Mod}\, k)$ is an abelian category with direct sums and products. Let $h^a : k\Delta \to \mathsf{Func}_k(k\Delta, \mathsf{Mod}\, k)$ (resp., $h_a : k\Delta \to \mathsf{Func}_k(k\Delta^{op}, \mathsf{Mod}\, k)$) be the functor defined by $h^a(x) = k\Delta(a, x)$ (resp., $h_a(x) = k\Delta(x, a)$) for any $x \in \Delta_0$. We often identify $\mathsf{Rep}_k \Delta$ with $\mathsf{Func}_k(k\Delta, \mathsf{Mod}\, k)$. We often write $\mathsf{Mod}\, k\Delta = \mathsf{Func}_k(k\Delta, \mathsf{Mod}\, k)$.

Definition 2.3. Let $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, h, t)$ $(= (\bar{\Delta}, \Omega))$ be a quiver a a vertex. We define the representation $(S_a, S_a(\alpha))$ by

$$S_a(x) = \begin{cases} k \text{ if } x = a \\ 0 \text{ if } x \neq a \end{cases} \qquad S_a(\alpha) = 0$$

We define the representation $(P_a(i), P_a(\alpha))$ by $k\Delta(a, -) \in \mathsf{Func}_k(k\Delta, \mathsf{Mod}\, k)$. In other words, for any vertex x $P_a(x)$ is the k-vector space spanned by paths from a to x: $P_a(x) = k\Delta(a, x) = \langle w |\ w : a \rightsquigarrow x \rangle_k$ and $P_a(\alpha)$ is the k-linear map defined by $P_a(\alpha)(w) = \alpha w$ for any arrow $\alpha : x \to y$ and any path $w : z \rightsquigarrow x$. Moreover, we define the representation $(Q_a(i), Q_a(\alpha))$ by $\mathrm{Hom}_k(k\Delta(-, a), k) : k\Delta \to \mathsf{Func}_k(k\Delta, \mathsf{Mod}\, k)$.

Lemma 2.4 (Yoneda's Lemma). *Let $a, b \in k\Delta$ and $M \in \mathsf{Func}_k(k\Delta, \mathsf{Mod}\, k)$. then the following hold.*

1. *We have the bijection $\theta_- : M(a) \to \mathrm{Hom}_{k\Delta}(k\Delta(a, -), M)$, where θ_- is defined by $(\theta_\lambda)(b)(f) = M(f)(x)$ for $\lambda \in M(a)$, $f \in k\Delta(a, b)$.*
2. *We have the bijection $\theta_- : k\Delta(b, a) \to \mathrm{Hom}_{k\Delta}(k\Delta(a, -), k\Delta(b, -))$.*

Example 2.5. For a quiver

$$\Delta: \ 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$$

$k\Delta = < e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta >_k$. A representation M of Δ over k is the following

$$M(1) \xrightarrow{M(\alpha)} M(2) \xleftarrow{M(\beta)} M(3)$$

By the standard technique of linear algebra, all indecomposable representations are up to isomorphisms the following

$$\begin{array}{lll} M_1 = P_2: \ 0 \to k \leftarrow 0 & M_2 = P_1: \ k \to k \leftarrow 0 & M_3 = P_3: \ 0 \to k \leftarrow k \\ M_4 = Q_2: \ k \to k \leftarrow k & M_5 = Q_3: \ 0 \to 0 \leftarrow k & M_6 = Q_1: \ k \to 0 \leftarrow 0 \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
 & M_2 \arrow[dr] & & M_5 \\
M_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_4 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & M_3 \arrow[ur] & & M_6
\end{tikzcd}$$

Example 2.6. For a quiver

$$\Delta': \ 1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3$$

$k\Delta' = < e_1, e_2, e_3, \alpha, \beta >_k$. A representation M of Δ' over k is the following

$$N(1) \xleftarrow{N(\alpha)} N(2) \xrightarrow{N(\beta)} N(3)$$

By the standard technique of linear algebra, all indecomposable representations are up to isomorphisms the following

$$\begin{array}{lll} N_1 = Q_2: \ 0 \leftarrow k \to 0 & N_2 = P_1: \ k \leftarrow 0 \to 0 & N_3 = P_3: \ 0 \leftarrow 0 \to k \\ N_4 = P_2: \ k \leftarrow k \to k & N_5 = Q_3: \ 0 \leftarrow k \to k & N_6 = Q_1: \ k \leftarrow k \to 0 \end{array}$$

$$\begin{tikzcd}
N_2 \arrow[dr] & & N_5 \arrow[dr] & \\
 & N_4 \arrow[ur] \arrow[dr] & & N_1 \\
N_3 \arrow[ur] & & N_6 \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Definition 2.7. Let $\Delta = (\bar{\Delta}, \Omega)$ be a locally finite quiver, and a a sink (resp., a source) of $(\bar{\Delta}, \Omega)$. We define the new orientation $\sigma_a \Omega$ by reversing all arrows which are connected to the vertex a. We call σ_a the reflection. For a sink a in a quiver $(\bar{\Delta}, \Omega)$, we define the Bernstein-Gelfand-Ponomarev reflection functor (the BGP reflection functor) σ_a^+ : $\mathrm{Rep}_k(\bar{\Delta}, \Omega) \to \mathrm{Rep}_k(\bar{\Delta}, \sigma_a \Omega)$ as follows. For a k-representation $M = (M(i); M(\alpha))$ of $(\bar{\Delta}, \Omega)$, let

$$0 \to \sigma_a^+ M(a) \xrightarrow{(\beta_\alpha)} \oplus_{\alpha \in a^{\geq}} M(t(\alpha)) \xrightarrow{\sum_\alpha M(\alpha)} M(a)$$

be the canonical exact sequence and

$$\sigma_a^+M(x) = \begin{cases} \sigma_a^+M(a) & \text{if} \quad x = a \\ M(x) & \text{if} \quad x \neq a \end{cases} \qquad \sigma_a^+M(\alpha) = \begin{cases} \beta_\alpha & \text{if} \quad \alpha \in a^{\geq} \\ \alpha & \text{if} \quad \alpha \notin a^{\geq} \end{cases}$$

Then $\sigma_a^+M = (\sigma_a^+M(i); \sigma_a^+M(\alpha))$ is a representation of $(\bar{\Delta}, \sigma_a\Omega)$. Similarly, for a source b in a quiver $(\bar{\Delta}, \Omega)$, the BGP reflection functor $\sigma_b^- : \mathsf{Rep}_k(\bar{\Delta}, \Omega) \to \mathsf{Rep}_k(\bar{\Delta}, \sigma_b\Omega)$ is defined.

Theorem 2.8. *Let $\Delta = (\bar{\Delta}, \Omega)$ be a locally finite quiver, and a a sink of $(\bar{\Delta}, \Omega)$. Let $\mathcal{T}_a$ (resp., $\mathcal{Y}_a$) be the subcategory of $\mathsf{Rep}_k(\bar{\Delta}, \Omega)$ (resp., $\mathsf{Rep}_k(\bar{\Delta}, \sigma_a\Omega)$) consisting representations which don't have S_a as a direct summand. Then the BGP reflection functors $\sigma_a^+ : \mathsf{Rep}_k(\bar{\Delta}, \Omega) \to \mathsf{Rep}_k(\bar{\Delta}, \sigma_a\Omega)$ and $\sigma_a^- : \mathsf{Rep}_k(\bar{\Delta}, \sigma_a\Omega) \to \mathsf{Rep}_k(\bar{\Delta}, \Omega)$ induce the equivalence between $\mathcal{T}_a$ and $\mathcal{Y}_a$. A similar result holds for $\sigma_a^+ : \mathsf{rep}_k(\bar{\Delta}, \Omega) \to \mathsf{rep}_k(\bar{\Delta}, \sigma_a\Omega)$ and $\sigma_a^- : \mathsf{rep}_k(\bar{\Delta}, \sigma_a\Omega) \to \mathsf{rep}_k(\bar{\Delta}, \Omega)$.*

Proof. By the construction of BGP reflection, we have the canonical functorial morphisms $\sigma_a^- \circ \sigma_a^+ \to 1_{\mathsf{Rep}_k(\bar{\Delta},\Omega)}$ and $1_{\mathsf{Rep}_k(\bar{\Delta},\sigma_a\Omega)} \to \sigma_a^+ \circ \sigma_a^-$. For a representation $M = (M(i); M(\alpha))$ of $(\bar{\Delta}, \Omega)$, it is easy to see that $M \in \mathcal{T}_a$ if and only if $\sum_{\alpha \in a^{\geq}} \alpha$ is an epimorphism. Similarly, $N \in \mathcal{Y}_a$ if and only if $(\alpha)_{\alpha \in a^{\leq}}$ is a monomorphism for a representation $N = (N(i); N(\alpha))$ of $(\bar{\Delta}, \sigma_a\Omega)$. For $M \in \mathcal{T}_a$, we have a short exact sequence

$$0 \to \sigma_a^+M(a) \xrightarrow{(\sigma_a^+M(\alpha))_\alpha} \oplus_{\alpha \in a^{\geq}} M(t(\alpha)) \xrightarrow{\sum_\alpha M(\alpha)} M(a) \to 0$$

Then we have $\mathrm{Im}(\sigma_a^+|_{\mathcal{T}_a}) \subset \mathcal{Y}_a$, and $1_{\mathsf{Rep}_k(\bar{\Delta},\Omega)} \to \sigma_a^- \circ \sigma_a^+|_{\mathcal{T}_a}$ is an isomorphism. Similarly, $\mathrm{Im}(\sigma_a^-|_{\mathcal{Y}_a}) \subset \mathcal{T}_a$, and $\sigma_a^+ \circ \sigma_a^-|_{\mathcal{Y}_a} \to 1_{\mathsf{Rep}_k(\bar{\Delta},\sigma_a\Omega)}$ is an isomorphism. □

Definition 2.9. Let $\bar{\Delta}$ be underlying graph of a quiver $\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, h, t)$ with $\Delta_0 = \{1, \cdots, n\}$, and $(-,-)_{\bar{\Delta}}$ the associated symmetric bilinear form. For a vertex a of $\bar{\Delta}$ and $\mathrm{x} \in \mathbb{Z}^n$, we define the following reflection of $\mathbb{Z}^n$

$$\sigma_a(\mathrm{x}) = \mathrm{x} - 2(\mathrm{x}, \mathrm{e}_a)_{\bar{\Delta}}\mathrm{e}_a$$

Here e_a is the a-th fundamental vector. For $\{a_1, \cdots, a_n\} = \{1, \cdots, n\}$, $c = \sigma_{a_1}\sigma_{a_2}\cdots\sigma_{a_n}$ is called a Coxeter transformation. Moreover, we define the group generated by reflections

$$\mathrm{W}_{\bar{\Delta}} = \{\sigma_{a_1}\cdots\sigma_{a_r} | r \geq 0,\ \sigma_{a_1}, \cdots, \sigma_{a_r} \text{ are reflections}\}$$

For $\mathrm{x} \in \mathbb{Z}^n$, x is called positive $\mathrm{x} > 0$ if $\mathrm{x} \neq 0$ and $x_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n)$, x is called a root if $\chi_{\bar{\Delta}}(\mathrm{x}) = 1$, and x is called a radical vector if $\chi_{\bar{\Delta}}(\mathrm{x}) = 0$.
In the case that $\bar{\Delta}$ is Dynkin, $\mathrm{W}_{\bar{\Delta}}$ is called a Weyl group.

Definition 2.10. Let $\Delta = (\bar{\Delta}, \Omega)$ be a quiver with. A sequence of vertices $\{a_1, \cdots, a_n\}$ is called an absorbing sequence (resp., diverging sequence) for $(\bar{\Delta}, \Omega)$ if a_{i+1} is a sink (resp., source) of $(\bar{\Delta}, \sigma_{a_i}\cdots\sigma_{a_1}\Omega)$ for any $0 \leq i < n$. For a finite quiver Δ which does not contain oriented cycles, we have both an absorbing sequence and a diverging sequence which is coincides with the set of vertices.

Corollary 2.11. *Let $\Delta = (\bar{\Delta}, \Omega)$ be a finite quiver, a a sink and b a source of $(\bar{\Delta}, \Omega)$, and M an indecomposable representation in $\mathsf{rep}_k(\bar{\Delta}, \Omega)$.*

(1) *If $\sigma_a^+M = 0$, then $M \cong S_a$.*

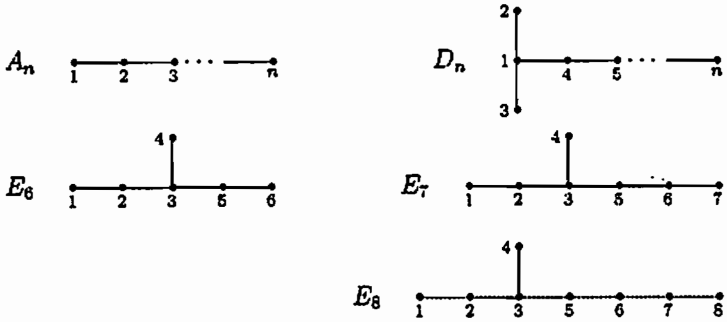


FIGURE 1. Dynkin graphs

(2) *If* $\sigma_a^+ M \neq 0$, *then* $\underline{\dim}\sigma_a^+ M = \sigma_a(\underline{\dim} M)$ *and* $\sigma_a^- \sigma_a^+ M \cong M$.
(3) *If* $\sigma_b^- M = 0$, *then* $M \cong S_b$.
(4) *If* $\sigma_b^- M \neq 0$, *then* $\underline{\dim}\sigma_b^- M = \sigma_b(\underline{\dim} M)$ *and* $\sigma_b^+ \sigma_b^- M \cong M$.

Example 2.12. In Examples 2.5 and 2.6, $\Delta' = (\bar{\Delta}, \sigma_2 \Omega)$, and we have the BGP reflections $\sigma_2^+ : \mathsf{rep}_k \Delta \to \mathsf{rep}_k \Delta'$ and $\sigma_2^- : \mathsf{rep}_k \Delta' \to \mathsf{rep}_k \Delta$ such that $\sigma_2^+ M_1 = 0$, $\sigma_2^- N_1 = 0$, $\sigma_2^+ M_i \cong N_i$ and $\sigma_2^- N_i \cong M_i$ $(2 \leq i \leq 6)$.

Theorem 2.13 (Root System and Weyl Group). *Let* $\Delta = (\bar{\Delta}, \Omega)$ *be a quiver such that* $\bar{\Delta}$ *is a Dynkin diagram. Then the following hold.*
(1) *The Weyl group* $W_{\bar{\Delta}}$ *is a finite group.*
(2) *There is no radical vector except the zero vector* $\mathbf{0}$.
(3) *For any Coxeter transformation* c, $c\mathrm{v} = \mathrm{v}$ *implies* $\mathrm{v} = \mathbf{0}$.

Corollary 2.14. *Let* $\Delta = (\bar{\Delta}, \Omega)$ *be a quiver such that* $\bar{\Delta}$ *is a Dynkin diagram. For any indecomposable representation* M $\mathsf{rep}_k(\bar{\Delta}, \Omega)$, *there is a absorbing (resp,m diverging) sequence* $\{a_1, \cdots, a_s\}$ *and some vertex* a *such that* $M \cong \sigma_{a_s}^+ \cdots \sigma_{a_1}^+ S_a$ *(resp.,* $M \cong \sigma_{a_s}^- \cdots \sigma_{a_1}^- S_a$*).*

Proof. Let $\Delta_0 = \{1, \cdots, n\}$, $\{a_1, \cdots, a_n\}$ an absorbing (resp., diverging) sequence with $\{a_1, \cdots, a_n\} = \{1, \cdots, n\}$, and $c = \sigma_{a_n} \cdots \sigma_{a_1}$. Since $W_{\bar{\Delta}}$ is a finite group, there is an integer r such that $c^r = 1$. Let $\mathrm{v} = \sum_{i=1}^{r} c^i \underline{\dim} M$, then $c\mathrm{v} = \mathrm{v}$. By Theorem 2.13 (3) $\mathrm{v} = \mathbf{0}$, and therefore $c^i \underline{\dim} M \not> \mathbf{0}$ for some i. According to Corollary 2.11, we have the statement. $\square$

Definition 2.15. Let $\Delta = (\bar{\Delta}, \Omega)$ be a finite connected quiver, and a a sink of $(\bar{\Delta}, \Omega)$. Then we have the canonical exact sequence in $\mathsf{Rep}_k(\bar{\Delta}, \Omega)$:

$$0 \to P_a \xrightarrow{(h^\alpha)_\alpha} \bigoplus_{\alpha \in a^{\succeq}} P_{t(\alpha)} \xrightarrow{\sum_\alpha \sigma(\alpha)} T_a \to 0$$

We define the representation

$$T = T_a \oplus \bigoplus_{b \neq a} P_b$$

Proposition 2.16. *Let $\Delta = (\bar{\Delta}, \Omega)$ be a finite quiver, and a a sink of $(\bar{\Delta}, \Omega)$. By identifying* $\mathsf{Rep}_k(\bar{\Delta}, \Omega)$ *with* $\mathsf{Mod}\, k\Delta$, *then the following hold.*

(1) *The functor σ_a^+ is isomorphic to the functor* $\mathrm{Hom}_{k\Delta}(T, -) : \mathsf{Mod}\, k(\bar{\Delta}, \Omega) \to \mathsf{Mod}\, k(\bar{\Delta}, \sigma_a\Omega)$.

(2) $\mathcal{T}_a = \{M \in \mathsf{Rep}_k(\bar{\Delta}, \Omega) | \mathrm{Ext}^1_{k\Delta}(T, M) = 0\}$

Proof. (1) By Yoneda's lemma 2.4 we have the following isomorphism between exact sequences

$$\begin{tikzcd}
\sigma_a^+ M(a) \arrow[r, "(\sigma_a^+ M(\alpha))_\alpha"] \arrow[d, "\wr"] & \oplus_{\alpha \in a^{\geq}} M(t(\alpha)) \arrow[r, "\sum_\alpha M(\alpha)"] \arrow[d, "\wr"] & M(a) \arrow[d, "\wr"] \\
\mathrm{Hom}(T_a, M) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(\sum_\alpha \sigma(\alpha), M)"] & \mathrm{Hom}(\oplus_{\alpha \in a^{\geq}} P_{t(\alpha)}, M) \arrow[r, "\mathrm{Hom}((h^\alpha)_\alpha, M)"] & \mathrm{Hom}(P_a, M)
\end{tikzcd}$$

(2) Since $\mathcal{T}_a$ is the subcategory consisting representations which don't have S_a as a direct summand, $M \in \mathcal{T}_a$ if and only if $\sum_\alpha M(\alpha) : \oplus_{\alpha \in a^{\geq}} M(t(\alpha)) \to M(a)$ is an epimorphism if and only if $\mathrm{Hom}((h^\alpha)_\alpha, M)$ is an epimorphism if and only if $\mathrm{Ext}^1(T, M) \cong \mathrm{Ext}^1(T_a, M) = 0$. $\square$

Definition 2.17. Let $\mathcal{C}$ be an additive category. For $M \in \mathcal{C}$, We define $\mathsf{Add}\, M$ (resp., $\mathsf{add}\, M$) the full subcategory of $\mathcal{C}$ consisting of objects which are direct summands of coproducts (resp., finite coproducts) of copies of M.

Proposition 2.18. *Let $\Delta = (\bar{\Delta}, \Omega)$ be a finite quiver, and a a sink of $(\bar{\Delta}, \Omega)$, T a representation of Definition 2.15. Then the following hold.*

(1) $\mathrm{pdim}_{k\Delta} T \leq 1$.

(2) $\mathrm{Ext}^1_{k\Delta}(T, T) = 0$.

(3) *We have an exact sequence* $0 \to \bigoplus_{x \in \Delta_0} P_x \to T^0 \to T^1 \to 0$ *with* $T^0, T^1 \in \mathsf{add}\, T$.

Proof. By the definition of T, we have the exact sequence

$$0 \to \bigoplus_{x \in \Delta_0} P_x \to (\bigoplus_{x \in \Delta_0 \setminus \{a\}} P_x) \oplus (\bigoplus_{\alpha \in a^{\geq}} P_{t(\alpha)}) \to T_a \to 0$$

Then the statements (1) and (3) hold. If T_a has P_a as a direct summand, then so has $\bigoplus_{\alpha \in a^{\geq}} P_{t(\alpha)}$. This contradicts in a being a sink. Therefore T_a does not have P_a as a direct summand. By Proposition 2.16, we have $\mathrm{Ext}^1(T_a, T_a) = 0$. Similarly, $\mathrm{Ext}^1(T_a, P_b) = 0$ for $b \neq a$ because P_b does not have P_a as a direct summand. $\square$

3. Tilting Modules

For a ring R, we denote by $\mathsf{Mod}\, R^{\mathrm{op}}$ (resp., $\mathsf{mod}\, R^{\mathrm{op}}$) the category of right (resp., finitely presented right) R-modules, and denote by $\mathsf{Proj}\, R^{\mathrm{op}}$ (resp., $\mathsf{proj}\, R^{\mathrm{op}}$, $\mathsf{Inj}\, R^{\mathrm{op}}$) the category of projective (resp., finitely projective, injective) R-modules.

Definition 3.1. Let R be a ring. A right R-module T is called a (classical) tilting module provided that the following hold.

(1) There is an exact sequence $0 \to P_1 \to P_0 \to T \to 0$ with $P_1, P_0 \in \operatorname{proj} R^{\mathrm{op}}$.
(2) $\operatorname{Ext}^1_R(T,T) = 0$.
(3) There is an exact sequence $0 \to R \to T^0 \to T^1 \to 0$ with $T^0, T^1 \in \operatorname{add} T$.

Lemma 3.2. *Let R be a ring, X a right R-module with $S = \operatorname{End}_R(X)$, and $X' \in \operatorname{add} X$.*

(1) $\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X',Y) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Hom}_R(X,X'), \operatorname{Hom}_R(X,Y))$
$(f \mapsto \operatorname{Hom}_R(X,f))$ *for all* $Y \in \operatorname{Mod} R^{\mathrm{op}}$.
(2) $\operatorname{Hom}_R(X,X') \otimes_S X \xrightarrow{\sim} X' \quad (f \otimes x \mapsto f(x))$
(3) $X' \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_S(\operatorname{Hom}_R(X',X),X) \quad (x' \mapsto (f \mapsto f(x')))$

Proof. Let $q_1, \cdots q_n : X' \to X$ and $p_1, \cdots, p_n : X \to X'$ be morphisms such that $\sum_{i=1}^n p_i q_i = 1$. Then the following are the inverse of the above:
$\operatorname{Hom}_S(\operatorname{Hom}_R(X,X'), \operatorname{Hom}_R(X,Y)) \to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X',Y) (\phi \mapsto \sum_{i=1}^n \phi(p_i) q_i)$
$X' \to \operatorname{Hom}_R(X,X') \otimes_S X \quad (x' \mapsto \sum_{i=1}^n p_i \otimes q_i(x'))$
$\operatorname{Hom}_S(\operatorname{Hom}_R(X',X),X) \to X' \quad (\psi \mapsto \sum_{i=1}^n p_i \psi(q_i))$ □

Lemma 3.3. *Let A be a finite dimensional k-algebra, $M, N \in \operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$. Then there exists a morphism $f : M^{\oplus n} \to N$ such that $\operatorname{Hom}(M,f) : \operatorname{Hom}_A(M, M^{\oplus n}) \to \operatorname{Hom}_A(M,N)$ is surjective.*

Proof. Since $\operatorname{Hom}_A(M,N)$ is a finite dimensional k-vector space, we can take a k-basis $f_1, \cdots, f_n$ of $\operatorname{Hom}_A(M,N)$, and then $f = (f_1, \cdots, f_n) : M^{\oplus n} \to N$. □

Definition 3.4. Let A be a finite dimensional k-algebra, T_A a tilting right A-module. We define a pair of full subcategories of $\operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$

$$\mathcal{T}(T) = \{X \in \operatorname{mod} A^{\mathrm{op}} : \operatorname{Ext}^1_A(T,X) = 0\},$$
$$\mathcal{F}(T) = \{X \in \operatorname{mod} A^{\mathrm{op}} : \operatorname{Hom}_A(T,X) = 0\}.$$

For any $X \in \operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$, we define a subobject of X

$$t_T(X) = \sum\nolimits_{f \in \operatorname{Hom}_A(T,X)} \operatorname{Im} f$$

and an exact sequence in $\operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$

$$(e_X) : 0 \to t_T(X) \xrightarrow{j_X} X \to f_T(X) \to 0.$$

Definition 3.5. A pair $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ of full subcategories in an abelian category $\mathcal{A}$ is called a torsion pair of $\mathcal{A}$ provided that the following conditions are satisfied:

(i) $\mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \{0\}$;
(ii) $\mathcal{T}$ is closed under factor objects;
(iii) $\mathcal{F}$ is closed under subobjects;
(iv) for any object X of $\mathcal{A}$, there exists an exact sequence $0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ in $\mathcal{A}$ with $X' \in \mathcal{T}$ and $X'' \in \mathcal{F}$.

Proposition 3.6. *Let A be a finite dimensional k-algebra, T_A a tilting right A-module. Then $(\mathcal{T}(T), \mathcal{F}(T))$ is a torsion pair of $\operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$ such that $\mathcal{T}(T)$ is the category of finitely generated right A-modules which are generated by T.*

Proof. It is clear that $\mathcal{F}(T)$ is closed under submodules. Since $\mathrm{Ext}^2_A(T,-)=0$, $\mathcal{T}(T)$ is closed under factor modules. For any $X \in \operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$, we have an exact sequence

$$0 \to \mathrm{Hom}(T, t_T(X)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(T,X) \to \mathrm{Hom}(T, f_T(X)) \to \mathrm{Ext}^1(T, t_T X)$$

Since $\mathrm{Ext}^1(T,tX)=0$, we have $\mathrm{Hom}(T, f_T(X))=0$, and hence $t_T(X) \in \mathcal{T}(T)$, $f_T(X) \in \mathcal{F}(T)$. For any $Y \in \operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$, we have an exact sequence

$$0 \to \mathrm{Hom}(T^1,Y) \to \mathrm{Hom}(T^0,Y) \to \mathrm{Hom}(A,Y) \to \mathrm{Ext}^1(T^1,Y)$$

If $Y \in \mathcal{T}(T)\cap\mathcal{F}(T)$, then $\mathrm{Hom}(T^0,Y)=\mathrm{Ext}^1(T^1,Y)=0$. Therefore $Y \cong \mathrm{Hom}(A,Y)=0$. □

Proposition 3.7. *Let A be a finite dimensional k-algebra, T_A a tilting right A-module with $B=\mathrm{End}_A(T)$. Then the following hold for $M,N \in \mathcal{T}(T)$.*

(1) *We have an exact sequence $\cdots \to T_1 \to T_0 \to M \to 0$ ($T_i \in \operatorname{add} T$) such that $\cdots \to \mathrm{Hom}_A(T,T_1) \to \mathrm{Hom}_A(T,T_0)$ is a projective resolution of $\mathrm{Hom}_A(T,M)$.*
(2) $\mathrm{Tor}_1^B(\mathrm{Hom}_A(T,M),T)=0$.
(3) $\mathrm{Hom}_A(T,M)\otimes_B T \cong M$.
(4) $\mathrm{Ext}^i_A(M,N) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^i_B(\mathrm{Hom}_A(T,M),\mathrm{Hom}_A(T,N))$ *for any i.*

Proof. By Lemma 3.3, We have exact sequences $0 \to M_{i+1} \to T_i \to M_i \to 0$ such that $M_0=M$, $T_i \in \operatorname{add} T$ and $M_i \in \mathcal{T}(T)$ for any i. Then we have exact sequences

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(T,M_{i+1}) \to \mathrm{Hom}_A(T,T_i) \to \mathrm{Hom}_A(T,M_i) \to 0$$

Therefore, the resolution $T_\bullet \to M$ satisfies that $\mathrm{Hom}_A(T,T_\bullet) \to \mathrm{Hom}_A(T,M)$ is a projective resolution. By Lemma 3.2 we have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(T,T_\bullet)\otimes_B T & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(T,M)\otimes_B T \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ T_\bullet & \longrightarrow & M \end{array}$$

For $N \in \mathcal{T}(T)$, we have an exact sequence and an isomorphism

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(M_i,N) \to \mathrm{Hom}_A(T_i,N) \to \mathrm{Hom}_A(M_{i+1},N) \to \mathrm{Ext}^1_A(M_i,N) \to 0$$
$$\mathrm{Ext}^{j+1}_A(M_{i+1},N) \cong \mathrm{Ext}^{j+2}_A(M_i,N)$$

for any $i,j \ge 0$. By Lemma 3.2 we have

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^i_B(\mathrm{Hom}_A(T,M),\mathrm{Hom}_A(T,N)) &\cong \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(T,T_\bullet),\mathrm{Hom}_A(T,N)) \\ &\cong \mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}_A(T_\bullet,N)) \\ &\cong \begin{cases}\mathrm{Hom}_A(M,N) & (i=0)\\ \mathrm{Ext}^1_A(M_i,N)\cong\mathrm{Ext}^i_A(M,N) & (i>0)\end{cases}\end{aligned}$$

□

Proposition 3.8. *Let A be a finite dimensional k-algebra, T_A a tilting right A-module with $B=\mathrm{End}_A(T)$. Then the following hold for $M \in \operatorname{mod} A^{\mathrm{op}}$ and $N \in \operatorname{mod} B^{\mathrm{op}}$.*

(1) $0 \to \mathrm{Hom}_A(T, M) \otimes_B T \xrightarrow{\epsilon_M} M \to \mathrm{Tor}_1^B(\mathrm{Ext}_A^1(T, M), T) \to 0$
$\mathrm{Ext}_A^1(T, M) \otimes_B T = 0$
(2) $0 \to \mathrm{Ext}_A^1(T, \mathrm{Tor}_1^B(N, T)) \to N \to \mathrm{Hom}_A(T, N \otimes_B T) \to 0$
$\mathrm{Hom}_A(T, \mathrm{Tor}_1^B(N, T)) = 0$

Proof. By applying $\mathrm{Hom}_A(-, T)$ to the exact sequence $0 \to A \to T^0 \to T^1 \to 0$, we have a projective resolution of ${}_BT$: $0 \to Q_1 \to Q_0 \to T \to 0$.
(1) Let $M \to I^\bullet$ be an injective resolution and $F := \mathrm{Hom}_A(T, -)$, then by Proposition 3.7 we have the exact sequence

$$0 \to F(I^\bullet) \otimes_B Q_1 \to F(I^\bullet) \otimes_B Q_0 \to F(I^\bullet) \otimes_B T \to 0$$

By Proposition 3.7 we have $F(I^\bullet) \otimes_B T \cong I^\bullet$. Therefore we have the exact sequence

$$0 \to F(M) \otimes_B Q_1 \to F(M) \otimes_B Q_0 \to M \to \mathrm{Ext}_A^1(T, M) \otimes_B Q_1$$
$$\to \mathrm{Ext}_A^1(T, M) \otimes_B Q_0 \to 0$$

(2) Let $L_\bullet \to N$ be a projective resolution. Applying $\mathrm{Hom}(-, L_\bullet \otimes_B T)$ to the projective resolution $0 \to P_1 \to P_0 \to T \to$, we have the exact sequence

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(T, L_\bullet \otimes_B T) \to \mathrm{Hom}_A(P_0, L_\bullet \otimes_B T) \to \mathrm{Hom}_A(P_1, L_\bullet \otimes_B T) \to 0$$

Since $\mathrm{Hom}_A(T, L_\bullet \otimes_B T) \cong L_\bullet$, we have the exact sequence

$$0 \to \mathrm{Hom}_A(P_0, \mathrm{Tor}_1^B(N, T)) \to \mathrm{Hom}_A(P_1, \mathrm{Tor}_1^B(N, T)) \to N$$
$$\to \mathrm{Hom}_A(P_0, L_\bullet \otimes_B T) \to \mathrm{Hom}_A(P_1, L_\bullet \otimes_B T) \to 0$$

□

For a finite dimensional k-algebra A, let $S_1, \cdots S_n$ be a complete set of simple right A-modules. Let $\mathrm{F}(A)$ be the free abelian group generated by isomorphism classes $[X]$ of right A-modules $X \in \mathrm{mod}\, A^{\mathrm{op}}$, $\mathrm{R}(A)$ the subgroup of $\mathrm{F}(A)$ generated by $[Y] - [X] - [Z]$ for all exact sequence $0 \to X \to Y \to Z \to 0$, and the Grothendieck group of A is $\mathrm{K}_0(A) = \mathrm{F}(A)/\mathrm{R}(A)$. Then $\mathrm{K}_0(A)$ is generated by $S_1, \cdots S_n$, and hence $\mathrm{K}_0(A) \cong \mathbb{Z}^n$. For $M \in \mathrm{mod}\, A^{\mathrm{op}}$, we define $\underline{\dim} M := (\#S_i\text{-composition factor of M})_i$.

Theorem 3.9. *Let A be a finite dimensional k-algebra, T_A a tilting right A-module with $B = \mathrm{End}_A(T)$. Let $F = \mathrm{Hom}_A(T, -), F' = \mathrm{Ext}_A^1(T, -), G = - \otimes_B T, G' = \mathrm{Tor}_1^B(-, T)$, and $\mathcal{X}(T) = \mathrm{Ker}\, G$, $\mathcal{Y}(T) = \mathrm{Ker}\, G'$ Then the following hold.*

(1) *$(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ is a torsion pair of* $\mathrm{mod}\, B^{\mathrm{op}}$.
(2) *F and G induce the equivalence between $\mathcal{T}(T)$ and $\mathcal{Y}(T)$.*
(3) *F' and G' induce the equivalence between $\mathcal{F}(T)$ and $\mathcal{X}(T)$.*
(4) *$FG' = F'G = 0$ and $GF' = G'F = 0$.*
(5) *${}_BT$ is a tilting left B-module with $A^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{End}_B(T)$.*
(6) *Let $f : \mathrm{K}_0(A) \to \mathrm{K}_0(B)$ be a function defined by $f(\underline{\dim} M) = \underline{\dim} F(M) - \underline{\dim} F'(M)$ for $M \in \mathrm{mod}\, A^{\mathrm{op}}$, then f is a group isomorphism.*

Proof. (4) $G(N) \in \mathcal{T}$ implies $F'G = 0$. By Proposition 3.7 $G'F = 0$. By Proposition 3.8 $FG' = 0$ and $GF' = 0$.
(1) By Proposition 3.8, $N \in \mathcal{X}(T) \cap \mathcal{Y}(T)$ implies $N = 0$. By (4) and Proposition 3.8 $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ is a torsion pair of $\mathrm{mod}\, B^{\mathrm{op}}$

(2), (3) By Proposition 3.8.

(5) Applying $(-)^{**} = \mathrm{Hom}_B(\mathrm{Hom}_A(-,T),T)$ to $0 \to A \to T^0 \to T^1 \to 0$, by Lemma 3.2 we have a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & T^0 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & T^1 \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & 0 \arrow[d, "\wr"] & \\
0 \arrow[r] & A^{**} \arrow[r] & T^{0**} \arrow[r] & T^{1**} \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_B(T,T) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

where all vertical arrows are isomorphisms. It is easy to see that the composition $A \xrightarrow{\sim} A^{**} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_B(T)$ is an anti-ring isomorphism.

(6) For an exact sequence $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ in $\mathrm{mod}\, A^{\mathrm{op}}$, we have an exact sequence

$$0 \to F(X) \to F(Y) \to F(Z) \to F'(X) \to F'(Y) \to F'(Z) \to 0$$

Then $f(\underline{\dim}Y) = f(\underline{\dim}X) + f(\underline{\dim}Z)$ and f is a group morphism. By Lemma 3.8, f is an epimorphism, and $\mathrm{rank}\, \mathrm{K}_0(A) \geq \mathrm{rank}\, \mathrm{K}_0(B)$. By (5) we have $\mathrm{rank}\, \mathrm{K}_0(A^{\mathrm{op}}) \leq \mathrm{rank}\, \mathrm{K}_0(B^{\mathrm{op}})$. Therefore f is an isomorphism. $\square$

Theorem 3.10. *Let A be a finite dimensional k-algebra, T_A a tilting right A-module with $B = \mathrm{End}_A(T)$. Then the following hold.*

(1) *For $M \in \mathcal{T}(T)$,* $\mathrm{idim}\, F(M) \leq \mathrm{idim}\, M + 1$.

(2) *For $N \in \mathcal{F}(T)$,* $\mathrm{idim}\, F'(N) \leq \mathrm{idim}\, N$ *and* $\mathrm{Ext}^n_B(F(-), F'(N)) = 0$ *if* $\mathrm{idim}\, N = n$.

(3) *For a right injective A-module I, we have a functorial isomorphism* $\mathrm{Hom}_A -, I)|_{\mathcal{F}(T)} \cong \mathrm{Ext}^1_A(F'(-), F(I))|_{\mathcal{F}(T)}$.

Proof. Let $0 \to M \to I^0 \to \cdots \to I^n \to 0$ be an injective resolution.

(1) Since any injective right A-module belong to $\mathcal{T}(T)$ and $\mathcal{T}(T)$ is closed under factor modules, we have an exact sequence $0 \to F(M) \to F(I^0) \to \cdots \to F(I^n) \to 0$. $F(A^\vee) \cong T^\vee$ implies $\mathrm{idim}\, F(A^\vee) \leq 1$. By $F(I) \in \mathrm{add}\, F(A^\vee)$, we have $\mathrm{idm}\, F(M) \leq n+1$.

(2) Assume that $\mathrm{idim}\, N \leq n$. Let $0 \to N \to Q \to K \to 0$ be an exact sequence with Q being injective, then we have an exact sequence $0 \to F(Q) \to F(K) \to F'(N) \to 0$. Since $\mathrm{idim}\, F(Q) \leq 1$ and $\mathrm{idim}\, F(K) \leq n - 1 + 1$, $\mathrm{idim}\, F'(N) \leq n$. For $M \in \mathcal{T}(T)$, we have an exact sequence

$$\mathrm{Ext}^n_B(F(M), F(K)) \to \mathrm{Ext}^n_B(F(M), F'(N)) \to \mathrm{Ext}^{n+1}_B(F(M), F(Q))$$

By (1) and $\mathrm{Ext}^n_B(F(M), F(K)) \cong \mathrm{Ext}^n_A(M, K) = 0$, we have $\mathrm{Ext}^n_B(F(M), F'(N)) = 0$.

(3) By Proposition 3.7 we have a commutative diagram

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_A(K,I) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_A(Q,I) \arrow[r] \arrow[d, "\wr"] & \mathrm{Hom}_A(N,I) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_N"] & 0 \\
\mathrm{Hom}_B(F(K),F(I)) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(F(Q),F(I)) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_B(F'(N),F(I)) \arrow[r] & \mathrm{Ext}^1_B(F(K),F(I))
\end{tikzcd}$$

Since $\mathrm{Ext}^1_B(F(K), F(I)) \cong \mathrm{Ext}^1_A(K, I) = 0$, α_N is an isomorphism. $\square$

Corollary 3.11. $\mathrm{gldim}\, B \leq \mathrm{gldim}\, A + 1$.

Corollary 3.12. *If* $\operatorname{gldim} A \leq 1$, *then* $(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T))$ *splits, that is*

$$\operatorname{Ext}_B^1(\mathcal{X}(T), \mathcal{Y}(T)) = 0$$

Lemma 3.13 (Bongartz's lemma). *Let A be a finite dimensional k-algebra, T_A a finitely generated right A-module such that* $\operatorname{pdim} T \leq 1$ *and* $\operatorname{Ext}_A^1(T, T) = 0$. *Then there exists a finitely generated right A-module T' such that $T \oplus T'$ is a tilting module.*

Proof. Let $e_1, \cdots, e_n$ be a k-basis of $\operatorname{Ext}_A^1(T, A)$. Consider the push-out diagram

$$\begin{tikzcd}
\oplus_{i=1}^n e_i : 0 \arrow[r] & A^{\oplus n} \arrow[r] \arrow[d] & \oplus X_i \arrow[r] \arrow[d, dashed] & T^{\oplus n} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
e : 0 \arrow[r] & A \arrow[r] & T' \arrow[r] & T^{\oplus n} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

then we have an exact sequence

$$\operatorname{Hom}_A(T, T^{\oplus n}) \xrightarrow{\delta} \operatorname{Ext}_A^1(T, A) \to \operatorname{Ext}_A^1(T, T') \to 0$$

By the construction of e, δ is an epimorphism, and hence $\operatorname{Ext}_A^1(T, T') = 0$. Moreover we have exact sequences

$$0 = \operatorname{Ext}_A^1(T^{\oplus n}, T) \to \operatorname{Ext}_A^1(T', T) \to \operatorname{Ext}_A^1(A, T) = 0$$
$$0 = \operatorname{Ext}_A^1(T^{\oplus n}, T') \to \operatorname{Ext}_A^1(T', T') \to \operatorname{Ext}_A^1(A, T') = 0$$

Therefore we have $\operatorname{Ext}_A^1(T \oplus T', T \oplus T') = 0$. It is clear that $\operatorname{pdim} T' \leq 1$. Hence $T \oplus T'$ is a tilting module. $\square$

Theorem 3.14. *Let A be a finite dimensional k-algebra, T_A a finitely generated right A-module such that* $\operatorname{pdim} T \leq 1$ *and* $\operatorname{Ext}_A^1(T, T) = 0$. *Then the following are equivalent.*

(1) *T is a tilting A-module.*
(2) *The number of non-isomorphic indecomposable modules which are direct summand of T is the number of non-isomorphic simple A-modules.*

Proof. (1) $\Rightarrow$ (2) By Theorem 3.10. (2) $\Rightarrow$ (1) By Lemma 3.13. $\square$

4. Triangulated Categories

Definition 4.1. A *triangulated category* $\mathcal{C}$ is an additive category together with

(1) an autofunctor $\Sigma : \mathcal{C} \xrightarrow{\sim} \mathcal{C}$ (i.e. there is Σ^{-1} such that $\Sigma \circ \Sigma^{-1} = \Sigma^{-1} \circ \Sigma = 1_{\mathcal{C}}$) called the *translation* (or suspension), and
(2) a collection $\mathcal{T}$ of sextuples (X, Y, Z, u, v, w):

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma(X)$$

called (*distinguished*) *triangles*. These data are subject to the following four axioms:
(TR1) (1) For a commutative diagram of which all vertical arrows are isomorphisms

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(f)"] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma(X')
\end{tikzcd}$$

if (X, Y, Z, u, v, w) is a (distinguished) triangle, then (X', Y', Z', u', v', w') is a (distinguished) triangle.
(2) Every morphism $u : X \to Y$ is embedded in a (distinguished) triangle

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma(X) \qquad \begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "w"', "(1)"] & \\ X \arrow[rr, "u"] & & Y \arrow[ul, "v"'] \end{tikzcd}$$

(3) For any $X \in \mathcal{C}$,

$$X \xrightarrow{1} X \to 0 \to \Sigma(X)$$

is a (distinguished) triangle

(TR2) A sextuple

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma(X)$$

is a (distinguished) triangle if and only if

$$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma(X) \xrightarrow{-\Sigma(u)} \Sigma(Y)$$

is a (distinguished) triangle.

(TR3) For any (distinguished) triangles (X, Y, Z, u, v, w), (X', Y', Z', u', v', w') and a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] & \Sigma(X) \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma(X') \end{tikzcd}$$

there exists $h : Z \to Z'$ which makes a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(f)"] \\ X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & \Sigma(X') \end{tikzcd}$$

(TR4) (Octahedral axiom) For any two consecutive morphisms $u : X \to Y$ and $v : Y \to Z$, if we embed u, vu and v in (distinguished) triangles (X, Y, Z', u, i, i'), (X, Z, Y', vu, k, k') and (Y, Z, X', v, j, j'), respectively, then there exist morphisms

$f : Z' \to Y'$, $g : Y' \to X'$ such that the following diagram commute

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, equal] & Y \arrow[r, "i"] \arrow[d, "v"] & Z' \arrow[r, "i'"] \arrow[d, dashed, "f"] & \Sigma(X) \arrow[d, equal] \\
X \arrow[r, "vu"] & Z \arrow[r, "k"] \arrow[d, "j"] & Y' \arrow[r, "k'"] \arrow[d, dashed, "g"] & \Sigma(X) \arrow[d, "\Sigma(u)"] \\
 & X' \arrow[r, equal] \arrow[d, "j'"] & X' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "\Sigma(i)j'"] & \Sigma(Y) \\
 & \Sigma(Y) \arrow[r, "\Sigma(i)"] & \Sigma(Z') &
\end{tikzcd}$$

and the third column is a triangle.

Sometimes, we write $X[i]$ for $\Sigma^i(X)$.

Definition 4.2 (∂-functor). Let $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ be triangulated categories. An additive functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ is called a *∂-functor* (sometimes *exact functor*) provided that there is a functorial isomorphism $\alpha : F\Sigma_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} \Sigma_{\mathcal{C}'}F$ such that

$$F(X) \xrightarrow{F(u)} F(Y) \xrightarrow{F(v)} F(Z) \xrightarrow{\alpha_X F(w)} \Sigma_{\mathcal{C}'}(F(X))$$

is a triangle in $\mathcal{C}'$ whenever $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} \Sigma_{\mathcal{C}}(X)$ is a triangle in $\mathcal{C}$. Moreover, if a ∂-functor F is an equivalence, then F is called a *triangulated equivalence* . In this case, we denote by $\mathcal{C} \overset{\triangle}{\cong} \mathcal{C}'$.

For $(F, \alpha), (G, \beta) : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ ∂-functors, a functorial morphism $\phi : F \to G$ is called a *∂-functorial morphism* if

$$(\Sigma_{\mathcal{C}'}\phi) \circ \alpha = \beta \circ \phi\Sigma_{\mathcal{C}}$$

We denote by $\partial(\mathcal{C}, \mathcal{C}')$ the collection of all ∂-functors from $\mathcal{C}$ to $\mathcal{C}'$, and denote by $\partial \operatorname{Mor}(F, G)$ the collection of ∂-functorial morphisms from F to G.

Proposition 4.3. *Let $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ be a ∂-functor between triangulated categories. If $G : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$ is a right (or left) adjoint of F, then G is also a ∂-functor.*

Definition 4.4. A contravariant (resp., covariant) additive functor $H : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ from a triangulated category $\mathcal{C}$ to an abelian category $\mathcal{A}$ is called a *homological functor* (resp., *a cohomological functor*), if for any triangle (X, Y, Z, u, v, w) in $\mathcal{C}$ the sequence

$$H(\Sigma(X)) \to H(Z) \to H(Y) \to H(X)$$
$$(\text{resp., } H(X) \to H(Y) \to H(Z) \to H(\Sigma(X)) \text{ })$$

is exact. Taking $H(\Sigma^i(X)) = H^i(X)$, we have the long exact sequence:

$$\cdots \to H^{i+1}(X) \to H^i(Z) \to H^i(Y) \to H^i(X) \to \cdots$$
$$(\text{resp., } \cdots \to H^i(X) \to H^i(Y) \to H^i(Z) \to H^{i+1}(X) \to \cdots)$$

Proposition 4.5. *The following hold.*

(1) *If (X, Y, Z, u, v, w) is a triangle, then $vu = 0$, $wv = 0$ and $\Sigma(u)w = 0$.*

(2) *For any* $X \in \mathcal{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) : \mathcal{C} \to \mathfrak{Ab}$ *(resp.,* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, -) : \mathcal{C} \to \mathfrak{Ab}$*) is a homological functor (resp., a cohomological functor).*

(3) *For any homomorphism of triangles*

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & \Sigma(X) \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle \Sigma(f)} \\ X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & \Sigma(X') \end{array}$$

if two of f, g *and* h *are isomorphisms, then the rest is also an isomorphism.*

Proof. First, consider the following morphism between triangles

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & \Sigma(X) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \beta} & & \downarrow{\scriptstyle \gamma} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & M & = & M & \xrightarrow{w} & 0 \end{array}$$

(1) Taking $M = Z, \beta = v, \gamma = 1_Z$, we get the statement by (TR1) (3), (TR2), (TR3).
(2) Take β with $\beta \circ u = 0$, then there is γ by (TR2), (TR3) .
(3) By (2), we have a morphism between long exact sequences

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathrm{h}_X & \xrightarrow{\mathrm{h}_u} & \mathrm{h}_Y & \xrightarrow{\mathrm{h}_v} & \mathrm{h}_Z & \xrightarrow{\mathrm{h}_w} & \mathrm{h}_{\Sigma(X)} & \xrightarrow{\mathrm{h}_{\Sigma(u)}} & \mathrm{h}_{\Sigma(Y)} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{h}_f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{h}_g} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{h}_h} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{h}_{\Sigma(f)}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{h}_{\Sigma(g)}} \\ \mathrm{h}_{X'} & \xrightarrow{\mathrm{h}_{u'}} & \mathrm{h}_{Y'} & \xrightarrow{\mathrm{h}_{v'}} & \mathrm{h}_{Z'} & \xrightarrow{\mathrm{h}_{w'}} & \mathrm{h}_{\Sigma(X')} & \xrightarrow{\mathrm{h}_{\Sigma(u')}} & \mathrm{h}_{\Sigma(Y')} \end{array}$$

Here $\mathrm{h}_M = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, M)$ for any object M. □

Proposition 4.6. *A triangle* $(X, Y, Z, u, v, 0)$ *is isomorphic to* $(X, Z \oplus X, Z, \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \end{smallmatrix}\right], 0)$.

Proof. Since $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, Z) \xrightarrow{0} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Z, \Sigma(X))$, by Proposition 4.5, there is $s : Z \to Y$ such that $vs = 1_Z$. Then we have a commutative diagram

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{\mu} & Z \oplus X & \xrightarrow{\pi} & Z & \xrightarrow{0} & \Sigma(X) \\ \| & & {\scriptstyle \alpha}\downarrow & & \| & & \| \\ X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{0} & \Sigma(X) \end{array}$$

where $\mu = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, $\pi = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, $\alpha = \left[\begin{smallmatrix} s & u \end{smallmatrix}\right]$. □

Definition 4.7 (Compact Object). Let $\mathcal{C}$ be a triangulated category. An object $C \in \mathcal{C}$ is called a *compact* object in $\mathcal{C}$ if the canonical morphism

$$\coprod_{i \in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, X_i) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, \coprod_{i \in I} X_i)$$

is an isomorphism for any set $\{X_i\}_{i \in I}$ of objects (if $\coprod_{i \in I} X_i$ exists in $\mathcal{C}$).

For a triangulated category $\mathcal{C}$, a set $\mathcal{S}$ of compact objects is called *a generating set* if $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{S}, X) = 0 \Rightarrow X = 0$, and if $\Sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$. A triangulated category $\mathcal{C}$ is *compactly generated* if $\mathcal{C}$ contains arbitrary coproducts, and if it has a generating set.

5. Derived Categories

Throughout this section, $\mathcal{A}$ is an abelian category and $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ are additive subcategories of $\mathcal{A}$.

Definition 5.1 (Complex). A (cochain) complex is a collection $X^\cdot = (X^n, d_X^n : X^n \to X^{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ of objects and morphisms of $\mathcal{B}$ such that $d_X^{n+1} d_X^n = 0$. A complex $X^\cdot = (X^n, d_X^n : X^n \to X^{n+1})_{n\in\mathbb{Z}}$ is called bounded below (resp., bounded above, bounded) if $X^n = 0$ for $n \ll 0$ (resp., $n \gg 0$, $n \ll 0$ and $n \gg 0$).

we define an objects of $\mathcal{A}$ for all $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Z}^n(X^\cdot) &= \mathrm{Ker}\, d_X^n & \mathrm{B}^n(X^\cdot) &= \mathrm{Im}\, d_X^{n-1} \\ \mathrm{C}^n(X^\cdot) &= \mathrm{Cok}\, d_X^{n-1} & \mathrm{H}^n(X^\cdot) &= \mathrm{Z}^n(X^\cdot)/\mathrm{B}^n(X^\cdot) \\ & & &\text{the } n\text{th cohomology,} \end{aligned}$$

A complex $X^\cdot = (X^n, d_X^n)$ is called a null complex if $\mathrm{H}^n(X^\cdot) = 0$ for all $n \in \mathbb{Z}$.

A morphism $f : X^\cdot \to Y^\cdot$ of complexes is a collection of morphisms $f^n : X^n \to Y^n$ satisfying $d_Y^n f^n = f^{n+1} d_X^n$ for any $n \in \mathbb{Z}$.

We denote by $\mathsf{C}(\mathcal{B})$ (resp., $\mathsf{C}^+(\mathcal{B})$, $\mathsf{C}^-(\mathcal{B})$, $\mathsf{C}^b(\mathcal{B})$) the category of complexes (resp., bounded below complexes, bounded above complexes, bounded complexes) of $\mathcal{B}$. An autofunctor $\Sigma : \mathsf{C}(\mathcal{B}) \to \mathsf{C}(\mathcal{B})$ is called translation if $(\Sigma(X^\cdot))^n = X^{n+1}$ and $(\Sigma(d_X))^n = -d_X^{n+1}$ for any complex $X^\cdot = (X^n, d_X^n)$.

In $\mathsf{C}(\mathcal{A})$, a morphism $u : X^\cdot \to Y^\cdot$ is called a quasi-isomorphism if $\mathrm{H}^n(u)$ is an isomorphism for any n.

In this section, "$*$" means "nothing", "+", "−" or "b".

Definition 5.2 (Truncations). For a complex $X^\cdot = (X^i, d^i)$, we define the following truncations:

$$\begin{aligned} \tau_{\geq n} X^\cdot &: \ldots \to 0 \to X^n \to X^{n+1} \to X^{n+2} \to \ldots, \\ \tau_{\leq n} X^\cdot &: \ldots \to X^{n-2} \to X^{n-1} \to X^n \to 0 \to \ldots. \end{aligned}$$

Then we have exact sequences in $\mathsf{C}(\mathcal{A})$

$$O \to \tau_{\geq n}(X^\cdot) \to X^\cdot \to \tau_{\leq n+1}(X^\cdot) \to O$$

Definition 5.3 (Mapping Cone). For $u \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{B})}(X^\cdot, Y^\cdot)$, the mapping cone of u is a complex $\mathrm{M}^\cdot(u)$ with

$$\begin{aligned} \mathrm{M}^n(u) &= X^{n+1} \oplus Y^n, \\ d^n_{\mathrm{M}^\cdot(u)} &= \begin{bmatrix} -d_X^{n+1} & 0 \\ u^{n+1} & d_X^n \end{bmatrix} : X^{n+1} \oplus Y^n \to X^{n+2} \oplus Y^{n+1}. \end{aligned}$$

$$
\begin{tikzcd}
X^{\cdot} \arrow[d, "u"] & \cdots \arrow[r] & X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "u^n"] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "u^{n+1}"] & \cdots \\
Y^{\cdot} \arrow[d, "v"] & \cdots \arrow[r] & Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] \arrow[d, "\binom{0}{1}"] & Y^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "\binom{0}{1}"] & \cdots \\
\mathrm{M}^{\cdot}(u) \arrow[d, "w"] & \cdots \arrow[r] & X^{n+1} \oplus Y^n \arrow[r, "d_{\mathrm{M}^{\cdot}(u)}^n"] \arrow[d, "(1\ 0)"] & X^{n+2} \oplus Y^{n+1} \arrow[r] \arrow[d, "(1\ 0)"] & \cdots \\
\Sigma(X^{\cdot}) & \cdots \arrow[r] & X^{n+1} \arrow[r, "-d_X^{n+1}"] & X^{n+2} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Definition 5.4 (Homotopy Category). Two morphisms $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}(\mathcal{B})}(X^{\cdot}, Y^{\cdot})$ is said to be *homotopic* (denote by $f \underset{h}{\simeq} g$) if there is a collection of morphisms $h = (h^n)$, $h^n : X^n \to Y^{n-1}$ such that

$$
f^n - g^n = d_Y^{n-1} h^n + h^{n+1} d_X^n
$$

for all $n \in \mathbb{Z}$. The homotopy category $\mathsf{K}^*(\mathcal{B})$ of $\mathcal{B}$ is defined by

(1) $\mathrm{Ob}(\mathsf{K}^*(\mathcal{B})) = \mathrm{Ob}(\mathsf{C}^*(\mathcal{B}))$,
(2) $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}^*(\mathcal{B})}(X^{\cdot}, Y^{\cdot}) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}^*(\mathcal{B})}(X^{\cdot}, Y^{\cdot}) / \underset{h}{\simeq}$ for $X^{\cdot}, Y^{\cdot} \in \mathrm{Ob}(\mathsf{K}^*(\mathcal{B}))$.

Proposition 5.5. *A category $\mathsf{K}^*(\mathcal{B})$ is a triangulated category whose distinguished triangles are defined to be isomorphic to*

$$
X^{\cdot} \xrightarrow{u} Y^{\cdot} \xrightarrow{v} \mathrm{M}^{\cdot}(u) \xrightarrow{w} \Sigma(X^{\cdot})
$$

for any $u : X^{\cdot} \to Y^{\cdot}$ in $\mathsf{K}^*(\mathcal{B})$.

Definition 5.6 (Derived Category). The derived category $\mathsf{D}^*(\mathcal{A})$ of an abelian category $\mathcal{A}$ is the quotient category by quasi-isomorphisms, that is the category satisfying

(1) $\mathrm{Ob}(\mathsf{D}^*(\mathcal{A})) = \mathrm{Ob}(\mathsf{K}^*(\mathcal{A}))$.
(2) For $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathsf{D}^*(\mathcal{A}))$, let $V(X^{\cdot}, Y^{\cdot}) = \{(s, Y'^{\cdot}, f) | s : Y^{\cdot} \to Y'^{\cdot} \in \mathsf{Qis}, f : X^{\cdot} \to Y'^{\cdot}\}$. In $V(X^{\cdot}, Y^{\cdot})$, we define $(s, Y'^{\cdot}, f) \sim (s', Y''^{\cdot}, f')$ if there is $(s'', Y'''^{\cdot}, f')$ such that all triangles are commutative in the following diagram:

$$
\begin{tikzcd}
 & Y'^{\cdot} \arrow[d, dashed] & \\
X^{\cdot} \arrow[ur, "f"] \arrow[r, dashed, "f''"] \arrow[dr, "f'"'] & Y'''^{\cdot} & Y^{\cdot} \arrow[ul, "s"'] \arrow[l, dashed, "s''"'] \arrow[dl, "s'"] \\
 & Y''^{\cdot} \arrow[u, dashed] &
\end{tikzcd}
$$

Then we define a morphism from $X^{\cdot}$ to $Y^{\cdot}$ by an equivalence class $s^{-1}f$ of (s, Y', f).

(3) For $s^{-1}f : X^{\cdot} \to Y^{\cdot}, t^{-1}g : Y^{\cdot} \to Z^{\cdot}$, there are $s' : Z'^{\cdot} \to Z''^{\cdot} \in \mathsf{Qis}$ and $g' : Y'^{\cdot} \to Z''^{\cdot}$ such that $s' \circ g = g' \circ s$. Then we define $(t^{-1}g) \circ (s^{-1}f) = (s' \circ t)^{-1} g \circ f$.

$$\begin{tikzcd}
X^{\cdot} \arrow[dr, "f"] & Y^{\cdot} \arrow[d, "s"] \arrow[dr, "g"] & Z^{\cdot} \arrow[d, "t"] \\
 & Y'^{\cdot} \arrow[dr, dashed, "g'"] & Z'^{\cdot} \arrow[d, dashed, "s'"] \\
 & & Z''^{\cdot}
\end{tikzcd}$$

Moreover, we define the quotient functor $Q : \mathsf{K}^{*}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^{*}(\mathcal{A})$ by

(Q1) $Q(X^{\cdot}) = X^{\cdot}$ for $X^{\cdot} \in \mathsf{K}^{*}(\mathcal{A})$.

(Q2) $Q(f) = 1_{Y^{\cdot}}^{-1} f$ for a morphism $f : X^{\cdot} \to Y^{\cdot}$ in $\mathsf{D}^{*}(\mathcal{A})$.

Proposition 5.7. *The following hold.*

(1) $\mathsf{D}^{*}(\mathcal{A})$ *is a triangulated category, and the canonical functor* $Q : \mathsf{K}^{*}(\mathcal{A}) \to \mathsf{D}^{*}(\mathcal{A})$ *is a* ∂*-functor.*

(2) *The* i*-th cohomology of complexes is a cohomological functor in the sense of Definition 4.4.*

Lemma 5.8. *Let* A *be a ring. For* $X^{\cdot} \in \mathsf{K}(\mathsf{Mod}\, A)$ *and* $I^{\cdot} \in \mathsf{K}^{+}(\mathsf{Inj}\, A)$ *(resp.,* $P^{\cdot} \in \mathsf{K}^{-}(\mathsf{Proj}\, A)$*), if* $X^{\cdot}$ *is null, then we have*

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathsf{Mod}\, A)}(X^{\cdot}, I^{\cdot}) = 0.$$

$$(\textit{resp.}, \ \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathsf{Mod}\, A)}(P^{\cdot}, X^{\cdot}) = 0)$$

Proposition 5.9. *The following hold for a ring* A*.*

(1) $\mathsf{K}^{-}(\mathsf{Proj}\, A) \overset{\triangle}{\cong} \mathsf{D}^{-}(\mathsf{Mod}\, A)$.

(2) $\mathsf{K}^{+}(\mathsf{Inj}\, A) \overset{\triangle}{\cong} \mathsf{D}^{+}(\mathsf{Mod}\, A)$.

6. Tilting Complexes

Definition 6.1. Let $\mathcal{C}$ be a triangulated category. A subcategory $\mathcal{B}$ of $\mathcal{C}$ is said to *generates* $\mathcal{C}$ as a triangulated category if $\mathcal{C}$ is the smallest triangulated full subcategory which is closed under isomorphisms and contains $\mathcal{B}$.

Theorem 6.2. *Let* A*,* B *be rings. The following are equivalent.*

(1) $\mathsf{D}^{-}(\mathsf{Mod}\, A) \overset{\triangle}{\cong} \mathsf{D}^{-}(\mathsf{Mod}\, B)$.

(2) $\mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{Mod}\, A) \overset{\triangle}{\cong} \mathsf{D}^{\mathsf{b}}(\mathsf{Mod}\, B)$.

(3) $\mathsf{K}^{\mathsf{b}}(\mathsf{Proj}\, A) \overset{\triangle}{\cong} \mathsf{K}^{\mathsf{b}}(\mathsf{Proj}\, B)$.

(4) $\mathsf{K}^{\mathsf{b}}(\mathsf{proj}\, A) \overset{\triangle}{\cong} \mathsf{K}^{\mathsf{b}}(\mathsf{proj}\, B)$.

(5) *There exists* $T^{\cdot} \in \mathsf{K}^{\mathsf{b}}(\mathsf{proj}\, A)$ *with* $B \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}^{\mathsf{b}}(\mathsf{proj}\, A)}(T^{\cdot})$ *such that*
(a) $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathsf{Mod}\, A)}(T^{\cdot}, T^{\cdot}[i]) = 0$ *for* $i \neq 0$*,*
(b) $\mathsf{add}\, T^{\cdot}_{A}$ *generates* $\mathsf{K}^{\mathsf{b}}(\mathsf{proj}\, A)$.

(6) *There exists* $T^{\cdot} \in \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj} A)$ *with* $B \cong \operatorname{Hom}_{\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj} A)}(T^{\cdot})$ *such that*
  (a) $\operatorname{Hom}_{\mathsf{K}(\operatorname{Mod} A)}(T^{\cdot}, T^{\cdot}[i]) = 0$ *for* $i \neq 0$,
  (b) For $X^{\cdot} \in \mathsf{K}^{-}(\operatorname{Proj} A)$, $X^{\cdot} = O$ *whenever* $\operatorname{Hom}_{\mathsf{K}^{-}(\operatorname{Proj} A)}(T^{\cdot}, X^{\cdot}[i])$ $= 0$ *for all* i.

Definition 6.3. A complex $T^{\cdot}_A \in \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj} A)$ is called a tilting complex for A provided that

(1) $\operatorname{Hom}_{\mathsf{K}(\operatorname{Mod} A)}(T^{\cdot}, T^{\cdot}[i]) = 0$ for $i \neq 0$.
(2) $\operatorname{add} T^{\cdot}_A$ generates $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj} A)$.

We say that B is *derived equivalent* to A if there is a tilting complex $T^{\cdot}_A$ such that $B \cong \operatorname{End}_{\mathsf{K}(\operatorname{Mod} A)}(T^{\cdot})$.

Remark 6.4. Miyashita defined a tilting module of finite projective dimension as follows. Let R be a ring. A right R-module T is called a tilting module of projective dimension n provided that the following hold.

(1) There is an exact sequence $0 \to P_n \to \cdots \to\!\!\to P_0 \to T \to 0$ with $P_0, \cdots, P_n \in \operatorname{proj} R^{\mathrm{op}}$.
(2) $\operatorname{Ext}^i_R(T, T) = 0$ $(i > 0)$.
(3) There is an exact sequence $0 \to R \to T^0 \to \cdots \to T^n \to 0$ with $T^0, \cdots, T^n \in \operatorname{add} T$.

Then the projective resolution of T is a tilting complex. Happel and Cline-Parshall-Scott showed that the derived functor $R^{\mathrm{b}} \operatorname{Hom}_R(T, -) : \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{Mod} R) \to \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{Mod} S)$ is an equivalence.

Lemma 6.5. *For* $X^{\cdot} \in \mathsf{D}^{-}(\operatorname{Mod} A)$, *the following are equivalent.*

(1) $X^{\cdot} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{Mod} A)$.
(2) *For any* $Y^{\cdot} \in \mathsf{D}^{-}(\operatorname{Mod} A)$, *there is* n *such that* $\operatorname{Hom}_{\mathsf{D}(\operatorname{Mod} A}(Y^{\cdot}, X^{\cdot}[i])$ $= 0$ *for all* $i < n$.

Proof. $1 \Rightarrow 2$. We may assume $X^{\cdot} \in \mathsf{C}^{\mathrm{b}}(\operatorname{Mod} A)$, $Y^{\cdot} \in \mathsf{K}^{-}(\operatorname{Proj} A)$. Then $\operatorname{Hom}_{\mathsf{D}(\operatorname{Mod} A)}(Y^{\cdot}, X^{\cdot}[i]) \cong \operatorname{Hom}_{\mathsf{K}(\operatorname{Mod} A)}(Y^{\cdot}, X^{\cdot}[i])$.

$2 \Rightarrow 1$. Since $\operatorname{Hom}_{\mathsf{D}(\operatorname{Mod} A^{\mathrm{b}})}(A, X^{\cdot}[i]) \cong \mathrm{H}^i(X^{\cdot})$, it is easy. □

For an additive category $\mathcal{B}$ and $m \leq n$, we write $\mathsf{K}^{[m,n]}(\mathcal{B})$ for the full subcategory of $\mathsf{K}(\mathcal{B})$ consisting of complexes $X^{\cdot}$ with $X^i = O$ for $i < m$, $n < i$.

Lemma 6.6. *For* $X^{\cdot} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{Mod} A)$, *the following are equivalent.*

(1) $X^{\cdot}$ *is isomorphic to an object of* $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{Proj} A)$.
(2) *For any* $Y^{\cdot} \in \mathsf{D}^{\mathrm{b}}(\operatorname{Mod} A)$, *there is* n *such that* $\operatorname{Hom}_{\mathsf{D}(\operatorname{Mod} A}(X^{\cdot}, Y^{\cdot}[i])$ $= 0$ *for all* $i > n$.

Proof. $1 \Rightarrow 2$. It is trivial.

$2 \Rightarrow 1$. We may assume $X^{\cdot} \in \mathsf{K}^{-}(\operatorname{Proj} A)$. Let $M = \prod_{i \in \mathbb{Z}} \mathrm{C}^i(X^{\cdot})$. If $\operatorname{Hom}_{\mathsf{K}(\operatorname{Mod} A)}(X^{\cdot}, \mathrm{C}^i(X^{\cdot})[-i]) = 0$, then we have exact sequences

$$\operatorname{Hom}_A(X^{i+1}, C^i(X^{\cdot})) \to \operatorname{Hom}_A(C^i(X^{\cdot}), C^i(X^{\cdot})) \to O.$$

This means that the canonical morphisms $C^i(X^\cdot) \to X^{i+1}$ are split monomorphisms. $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}^-(\mathsf{Mod}\,A)}(X^\cdot, M[i]) = 0$ for all $i > n$ if and only if $X^\cdot$ is isomorphic to an object in $\mathsf{K}^{[-n,\infty)}(\mathsf{Proj}\,A)$. □

Definition 6.7 (Perfect Complex). A complex $X^\cdot \in \mathsf{D}(\mathsf{Mod}\,A)$ is called *a perfect complex* if $X^\cdot$ is isomorphic to a complex of $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)$ in $\mathsf{D}(\mathsf{Mod}\,A)$. We denote by $\mathsf{D}(\mathsf{Mod}\,A)_{\mathrm{perf}}$ the triangulated full subcategory of $\mathsf{D}(\mathsf{Mod}\,A)$ consisting of perfect complexes.

Lemma 6.8. *For $X^\cdot \in \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{Proj}\,A)$, the following are equivalent.*

(1) *$X^\cdot$ is a compact object in $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{Proj}\,A)$.*
(2) *$X^\cdot$ is isomorphic to an object of $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)$.*

Proof. 2 ⇒ 1. It is easy.

1 ⇒ 2. Let $X^\cdot = X^0 \xrightarrow{d^0} X^1 \to \dots \to X^n$, with $X^i \in \mathsf{Proj}\,A$. By adding $P \xrightarrow{1} P$ to $X^\cdot$, we may assume that X^0 is a free A-module $A^{(I)}$. If I is a finite set, then by 2 ⇒ 1 X^0 is also compact, and hence $\tau_{\geq 1}X^\cdot$ is compact. by induction on n, we get the assertion. Otherwise, since we have $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathsf{Mod}\,A)}(X^\cdot, A^{(I)}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathsf{Mod}\,A)}(X^\cdot, A)^{(I)}$, the canonical morphism $X^\cdot \to A^{(I)}$ factors through a direct summand $\mu : A^m \hookrightarrow A^{(I)}$ for some $m \in \mathbb{N}$. Then there is a homotopy morphism $h : X^1 \to A^{(I)}$ such that $1_{A^{(I)}} - \mu g = hd^0$ with some $g : A^{(I)} \to A^m$. Let $A^{(I)} = A^m \oplus A^{(J)}$ be the canonical decomposition, then $A^{(J)} \xrightarrow{d^0|_{A^{(J)}}} X^1 \xrightarrow{ph} A^{(J)} = 1_{A^{(J)}}$, where $p : A^{(I)} \to A^{(J)}$ is the canonical projection. Therefore $X^\cdot \cong \mathrm{M}^\cdot(1_{A^{(J)}})[-1] \oplus X'^\cdot$, where $X'^\cdot : A^m \to X'^1 \to \dots \to X^n$ with X'^1 being a direct summand of X^1. Then we reduce the case of X^0 being a finitely generated free A-module. □

Lemma 6.9. *Let $T^\cdot \in \mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\mathsf{proj}\,A)$ with $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}(\mathsf{Mod}\,A)}(T^\cdot, T^\cdot[i]) = 0$ for $i \neq 0$, and $B = \mathrm{End}_{\mathsf{K}(\mathsf{Mod}\,A)}(T^\cdot)$. Then there exists a fully faithful ∂-functor $F : \mathsf{K}^-(\mathsf{Proj}\,B) \to \mathsf{K}^-(\mathsf{Proj}\,A)$ such that*

(1) *$FB \cong T^\cdot$.*
(2) *F preserves coproducts.*
(3) *F has a right adjoint $G : \mathsf{K}^-(\mathsf{Proj}\,A) \to \mathsf{K}^-(\mathsf{Proj}\,B)$.*

Proof. [Skip] This lemma is important. But the proof is out of the methods of derived categories. □

Lemma 6.10. *If $T^\cdot$ satisfies the condition (G), then $F : \mathsf{K}^-(\mathsf{Proj}\,B) \to \mathsf{K}^-(\mathsf{Proj}\,A)$ is an equivalence.*

(G) *For $X^\cdot \in \mathsf{K}^-(\mathsf{Proj}\,A)$, $X^\cdot = O$ whenever $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}^-(\mathsf{Proj}\,A)}(T^\cdot, X^\cdot[i]) = 0$ for all i.*

Proof. Let $X^\cdot \in \mathsf{K}^-(\mathsf{Proj}\,A)$ such that $GX^\cdot = O$. Then $\mathrm{Hom}_{\mathsf{K}^-(\mathsf{Proj}\,A)}(T^\cdot, X^\cdot[i]) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{K}^-(\mathsf{Proj}\,B)}(B, GX^\cdot[i]) = 0$ for all i. Therefore $\mathrm{Ker}\,G = \{O\}$. By the left version of Proposition 6.11, G and F are equivalences. □

Proposition 6.11. *Let $\mathcal{C}$ and $\mathcal{C}'$ be triangulated categories, $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ a ∂-functor which has a fully faithful left adjoint $S : \mathcal{C}' \to \mathcal{C}$. Then F induces an equivalence between $\mathcal{C}/\operatorname{Ker} F$ and $\mathcal{C}'$.*

Proof. By the universal property of $Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}/\operatorname{Ker} F$, we have the following commutative diagram

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "Q"'] \arrow[dr, "F"] & \\ \mathcal{C}/\operatorname{Ker} F \arrow[r, "F'"'] & \mathcal{C}' \end{tikzcd}$$

If $f : X \to Y$ is a morphism in $\mathcal{C}$, then Ff is an isomorphism if and only if Qf is an isomorphism. For every object $M \in \mathcal{C}$, $FSFM \to FM$ is an isomorphism, and then $QSFM \to QM$ is an isomorphism. Therefore $QSF \to Q$ is an isomorphism. By the universal property of Q and $QSF = QSF'Q$, we have $1_{\mathcal{C}/\operatorname{Ker} F} \cong QSF'$. Since, $F'QS = FS \cong 1_{\mathcal{C}'}$, F' is an equivalence. □

Remark 6.12. Let $\mathcal{C}$ be a triangulated category. For an additive subcategory $\mathcal{B}$ of $\mathcal{C}$, we can construct the smallest triangulated full subcategory $\mathcal{E}\mathcal{B}$ which is closed under isomorphisms and contains $\mathcal{B}$ as follows.

Let $\mathcal{E}^0\mathcal{B} = \mathcal{B}$. For $n > 0$, let $\mathcal{E}^n\mathcal{B}$ be the full subcategory of $\mathcal{C}$ consisting of objects X there exist $U, V \in \mathcal{E}^{n-1}\mathcal{B}$ satisfying that either of $(X, U, V, *, *, *)$ or $(U, V, X, *, *, *)$ is a triangle in $\mathcal{C}$. Then it is easy to see that $\mathcal{E}\mathcal{B} = \bigcup_{n\geq 0}\mathcal{E}^n\mathcal{B}$ is the smallest triangulated full subcategory which is closed under isomorphisms and contains $\mathcal{B}$

Theorem 6.13. *Let $T^\cdot$ be a complex of $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj} A)$ such that*

(a) $\operatorname{Hom}_{\mathsf{K}(\operatorname{Mod} A)}(T^\cdot, T^\cdot[i]) = 0$ *for* $i \neq 0$,

(b) $\operatorname{add} T^\cdot_A$ *generates* $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj} A)$.

Then $F : \mathsf{K}^-(\operatorname{Proj} B) \to \mathsf{K}^-(\operatorname{Proj} A)$ is an equivalence.

Proof. It suffices to show that $T^\cdot$ satisfies the condition of Lemma 6.10. Since $\operatorname{add} T^\cdot_A$ generates $\mathsf{K}^{\mathrm{b}}(\operatorname{proj} A)$, if $\operatorname{Hom}_{\mathsf{K}^-(\operatorname{Proj} A)}(T^\cdot, X^\cdot[i]) = 0$ for all i, then $\operatorname{Hom}_{\mathsf{K}^-(\operatorname{Proj} A)}(A, X^\cdot[i]) = 0$ for all i. Thus $X^\cdot = O$. □

References of Section

§1. [ASS], [草], [Ri], [Po], [Br].
§2. [ASS], [草], [Ri], [Po], [Br].
§3. [ASS], [Bo], [Ri], [AHK].
§4. [We], [Ve], [RD], [KV], [Ne3], [BBD] ([Ne1], [Ne2]).
§5. [We], [Ve], [RD].
§6. [Rd1], [Rd2], [AHK] ([BBD], [CPS], [Ha], [Mi]).

References

[AHK] L. Angeleri Hügel, D. Happel, H. Krause, "Handbook of Tilting Theory", London Math. Soc. Lecture Notes 332, Cambridge University Press, 2007.

[ASS] I. Assem, D. Simson, A. Skowronski, "Elements of The Representation Theory of Associative Algebras", London Math. Soc. Student Texts 65, Cambridge University Press, 2006.
[BBD] A. A. Beilinson, J. Bernstein and P. Deligne, Faisceaux Pervers, Astérisque 100, 1982.
[Bo] K. Bongartz, "Tilted Algebras", Lecture Notes in Math. 903, Springer-Verlag, Berlin (1982), 26-38.
[Br] N. Bourbaki, "Groupes et algebres de Lie", Chapitres 4, 5 et 6, Hermann, Paris, 1968.
[CPS] E. Cline, B. Parshall, L. Scott, Derived categories and Morita theory, J. Algebra 104 (1986), no. 2, 397–409.
[Ha] D. Happel, "Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite-Dimensional Algebras", London Math. Soc. Lecture Notes 119, Cambridge University Press, 1987.
[KV] B. Keller, D. Vossieck, Sous Les Catégorie Dérivées, C. R. Acad. Sci. Paris 305 (1987), 225-228.
[Mi] Y. Miyashita, Tilting modules of finite projective dimension, Math. Z. 193 (1986), no. 1, 113–146.
[Ne1] A. Neeman, The connection between the K-theory localization theorem of Thomason, Trobaugh and Yao and the smashing subcategories of Bousfield and Ravenel. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 25 (1992), no. 5, 547–566.
[Ne2] A. Neeman, The Grothendieck duality theorem via Bousfield's techniques and Brown representability, J. American Math. Soc. 9 (1996), 205–236.
[Ne3] A. Neeman, "Triangulated categories", Annals of Mathematics Studies 148, Princeton Univ. Press, 2001.
[Po] N. Popescu, "Abelian Categories with Applications to Rings and Modules", Academic Press, London-New York, 1973.
[RD] R. Hartshorne, "Residues and Duality", Lecture Notes in Math. 20, Springer-Verlag, Berlin, 1966.
[Rd1] J. Rickard, Morita Theory for Derived Categories, J. London Math. Soc. 39 (1989), 436-456.
[Rd2] J. Rickard, Derived Equivalences as Derived Functors, J. London Math. Soc. 43 (1991), 37-48.
[Ri] C.M. Ringel, "Tame Algebras and Integral Quadratic Forms", Lecture Notes in Math. 1099, Springer-Verlag, Berlin, 1984.
[Ve] J. Verdier, "Catéories Déivées, état 0", pp. 262-311, Lecture Notes in Math. 569, Springer-Verlag, Berlin, 1977.
[We] C. A. Weibel, "An Introduction to Homological Algebra," Cambridge studies in advanced mathematics. 38, Cambridge Univ. Press, 1995.
[草] 草場 公邦, "行列特論", 裳華房, 1979.

J. MIYACHI: DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKYO GAKUGEI UNIVERSITY, KOGANEI-SHI, TOKYO, 184-8501, JAPAN
E-mail address: miyachi@u-gakugei.ac.jp

箙と量子群

斉藤　義久　（東大数理）

January 18, 2007

e-mail : `yosihisa@ms.u-tokyo.ac.jp`

1　Introduction

今回の講演の依頼を受けた際、オーガナイザーの方から頂いたお題は、

柏原さんと筆者の共著論文 [KS] を、量子群に関する予備知識を
できるだけ仮定せずに、環論の研究者向けに解説してほしい、

というものであった。[KS] の Main Theorem は量子群の下三角部分代数 U_v^- の結晶基底（crystal base）を箙（quiver）の幾何学を用いて実現するというもので、量子群や crystal base についてある程度知っていることを前提にしないと、statement を述べることすらできない。正直なところ、この結果を量子群に関する予備知識を使わずに説明するためにはどうしたらいいのか？と随分迷った、というのが本音である。

とはいえ引き受けた以上何とかしなければいけないわけで、筆者なりの工夫をしてみたつもりだが、環論の研究者の方々にどこまで通じたか、不安の残る点は多々ある。至らなかった点は数多くあると思うが、多少なりとも興味を持って頂ければ幸いに思う。

もともと量子群（量子包絡環）$U_v = U_v(\mathfrak{g})$ は統計物理におけるある種のモデル（可解格子模型）を解くために導入された、いわば “道具” であったわけだが、１９９０年前後のいくつかの発見を契機として、量子群の研究の方向性は大きく変わっていくことになった。

その一つが Ringel による quiver の表現論との関係の発見 ([R2]) である。Ringel は quiver Γ が A,D,E 型の場合に、Γ の表現の同値類が生成する vector space 上に、表現の extension のデータから定まる積構造を定義し、このようにして定まる代数 (Ringel-Hall algebra) が量子群の下三角部分代数 U_v^- と同型であること証明した。このノートではまず手始めとして、quiver の表現論に関する基本事項を準備した後（２節）、Ringel による上記の結果の紹介をする（３節）。量子群の定義関係式は複雑で、「なぜそんな定義をするのか？」という疑問は当然湧くことと思う。quiver の表現論というフィルターを通して見ることで、「結構自然な定義なのかも知れない」と思って頂ければ、筆者の意図は十分果たせたことになる。

続く 4 節では Lusztig による量子群の下三角部分代数 U_v^- の幾何学的実現 ([L1]) を簡単に紹介する。この結果は、上記 Ringel の結果の “幾何学化” と呼ぶべきもので、その際の

keyになるアイデアが "convolution 積" である。考えたい algebra を幾何学化することによって、その algebra 自身の構造、および表現論を詳しく調べるという考え方は、Ringel の結果（１９９０年ごろ）以前にすでに知られていた。その典型例は Weyl 群の群環の場合、および Hecke 環の場合である[1]。このような方向性の研究を世界的にリードしていたうちの一人が Lusztig である。彼はそれまでに開発されていた種々の道具を quiver の場合に適用することにより、量子群の幾何学的実現を得た。その意味で Lusztig による [R2] の幾何学化は、上記の結果の quiver version と言うこともできるだろう[2]。またここで用いた convolution 積の考え方は5節以降でも重要な役割を果たすことになる。

4節までが主に A,D,E 型の quiver の表現論を扱っていたのに対し、5節以降は quiver with relation の話である。今回は特に preprojective algebra の場合を扱う。

まず5節で preprojective algebra の表現論に関して知られている事柄を簡単に紹介し、ベキ零な表現全体が作る代数多様体 (nilpotent variety) を導入する。nilpotent variety は、いわば "preprojective algebra のベキ零表現を全部知っている" 多様体であるが、ごく一部の例外を除いて preprojective algebra の表現型は wild であり、そこから preprojective algebra の表現論に関するデータを取り出すことは難しい。しかし nilpotent variety の（代数多様体としての）既約成分全体の作る集合に着目すると、ある特殊な構造が見えてくる。それが crystal structure と呼ばれるものである。

実際の講演時にはオーガナイザーからのリクエストもあり、crystal に関しては殆ど何も話さなかったが、このノートでは6節に crystal および crystal base に関する基本事項の説明を加えることにした。crystal base とは、平たく言えば量子群 U_v の表現の $v \to 0$ における基底のことであり、１９９０年代初めに柏原によって導入された ([K1])。$v \to 0$ なる極限をとること、すなわち crystal base を考えることによって、量子群の表現に関する種々の問題が組み合わせ論の問題に翻訳されてしまう。現在では量子群の表現論において crystal base は欠かせない道具の一つとなっている。また crystal とは、crystal base の持つ性質を抽象化することによって得られる概念で、これも柏原により導入された。抽象化することによって、crystal の理論は量子群の表現論の範疇を超えて、さらに広範な応用を持つことになった。有木による Hecke 環の表現論への応用 ([A1],[A2])、Brandan や Kleshchev らによる対称群の moduler 表現への応用 ([BK],[Kl] 等) はその典型的な例である[3]。

7節では、前半で5節で導入した既約成分全体の作る集合に crystal の構造が入ることを示す。crystal structue を定義するにあたって、4節で述べた convolution 積の考え方が再び用いられることになる。7節の後半では、既約成分全体が crystal として量子群の下三角部分 U_v^- の crystal base と同型であるという、[KS] の主定理を紹介する。すでに述べたように preprojective algebra は一般に wild な表現型を持つが、nilpotent variety の既約成分に関する限り、crystal の理論の助けを借りることによって、全体像をコントロールすることが出来るのである。

---

[1]挙げるべき文献は数多くあるが、全てを列挙するわけにもいかないのでここでは [CG], [G], [KL1], [KL2], [T] に止める。特に [CG] には詳しい文献表が出ているので、詳しくはそちらを参照されたい。

[2]もちろん、単なるアナロジー以上の結果が含まれていることは、言うまでもない。

[3][A2] には周辺分野の概説および詳しい文献表が出ている。また本報告集掲載（予定）の飛田さんの解説記事 [飛田] も、併せて参照されるとよいだろう。

また、あとがきに代えて、8節に最近の Geiss-Leclerc-Schröer の仕事に関する簡単な紹介を加えた。本文にも書いたが、この周辺は近年活発に研究が行われている分野になっている。

最後に、タイトルにある「箙と量子群」に関連する話題の中で、このノートに書いたことは全体の一部に過ぎないことを注意しておきたい。書けなかったことの中でも重要な事柄は多い。例えば Lusztig による標準基底 (canonical base) の理論や、中島による箙多様体 (quiver variety) の理論等はその最たるものである[4]。これらの話題に全く触れることができなかったのは残念であるが、紙数の都合もあるので、今回は御容赦頂きたい。

• 謝辞　筆者のような門外漢に講演の機会を与えてくださったオーガナイザーの方々に感謝します。特に名古屋大学の伊山修さんには講演内容を練っている段階から議論につき合って頂き、貴重なご意見を頂きました。この場を借りて感謝します。

• 記号に関する注意　このノートでは特に断りのない限り K は単なる体を表すこととする。また algbera A に対して A-module とは常に left module を考えることとする。

量子群に関する文献では q を不定元と思って、量子群を $U_q(\mathfrak{g})$ なる記号で表すのが普通であるが、このノートでは q には別の意味（有限体の位数）があるので、替わりに v を不定元を表す記号として用い、量子群を $U_v(\mathfrak{g})$ と書くことにした。Lusztig 等、正標数の代数幾何と量子群の関係を論じている文献では比較的よく用いられる記号なので混乱はないと思う。

2　Quiver とその表現

2.1　Quiver の定義

Definition 2.1.1. 以下のデータを与える：
(1) 有限集合 I（頂点の集合），
(2) 有限集合 H（矢印の集合），
(3) 2つの写像 $\mathrm{out}: H \to I$, $\mathrm{in}: H \to I$,
(4) H の involution: $\tau \mapsto \overline{\tau}$.

さらにこれらは次の公理を満たすとする:
(a) $\mathrm{in}(\overline{\tau}) = \mathrm{out}(\tau)$ かつ $\mathrm{out}(\overline{\tau}) = \mathrm{in}(\tau)$,
(b) 任意の $\tau \in H$ に対して、$\mathrm{out}(\tau) \neq \mathrm{in}(\tau)$.

このとき、5つ組 $\Gamma = (I, H, \mathrm{out}, \mathrm{in}, \overline{})$ を、double quiver と呼ぶ。以下では $\Gamma = (I, H)$ と略記することにするが、double quiver を考える場合には常に out, in, $\overline{}$ は指定されているものと考えることにする。

また、H の部分集合 Ω であって、$\Omega \cap \overline{\Omega} = \phi$ かつ $\Omega \cup \overline{\Omega} = H$ を満たすものを、orientation と呼び、4つ組 $\Gamma = (I, \Omega, \mathrm{out}, \mathrm{in})$ を quiver と呼ぶ（以下では $\Gamma = (I, \Omega)$ と略記する)。

double quiver $\Gamma = (I, H)$ に対して、以下のように有限有向グラフを対応させ、Γ とグラフを同一視する。$\tau \in H$ に対して、$i = \mathrm{out}(\tau) \in I$, $j = \mathrm{in}(\tau) \in I$ であるとき、

[4] 前者に関しては [L1,2,3], 後者に関しては [N1,2,3] および [中島] を挙げておく。

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "\tau"] & j \end{tikzcd}$$

と書く。このとき、定義の条件 (a) は involution: $\tau \mapsto \overline{\tau}$ が「矢印の向きをひっくり返す」という操作を表すことを意味し、条件 (b) は「ある頂点から出発して、自分自身に返ってくる矢印は存在しない（いわゆる no-loop condition）」と言っていることになる[5]。

以後しばらくは quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ のみを考えることにする。double quiver の方は 5 節以降で登場することになる。

quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ に対して、矢印の向きを無視して得られる有限グラフを $|\Gamma|$ と書き、Γ の underlying graph と呼ぶ。

Example 2.1.2.

$$\Gamma = (I, H) \ : \ \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left] & 2 \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & 3 \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & 4 \arrow[l, shift left] \arrow[r, shift left] & 5 \arrow[l, shift left] \end{tikzcd}$$

とする。今の場合 orientation Ω の選び方は全部で $2^4 = 16$ 通りあるが、例えば

$$\Omega \ : \ \begin{tikzcd} 1 \arrow[r] & 2 & 3 \arrow[l] & 4 \arrow[l] \arrow[r] & 5 \end{tikzcd}$$

をとれば、$\overline{\Omega}$ は

$$\overline{\Omega} \ : \ \begin{tikzcd} 1 & 2 \arrow[l] \arrow[r] & 3 \arrow[r] & 4 & 5 \arrow[l] \end{tikzcd}$$

である。この場合の underlying graph $|\Gamma|$ は A_5 型の Dynkin 図形である。

Example 2.1.3.

$$\Gamma = (I, H) \ : \ \begin{tikzcd} \circ \arrow[r, shift left=4.5] \arrow[r, shift left=1.5] & \circ \arrow[l, shift left=1.5] \arrow[l, shift left=4.5] \end{tikzcd}$$

とする。矢印に上から $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ と名前を付けよう。この場合 orientation の選び方は 4 つの矢印の中から 2 つを選ぶので全部で 6 通りある[6]。

この場合には involution $\tau \to \overline{\tau}$ の与え方に不定性がある。例えば

$$\overline{\tau}_1 = \tau_3, \qquad \overline{\tau}_2 = \tau_4$$

としてもよいし、

$$\overline{\tau}_1 = \tau_4, \qquad \overline{\tau}_2 = \tau_3$$

としても定義は満たされる。$\Gamma = (I, H)$ は involution のデータまで指定しているものなので、double quiver $\Gamma = (I, H)$ が与えられた時点で「（省略されてはいるけれど）どちらの involution を考えているのか？」まで指定されていることに注意されたい。

---

[5] 一般に quiver と言う場合には $\Gamma = (I, \Omega)$ を単独で考え、反対向きの矢印を併せて考えることはしない場合が多い。また「頂点集合 I や矢印の集合 H は無限集合であってもよい」とするのが普通である。（一般の quiver と区別するために、今回のようなものは「finite quiver」と呼ばれる。）ただしその場合には、一つの頂点に入ってくる矢印の本数と、出て行く矢印の本数は共に有限であるという条件 (locally finiteness condition) を課す。さらに条件 (b) も普通は課さない。

[6] 例えば τ_1 と τ_2 は全く同じ方向を向いている矢印であるが、これらは区別されていることに注意。

今 involution として前者が与えられているとしよう。例えば $\Omega = \{\tau_1, \tau_2\}$ とすれば、$\overline{\Omega} = \{\tau_3, \tau_4\}$ である。繰り返しになるが、この場合「τ_1 の向きをひっくり返して得られる矢印 $\overline{\tau_1}$」はあくまでも τ_3 なのであって、τ_4 ではない。

2.2 Quiver の表現

Definition 2.2.1. $\Gamma = (I, \Omega)$ を quiver とし、次のような category $M\Omega$ を考える。
object: $\mathrm{V} = (V, B)$. ただし $V = \oplus_{i \in I} V_i$ は K 上の有限次元 I-graded vector space。また $B = (B_\tau)_{\tau \in \Omega}$ は K-linear map $B_\tau : V_{\mathrm{out}(\tau)} \to V_{\mathrm{in}(\tau)}$ $(\tau \in \Omega)$ の組。
morphism: 2 つの object $\mathrm{V} = (V, B)$, $\mathrm{V}' = (V', B')$ に対して、V から V' への morphism $\phi = (\phi_i)_{i \in I}$ とは、K-linear map $\phi_i : V_i \to V_i'$ $(i \in I)$ の組であって、任意の $\tau \in \Omega$ に対して、$\phi_{\mathrm{in}(\tau)} B_\tau = B'_\tau \phi_{\mathrm{out}(\tau)}$ が成り立つもののことを言う。

ここで定義した $M\Omega$ を quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ の表現の category、$M\Omega$ の object を quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ の表現と呼ぶ。

次に category としての $M\Omega$ の性質を列挙しよう。
(a) $\mathrm{V} \in \mathrm{ob}(M\Omega)$ に対して、

$$\underline{\dim}\mathrm{V} := (\dim_K V_i)_{i \in I} \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}$$

を V の dimensiom vector と呼ぶ。$M\Omega$ は dimension vector から定まる graded structure を持つ。すなわち $M\Omega_d$ $(d \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0})$ を $\underline{\dim}\mathrm{V} = d$ を満たすものからなる $M\Omega$ の full subcategory とすると、$M\Omega = \oplus_{d \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}} M\Omega_d$ が成り立つ。
(b) $M\Omega$ は abelian category である。したがって "simple object"、"indecomposable object" 等の概念が意味を持つ[7]。念のため正確な定義を述べておこう。$\mathrm{V} \in \mathrm{ob}(M\Omega)$ が simple であるとは、非自明な subrepresentation を持たないということである。また V が indecomosable であるとは「$\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \oplus \mathrm{V}_2$ ならば $\mathrm{V}_1 = 0$ または $\mathrm{V}_2 = 0$」を満たすこと言う。ここで 0 は V として 0 次元 vector space $\{0\}$、B として 0-map の組をとって定義される quiver の表現である。

特に $M\Omega$ は丁度 $|I|$ 個の simple objects $\mathrm{F}_{i,\Omega} = (V(i), B(i))$ を持ち、それらは以下のようなものである：

$V(i) = \oplus_{j \in I} V(i)_j$ は $V(i)_i = K$, $V(i)_j = \{0\}$ $(j \neq i)$ なる 1 次元の I-graded vector space。$B(i) = (B(i)_\tau)_{\tau \in \Omega}$ は 0-map の組。
(c) 一般に $M\Omega$ は semisimple category ではない。つまり indecomposable だが simple でない object が存在する。

Example 2.2.2.

$$\Gamma = (I, \Omega) \ : \ \underset{1}{\circ} \xrightarrow{\ \tau\ } \underset{2}{\circ}$$

として、$\mathrm{V} = (K \xrightarrow{\mathrm{id}} K)$ とすれば $\underline{\dim}\mathrm{V} = (1, 1)$ で、これは indecomposable object である。また $\mathrm{F}_{2,\Omega} = (0 \xrightarrow{0} K)$ とすると、これは simple object である。$\phi_1 : K \to \{0\}$ を 0-map、$\phi_2 : K \xrightarrow{\sim} K$ を同型写像とするとき、図式

[7] より正確には indecomposable object への分解の一意性も成り立つ。

$$\begin{array}{ccc} \{0\} & \xrightarrow{0} & K \\ {\scriptstyle \phi_1=0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_2} \\ K & \xrightarrow{\mathrm{id}} & K \end{array}$$

は可換である。すなわち $\mathrm{F}_{2,\Omega} \hookrightarrow \mathrm{V}$ であり、V は非自明な subobject を持つので simple ではない。

一方 $\mathrm{F}_{1,\Omega} = (K \xrightarrow{0} \{0\})$ とすると、これも simple object である。I-graded vector space としては $K \oplus \{0\} \hookrightarrow K \oplus K$ であるが、図式

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{0} & \{0\} \\ {\scriptstyle \phi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi_2} \\ K & \xrightarrow{\mathrm{id}} & K \end{array}$$

を可換にする $\phi = (\phi_1, \phi_2)$ は $(0,0)$ しかない。したがって $\mathrm{F}_{1,\Omega}$ は V の subobject ではない。しかし V から $\mathrm{F}_{1,\Omega}$ への非自明な morphism は存在する。実際、図式

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{0} & \{0\} \\ {\scriptstyle \psi_1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \psi_2=0} \\ K & \xrightarrow{\mathrm{id}} & K \end{array}$$

は任意の $\psi_1 \in \mathrm{Hom}_K(K,K)$ に対して可換となる。(ψ_2 の方は自動的に 0-map となる。) 非自明な $\psi = (\psi_1, 0) : \mathrm{V} \to \mathrm{F}_1$ に対し、$\mathrm{Ker}\psi$ は先の $\mathrm{F}_{2,\Omega}$ と同型になる。言い換えれば abelian category $M\Omega$ における split しない完全系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{F}_{2,\Omega} \xrightarrow{\phi} \mathrm{V} \xrightarrow{\psi} \mathrm{F}_{1,\Omega} \longrightarrow 0$$

が存在するということになる。

上記のように simple object が非常に簡単に書き下せるのに比べて、indecomposable object をリストアップすることは一般には非常に難しい[8]。しかし quiver の形を限定した場合には次の結果が知られている。

Theorem 2.2.3 (Gabriel). quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ は connected と仮定する。
(1) $M\Omega$ が有限個の indecomposable object を持つことと、$|\Gamma|$ が A,D,E 型の Dynkin 図形であることは同値である。
(2) $|\Gamma|$ が A,D,E 型の Dynkin 図形であるとする。対応する (A,D,E 型の) positive root の集合を Δ_+、simple root の集合を $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ とし、$Q = \oplus_{i\in I}\mathbb{Z}\alpha_i$ を root lattice とする。また $M\Omega$ の indecomposable object $\mathrm{V} = (V, B)$ に対して、以下のように Q の元を対応させる :

$$\mathrm{V} \mapsto \sum_{i\in I}(\dim_K V_i)\alpha_i \in Q.$$

このとき、上の対応は $M\Omega$ の indecomposable object の同型類と Δ_+ の間の 1 対 1 対応を与える。さらに simple object の同型類と simple root の集合 $\{\alpha_i\}_{i\in I}$ が 1 対 1 に対応する。

[8] というより、普通は出来ない。

Remark . この定理の強力なところは（$|\Gamma|$ が A,D,E 型の Dynkin 図形であるという制約付きではあるが)、indecomposable object が dimension vector を決めるだけで（同型類を除いて）一意的に決まってしまい、さらにそれが Δ_+ という、体 K の取り方には全く関係のないデータでコントロールされているという点にある。特に強調したいのは「体 K の取り方には関係のないデータ」ということである。$M\Omega$ の方は quiver Γ の体 K の表現の category を考えているのであって、その構造は K の取り方に通常は依存する（以下の Example 2.2.6 を参照)。それが「A,D,E なら K の取り方に関係なくいつでも同じ」と言っているわけで、こんな都合のいい話はこれ以外ではあり得ない。この点は後々も重要になるので、是非心にとめておいて頂きたい。

Example 2.2.4. 最も簡単なケースとして

$$\Gamma = (I, \Omega) \ : \ \underset{1}{\circ} \xrightarrow{\tau} \underset{2}{\circ} \qquad (|\Gamma| \text{ は } A_2 \text{ 型 Dynkin 図形})$$

を考えよう。この場合の Γ の表現 $\mathrm{V} = (V, B)$ は、$V = V_1 \oplus V_2$ と $B = B_\tau \in \mathrm{Hom}_K(V_1, V_2)$ の組である。V_i $(i = 1, 2)$ の次元を d_i とすれば $B \in \mathrm{Mat}(d_2, d_1; K)$ としてよい。ここに $\mathrm{Mat}(d_2, d_1; K)$ は K-係数の $d_2 \times d_1$ 行列全体を表す。

2 つの表現 $\mathrm{V} = (V, B)$ と $\mathrm{V}' = (V', B')$ が同型であるということは、同型写像 $\phi_i : V_i \xrightarrow{\sim} V_i'$ $(i = 1, 2)$ であって $\phi_2 B = B' \phi_1$ を満たすものが存在する、ということであった。したがって表現の同型類は、$\mathrm{Mat}(d_2, d_1; K)$ に右から $GL(d_1, K)$、左から $GL(d_2, K)$ を作用させたときの、$GL(d_1, K) \times GL(d_2, K)$-orbit と 1 対 1 に対応するが、これは行列 B の rank を求める操作に他ならない。

今の場合 $|\Gamma|$ は A_2 型 Dynkin 図形だから、$\Delta^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}$ であり、対応する indecomposable な Γ の表現は

$$\begin{array}{ccc} \alpha_1 & \leftrightarrow & (K \xrightarrow{0} \{0\}) \\ \alpha_2 & \leftrightarrow & (\{0\} \xrightarrow{0} K) \\ \alpha_1 + \alpha_2 & \leftrightarrow & (K \xrightarrow{\mathrm{id}} K) \end{array}$$

である。この場合の simple objects は $\mathrm{F}_{1,\Omega}$, $\mathrm{F}_{2,\Omega}$ であるが、これらはそれぞれ simple roots α_1, α_2 に対応している。

Example 2.2.5.

$$\Gamma = (I, \Omega) \ : \ \underset{1}{\circ} \longrightarrow \underset{2}{\circ} \longrightarrow \underset{3}{\circ} \qquad (|\Gamma| \text{ は } A_3 \text{ 型 Dynkin 図形})$$

この場合は

$$\Delta^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\} \ (6 \text{ 個}).$$

したがって indecomposable object は（同型を除いて）全部で 6 種類ある。

$$\begin{array}{cclccl} \alpha_1 & \leftrightarrow & (K \xrightarrow{0} \{0\} \xrightarrow{0} \{0\}), & \alpha_1 + \alpha_2 & \leftrightarrow & (K \xrightarrow{\mathrm{id}} K \xrightarrow{0} \{0\}), \\ \alpha_2 & \leftrightarrow & (\{0\} \xrightarrow{0} K \xrightarrow{0} \{0\}), & \alpha_2 + \alpha_3 & \leftrightarrow & (\{0\} \xrightarrow{0} K \xrightarrow{\mathrm{id}} K), \\ \alpha_3 & \leftrightarrow & (\{0\} \xrightarrow{0} \{0\} \xrightarrow{0} K), & \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & \leftrightarrow & (K \xrightarrow{\mathrm{id}} K \xrightarrow{\mathrm{id}} K). \end{array}$$

Example 2.2.6. $|\Gamma|$ が A,D,E 型の Dynkin 図形でない場合の例として

$$\Gamma = (I, \Omega) \ : \ 1 \underset{\tau_2}{\overset{\tau_1}{\rightrightarrows}} 2 \qquad (\ |\Gamma| = \circ\!=\!=\!\circ \ , \ \tilde{A}_1 \text{ 型 affine 図形})$$

を考えよう。この Γ を Kronecker quiver という。Γ の表現の構造は非常に詳しく調べられているが（例えば [ARS] 参照）、話がややこしくなってしまうので $\underline{\dim}\mathbf{V} = (1,1)$ となる表現 $\mathbf{V} = (V, B)$ のみ考えることにする。

この場合 $V = K \oplus K$ であるので、$B_{\tau_i} \in K \cong \mathrm{Hom}_K(K, K)$ $(i = 1, 2)$ としてよい。（ただし $B = (B_{\tau_1}, B_{\tau_2})$）また表現の同型類は

$$\mathrm{Hom}_K(K, K) \oplus \mathrm{Hom}_K(K, K) \cong K \oplus K$$

への、$GL(K) \times GL(K) \cong K^\times \times K^\times$ の作用に関する orbit と 1 対 1 に対応する。この作用に関する quotient をとれば

$$(K \oplus K)/(K^\times \times K^\times) \cong [(0,0)] \sqcup \mathbb{P}^1(K)$$

となる。$[(0,0)]$ に対応する Γ の表現は

$$(K \underset{0}{\overset{0}{\rightrightarrows}} K)$$

であるが、これは 2 つの simple object の直和 $\mathbf{F}_{1,\Omega} \oplus \mathbf{F}_{2,\Omega}$ に同型であり、indecomposable ではない。一方 $\mathbb{P}^1(K)$ の点を同次座標で $[a_1; a_2] \in \mathbb{P}^1(K)$ とかくことにすれば、この点に対応する Γ の表現は

$$(K \underset{a_2}{\overset{a_1}{\rightrightarrows}} K)$$

である。a_1, a_2 は同時には 0 にならず、これは常に indecomposable な表現である。したがって $\underline{\dim}V = (1,1)$ となる Kronecker quiver Γ の indecomposable な表現の同型類は "$\sharp(\mathbb{P}^1(K))$ 個" あり、dimension vector を決めても一意的には定まらない。言い方を換えれば、Γ の indecomposable な表現の同型類の個数は K の位数に依ってしまう、ということになる。これは A,D,E では起こりえなかった現象である[9]。

2.3 Path algebra とその表現

Definition 2.3.1. (1) quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ に対して、

$$\mathcal{P}_N = \{p = (\tau_N, \cdots, \tau_1) \in \Omega^N \mid \mathrm{in}(\tau_k) = \mathrm{out}(\tau_{k+1}) \text{ for any } 1 \le k \le N-1\}$$

とし、$p = (\tau_N, \cdots, \tau_1) \in \mathcal{P}_N$ を長さ N の path と呼ぶ[10]。以下では $p = \tau_N \cdots \tau_1$ と略記する。また $N = 0$ の場合には $\mathcal{P}_0 = I$ とし、その元を長さ 0 の path と呼ぶ。区別のため $i \in I$ を長さ 0 の path と思う場合には e_i と書くことにする。
(2) path $p = \tau_N \cdots \tau_1$ に対し $\mathrm{out}(p) = \mathrm{out}(\tau_1)$, $\mathrm{in}(p) = \mathrm{in}(\tau_N)$ と定める。長さ 0 の path e_i

[9] というより、A,D,E が特別というべき。
[10] 特に Ω の元は長さ 1 の path である。

に関しては $\mathrm{out}(e_i) = \mathrm{in}(e_i) = i$ とする。２つの path p_1, p_2 に対し、$\mathrm{in}(p_2) = \mathrm{out}(p_1)$ であるとき p_1 と p_2 は合成可能であるといい、新しく作られる path p_1p_2 を p_1 と p_2 の合成と呼ぶ。
(3) 長さ０以上の path 全体で張られる K 上の vector space $K[\Gamma]$ に、積構造を

$$p_1 \cdot p_2 = \begin{cases} p_1p_2, & (p_1 \text{ と } p_2 \text{ は合成可能}), \\ 0, & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

によって定める。このようにして得られる K 上の associative algebra $K[\Gamma]$ を Γ の path algebra という。

$K[\Gamma]$ に関して簡単にわかる性質をいくつか述べよう。長さ０の path たちは

$$e_i^2 = e_i, \quad e_ie_j = 0 \ (i \neq j)$$

なる性質を持つ。つまり e_i たちは互いに直交するベキ等元である。また原始的であることも明らかであろう。さらに

$$1 = \sum_{i \in I} e_i$$

は $K[\Gamma]$ の単位元である。したがってこの式は１の原始ベキ等元分解を与える。
　また $K[\Gamma]$ が有限次元であることと、Γ が oriented cycle を持たないことは同値である。ここで oriented cycle とは長さ２以上の path p であって、$\mathrm{out}(p) = \mathrm{in}(p)$ であるものをいう。

Example 2.3.2.

$$\Gamma = (I, \Omega) \ : \ \underset{1}{\circ} \xrightarrow{\tau_1} \underset{2}{\circ} \xrightarrow{\tau_2} \underset{3}{\circ} \xrightarrow{\tau_3} \underset{4}{\circ}$$

長さ０の path : $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$
長さ１の path : $\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$
長さ２の path : $\{\tau_2\tau_1, \tau_3\tau_2\}$
長さ３の path : $\{\tau_3\tau_2\tau_1\}$
長さ４以上の path は存在しない。

よって $K[\Gamma]$ は１０次元。また単位元は $1 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$。

quiver Γ の表現を考えることと、path algebra $K[\Gamma]$ の（有限次元）module を考えることは、実質同じことである。実際、$\mathbf{V} = (V, B)$ を Γ の表現としよう。path $p = \tau_N \cdots \tau_1$ に対して、$B_p = B_{\tau_N} \cdots B_{\tau_1} \in \mathrm{End}(V)$ を対応させることにより、V を $K[\Gamma]$-module と思うことができる。逆に $K[\Gamma]$-module$V$ が与えられたとする。すなわち準同型 $\rho : K[\Gamma] \to \mathrm{End}(V)$ が与えられたとする。各 $i \in I$ に対して $V_i = e_iV$ と置く。$1 = \sum_{i \in I} e_i$ だから、$V = \oplus_{i \in I} V_i$ である。Ω は長さ１の path の集合であるので、$\tau \in \Omega$ に対して $\rho(\tau) \in \mathrm{End}(V)$ が定まるが、$V_i = e_iV$ であったのことに注意すると、$\rho(\tau) : V_{\mathrm{out}(\tau)} \to V_{\mathrm{in}(\tau)}$ と思うことができる。そこで $B_\tau = \rho(\tau)$ と置けば、quiver の表現 $\mathbf{V} = (V, B)$ が定まる。
　したがって Gabriel の定理は

「indecomposable $K[\Gamma]$-module の同型類が有限個であることと、
$|\Gamma|$ が A,D,E 型の Dynkin 図形であることは同値である」

と言ってもよい。以後断り無しに quiver の表現と path algebra の表現を同一視して考えることにする。

2.4 Variety of modules

$V = \sum_{i \in I} V_i$ を K 上の I-graded vactor space、先の場合にならって $\underline{\dim} V = (\dim_K V_i)_{i \in I}$ を V の dimension vector と呼ぶことにしよう。

$$E_{V,\Omega} = \bigoplus_{\tau \in \Omega} \mathrm{Hom}_K(V_{\mathrm{out}(\tau)}, V_{\mathrm{in}(\tau)})$$

とし、$E_{V,\Omega}$ の元を $B = (B_\tau)_{\tau \in \Omega}$ と書くことにすれば、組 $\mathbf{V} = (V, B)$ は $M\Omega_d$ の object である。(ただし $d = \underline{\dim} V$。) すなわち $E_{V,\Omega}$ は $d = \underline{\dim} V$ なる quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ の表現全体と思うことができる。その意味で $E_{V,\Omega}$ のことを $\mathrm{mod}(K[\Gamma], V)$ とも書き、variety of modules (of $K[\Gamma]$) と呼ぶ[11]。

代数群 $G_V = \prod_{i \in I} GL(V_i)$ は以下のようにして $E_{V,\Omega}$ に自然に作用する:$g = (g_i)_{i \in I} \in G_V$ として、

$$(B_\tau) \mapsto (g_{\mathrm{in}(\tau)} B_\tau g^{-1}_{\mathrm{out}(\tau)}).$$

このとき次の 1 対 1 対応はあきらかであろう:

$$\begin{aligned} \{E_{V,\Omega} \text{の } G_v\text{-orbit}\} &\longleftrightarrow \{M\Omega_d \text{の同型類}\} \\ &\longleftrightarrow \{\underline{\dim} = d \text{ となる } K[\Gamma]\text{-module の同型類}\}. \end{aligned}$$

3 Ringel-Hall algberas

この節では K は有限体 $\mathbb{F}_q$ ($q = p^m$, p は素数)、quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ の underlying graph $|\Gamma|$ は A,D,E 型の Dynkin 図形であると仮定する。(以下、このような quiver を A,D,E 型の quiver と呼ぶことにする。)

3.1 定義

Definition 3.1.1. $R\Omega$ を $M\Omega$ の object の同型類 $[\mathbf{V}]$ を基底とする $\mathbb{C}$-vector space とし、$R\Omega$ に積 $*$ を以下のように定義する:

$$[\overline{\mathbf{V}}] * [\mathbf{V}'] = \sum_{\mathbf{V}} g(\mathbf{V}; \overline{\mathbf{V}}, \mathbf{V}')[\mathbf{V}].$$

ただし

$$g(\mathbf{V}; \overline{\mathbf{V}}, \mathbf{V}') = \sharp\{\mathbf{W} \text{ は } \mathbf{V} \text{ の部分表現} \mid \mathbf{W} \cong \mathbf{V}' \text{かつ } \mathbf{V}/\mathbf{W} \cong \overline{\mathbf{V}}\}.$$

[11] とはいってもこの場合は単なる vector space である。後で本当に"variety"になる場合を扱う。(preprojective algebra の節を参照のこと。)

定義から $R\Omega$ は単位元 $1 = [0]$ を持つ associative algebra であることがわかる。$R\Omega$ を ($\Gamma = (I, \Omega)$ に付随する) Ringel-Hall algebra と呼ぶ。

また $R\Omega_d$ を $\underline{\dim}\mathrm{V} = d$ を満たす同型類で張られる $R\Omega$ の部分空間とすると、各 $R\Omega_d$ は有限次元の vector space で、

$$R\Omega = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}} R\Omega_d$$

が成り立つ。

$K = \mathbb{F}_q$ であるから、$g(\mathrm{V}; \overline{\mathrm{V}}, \mathrm{V}')$ は常に有限の数であることに注意されたい。

Remark . 今回は Ringel-Hall algebra $R\Omega$ を $|\Gamma|$ が A,D,E 型の Dynkin 図形の場合に限って導入したが、係数体 K が有限体であれば特に A,D,E にこだわらずとも一般の quiver に対して $R\Omega$ を定義することは可能である[12]。では「A,D,E に話を限定する意味はどこにあるのか？」というと、その理由の一つは Gabriel の定理にある。2.2 節の Remark でも述べたが、Gabriel の定理によれば $M\Omega$ の indecomposable object の "形" は体 K の取り方に依存せず、dimension vector だけで同型類を除いて一意的に定まる。したがって A,D,E ならば、quiver の表現 $\mathrm{V}, \mathrm{V}', \overline{\mathrm{V}}$ の "形" を K の取り方に依らずに指定することができ、さらに有限体の範囲で K をいろいろ取り替えた時に、構造定数 $g(\mathrm{V}; \overline{\mathrm{V}}, \mathrm{V}')$ たちを比べることが意味を持つ。区別のために $K = \mathbb{F}_q$ とした場合の構造定数を $g(\mathrm{V}; \overline{\mathrm{V}}, \mathrm{V}')^{\mathbb{F}_q}$ と書こう。このとき $\mathbb{Z}$ 係数の多項式 $\mathrm{g}(\mathrm{V}; \overline{\mathrm{V}}, \mathrm{V}')(v) \in \mathbb{Z}[v]$ が存在して、

$$g(\mathrm{V}; \overline{\mathrm{V}}, \mathrm{V}')^{\mathbb{F}_q} = \mathrm{g}(\mathrm{V}; \overline{\mathrm{V}}, \mathrm{V}')(q)$$

となることが知られている。この多項式 $\mathrm{g}(\mathrm{V}; \overline{\mathrm{V}}, \mathrm{V}')(v)$ を Hall polynomial と呼ぶ。このようなことが成り立てば、有限体の位数 q をあたかもパラメータののように扱うことができるし、(位数 1 の体が存在しないにもかかわらず) $v = 1$ を代入することが可能となる。実際、後で紹介する「量子群との関係」の背後にはこのような事実があり、"$v = 1$ を代入する" ことによって $R\Omega$ が、A,D,E 型の有限次元 simple Lie algebra の nilpotent radical $\mathfrak{n}$ の universal enveloping algebra $U(\mathfrak{n})$ と同型になることが知られている。しかしこんなうまい話は A,D,E でないと成立しない[13]。

$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_{i,\Omega}$ を $M\Omega$ の simple object、$i \circ\!\xrightarrow{\tau}\!\circ\, j$ であるとき[14]、$\mathbf{F}_{ij} = (V, B)$ を

$$V_k = \begin{cases} \mathbb{F}_q, & k = i \text{ or } j, \\ \{0\}, & \text{otherwise}, \end{cases} \qquad B_\mu = \begin{cases} \mathrm{id}, & \mu = \tau, \\ 0, & \text{otherwise}, \end{cases}$$

とする。これは indecomposable な表現である。

Lemma 3.1.2. $i \circ\!\xrightarrow{\tau}\!\circ\, j$ のとき、

(1) $[\mathbf{F}_i] * [\mathbf{F}_j] = [\mathbf{F}_j] * [\mathbf{F}_i] + [\mathbf{F}_{ij}]$.

(2) $[\mathbf{F}_i] * [\mathbf{F}_{ij}] = q[\mathbf{F}_{ij}] * [\mathbf{F}_i], \quad [\mathbf{F}_{ij}] * [\mathbf{F}_j] = q[\mathbf{F}_j] * [\mathbf{F}_{ij}]$.

(3) $[\mathbf{F}_i] * [\mathbf{F}_i] * [\mathbf{F}_j] - (q+1)[\mathbf{F}_i] * [\mathbf{F}_j] * [\mathbf{F}_i] + q[\mathbf{F}_j] * [\mathbf{F}_i] * [\mathbf{F}_i] = 0,$
$[\mathbf{F}_i] * [\mathbf{F}_j] * [\mathbf{F}_j] - (q+1)[\mathbf{F}_j] * [\mathbf{F}_i] * [\mathbf{F}_j] + q[\mathbf{F}_j] * [\mathbf{F}_j] * [\mathbf{F}_i] = 0.$

[12] さらに言えば relation 付きの quiver であっても構わない。

[13] ここで述べたことの一部なら、cyclic quiver でも成立する。

[14] 今 $|\Gamma|$ は A,D,E 型の Dynkin 図形であると仮定しているので、i と j が connected であるとすると、このような状況しか起こりえない。

Proof. (3) が (1), (2) から従うことはすぐにわかる。したがって (1), (2) を示せばよい。(1): まず左辺を計算する。V が $g(\mathrm{V};\mathbf{F}_i,\mathbf{F}_j) \neq 0$ を満たすとすると、$\underline{\dim}\mathrm{V} = (1,1)$ でなければならない。この条件を満たすのは $\mathrm{V} = \mathbf{F}_i \oplus \mathbf{F}_j$ か $\mathrm{V} = \mathbf{F}_{ij}$ のいずれかである[15]。どちらの場合も V は $\mathbf{F}_j$ を submodule として持ち、かつ埋め込み $\mathbf{F}_j \hookrightarrow \mathrm{V}$ は一意的に定まる。さらに $\mathrm{V}/\mathbf{F}_j \cong \mathbf{F}_i$ も成り立つ。したがってどちらの場合も $g(\mathrm{V};\mathbf{F}_i,\mathbf{F}_j) = 1$ であり、

$$[\mathbf{F}_i] * [\mathbf{F}_j] = [\mathbf{F}_{ij}] + [\mathbf{F}_i \oplus \mathbf{F}_j]$$

を得る。

次に右辺を計算しよう。まず第 1 項であるが、先と同様に $g(\mathrm{V};\mathbf{F}_j,\mathbf{F}_i) \neq 0$ ならば $\underline{\dim}\mathrm{V} = (1,1)$ でなければならず、候補になりうるのは $\mathbf{F}_i \oplus \mathbf{F}_j$ か $\mathbf{F}_{ij}$ のいずれかである。今度の場合、$\mathbf{F}_i \oplus \mathbf{F}_j$ は $\mathbf{F}_i$ を submodule として持つ（さらに埋め込み $\mathbf{F}_i \hookrightarrow \mathbf{F}_i \oplus \mathbf{F}_j$ は一意的で、$(\mathbf{F}_i \oplus \mathbf{F}_j)/\mathbf{F}_i \cong \mathbf{F}_i$）が、$\mathbf{F}_i$ は $\mathbf{F}_{ij}$ の submodule ではない。よって

$$[\mathbf{F}_j] * [\mathbf{F}_i] = [\mathbf{F}_i \oplus \mathbf{F}_j]$$

が成り立ち、これで等式が示された。

(2): どちらも同じように示せるので、第 1 式のみ示す。まず左辺を計算する。$g(\mathrm{V};\mathbf{F}_i,\mathbf{F}_{ij}) \neq 0$ ならば $\underline{\dim}\mathrm{V} = (2,1)$ でなければならず、候補になりうるのは $\mathbf{F}_i^{\oplus 2} \oplus \mathbf{F}_j$ か $\mathbf{F}_i \oplus \mathbf{F}_{ij}$ のいずれかである。このうち $\mathbf{F}_i^{\oplus 2} \oplus \mathbf{F}_j$ は $\mathbf{F}_{ij}$ を submodule として持たないことから除外される。そこで埋め込み $\mathbf{F}_{ij} \hookrightarrow \mathbf{F}_i \oplus \mathbf{F}_{ij}$ の数を数えればよいことになる。quiver の表現としては

$$\mathbf{F}_{ij} = (\mathbb{F}_q \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{F}_q), \qquad \mathbf{F}_i \oplus \mathbf{F}_{ij} = (\mathbb{F}_q^{\oplus 2} \xrightarrow{B_\tau} \mathbb{F}_q)$$

であったことを思い出そう。このとき埋め込み $\phi = (\phi_i, \phi_j) : \mathbf{F}_{ij} \hookrightarrow \mathbf{F}_i \oplus \mathbf{F}_{ij}$ は、$\phi_1 : \mathbb{F}_q \hookrightarrow \mathbb{F}_q^{\oplus 2}$ と $\phi_2 : \mathbb{F}_q \cong \mathbb{F}_q$ の組である。話を簡単にするために、まず graded vector space としての埋め込みの数を数えると、ϕ_2 の方は同型写像だから 1 通りしかないが、$\phi_1 : \mathbb{F}_q \hookrightarrow \mathbb{F}_q^{\oplus 2}$ の方は $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)$ 分の可能性がありうる。つまり埋め込み方は $\sharp\{\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_q)\} = q+1$ 通りある。きちんと数えるために $\mathbb{F}_q^{\oplus 2}$ の基底を固定して B_τ が $(1\ 0)$ と行列表示（1×2 行列）されたとしよう。このとき上の $q+1$ 通りの埋め込み $\mathbb{F}_q \hookrightarrow \mathbb{F}_q^{\oplus 2}$ は以下のような行列表示

$$\phi_1^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \phi_1^{(k)} = \begin{pmatrix} 1 \\ k-1 \end{pmatrix} \quad (1 \le k \le q)$$

によって与えられる。これが quiver の表現の morphism になっているためには、図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{F}_q & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{F}_q \\ {\scriptstyle \phi_1^{(k)}}\downarrow & & \| \\ \mathbb{F}_q^{\oplus 2} & \xrightarrow{B_\tau} & \mathbb{F}_q \end{array}$$

が可換にならなければならないが、$B_\tau = (1\ 0)$ であったので $k = 0$ の場合には可換になりえない。（他の場合は OK。）ゆえに quiver の表現としての埋め込みは全部で q 通りある。また $(\mathbf{F}_i \oplus \mathbf{F}_{ij})/\mathbf{F}_{ij} \cong \mathbf{F}_i$ であるので、以上より

$$[\mathbf{F}_i] * [\mathbf{F}_{ij}] = q[\mathbf{F}_i \oplus \mathbf{F}_{ij}]$$

[15]（同型類を除いて）このようなものに限ることは Gabriel の定理が保証してくれる。

となることがわかる。

一方右辺の $[\mathbf{F}_{ij}]*[\mathbf{F}_i]$ の方であるが、左辺の場合と同様の議論により $g_{\mathbf{V};\mathbf{F}_{ij},\mathbf{F}_i}\neq 0$ ならば $\mathbf{V}=\mathbf{F}_i\oplus\mathbf{F}_{ij}$ でなければならないことがわかる。今度の場合は埋め込み $\mathbf{F}_i\hookrightarrow\mathbf{F}_i\oplus\mathbf{F}_{ij}$ の数を数えることになる。前の計算と同じ記号の下に

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{F}_q & \xrightarrow{0} & \{0\}\\ {\scriptstyle\phi_i^{(k)}}\downarrow & & \downarrow 0\\ \mathbb{F}_q^{\oplus 2} & \xrightarrow{B_\tau} & \mathbb{F}_q\end{array}$$

なる図式が可換になることが要請されるが、これを満たすのは $k=0$ の場合のみである。すなわち埋め込みは1通りしかない。したがって

$$[\mathbf{F}_{ij}]*[\mathbf{F}_i]=[\mathbf{F}_i\oplus\mathbf{F}_{ij}]$$

となる。以上を合わせて第1式を得る。□

また次の成立は容易である。

Lemma 3.1.3. 頂点 i と j が Γ の中で connected でないならば、

$$[\mathbf{F}_i]*[\mathbf{F}_j]=[\mathbf{F}_j]*[\mathbf{F}_i].$$

Proof. 両辺は $[\mathbf{F}_i\oplus\mathbf{F}_j]$ に等しい。 □

さらに次が成立する：

Proposition 3.1.4. $R\Omega$ は F_i $(i\in I)$ で生成される。

証明のためにはさらなる議論が必要になるので、ここでは省略する（例えば [R1], [L1] 等を参照）[16]。

3.2 Twisted Ringel-Hall algebras

この節と次節で、前節で定義した Ringel-Hall algebra $R\Omega$ と量子群との関係について述べる。そのために $R\Omega$ の積を以下のように modify する。

$$[\overline{\mathbf{V}}]\cdot[\mathbf{V}']=q^{\frac{1}{2}\langle\langle[\overline{\mathbf{V}}],[\mathbf{V}']\rangle\rangle}[\overline{\mathbf{V}}]*[\mathbf{V}'].$$

ここで $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ は

$$\langle\langle[\overline{\mathbf{V}}],[\mathbf{V}']\rangle\rangle=\sum_{i\in I}(\dim_{\mathbb{F}_q}\overline{V}_i)(\dim_{\mathbb{F}_q}V'_i)-\sum_{\tau\in\Omega}(\dim_{\mathbb{F}_q}\overline{V}_{\mathrm{out}(\tau)})(\dim_{\mathbb{F}_q}V'_{\mathrm{in}(\tau)})$$

によって定まる $R\Omega$ 上の bilinear form で、Euler-Ringel form と呼ばれる[17]。

[16] 例えば [L1] では reflection functor と量子群の PBW 型基底を使って、この事実を証明している。
[17] もちろん symmetric ではない。

Remark . 次の等式が知られている：

$$\begin{aligned}\langle\langle[\overline{\mathrm{V}}],[\mathrm{V}']\rangle\rangle &= \dim_{\mathbb{F}_q}\mathrm{Hom}_{M\Omega}(\overline{\mathrm{V}},\mathrm{V}')-\dim_{\mathbb{F}_q}\mathrm{Ext}^1_{M\Omega}(\overline{\mathrm{V}},\mathrm{V}')\\ &= \sum_{k\geq 0}(-1)^k\dim_{\mathbb{F}_q}\mathrm{Ext}^k_{M\Omega}(\overline{\mathrm{V}},\mathrm{V}').\end{aligned}$$

本質的なのは第1の等式で、第2の等式は path algebra $\mathbb{F}_q[\Gamma]$ が hereditary であることから従う。

以後煩雑になるので、同型類 [V] を V と略記する。積を modify した $(R\Omega,\cdot)$ に対して前節の結果を書き直しておこう。

Corollary 3.2.1. (1) $(R\Omega,\cdot)$ は $\mathbf{F}_i=\mathbf{F}_{i,\Omega}$ $(i\in I)$ で生成される、単位元を持つ $\mathbb{C}$ 上の associative algebra である。
(2) $\mathbf{F}_i$ $(i\in I)$ は次の関係式を満たす：

$$\mathbf{F}_i\mathbf{F}_j=\mathbf{F}_j\mathbf{F}_i,\quad (i\text{ と }j\text{ は }\Gamma\text{ の中で connected でない}),$$

$$\mathbf{F}_i^2\mathbf{F}_j-(q^{1/2}+q^{-1/2})\mathbf{F}_i\mathbf{F}_j\mathbf{F}_i+\mathbf{F}_j\mathbf{F}_i^2=0,\quad (i\text{ と }j\text{ は }\Gamma\text{ の中で connected}).$$

注目したいのは (2) の第2式である。$(R\Omega,*)$ の積は（もちろん）矢印がどっち向きか？ということに依存しており、結果として得られる関係式（Lemma 3.1.2 の (3)）も i と j に対して対称ではない。一方、積を modify した $(R\Omega,\cdot)$ では（積の定義自身は矢印の方向に依存するが）結果として得られる関係式 (2) は向きには依存せず、i と j がつながっているかどうか（つまり Γ ではなく、underlying graph $|\Gamma|$ のみの情報）だけで決まってしまうわけである。

Definition 3.2.2. 積を modify した $(R\Omega,\cdot)$ を twisted Ringel-Hall algebra と呼ぶ。

3.3 量子群との関係

A,D,E 型の quiver $\Gamma=(I,\Omega)$ に対して、行列 $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ を次のように定める：

$$a_{ij}=\begin{cases}2, & i=j,\\ -(i\text{ と }j\text{ を結ぶ矢印の本数}), & i\neq j.\end{cases}$$

容易にわかるように、これは A,D,E 型の Cartan 行列である。

Definition 3.3.1. (1) 生成元 $e_i,f_i,t_i^{\pm}$, $(i\in I)$ と以下の関係式で定義される $\mathbb{Q}(v)$ 上の単位元1を持つ assoiative algebra U_v を量子包絡環（quantized universal envepoping algebra）という[18]。

(i) $t_it_j=t_jt_i,\quad t_it_i^{-1}=t_i^{-1}t_i=1.$

(ii) $t_ie_jt_i^{-1}=v^{a_{ij}}e_j,\quad t_if_jt_i^{-1}=v^{-a_{ij}}f_j.$

[18]通常、量子包絡環 U_v のことを「量子群」と呼ぶ。

(iii) $e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} \frac{t_i - t_i^{-1}}{v - v^{-1}}$.

(iv) $i \neq j$ のとき、

$$\begin{cases} e_i e_j = e_j e_i, & (a_{ij} = 0), \\ e_i^2 e_j - (v + v^{-1}) e_i e_j e_i + e_j e_i^2 = 0, & (a_{ij} = -1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_i f_j = f_j f_i, & (a_{ij} = 0), \\ f_i^2 f_j - (v + v^{-1}) f_i f_j f_i + f_j f_i^2 = 0, & (a_{ij} = -1). \end{cases}$$

(2) f_i $(i \in I)$ で生成される U_v の $\mathbb{Q}(v)$-subalgebra を U_v^- と書く。

Remark . (1) "$v \to 1$ の極限" をとることにより[19]、$U_v \to U(\mathfrak{g})$。つまり U_v は $U(\mathfrak{g})$ の v-analogue である。ここで $\mathfrak{g}$ は対応する $\mathbb{C}$ 上の A,D,E 型の有限次元 simple Lie algebra、$U(\mathfrak{g})$ はその universal enveloping algbera。例えば A_n 型なら

$$\mathfrak{g} = sl_{n+1} = \{X \in \mathrm{Mat}(n+1, \mathbb{C}) \mid \mathrm{tr}(X) = 0\}.$$

(2) U_v^- は f_i $(i \in I)$ で生成され、

$$\begin{cases} f_i f_j = f_j f_i, & (a_{ij} = 0), \\ f_i^2 f_j - (v + v^{-1}) f_i f_j f_i + f_j f_i^2 = 0, & (a_{ij} = -1). \end{cases}$$

を基本関係式とする $\mathbb{Q}(v)$ 上の単位元 1 を持つ assoiative algebra である。
(3) U_v^- は $U(\mathfrak{n}_-)$ の v-analogue である。ここに $\mathfrak{n}_-$ は maximal nilpotent subalgebra と呼ばれる $\mathfrak{g}$ の Lie subalgebra で[20]、例えば A_n 型なら

$$\mathfrak{n}_- = \{X \in sl_{n+1} \mid X \text{ は狭義下三角行列}\}$$

となる。その意味で、$\mathfrak{n}_-$ を下三角 Lie subalgebra と呼ぶこともある。また、一般に $U(\mathfrak{n}_-)$ は f_i $(i \in I)$ で生成され、

$$\begin{cases} f_i f_j = f_j f_i, & (a_{ij} = 0), \\ f_i^2 f_j - 2 f_i f_j f_i + f_j f_i^2 = 0, & (a_{ij} = -1). \end{cases}$$

を基本関係式とする $\mathbb{C}$ 上の単位元 1 を持つ assoiative algebra であることが知られている。これは (2) で述べた U_v^- の基本関係式に形式的に $v = 1$ を代入した式、そのものである。U_v^- は U_v の下三角部分代数とも呼ばれる。

1 次元の complex vector space $\mathbb{C}$ を

$$v \cdot z = q^{1/2} z, \quad (z \in \mathbb{C})$$

---

[19] 定義関係式に安直に $v = 1$ を代入することは出来ない（例えば式の分母に $v - v^{-1}$ が現れているので、発散してしまう）ので、うまく極限をとる必要がある。

[20] まじめに書き出すと長くなるのでここでは正確な定義は述べない。詳しくは Lie algebra の教科書を参照のこと。

によって $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-module と見なしたものを $\mathbb{C}_{q^{1/2}}$ と書く。また

$$U^-_{q^{1/2}} = U^-_v \otimes_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]} \mathbb{C}_{q^{1/2}}$$

とおく[21]。

Theorem 3.3.2 (Ringel). $\mathbb{C}$-algebra の同型 $\Psi_\Omega : U^-_{q^{1/2}} \to R\Omega$ であって、

$$\Psi_\Omega(f_i) = \mathbf{F}_{i,\Omega}$$

を満たすものが一意的に存在する。

Proof. Corollary 3.2.1 から、Ψ_Ω が全射準同型であることはすぐにわかる。したがって Ψ_Ω が単射であることを言えばよい。

Q を対応する A,D,E 型の root lattice、α_i $(i \in I)$ を simple root とし、$U^-_{q^{1/2}}$ の生成元 f_i の weight を $-\alpha_i \in Q$ と定める。このとき $U^-_{q^{1/2}}$ は分解

$$U^-_{q^{1/2}} = \bigoplus_{\alpha \in Q_-} \left(U^-_{q^{1/2}}\right)_\alpha$$

を持つ。ここに $Q_- = \oplus_{i\in I}\mathbb{Z}_{\leq 0}\alpha_i$ である。また $\alpha \in Q_-$ に対し

$$\left(U^-_{q^{1/2}}\right)_\alpha := \{X \in U^-_{q^{1/2}} \mid X \text{ の weight} = \alpha\}$$

と定める。これを weight $\alpha \in Q_-$ の weight space と呼ぶ。任意の $\alpha \in Q_-$ に対し、weight space は有限次元であることに注意されたい。

一方 $R\Omega$ も dimension vector による次数付け $R\Omega = \oplus R\Omega_d$ を持っており各 $R\Omega_d$ は有限次元だった。ここで

$$\mathbb{Z}^I_{\geq 0} \ni d = (d_i) \longleftrightarrow \alpha = -\sum_{i\in I} d_i\alpha_i \in Q_-$$

によって $\mathbb{Z}^I_{\geq 0}$ と Q_- を同一視すると、Ψ_Ω が両者の次数付けを保つ写像であることがわかる。対応する各次数空間はともに有限次元であるが、簡単な考察から両者の次元は等しいことがわかる。Ψ_Ω が全射であることはすでに知っているので、ゆえに単射である。 □

4 Convolution 積と Lusztig による量子群の幾何学的構成

前節で quiver の表現論と量子群との関係について紹介した。しかし考えている quiver Γ の表現は一般のものではなく、

(a) 係数体 K は有限体 $\mathbb{F}_q$ である。

[21] やっていることは「$v = q^{1/2}$ を代入する」ということである。こんなことをしてしまって発散が起きないかが心配になるが、1 のベキ根以外の値を代入する場合には問題は起きないことが知られている。いま q は素数のベキだから $v = q^{1/2}$ を代入しても問題はない。

(b) タイプは A,D,E 型に限る。

との制限があった。これに対応して量子群の方も現れるのは A,D,E 型の場合だけで、しかもパラメータ v は generic ではなく $v = q^{1/2}$ との制約が付くことになっていた。

話を一般化するためには、これらの制約は可能なら外したいわけだが、この節では (a) の制約をどうやって外すか？と言う問題を中心に考えたい。そのための基本的なアイデアが以下に述べる Convolution 積である。

4.1 Convolution 積

まず一般的な言葉の準備をする。M, N 有限集合、$\phi : M \to N$ を M から N への写像とする。また $\mathbb{C}(M), \mathbb{C}(N)$ を M および N 上の $\mathbb{C}$-valued function 全体のなす有限次元 vector space とする。このとき

$$\phi_! : \mathbb{C}(M) \to \mathbb{C}(N), \qquad \phi^* : \mathbb{C}(N) \to \mathbb{C}(M)$$

をそれぞれ

$$\phi_!(f)(n) = \sum_{m \in \phi^{-1}(n)} f(m), \qquad \phi^*(g)(m) = g(\phi(m))$$

と定める[22]。

$\Gamma = (I, \Omega)$ を A,D,E 型の quiver、V を $K = \mathbb{F}_q$ 上の I-graded vector space で、$\underline{\dim} V = d$ なるものとする。$\mathbb{C}^{G_V}(E_{V,\Omega})$ を $E_{V,\Omega}$ 上の $\mathbb{C}$-valued G_V-invariant function 全体のなす $\mathbb{C}$-vector space とし、$\mathrm{K}_{\Omega,d} := \mathbb{C}^{G_V}(E_{V,\Omega})$ とおく。このとき

$$\mathrm{K}_{\Omega,d} = \bigoplus_{\mathcal{O}:\mathrm{orbit}} \mathbb{C}\chi_{\mathcal{O}}$$

が成り立つ。ここに $\chi_{\mathcal{O}} \in \mathrm{K}_{\Omega,d}$ は

$$\chi_{\mathcal{O}}(B) = \begin{cases} 1, & (B \in \mathcal{O}), \\ 0, & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

なる関数で、$\mathcal{O}$ の特性関数と呼ばれる。

$E_{V,\Omega}$ 上の G_V-orbit と $M\Omega_d$ の同型類の間に 1 対 1 対応があったことを思い出して、orbit $\mathcal{O}$ に対応する $M\Omega_d$ の同型類を $[\mathrm{V}_{\mathcal{O}}]$ と書こう。このとき対応 $\chi_{\mathcal{O}} \mapsto [\mathrm{V}_{\mathcal{O}}]$ は $\mathbb{C}$-vector space としての同型

$$\mathrm{K}_{\Omega,d} = \bigoplus_{\mathcal{O}} \mathbb{C}\chi_{\mathcal{O}} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\mathcal{O}} \mathbb{C}[\mathrm{V}_{\mathcal{O}}] = R\Omega_d$$

を誘導する。したがって $\mathrm{K}_\Omega = \oplus_d \mathrm{K}_{\Omega,d}$ とおけば、K_Ω と $R\Omega$ は $\mathbb{C}$-vector space として同型である。

---

[22] 前者は direct image with compact support あるいは proper direct image、後者は pull back と呼ばれる。

次にK_Ωに積構造を定めよう。$V, V', \overline{V}$を$\mathbb{F}_q$上のI-graded vector spaceで、dimension vectorがそれぞれd, d', $\overline{d}$であるものとする。また$d = d' + \overline{d}$を仮定する。以後このようなI-graded vector spaceの組$(V, V', \overline{V})$を3つ組のI-graded vector spaceと呼ぶことにする[23]。

以下のdiagramを考える：

$$(\bigstar) \qquad E_{\overline{V},\Omega} \times E_{V',\Omega} \xleftarrow{p_1} E_1 \xrightarrow{p_2} E_2 \xrightarrow{p_3} E_{V,\Omega}.$$

ただし

$$E_1 = \left\{ (B, \overline{\phi}, \phi') \;\middle|\; \begin{array}{l} B \in E_{V,\Omega}, \\ 0 \to V' \xrightarrow{\phi'} V \xrightarrow{\overline{\phi}} \overline{V} \to 0 \\ \text{は}I\text{-graded vector spaceの完全系列かつ}, \\ B(\mathrm{Im}\phi') \subset \mathrm{Im}\phi'. \end{array} \right\},$$

$$E_2 = \left\{ (B, W) \;\middle|\; \begin{array}{l} B \in E_{V,\Omega}, \\ W \text{ は } V \text{ の } I\text{-graded subspaceで } \underline{\dim} W = d' \\ \text{かつ}, B(W) \subset W \text{ を満たすもの}. \end{array} \right\}$$

ここでVのI-graded subspace Wが$B \in E_{V,\Omega}$に対し$B(W) \subset W$であるとは、任意の$\tau \in \Omega$に対し$B_\tau(W_{\mathrm{out}(\tau)}) \subset W_{\in(\tau)}$を満たすことをいう。

$(B, \overline{\phi}, \phi') \in E_1$が与えられると、自然に$\overline{B} \in E_{\overline{V},\Omega}$と$B' \in E_{V',\Omega}$が誘導される。このとき$p_1(B, \overline{\phi}, \phi') = (\overline{B}, B')$とおく。また$p_2(B, \overline{\phi}, \phi') = (B, \mathrm{Im}\phi')$, $p_3(B, W) = B$と定義する。

Definition 4.1.1. $\overline{f} \in \mathrm{K}_{\Omega,\overline{d}}$, $f' \in \mathrm{K}_{\Omega,d'}$に対し、

$$\overline{f} * f' = (p_3)_!(p_2)_\flat(p_1)^*(\overline{f} \otimes f')$$

と定める。この$*$をconvolution積と呼ぶ。ただし$(p_2)_\flat = \frac{1}{\sharp(G_{\overline{V}}) \times \sharp(G_{V'})}(p_2)_!$。

Remark . $(p_2)_\flat$は次のような性質を持つmorphismとして一意的に特徴づけることが出来る：任意の$\overline{f} \in \mathrm{K}_{\Omega,\overline{d}}$, $f' \in \mathrm{K}_{\Omega,d'}$に対し

$$(4.1.1) \qquad (p_2)^*(p_2)_\flat(p_1)(\overline{f} \otimes f') = (p_1)^*(\overline{f} \otimes f').$$

4.2 Ringel-Hall algebra再論

3節では量子群との関係を見るためにtwisted Ringel-Hall algebra $(R\Omega, \cdot)$を導入したが、qのベキがずれているために話がややこしくなるので、この節ではtwistしないRingel-Hall algebra $(R\Omega, *)$を扱うことにする。

4.1節で導入したK_Ωのconvolution積$*$に関して次が成り立つ：

[23] これはここだけの呼び方である。

Proposition 4.2.1. (1) 任意の $\overline{f} \in \mathrm{K}_{\Omega,\overline{d}}$, $f' \in \mathrm{K}_{\Omega,d'}$ に対し、$\overline{f} * f' \in \mathrm{K}_{\Omega,d}$ である。すなわち $*$ は K_Ω 上に積を定める。
(2) $(\mathrm{K}_\Omega, *)$ は単位元を持つ $\mathbb{C}$ 上の associative algebra で、自然な同型 $\mathrm{K}_\Omega \cong R\Omega$ は $\mathbb{C}$-algebra としての同型を与える。

Proof. (1) は比較的易しいので、(2) のみ示す。まず次の claim を準備する。

Claim. $(B, W) \in E_2$ に対して $(B, \overline{\phi}_0, \phi'_0) \in p_2^{-1}(B, W)$ を 1 つ固定する。さらに $(\overline{B}_0, B'_0) = p_1(B, \overline{\phi}_0, \phi'_0)$ とおく。このとき

$$(p_2)_\flat(p_1)^*(\overline{f} \otimes f')(B, W) = \overline{f}(\overline{B}_0)f'(B'_0)$$

である。

Proof of Claim. 定義から

$$\begin{aligned}(p_2)_\flat(p_1)^*(\overline{f} \otimes f')(B, W) \\ = \frac{1}{\sharp(G_{\overline{V}}) \times \sharp(G_{V'})} \sum_{(B,\overline{\phi},\phi') \in p_2^{-1}(B,W)} (p_1)^*(\overline{f} \otimes f')(B, \overline{\phi}, \phi').\end{aligned}$$

$(B, \overline{\phi}, \phi') \in p_2^{-1}(B, W)$ であること、$\overline{g} \in G_{\overline{V}}$, $g' \in G_{V'}$ が存在して $\overline{\phi} = \overline{g} \cdot \overline{\phi}_0$, $\phi' = g' \cdot \phi'_0$ と書けることは同値なので、

$$右辺 = \frac{1}{\sharp(G_{\overline{V}}) \times \sharp(G_{V'})} \sum_{\overline{g} \in G_{\overline{V}}, g' \in G_{V'}} (p_1)^*(\overline{f} \otimes f')(B, \overline{g} \cdot \overline{\phi}_0, g' \cdot \phi'_0).$$

$\overline{f}$, f' はそれぞれ、$G_{\overline{V}}$ および $G_{V'}$ の作用に関して不変な関数だったので、等式を得る。□

Proposition の証明に戻ろう。(2) を証明するためには $(V, V', \overline{V})$ を I-graded space の 3 つ組、$\mathcal{O} \subset E_{V,\Omega}$, $\overline{\mathcal{O}} \subset E_{\overline{V},\Omega}$, $\mathcal{O}' \subset E_{V',\Omega}$ を orbits として[24]、

$$\chi_{\overline{\mathcal{O}}} * \chi_{\mathcal{O}'} = \sum_{\mathcal{O} \subset E_{V,\Omega}} G(\mathcal{O}; \overline{\mathcal{O}}, \mathcal{O}')\chi_{\mathcal{O}}$$

によって $G(\mathcal{O}; \overline{\mathcal{O}}, \mathcal{O}')$ を定めるとき、

$$G(\mathcal{O}; \overline{\mathcal{O}}, \mathcal{O}') = g(\mathrm{v}_{\mathcal{O}}; \mathrm{v}_{\overline{\mathcal{O}}}, \mathrm{v}_{\mathcal{O}'})$$

を示せばよい。

[24] あまりいい記号とは言えないが、ここでは $\overline{\mathcal{O}}$ は $E_{\overline{V},\Omega}$ の orbit を表しており、$\mathcal{O} \subset E_{V,\Omega}$ の closure ではないことに注意されたい。

$B \in \mathcal{O}$, $(B, W) \in p_3^{-1}(B)$ とする。Claim の証明と同じ記号を用いれば、

$$\begin{aligned}(p_2)_\flat(p_1)^*(\chi_{\overline{\mathcal{O}}} \otimes \chi_{\mathcal{O}'})(B, W) &= \chi_{\overline{\mathcal{O}}}(\overline{B}_0)\chi_{\mathcal{O}'}(B_0') \\ &= \begin{cases} 1, & (\overline{B}_0 \in \overline{\mathcal{O}} \text{ かつ } B_0' \in \mathcal{O}'), \\ 0, & (\text{otherwise}). \end{cases}\end{aligned}$$

$\overline{B}_0 \in \overline{\mathcal{O}}$ かつ $B_0' \in \mathcal{O}'$ であることと、$(B, W) \in p_2p_1^{-1}(\overline{\mathcal{O}} \times \mathcal{O}')$ が同値であることに注意すると、

$$\begin{aligned}G(\mathcal{O}; \overline{\mathcal{O}}, \mathcal{O}') &= \chi_{\overline{\mathcal{O}}} * \chi_{\mathcal{O}'}(B) \\ &= \sum_{(B,W)\in p_3^{-1}(B)} (p_2)_\flat(p_1)^*(\chi_{\overline{\mathcal{O}}} \otimes \chi_{\mathcal{O}'})(B, W) \\ &= \sum_{(B,W)\in p_3^{-1}(B)\cap p_2p_1^{-1}(\overline{\mathcal{O}}\times\mathcal{O}')} 1 \\ &= \sharp\{p_3^{-1}(B) \cap p_2p_1^{-1}(\overline{\mathcal{O}} \times \mathcal{O}')\}.\end{aligned}$$

一方、$[\mathrm{V}_{\mathcal{O}}] = [(V, B)]$ であることに注意すると、定義から

$$g(\mathrm{v}_{\mathcal{O}}; \mathrm{v}_{\overline{\mathcal{O}}}, \mathrm{v}_{\mathcal{O}'}) = \sharp\{p_3^{-1}(B) \cap p_2p_1^{-1}(\overline{\mathcal{O}} \times \mathcal{O}')\}$$

であることはすぐにわかる。よって示された。 □

4.3 Lusztig による量子群の幾何学的構成へ

前節で示した Proposition 4.2.1 は、自然な同型 $\mathrm{K}_\Omega \cong R\Omega$ によって $R\Omega$ 上に定まる積構造と K_Ω 上の convolution 積が同一視できることを言っている。一見するとこれは単に「書き換え」を行っただけであって、それ以上でもそれ以下でもないようにも思えるが、実はそうではない。convolution 積 $*$ の構成をもう一度整理すると、$*$ とは diagram(★) から定まる写像

$$(\natural) \qquad \mathbb{C}(E_{\overline{V},\Omega}) \otimes \mathbb{C}(E_{V',\Omega}) \xrightarrow{p_1^*} \mathbb{C}(E_1) \xrightarrow{(p_2)_\flat} \mathbb{C}(E_2) \xrightarrow{(p_3)_!} \mathbb{C}(E_{V,\Omega})$$

を群作用で不変な部分 $\mathrm{K}_{\Omega,\overline{d}} \otimes \mathrm{K}_{\Omega,d'} = \mathbb{C}^{G_{\overline{V}}}(E_{\overline{V},\Omega}) \otimes \mathbb{C}^{G_{V'}}(E_{V',\Omega})$ に制限して得られるものなのであった。

今までは K は有限体と仮定してきたが、ここから $K = \overline{\mathbb{F}}_q$ としよう。

$$(\bigstar) \qquad E_{\overline{V},\Omega} \times E_{V',\Omega} \xleftarrow{p_1} E_1 \xrightarrow{p_2} E_2 \xrightarrow{p_3} E_{V,\Omega}$$

を考えるだけならば K を有限体とする必要はないので、$K = \overline{\mathbb{F}}_q$ でも（もちろん)well-defined である。$K = \overline{\mathbb{F}}_q$ にすることのメリットは代数幾何が使えるということにある。この利点を活用して、今まで考えてきた $E_{V,\Omega}$ 上の G_V-invariant fuction の代わりに $E_{V,\Omega}$ 上の G_V-equivariant な sheaf を考えることにする[25]。つまり各 $E_{V,\Omega}$ たちの上に G_V-equivariant

[25] もちろん $\mathbb{F}_q$ のままでも代数幾何的な手法は使えないことはないが、代数閉体でないと使える道具がはるかに少なくなる。また $\mathbb{F}_q$ のままで sheaf を考えることもできるが、空間自身が有限個の点集合になってしまうため、つまらないものになってしまう。その点からも $\overline{\mathbb{F}}_q$ まで広げないと面白くない。

な sheaf を乗せて、diagram(♮) の sheaf version を考えようとわけである。sheaf に対しても"pull back"や"proper direct image"等の操作は行うことができるので、拡張を考えることが可能となる。

ただし、単に拡張するだけでは意味がないわけで、もとの Ringel-Hall algebra との関係がどうなっているのかをきちんと見なければならない。話を少し戻そう。前節までで考えてきた diagram は $\mathbb{F}_q$-rational point の作る diagram

$$E_{\overline{V},\Omega}(\mathbb{F}_q)\times E_{V',\Omega}(\mathbb{F}_q)\xleftarrow{p_1}E_1(\mathbb{F}_q)\xrightarrow{p_2}E_2(\mathbb{F}_q)\xrightarrow{p_3}E_{V,\Omega}(\mathbb{F}_q)$$

と思うことができる。これに対応して orbit も、全て $\mathbb{F}_q$-rational point を考えることになる。$B\in\mathcal{O}(\mathbb{F}_q)$ に対し、$Z:=p_3^{-1}(B)\cap p_2p_1^{-1}(\overline{\mathcal{O}}\times\mathcal{O}')\subset E_2$ とおく。Proposition 4.2.1 の証明の中で述べたことから、Ringel-Hall algebra の積 $*$ を定める構造定数 $G(\mathcal{O};\overline{\mathcal{O}},\mathcal{O}')=g(\mathrm{v}_{\mathcal{O}};\mathrm{v}_{\overline{\mathcal{O}}},\mathrm{v}_{\mathcal{O}'})$ は、Z の $\mathbb{F}_q$-rational point の数、$\sharp\{Z(\mathbb{F}_q)\}$ と一致する。

正標数の代数幾何からいくつか言葉を準備をする。一般に X を $\mathbb{F}_q$ 上定義された variety とする。このとき X は Frobenius action, $Fr:x\mapsto x^q$ で閉じており、X の $\mathbb{F}_q$-rational points $X(\mathbb{F}_q)$ は Frobenius action の固定点全体と一致する。さらに l を p と異なる素数として、Frobenius action は l-進 cohomology 群の間の写像 $Fr^*:H_c^*(X,\overline{\mathbb{Q}}_l)\to H_c^*(X,\overline{\mathbb{Q}}_l)$ を誘導する。このとき次が知られている：

Theorem 4.3.1 (Trace formula). X がある "よい条件" を満たせば、

$$\sharp(X(\mathbb{F}_q))=\sum_{i\geq 0}(-1)^i\mathrm{tr}\left(Fr^*:H_c^i(X,\overline{\mathbb{Q}}_l)\to H_c^i(X,\overline{\mathbb{Q}}_l)\right)$$

が成り立つ[26]。

この定理を我々の場合に適用すれば、

$$\begin{aligned}g(\mathrm{v}_{\mathcal{O}};\mathrm{v}_{\overline{\mathcal{O}}},\mathrm{v}_{\mathcal{O}'}) &= \sharp(Z(\mathbb{F}_q))\\ &= \sum_{i\geq 0}(-1)^i\mathrm{tr}\left(Fr^*:H_c^i(Z,\overline{\mathbb{Q}}_l)\to H_c^i(Z,\overline{\mathbb{Q}}_l)\right)\end{aligned}$$

となる。つまり $R\Omega$ の積 $*$ の構造定数を幾何学的に記述するためには、全ての cohomology 群のデータが必要となるわけで、そのためには単独の sheaf を考えるのではなく、sheaf の complex を考えないといけなくなる。実際 Lusztig による量子群の幾何学的構成では perverse sheaf という、ある種の良い条件をみたす sheaf の comlpex を $E_{V,\Omega}$ の上に乗せて diagram (♮) の類似を考える。

もう少し具体的に言おう。まず $E_{V,\Omega}$ 上の sheaf の complex のなす bounded derived category を $\mathcal{D}(E_{V,\Omega})$ とし、G_V-equivariant かつ "ある種の良い条件" をみたす $\overline{\mathbb{Q}}_l$-sheaf の comlpex

$$\mathcal{F}^\bullet=(\cdots\to\mathcal{F}^{i_1}\to\mathcal{F}^i\to\mathcal{F}^{i+1}\to\cdots)$$

[26] $X(\mathbb{F}_q)$ は Frobenius action の固定点全体だったので、この定理は Frobenius action に関する不動点定理であると言ってもよい。

のなす $\mathcal{D}(E_{V,\Omega})$ の full subcategory $\mathcal{Q}_{V,\Omega}$ を考える[27]。そこで $\mathcal{F}^\bullet \in \mathcal{Q}_{V,\Omega}$, $\mathcal{F}'^\bullet \in \mathcal{Q}_{V',\Omega}$ に対して

$$\mathcal{F}^\bullet \circ \mathcal{F}'^\bullet := (p_3)_!(p_2)_\flat(p_1)^*(\mathcal{F}^\bullet \boxtimes \mathcal{F}'^\bullet)[d_1 - d_2] \tag{4.3.1}$$

と定める。ここで $(p_3)_!$, $(p_1)^*$ はそれぞれ proper direct image, pull back で、$(p_2)_\flat$ は (4.1.1) と同様の条件で一意的に決まる operation。また $\boxtimes$ は exterior tensor product、$d_i \in \mathbb{Z}$ ($i = 1, 2$) は p_i の fiber の次元で、$[d_1 - d_2]$ は complex の shift を表す。

$\mathcal{Q}_{V,\Omega}$ の Grothendieck 群を $\mathcal{K}_{V,\Omega}$ とおき、さらに dimension vector を可能な限り走らせて、直和

$$\mathcal{K}_\Omega := \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}} \mathcal{K}_{V,\Omega}$$

を考える。(ただし $d = \underline{\dim} V$.) 定義から $\mathcal{K}_\Omega$ は $\mathbb{Z}$-module であるが、v の作用を

$$v \cdot \mathcal{F}^\bullet := \mathcal{F}^\bullet[1]$$

で定めれば、$\mathcal{K}_\Omega$ は $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$-module の構造を持つ。このとき $\mathcal{K}_\Omega$ に積 $\circ$ を (4.3.1) によって定めると、次が成り立つ。

Theorem 4.3.2 (Lusztig). $(\mathcal{K}_\Omega, \circ)$ は単位元を持つ $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ 上の associative algebra である。

特に $V = V(i)$ ($i \in I$) の場合を考えよう。念のため思い出しておくと $V(i)$ は i 成分のみ 1 次元で、残りの成分が全て $\{0\}$ であるような 1 次元の I-graded vector space である。このとき $E_{V(i),\Omega}$ は 1 点からなる集合である[28]。したがって $E_{V(i),\Omega}$ 上の $\overline{\mathbb{Q}}_l$-sheaf を考えるということは、単なる $\overline{\mathbb{Q}}_l$-vector space を考えることに他ならない。そこで次のような $E_{V(i),\Omega}$ 上の $\overline{\mathbb{Q}}_l$-sheaf の complex (= $\overline{\mathbb{Q}}_l$-vector space の complex) を考える:

$$\mathcal{F}^\bullet_{i,\Omega} := (\cdots \to 0 \to 0 \to \mathcal{F}^0_{i,\Omega} \to 0 \to 0 \to \cdots), \quad \mathcal{F}^0_{i,\Omega} = \overline{\mathbb{Q}}_l.$$

このとき $\mathcal{F}^\bullet_{i,\Omega} \in \mathcal{Q}_{V(i),\Omega}$ となっている。

Theorem 4.3.3 (Lusztig). 写像 $U_v^- \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}(v) \otimes_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]} \mathcal{K}_\Omega$ を

$$f_i \mapsto \mathcal{F}^\bullet_{i,\Omega} \quad \text{for any } i \in I$$

によって定める[29]。このとき上の写像は well-defined で、さらに $\mathbb{Q}(v)$-algbera としての同型を与える。

---

[27] 正確な定義を書くと長くなるので、ここでは省略する。詳しくは [L2],[L3] 等を参照のこと。一言だけコメントしておくと、category $\mathcal{Q}_{V,\Omega}$ は complex の shift で不変で、$E_{V,\Omega}$ 上の G_V-equivariant な preverse sheaves を含んでいる。

[28] 零写像のみ。

[29] U_v^- は f_i ($i \in I$) で生成されることに注意。

これでやっと「(a) の制約をどうやって外すか？」との問題の答が得られた。すなわち quiver の幾何学と量子群との関係は「係数体 K が有限体 $\mathbb{F}_q$ である」、「量子群のパラメータ v は $v = q^{1/2}$ である」との仮定を外したレベルでも成り立っているわけである。

「ちょっと待った！Ringel-Hall algebra との関係はどうなっちゃったのか？」と思われる方もいるだろう。もちろん忘れてしまったわけではなく、上の定理から Ringel-Hall algebra の話に戻ることができる。まず考えている $E_{V,\Omega}$ 上の sheaf の $\mathbb{F}_q$-rational point 上での stalk をとる。この stalk 上で Frobenious action の trace を考えることによって $\mathbb{F}_q$-rational points 上の関数を作ることができるが、実はこの関数が $\mathrm{K}_{\Omega,d}$ の元を与えることがわかる[30]。このとき (4.3.1) で定めた積 $\circ$ は、twisted Ringel-Hall algebra $(R\Omega, \cdot)$ の積構造と compatible になっていて、Theorem 3.3.2 を復活させるという仕組みになっている。

Remark . (1) このようにして「(a) の制約を外す問題」に 1 つの解答が得られたわけだが、実は同時に「(b) の制約を外す問題」に対しても答えが得られたことになっている。上の Theorem 4.3.3 は quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ が A,D,E 型の場合の定理であるが、A,D,E との制約を外して一般の quiver から出発しても全く同様の結果が得られることが知られている。([L2],[L3]) その場合の対応する量子群については、6.2 節で詳しく述べることにする。
(2) 今の話は $K = \overline{\mathbb{F}}_q$ とした場合の話だったが、ここまでくると $K = \mathbb{C}$ としてもよいことが知られている。その場合 Frobenuis action や $\mathbb{F}_q$-rational points との関係等、正標数の代数幾何の深い結果が使えなくなってしまうが、その代わり perverse shaves とある種の D-module（regular holonomic D-modules）との categorical equivalence[31]を用いて、D-module の理論が使えるようになるというメリットがある。

5 Preprojective algebras

5.1 定義と基本的な性質

この節からは double quiver $\Gamma = (I, H)$ を考える。また $K = \mathbb{C}$ とする。

$\Gamma = (I, H)$ は必ず oriented cycle を持っているので、path algebra $\mathbb{C}[\Gamma]$ は常に無限次元である。orientation Ω 一つ固定して quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ を考える。また $\varepsilon : H \to \{\pm\}$ を

$$\varepsilon(\tau) = \begin{cases} +1, & (\tau \in \Omega), \\ -1, & (\tau \in \overline{\Omega}) \end{cases}$$

とおく。各 $i \in I$ に対して

$$r_i := \sum_{\tau \in H,\ \mathrm{out}(\tau) = i} \varepsilon(\tau) \overline{\tau} \tau \in \mathbb{C}[\Gamma]$$

とし、r_i $(i \in I)$ たちで生成される $\mathbb{C}[\Gamma]$ の両側 ideal を J とおく。

[30] このような対応は "sheaf-function dictionary" とも呼ばれ、その筋ではよく知られた対応である (例えば [D] 参照)。
[31] Riemann-Hilbert 対応と呼ばれるもの。関係する文献は多いが、ここでは [谷堀] を挙げておく。

Definition 5.1.1. $P(\Gamma) = \mathbb{C}[\Gamma]/J$ を（Γ の）preprojective algebra という。

$V = \oplus_{i\in I} V_i$ を $\mathbb{C}$ 上の I-graded vector space とし、

$$X_V := \underset{\tau\in H}{\oplus} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathrm{out}(\tau)}, V_{\mathrm{in}(\tau)})$$

とおく。X_V には $G_V = \prod_{i\in I} GL(V_i)$ が自然に作用する。

Definition 5.1.2. (1) 次で定義される X_V の closed subvariety $\mathrm{mod}(P(\Gamma), V)$ を $P(\Gamma)$ の variety of modules という：

$$\mathrm{mod}(P(\Gamma), V) := \left\{ B \in X_V \;\middle|\; \sum_{\tau\in H,\ \mathrm{out}(\tau)=i} \varepsilon(\tau) B_{\bar{\tau}} B_\tau = 0 \quad \text{for any } i \in I \right\}.$$

(2) 以下で定義される X_V の closed subvariety $\Lambda_V = \mathrm{mod}^0(P(\Gamma), V)$ を $P(\Gamma)$ の variety of nilpotent modules もしくは nilpotent variety という：

$$\Lambda_V = \mathrm{mod}^0(P(\Gamma), V) := \{B \in \mathrm{mod}(P(\Gamma), V) \mid B \text{ は nilpotent}\}.$$

ただし $B = (B_\tau) \in X_V$ が nilpotent であるとは、ある $N > 0$ が存在して、任意の長さ N の path $p = \tau_N \cdots \tau_1$ に対し $B_{\tau_N} \cdots B_{\tau_1} = 0$ が成り立つことをいう。

次の lemma は容易である。

Lemma 5.1.3. $\mathrm{mod}(P(\Gamma), V)$, $\mathrm{mod}^0(P(\Gamma), V)$ はともに G_V-stable である。

V を $P(\Gamma)$-module とする。このとき自然な射影 $\mathbb{C}[\Gamma] \to P(\Gamma)$ により、V を $\mathbb{C}[\Gamma]$-module と見なすことができる。$\mathbb{C}[\Gamma]$ に関しては 2.3 節で述べた path algebra の一般論が適用できる。つまり $V_i = e_i V$ $(i \in I)$ とおくことで、V に I-graded vector space の構造が入る。したがって $X_V = \oplus \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_{\mathrm{out}(\tau)}, V_{\mathrm{in}(\tau)})$ を考えることができる。$B = (B_\tau)_{\tau\in H} \in X_V$ をとれば (V, B) は Γ の表現である。このとき $P(\Gamma)$ を factor するための条件を書き下せば

$$\sum_{\tau\in H,\ \mathrm{out}(\tau)=i} \varepsilon(\tau) B_{\bar{\tau}} B_\tau = 0 \quad \text{for any } i \in I$$

となる。このことと Lemma 5.1.3 を併せれば、自然な 1 対 1 対応

$$\{\mathrm{mod}(P(\Gamma), V) \text{ の } G_V\text{-orbit}\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{dimension vector が } \underline{\dim} V \text{ と等しく} \\ \text{なるような } P(\Gamma)\text{-module の同型類} \end{array} \right\}$$

があることがわかる。

$P(\Gamma)$ について知られている性質をいくつか列挙しておく。

Proposition 5.1.4.
(1) 次の 3 条件は同値[32]。
  (a) $P(\Gamma)$ は有限次元。
  (b) Γ の underlying graph $|\Gamma|$ が A,D,E 型の Dynkin 図形。
  (c) 任意の V に対して、$\mathrm{mod}(P(\Gamma), V) = \mathrm{mod}^0(P(\Gamma), V)$.
(2) $P(\Gamma)$ が有限表現型であることと、$|\Gamma|$ が A_n $(n \leq 4)$ 型の Dynkin 図形であることは同値。また $P(\Gamma)$ の表現型が tame であることと、$|\Gamma|$ が A_5 もしくは D_4 の Dynkin 図形であることは同値[33]。

また次の Proposition は、任意の $P(\Gamma)$ に対して成り立つ著しい性質である (See [C1])。

Proposition 5.1.5. V, W を任意の有限次元 $P(\Gamma)$-module とするとき、

$$\dim \mathrm{Ext}^1_{P(\Gamma)}(V, W) = \dim \mathrm{Ext}^1_{P(\Gamma)}(W, V).$$

5.2 $\mathrm{mod}(P(\Gamma), V)$ の既約成分

$P(\Gamma)$ の表現論を調べようと思う場合には、前節に述べた 1 対 1 対応

$$\{\mathrm{mod}(P(\Gamma), V) \text{ の } G_V\text{-orbit}\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{dimension vector が } \underline{\dim} V \text{ と等しく} \\ \text{なるような } P(\Gamma)\text{-module の同型類} \end{array} \right\}$$

より、本来なら $\mathrm{mod}(P(\Gamma), V)$ の G_V-orbit を調べなければならない。しかし Proposition 5.1.4 で述べたように $P(\Gamma)$ の表現型は、ごく一部の例外を除いてほとんどの場合 wild である。今の場合 $K = \mathbb{C}$ としているので、$\mathrm{mod}(P(\Gamma), V)$ の G_V-orbit と $P(\Gamma)$-module の同型類の間に 1 対 1 対応があることは分かっても、これらはほとんどコントロールが出来ない。したがって「G_V-orbit を直接調べるのはあまり得策ではない」と考えられる[34]。

とはいえ $\mathrm{mod}(P(\Gamma), V)$ 自身の性質を調べることによって、$P(\Gamma)$ の表現論に関する何らかのデータを引き出せることは間違いない。$\mathrm{mod}(P(\Gamma), V)$ は variety であるので、その既約成分の構造を調べるのは基本的な問題である。以下この点に関して知られている事実を簡単に紹介する。

我々の考えている $\mathrm{mod}(P(\Gamma), V)$ は V の dimension vector だけで決まるので

$$\mathrm{Irr}(\mathrm{mod}(P(\Gamma), d)) = \mathrm{Irr}(\mathrm{mod}(P(\Gamma), V)) \quad (d = \underline{\dim} V)$$

とも書いてもよい。$\Lambda \in \mathrm{Irr}(\mathrm{mod}(P(\Gamma), d))$ が indecomposable $P(\Gamma)$-modules からなる部分集合を稠密に含むとき、Λ は indecomposable であるという。また $\mathrm{ind}(\mathrm{Irr}(\mathrm{mod}(P(\Gamma), d)))$ で $\mathrm{mod}(P(\Gamma), d)$ の indecomposable な既約成分全体の集合を表す。さらに

$$\mathrm{Irr}(P(\Gamma)) = \bigsqcup_{d \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}} \mathrm{Irr}(\mathrm{mod}(P(\Gamma), d)),$$

---

[32] (a) と (b) の同値性は quiver の表現論ではよく知られた事実である（例えば [Rei] 参照）。(b)⇒(c) は Lusztig ([L2]) による。逆向きは Crawley-Boevey ([C2]) による。
[33] このことを誰が最初に証明したかは知らないが、詳しい話は例えば [DR] に出ている。ちなみに筆者はこの事実を [GLS1] で知った。
[34] これはあくまでも筆者の個人的意見である。

$$\mathrm{ind}(\mathrm{Irr}(P(\Gamma))) = \bigsqcup_{d \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}} \mathrm{ind}(\mathrm{Irr}(\mathrm{mod}(P(\Gamma), d)))$$

とおく。

V^i $(1 \leq k \leq m)$ を $P(\Gamma)$-modules とし、$\Lambda_k \in \mathrm{Irr}(\mathrm{mod}(P(\Gamma), V^k))$ とする。$V = \oplus_{k=1}^m V^k$ とし、

$$\Lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_m = \left\{ x \in \mathrm{mod}(P(\Gamma), V)) \;\middle|\; \begin{array}{c} x \cong x_1 \oplus \cdots \oplus x_m, \\ x_k \in \Lambda_k \ (1 \leq k \leq m) \end{array} \right\}$$

とおく。このとき閉包 $\overline{\Lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_m}$ は $\mathrm{mod}(P(\Gamma), V))$ の既約な subvariety であるが、一般に $\mathrm{mod}(P(\Gamma), V))$ の既約成分になるとは限らない。この点に関して Crawly-Boevey は次の命題を証明した。

Proposition 5.2.1 ([C2]). $\Lambda \in \mathrm{Irr}(P(\Gamma))$ に対して、$\Lambda_k \in \mathrm{ind}(\mathrm{Irr}(P(\Gamma)))$ が存在して、

$$\Lambda = \overline{\Lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_m}$$

が成り立つ。さらに Λ_k たちは順番の並べ替えを除いて一意的に定まる。

これを既約成分 Λ の canonical decomposition という。

2つの既約成分 Λ_1, $\Lambda_2 \in \mathrm{Irr}(P(\Gamma))$ に対し、

$$\mathrm{ext}^1(\Lambda_1, \Lambda_2) := \min \left\{ \dim \mathrm{Ext}^1_{P(\Gamma)}(y_1, y_2) \mid (y_1, y_2) \in \Lambda^1 \times \Lambda^2 \right\}$$

とおく。このとき $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ の dence open subset Z が存在して、任意の $(y_1, y_2) \in Z$ に対し $\dim \mathrm{Ext}^1_{P(\Gamma)}(y_1, y_2) = \mathrm{ext}^1(\Lambda_1, \Lambda_2)$ が成り立つ。すなわち $\mathrm{ext}^1(\Lambda_1, \Lambda_2)$ は $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ の generic な点における Ext^1 の次元であるといってよい。このとき次が成り立つ。

Proposition 5.2.2 ([C2]). 与えられた既約成分 $\Lambda_k \in \mathrm{Irr}(P(\Gamma))$ $(1 \leq k \leq m)$ に対して、次は同値。
(a) $\overline{\Lambda_1 \oplus \cdots \oplus \Lambda_m} \in \mathrm{Irr}(P(\Gamma))$.
(b) 任意の $k \neq l$ に対して $\mathrm{ext}^1(\Lambda_k, \Lambda_l) = 0$.

この2つの命題によって $\mathrm{Irr}(P(\Gamma))$ の全体像がおぼろげに見えてくる。つまり基本になるのは $\mathrm{ind}(\mathrm{Irr}(P(\Gamma)))$ であって、それらを ext^1 が0になるように足し上げていけば全体が尽くされるという仕組みになっている[35]。

したがって $\mathrm{ind}(\mathrm{Irr}(P(\Gamma)))$ を調べることに問題が還元されたことになるが、それでも一般の quiver に対してはほとんど手がつけられない問題である。

5.3 Λ_V の既約成分

前節で $\mathrm{Irr}(P(\Gamma))$ の既約成分について論じたが、この節ではさらに制約を加えて nilpotent variety $\Lambda_V = \mathrm{mod}^0(P(\Gamma), V)$ を詳しく調べることにする。ベキ零 (nilpotent) な表現だけを考えると、もちろん考える表現のクラスを狭めてしまうので $P(\Gamma)$ の表現全体を考える

[35] 「G_V-orbit の分類問題 = $P(\Gamma)$-modules の同型類の分類問題」の既約成分版と言ってよいだろう。

ことにならないというデメリットはあるもの、その分（6節と7節で詳しく説明するように）“crystal structre” と呼ばれる構造によって Λ_V の variety としての既約成分たちをコントロールすることができるようになる。

先走って言うと次のようなストーリーになっている。まず A,D,E の場合の Ringel-Hall algebra の話を思い出して頂きたい。この場合 path algebra $K[\Gamma]$ の indecomposable modules は対応する root 系の positive root の集合 Δ_+ でパラメトライズされていた。$\alpha \in \Delta_+$ に対応する indecomposable module を V_α と書くことにすれば、任意の $K[\Gamma]$-module V に対して同型

$$V \cong \bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} V_\alpha^{\oplus c_\alpha}$$

が存在し、各 $c_\alpha \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は一意的に定まる。したがって vector space としての $R\Omega$ の定義を $K[\Gamma]$-modules の言葉で言い直せば

$$R\Omega = \bigoplus_{c=(c_\alpha)\in \mathbb{Z}_{\geq 0}^N} \mathbb{C}\left[\bigoplus_{\alpha\in\Delta_+} V_\alpha^{\oplus c_\alpha}\right]$$

となる。（ただし $N = \sharp(\Delta_+)$。）一方 algebra としての $R\Omega$ は（indecomposable module たちではなく）simple module たち、V_{α_i} $(i \in I)$ で生成されていたことを思い出そう（Proposition 3.1.4 参照）[36]。つまり、algebra の生成系としては indecomposable module たちを全部知っている必要はなく、simple module たちさえ知っていればよいのである。

Λ_V の既約成分全体を考えた場合にも、実は同じことが起こる。つまり $P(\Gamma)$ の simple module に対応する既約成分たちから、全体がある意味で生成されてしまう。$P(\Gamma)$ の表現型は一般には wild だから、indecompozable なものを全てリストアップすることは不可能であるが、simple なものならば、それは quiver の頂点の個数分しかなく、構造もきわめて簡単である。もちろん simple なものから生成された既約成分たちが、nilpotent variety の既約成分全体に一致することは自明ではなく、この証明に “crystal structure” が本質的な役割を果たす[37]。詳しい話は6節以降に譲ることにして、以下では Γ が特別な場合に Λ_V の既約成分の具体型を見ていこう。

Remark . 5.2 節で述べた話は nilpotent variety に制限しても意味を持つことに注意されたい。そこで次のような問題を考えよう：

> V_k $(k = 1, 2)$ を I-graded vector space として、$\Lambda_i \in \mathrm{Irr}(\Lambda_{V_i})$ をとる。
> このとき $\overline{\Lambda_1 \oplus \Lambda_2} \subset \Lambda_{V_1\oplus V_2}$ は、いつ $\Lambda_{V_1\oplus V_2}$ の既約成分を与えるか？

この問題に対して Geiss-Leclerc-Schröer は、“dual semicanonical basis” を用いて1つの解答を与えた ([GLS1])。この点に関しては crystal structure の話をした後で、もう一度触れることにする（8節参照）。

---

[36] 3.1 節では Γ の表現の category の言葉で書いているので、simple object は $\mathbf{F}_{i,\iota}$ としていた。Γ の表現と $K[\Gamma]$-module の同一視の下に、両者は同じものを表している。

[37] Proposition 3.1.4 を証明するためには本当は indecomposable module たちを全部知っている必要がある。（その意味では上に述べたことにはウソがある。）しかし “crystal structure” の助けを借りると indecomposable module たちを全部知っている必要はなく、simple なものから全体が生成されることが証明できてしまう。

5.4 A,D,E の場合

この場合は $\Lambda_V = \mathrm{mod}(P(\Gamma), V))$ なので、nilpotency condition は自動的に満たされることに注意しよう。$\Gamma = (I, H)$ の orientation Ω' を任意に選んだとき、次の分解があることは明らかであろう。

$$X_V = E_{V,\Omega'} \oplus E_{V,\overline{\Omega'}}. \tag{5.4.1}$$

自然な射影 $X_V \twoheadrightarrow E_{V,\Omega'}$ を Λ_V に制限して得られる写像 $\pi_{\Omega'} : \Lambda_V \to E_{V,\Omega'}$ とする。このとき次が成り立つ。

Proposition 5.4.1 (Lusztig [L2]). $\Gamma = (I, \Omega)$ を A,D,E 型の quiver ととする。このとき任意に与えられた orientation Ω' に対して、次の 1 対 1 対応がある。

$$\mathrm{Irr}(\Lambda_V) \cong \left\{ \overline{\pi_{\Omega'}^{-1}(\mathcal{O}_{\Omega'})} \mid \mathcal{O}_{\Omega'} \text{ は } E_{V,\Omega'} \text{ の } G_V\text{-orbit} \right\}.$$

つまり $\Lambda \in \mathrm{Irr}(\Lambda_V)$ は、必ず $\overline{\pi_{\Omega'}^{-1}(\mathcal{O}_{\Omega'})}$ なる形をしており、しかも Ω' を決めれば $\mathcal{O}_{\Omega'}$ は一意的に定まる。もちろん最初に取った Ω と、任意に選んだ Ω' は一切関係はない。

集合としての記述という意味ではこれで十分なのだが、以下では $\pi_{\Omega'}^{-1}(\mathcal{O}_{\Omega'})$ がどんなものかをより幾何学的な立場から説明したい。例によって言葉の準備から始めよう。

X を manifold、$Y \subset X$ をその submanifold とする。このとき Y 上の vector bundle の完全列

$$0 \longrightarrow T_Y^*X \longrightarrow Y \times_X T^*X \longrightarrow T^*Y \longrightarrow 0 \tag{5.4.2}$$

によって定まる Y 上の vector bundle T_Y^*X を Y の conormal bundle という。ここで T^*X (*resp.* T^*Y) は X (*resp.* Y) の cotangent bundle、$Y \times_X T^*X$ は Y と T^*X の X 上の fiber product と呼ばれる Y 上の vector bundle で、以下のように定まるものである: $y \in Y$ とすると、$Y \subset X$ だから $y \in X$ とも思える。そこで $y \in X$ における T^*X の fiber T_y^*X を考えて、これを各 $y \in Y$ の上に乗せたものが $Y \times_X T^*X$ である。

$Y \subset X$ だから、各 $y \in Y(\subset X)$ に対して、接空間の自然な埋め込み $T_yY \hookrightarrow T_yX$ が存在する。この dual を取ることで、自然な全射

$$T_y^*X \twoheadrightarrow T^*yY$$

が定まる。完全列 (5.4.2) の $Y \times_X T^*X \longrightarrow T^*Y$ は、このように定まる Y 上の vector bundle の全射である。conormal bundle T_Y^*X は、この kernel として定まる。すなわち各 $y \in Y$ に対して、y 上の fiber が

$$\mathrm{Ker}(T_y^*X \twoheadrightarrow T^*yY)$$

であるような vector bundle が T_Y^*X である。

X の次元を d_X、Y の次元を d_Y とすれば、各 $y \in Y$ に対する cotangent space T_y^*X および T^*yY の次元はそれぞれ d_X, d_Y である。よって conormal bundle T_Y^*X の $y \in Y$ における fiber の次元は

$$\dim \mathrm{Ker}(T_y^*X \twoheadrightarrow T^*yY) = d_X - d_Y$$

である。Y が d_Y 次元であったので、多様体としての $T^*_Y X$ の次元は

$$(d_X - d_Y) + d_Y = d_X,$$

つまり、$(\dim T^*X)/2 = \dim X$ に等しい。

我々の話に戻ろう。まず分解 (5.4.1) があったことを思いだそう。$E_{V,\overline{\Omega'}}$ は自然に $(E_{V,\Omega'})^*$ と同一視することができるので、これにより X_V を $E_{V,\Omega'}$ の cotangent bundle $T^*E_{V,\Omega'}$ と同一視することができる：

$$X_V \cong T^*E_{V,\Omega'}.$$

より正確に言えば以下のようになる。一般に E を vector space とするとき $T^*E = E \oplus E^*$ 上には

$$\omega_0((x,\xi),(x',\xi')) := \xi(x') - \xi'(x) \quad ((x,\xi),\ (x',\xi') \in E \oplus E^*)$$

によって定まる非退化な skew symmetric bilinear form (symplectic form) が存在する。一方 X_V 上の bilinear form ω を

$$\omega(B,B') := \sum_{\tau \in H} \varepsilon(\tau)\mathrm{tr}(B_{\bar{\tau}}B'_{\tau})$$

とすると、ω は X_V 上の非退化な symplectic form を定める。そこで (X_V,ω) と $(T^*E_{V,\Omega'},\omega_0)$ を symplectic form 付きの vector space (symplectic vector space) として同一視する。

ここまでの議論では $X_V \cong E_{V,\Omega'} \oplus (E_{V,\Omega'})^*$ で十分であり、あえて cotangent bundle を持ち出す理由はないようにも思えるが、もちろんそれには意味がある。$\mathcal{O}_{\Omega'}$ を $E_{V,\Omega'}$ の G_V-orbit としよう。$\mathcal{O}_{\Omega'}$ は $E_{V,\Omega'}$ の submanifold ではないが、上にのべたのと同様な議論で、conormal bundle $T^*_{\mathcal{O}_{\Omega'}}E_{V,\Omega'}$ を考えることができる。このとき次がわかる。

Lemma 5.4.2 (Lusztig [L2]). Γ が A,D,E 型ならば、

$$\pi_{\Omega'}^{-1}(\mathcal{O}_{\Omega'}) = T^*_{\mathcal{O}_{\Omega'}}E_{V,\Omega'}.$$

つまり Γ が A,D,E 型ならば $\mathrm{Irr}(\Lambda_V)$ の各元は、orbit の conormal bundle の閉包 $\overline{T^*_{\mathcal{O}_{\Omega'}}E_{V,\Omega'}}$ なる形をしているわけである。各 $\overline{T^*_{\mathcal{O}_{\Omega'}}E_{V,\Omega'}}$ は、次元が $\dim E_{V,\Omega'} = (\dim X_V)/2$ なる既約な variety で、しかも G_V の作用で不変である。しかし単独の G_V-orbit ではなく、preprojective algbera $P(\Gamma)$ の表現の同型類と対応しているわけではない。

しかし $E_{V,\Omega'}$ の G_V-orbit $\mathcal{O}_{\Omega'}$ とは 1 対 1 に対応している（Proposition 5.4.1 参照)。したがって $\Gamma' = (I,\Omega')$ とするとき、path algebra $\mathbb{C}[\Gamma']$ の表現の同型類とも 1 対 1 に対応していることになる。さらに $\Gamma = (I,\Omega)$ を指定する orientation Ω と Ω' は無関係であることに注意されたい。いうなれば、各 $\Gamma' = (I,\Omega')$ たちの表現の同型類を、preprojective algebra $P(\Gamma)$ の nilpotent variety の既約成分 $\mathrm{Irr}(\Lambda_V)$ が "統括" しているわけで、この点は非常に面白い。

5.5 Kronecker quiver の場合

A,D,E 以外の例として Kronecker quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ の場合を見てみよう。ただし quiver に関する記号は Example 2.2.6 と同じものを用いることとする。一般化してしまうと話がややこしくなってしまうので Example 2.2.6 の場合と同様に $\underline{\dim} V = (1,1)$ の場合に限ることにする。

まず

$$\begin{aligned} X_V &= E_{V,\Omega} \oplus E_{V,\overline{\Omega}} \\ &\cong (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \oplus (\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}) \end{aligned}$$

に注意する。したがって $B = (B_{\tau_1}, B_{\tau_2}, B_{\overline{\tau}_1}, B_{\overline{\tau}_2}) \in X_V$ の各成分は全て $\mathbb{C}$ の元と思ってよい。簡単な計算から

$$\Lambda_V \cong (\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \{0\} \times \{0\}) \cup (\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}) \tag{5.5.1}$$

となることがわかり、これが Λ_V の既約分解を与える。同一視 $X_V \cong T^* E_{V,\Omega}$ の下に

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \{0\} \times \{0\} \cong T^*_{E_{V,\Omega}} E_{V,\Omega}$$

となる。つまり (5.5.1) の右辺の第 1 項は $T^* E_{V,\Omega}$ の zero-section である。

一方第 2 項の方は、$E_{V,\Omega}$ の 1 点 $\{(0,0)\}$ の conormal bundle になっている：

$$\{0\} \times \{0\} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C} \cong T^*_{\{(0,0)\}} E_{V,\Omega}.$$

この場合、A,D,E 型の場合のような Λ_V の既約成分と $E_{V,\Omega}$ の G_V-orbit との 1 対 1 対応はないが、実はある種の対応関係がある。まず $E_{V,\Omega}$ は $[a_1; a_2] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ でパラメトライズされる G_V-orbit たち（以下これを $\mathcal{O}_{[a_1;a_2]}$ と書く）と、1 点 $\{(0,0)\}$ からなる G_V-orbit（以下これを $\mathcal{O}_0$ と書く）わかれてることに注意する（Example 2.2.6 参照)：

$$E_{V,\Omega} = \left(\bigcup_{[a_1;a_2] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \mathcal{O}_{[a_1;a_2]} \right) \cup \mathcal{O}_0.$$

右辺の第 1 項をまとめて S と書くことにすれば、S は dimension vector が $(1,1)$ であるような Γ の indecompozable な表現を “すべて束ねて” できる、G_V-不変な $E_{V,\Omega}$ の部分集合である。このとき

$$T^*_{E_{V,\Omega}} E_{V,\Omega} = \overline{T^*_S E_{V,\Omega}}, \quad T^*_{\{(0,0)\}} E_{V,\Omega} = T^*_{\mathcal{O}_0} E_{V,\Omega} = \overline{T^*_{\mathcal{O}_0} E_{V,\Omega}}$$

となる。

上記の S の意味についてもう少し考えてみることにしよう。以下、いくつか未定義用語が出てくるが、詳しい定義等は有限次元代数の表現論の教科書[38]を参照して頂きたい。

Kronecker quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ の Auslander-Reiten quiver を $\Gamma_{\mathbb{C}[\Gamma]}$ と書く。このとき $\Gamma_{\mathbb{C}[\Gamma]}$ の中には regular components と呼ばれる connected components があることが知ら

[38] 例えば [R1] など。

れている。１つ１つの regular component は A_∞ 型 quiver と同型になっており（これを homogenious tube と呼ぶ）、全体として $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$-family をなしている。$[a_1 : a_2] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ に対応する homogenious tube の一番端に現れる頂点に対応する Γ の表現の同型類（このような表現を quasi-simple moudule と言うことがある）には、上に述べた $\mathcal{O}_{[a_1:a_2]}$ が対応する。したがって S は homogenious tube の一番端に現れる quasi-simple moudule たちを全部集めてきたもの、ということができる。

今までの話は $\underline{\dim}V = (1,1)$ とした場合の話だったが、より一般の dimension vector を持つ表現の場合も同様である。すなわち $\Lambda \in \mathrm{Irr}(\Lambda_V)$ に対して、Y なる G_V-不変な $E_{V,\Omega}$ の部分集合が存在して $\Lambda = \overline{T_Y^* E_{V,\Omega}}$ の形に書ける。さらにこの Y は、一般には単独の G_V-orbit ではなく、homogenious tube の頂点に現れる表現の同型類たち（$\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$-family）を束ねたようなものと、preprojective component もしくは preinjective component の頂点に対応する単独の G_V-orbit の合併集合になっている[39]。

6 Crystals

$\Gamma = (I, H)$ を一般の double quiver とする。ただし「一般」といっても、finiteness condition と no-loop condition は仮定していることに注意されたい。

このような仮定の下に orientation$\Omega \subset H$ を１つ fix して quiver $\Gamma = (I, \Omega)$ を考え、さらに preprojective algebra $P(\Gamma)$ の nilpotent variety Λ_V を考える。この節では Λ_V の既約成分 $\mathrm{Irr}(\Lambda_V)$ の構造を調べる道具として、crytsal の概念を導入する。既約成分と crystal の具体的な対応については次節（７節）に譲ることにして、今節では基本的な用語の説明をする。

6.1 Kac-Moody Lie algebra

一般的なセッティングで話を始める。詳しくは [Kac], [谷崎] 等の Kac-Moody Lie algebra の教科書を参照されたい。

Definition 6.1.1. I を有限集合とし、整数係数の $\sharp I \times \sharp I$-行列 $A = (a_{ij})_{i,j\in I}$ が以下の条件を満たすとき、一般化 Cartan 行列という。
(1) $a_{ii} = 2$ for all $i \in I$.
(2) $a_{ij} \geq 0$ if $i \neq j$.
(3) $a_{ij} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{ji} = 0$.
特に正整数係数の対角行列 $D = \mathrm{diag}(m_i \mid i \in I)$ が存在して、DA が対称行列となるとき、A は対称化可能（symmetrizable）であるという。

以下、特に断らない限り A は symmetrizable であると仮定する。

与えられた A に対して、抽象的に次元が $(2\sharp I - \mathrm{rank}A)$ の $\mathbb{C}$-vector space $\mathfrak{h}$ を考える。

[39] 少なくとも $\tilde{A}_n$ 型の場合には同様の記述が知られている。それ以外でも表現型が tame であれば、同様の話があってもおかしくはないと思うが、$\tilde{D}_n$, $\tilde{E}_n$ 等の場合に完全に書き下したものがあるかどうかは知らない。それ以外の一般の場合になってしまうと、そもそも $\Gamma = (I, \Omega)$ の表現型が wild になってしまうので、Auslander-Reiten quiver の構造自体よくわからない。

Definition 6.1.2. $\mathfrak{h}$ の一次独立な部分集合 $\Pi^\vee = \{h_i \mid i \in I\}$ と、$\mathfrak{h}$ の dual space $\mathfrak{h}^*$ の一次独立な部分集合 $\Pi = \{\alpha_i \mid i \in I\}$ が条件：

$$\alpha_j(h_i) = a_{ij} \text{ for any } i, j \in I$$

を満たすとき、3つ組 $\Phi = (\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ を一般化 Catran 行列 A の実現という。

実現 $\Phi = (\mathfrak{h}, \{\alpha_i\}_{i\in I}, \{h_i\}_{i\in I})$ は同型を除いて一意的に定まることが知られている。ただし2つの実現 $(\mathfrak{h}, \{\alpha_i\}_{i\in I}, \{h_i\}_{i\in I})$, $(\mathfrak{h}', \{\alpha_i'\}_{i\in I}, \{h_i'\}_{i\in I})$ が同型であるとは、vector space としての同型写像 $\phi : \mathfrak{h} \to \mathfrak{h}'$ であって、$\phi^*(\{\alpha_i'\}) = \{\alpha_i\}$ かつ $\phi(\{h_i\}) = \{h_i'\}$ を満たすものが存在することをいう。

Definition 6.1.3. $A = (a_{ij})$ を一般化 Cartan 行列、$\Phi = (\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^\vee)$ をその実現とする。このとき e_i, f_i $(i \in I)$, $h \in \mathfrak{h}$ を生成元とし、以下の基本関係式 (1) ~ (6) で定まる $\mathbb{C}$ 上の Lie algebra を A に付随する（symmetrizable）Kac-Moody Lie algebra と呼び、$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ と書く。

(1) $[h, h'] = 0$ for $h,\ h' \in \mathfrak{h}$,

(2) $[h, e_i] = \alpha_i(h) e_i$ for $i \in I$ and $h \in \mathfrak{h}$,

(3) $[h, f_i] = -\alpha_i(h) f_i$ for $i \in I$ and $h \in \mathfrak{h}$,

(4) $[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i$ for $i, j \in I$,

(5) $\mathrm{ad}(e_i)^{1-a_{ij}}(e_j) = 0$ for $i, j \in I$ with $i \neq j$,

(6) $\mathrm{ad}(f_i)^{1-a_{ij}}(f_j) = 0$ for $i, j \in I$ with $i \neq j$.

ここで $X \in \mathfrak{g}$ に対して $\mathrm{ad}(X)$ とは、$Y \mapsto [X, Y]$ $(Y \in \mathfrak{g})$ によって定まる $\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{g})$ の元を表す。

Remark . (1) A が有限型の Cartan 行列（A~G 型）ならば、対応する Kac-Moody Lie algebra $\mathfrak{g}(A)$ は有限次元 simple Lie algebra と同型である。さらに $\mathfrak{g}(A)$ が有限次元であることと A が有限型の Cartan 行列であることは同値であることが知られている。
(2) 対称化可能とは限らない一般化 Cartan 行列に対しても Kac-Moody Lie algbera は定義できるが、上記のような生成元と基本関係式による表示は知られていない。

e_i たちで生成される Lie subalgebra を $\mathfrak{n}_+$、f_i たちで生成される Lie subalgebra を $\mathfrak{n}_-$ と書く。このとき三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ が成立することが知られている。A,D,E の場合 (3.3 節) と同様に、$\mathfrak{n}_-$ を下三角 Lie subalgebra と呼ぶ。
普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ に対しても、$\mathfrak{g}$ の三角分解が誘導する分解、

$$U(\mathfrak{g}) = U(\mathfrak{n}_-) \otimes U(\mathfrak{h}) \otimes U(\mathfrak{n}_+) \tag{6.1.1}$$

が存在し、こちらも三角分解と呼ばれる。

• 我々の場合

今まで述べてきた一般論を適用して、quiver に付随する Kac-Moody Lie algebra を導入しよう。一般の double quiver $\Gamma = (I, H)$ に対し、以下のような $\sharp I \times \sharp I$-行列 $A(\Gamma) = (a_{ij})_{i,j\in I}$ を考える：

$$a_{ij} = \begin{cases} 2, & \text{if } i = j, \\ -\sharp\{\tau \in H \mid \mathrm{out}(\tau) = i,\ \mathrm{in}(\tau) = j\}, & \text{if } i \neq j. \end{cases}$$

いま考えているのは double quiver なので、$i \neq j$ のとき、

$$\sharp\{\tau \in H \mid \mathrm{out}(\tau) = i,\ \mathrm{in}(\tau) = j\} = \sharp\{\tau \in H \mid \mathrm{in}(\tau) = i,\ \mathrm{out}(\tau) = j\}$$

であり、したがって

$$a_{ij} = a_{ji}$$

である。すなわち $A(\Gamma)$ は対称行列である。また一般化 Cartan 行列の公理を満たすことも容易に確かめられる。この $A(\Gamma)$ を $\Gamma = (I, H)$ に付随する一般化 Catran 行列と呼ぶ。

Definition 6.1.4. $A(\Gamma)$ に付随する Kac-Moody Lie algbera $\mathfrak{g}(\Gamma) = \mathfrak{g}(A(\Gamma))$ を double quiver $\Gamma = (I, H)$ に付随する Kac-Moody Lie algbera と呼ぶ。

与えられた一般化 Cartan 行列 A が対称行列であるとき、$\mathfrak{g}(A)$ を symmetric Kac-Moody Lie algebra と呼ぶ。今の場合 $A(\Gamma)$ は常に対称行列であるので、$\mathfrak{g}(\Gamma)$ は symmetric Kac-Moody Lie algebra である。逆に抽象的に与えられた対称な一般化 Cartan 行列 $A = (a_{ij})$ に対して、添字集合 I を頂点集合と見なし、$i \in I$ から $j \in I$ へ、$j \in I$ から $i \in I$ へ、それぞれ a_{ij} 本づつの矢印を書くことにすれば、double quiver Γ が得られる。さらに $\mathfrak{g}(A) = \mathfrak{g}(\Gamma)$ が成り立つことも容易にわかる。したがって、一般の double quiver に付随する Kac-Moody Lie algebra を考えるということと、一般の symmetric Kac-Moody Lie algebra を考えることは同値である。

6.2 一般の量子群の定義

前節では対称化可能な一般化 Cartan 行列 A に対して、Kac-Moody Lie algbera $\mathfrak{g}(A)$ を定義したが、この節ではさらに $\mathfrak{g}(A)$ に付随する量子包絡環（量子群）$U_v(\mathfrak{g}(A))$ を導入したい。そのためには、もう少し extra なデータを固定する必要がある。

前節で述べたように $\mathfrak{h}$ には一次独立な部分集合 $\Pi^\vee = \{h_i \mid i \in I\}$ が定められていた。もし A が正則行列ならば $\mathrm{rank} A = \sharp I$ であり、したがって $\dim \mathfrak{h} = \sharp I$ である。ゆえに $\Pi^\vee$ は $\mathfrak{h}$ の基底になっている[40]が、一般には元の個数が足りない。

そこで rank が $\dim \mathfrak{h} = (2\sharp I - \mathrm{rank} A)$ の free $\mathbb{Z}$-module $P^\vee (\subset \mathfrak{h})$ を考え、その $\mathbb{Z}$-basis を $\{h_i \mid i \in I\} \cup \{\gamma_s \mid 1 \leq s \leq \sharp I - \mathrm{rank} A\}$ とする：

$$P^\vee := \left(\bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z} h_i \right) \oplus \left(\bigoplus_{s=1}^{\sharp I - \mathrm{rank} A} \mathbb{Z} \gamma_s \right).$$

[40] 例えば A が有限型ならば $\Pi^\vee$ は $\mathfrak{h}$ の基底の基底である。

ただし、付け加えた γ_s $(1 \leq s \leq \sharp I - \mathrm{rank}A)$ は

$$\alpha_i(\gamma_s) = 0 \text{ or } 1 \text{ for } i, j \in I \text{ and } 1 \leq s \leq (\sharp I - \mathrm{rank}A)$$

を満たすようにとる。このとき定義から

$$\mathfrak{h} = \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} P^{\vee}$$

は明らかである。また

$$P := \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda(P^{\vee}) \subset \mathbb{Z}\}.$$

とおく。このとき $P^{\vee}$ を dual weight lattice, P を weight lattice という。また $\Pi^{\vee} := \{h_i \mid i \in I\}$ とし、$\Pi^{\vee}$ の元を simple coroot と呼ぶ。

Definition 6.2.1. 5つ組 $(A, \Pi, \Pi^{\vee}, P, P^{\vee})$ を Cartan datum と呼ぶ。

Remark . Cartam datum $(A, \Pi, \Pi^{\vee}, P, P^{\vee})$ が与えられたとき、$\mathfrak{h} := \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Z}} P^{\vee}$ とおけば、3つ組 $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^{\vee})$ は一般化 Cartan 行列 A の実現を与え、しかもその実現は（上に述べた意味で）同型を除き一意的に定まる。したがって対応する Kac-Moody Lie algebra $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(A)$ も一意的に定まる。

一方、一般化 Cartan 行列 A の実現 $(\mathfrak{h}, \Pi, \Pi^{\vee})$ が与えられた場合、それに付随する Cartan datum $(A, \Pi, \Pi^{\vee}, P, P^{\vee})$ は必ずしも一意的に定まるわけではない。実際 γ_s $(1 \leq s \leq \sharp I - \mathrm{rank}A)$ の選び方には不定性があり、ここで言っているのは「何でもいいから一つ固定せよ」ということのみである。この後すぐに Cartan datum をもとにして一般の量子包絡環（量子群）を導入するが、量子包絡環の定義自身は Cartam datum の選び方の不定性に依らずに（つまり γ_s たちの選び方に依らずに）定まるので、問題はない。

Definition 6.2.2. 与えられた Cartan datum $(A, \Pi, \Pi^{\vee}, P, P^{\vee})$ に対し、付随する量子包絡環 $U_v = U_v(\mathfrak{g})$ とは、e_i, f_i $(i \in I)$ および v^h $(h \in P^{\vee})$ を生成元とし[41]、以下の基本関係式 (1)~(6) で定義される、単位元を持つ $\mathbb{Q}(v)$ 上の associateive algebra である。

(1) $v^0 = 1, \quad v^h v^{h'} = v^{h+h'}$ for $h,\ h' \in P^{\vee}$,

(2) $v^h e_i v^{-h} = v^{\alpha_i(h)} e_i$ for $i \in I$ and $h \in P^{\vee}$,

(3) $v^h f_i v^{-h} = v^{-\alpha_i(h)} f_i$ for $i \in I$ and $h \in P^{\vee}$,

(4) $e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} \frac{t_i - t_i^{-1}}{v_i - v_i^{-1}}$ for $i, j \in I$,

(5) $\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} e_i^{(1-a_{ij}-k)} e_j e_i^{(k)} = 0$ for $i, j \in I$ with $i \neq j$,

(6) $\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} f_i^{(1-a_{ij}-k)} f_j f_i^{(k)} = 0$ for $i, j \in I$ with $i \neq j$.

ただし $v_i = v^{m_i}$, $t_i = v^{m_i h_i}$. また $[l]_i = v_i^l - v_i^{-l}$, $[k]_i! = \prod_{l=1}^{k} [l]_i$ として、$e_i^{(k)} = e_i^k / [k]_i!$. $f_i^{(k)}$ も同様。

[41] 生成元の中で v^h と書いているのは単なる symbol であって、「不定元 v の h 乗」という意味ではない。

量子包絡環 $U_v(\mathfrak{g})$ は "$v \to 1$" なる極限[42]で $\mathfrak{g}$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g})$ と一致することが知られている。すなわち $U_v(\mathfrak{g})$ は $U(\mathfrak{g})$ の v-analogue である。

f_i たちで生成される subalgebra を $U_v^- = U_v(\mathfrak{n}_-)$ と書く。これは Definition 6.2.2 の (6) を基本関係式とする algebra で、下三角部分代数とも呼ばれる。U_v^- は今後の主要登場人物の一人である。

また e_i たちで生成される subalgebra を $U_v^+ = U_v(\mathfrak{n}_+)$, v^h たちで生成される subalgebra を U_v^0 と書く。このとき、分解

$$U_v = U_v^- \otimes U_v^0 \otimes U_v^+ \tag{6.2.1}$$

が成り立つ。これは $U(\mathfrak{g})$ の三角分解 (6.1.1) の v-analogue である。

• 我々の場合

前節の Kac-Moody Lie algebra の場合と同様に、一般の double quiver $\Gamma = (I, H)$ から出発して対応する量子包絡環 $U_v(\mathfrak{g}(\Gamma))$ を考えることができる。これを Γ に付随する量子包絡環と呼ぶことにしよう。

6.3 $v = 0$ における基底

量子包絡環 $U_v(\mathfrak{g})$ は可解格子模型という、理論物理のモデルを解くために１９８０年代半ばごろ Drinfeld と神保によって独立に導入された概念である。その後１９９０年代になって、柏原により crystal base の概念が導入された。一言で言えば crystal base とは $U_v(\mathfrak{g})$-module の、に→ 0　おける基底である。Drinfeld-神保によるオリジナルの問題意識では不定元 v は温度のパラメータであり、$v \to 0$ の極限をとるということは絶対零度の状態を考えることに対応する[43]。

しかしながら、今回のノートではこのような "物理的な背景" は全て無視して、純粋に数学的な概念として crystal base の概念を導入したい。その場合問題になるのが、「$v \to 0$ の極限」の意味である。我々が考えている量子包絡環 $U_v(\mathfrak{g})$ は $\mathbb{Q}(v)$ 上の associative algebra であるので、係数体の中に例えば v^{-1} も含まれている。もちろん

$$\lim_{v \to 0} v^{-1} = \infty$$

であるから、安直に極限をとることはできない。この問題を解決するために、この節では "$v = 0$ における基底" なる概念を導入する。

$\mathcal{A}$ を $q = 0$ で regular な $\mathbb{Q}(v)$ の元全体のなす subring とする。このとき $\mathcal{A}$ は local ring で、$v\mathcal{A}$ がその極大 ideal である。また $\mathcal{A}/v\mathcal{A} \cong \mathbb{Q}$ であることに注意する。

[42]安直に「$v = 1$ を代入したもの」というわけではない。例えば Definition 6.2.2 の (4) は $v = 1$ を代入すると右辺の分母が 0 になってしまい、意味をなさない。しかし「うまい極限の取り方」をすると、Definition 6.2.2 の (1)~(6) の各式は、丁度 Definition 6.1.3 の (1)~(6) を復活させるようになっている。

[43]素人考えでは、絶対零度の世界ではものはカチカチに固まってしまいそうな気がする。筆者の聞くところによれば、"crystal" という名前の由来もここにあるらしい。ただし物理学者に言わせると、$v \to 0$ の極限をとることは必ずしも絶対零度の状態を考えることにはならないらしく、その意味では「いい加減な言葉の使い方」なのだそうである。

Definition 6.3.1. V を $\mathbb{Q}(v)$ 上の vector space とする。組 (L,B) が以下の条件を満たすとき、(L,B) を V の $v=0$ における基底と呼ぶ。
(1) L は $L\otimes_{\mathcal{A}}\mathbb{Q}(v)\cong V$ を満たす V の free $\mathcal{A}$-submodule。
(2) B は $\mathbb{Q}$-vecotr space $L/vL\cong(\mathcal{A}/v\mathcal{A})\otimes_{\mathcal{A}}L$ の $\mathbb{Q}$-基底。

6.4 $U_v(\mathfrak{g})$ の表現論

我々が本当に必要なのは下三角部分代数 U_v^- の crystal base なのだが、いきなり定義を与えても意味がわかりづらいことと思う。そこで今回は、次節 (6.5 節) でより基本的な U_v-module の crystal base について説明し、続いて 6.6 節で U_v^- の crystal base の定義を与えるという順序をとることにする。そのための準備として本節では $U_v(\mathfrak{g})$ の表現論について知られていることを簡単に紹介する。ただし紙数の都合もあり詳しく述べることはできないので、以下に紹介するのはあくまでも概略である。詳しくは [HK] 等を参照されたい。

$U_v^{\geq 0}$ を e_i, v^h $(i\in I,\ h\in P^\vee)$ で生成される U_v の subalgebra とする。$\lambda\in P$ に対して $U_v^{\geq 0}$ の 1 次元表現 $\mathbb{Q}(v)1_\lambda$ を以下のように定める：

$$e_i1_\lambda=0\quad\text{for } i\in I,\qquad v^h1_\lambda=v^{\lambda(h)}1_\lambda\quad\text{for } h\in P^\vee.$$

この 1 次元表現 $\mathbb{Q}(v)1_\lambda$ から誘導される U_v-module

$$M(\lambda):=U_v\underset{U_v^{\geq 0}}{\otimes}\mathbb{Q}(v)1_\lambda$$

を（highset weight λ の）Verma module という。Verma module は U_v の表現論において最も基本的な対象の一つである。以下にその性質を列挙しよう。

一般に U_v-module V および $\mu\in P$ に対して、

$$V_\mu:=\{u\in V\mid v^hu=v^{\mu(h)}u \text{ for any } h\in P^\vee\}$$

を V の weight μ の weight space と呼び、

$$\mathrm{wt}(V):=\{\mu\in P\mid V_\mu\neq\{0\}\}$$

を V の weight の集合と呼ぶ。また任意の $\mu\in\mathrm{wt}(V)$ に対して $\dim V_\mu<\infty$ で、かつ分解

$$V=\bigoplus_{\mu\in P}V_\mu$$

が成り立つとき、V を weight module と呼ぶ。

U_v の三角分解 (6.2.1) により、vector space としては $M(\lambda)$ は U_v^- と同型で、しかも weight module である。さらに $\mathrm{wt}(M(\lambda))=\lambda+Q^-$ が成り立つ。ここに $Q^-=\oplus_{i\in I}\mathbb{Z}_{\leq 0}\alpha_i$ である。

Verma module の性質のうちで最も著しいのは次のものであろう。

Proposition 6.4.1. (1) $M(\lambda)$ は $u_\lambda := 1 \otimes 1_\lambda$ から生成され、任意の元は $f_{i_1} \cdots f_{i_l} u_\lambda$ たちの1次結合で書ける。
(2) $M(\lambda)$ は unique proper maximal submodule J_λ を持つ。
(3) $V(\lambda) := M(\lambda)/J_\lambda$ とおく。定義から $V(\lambda)$ は既約 U_v-module であるが、特に

$$\lambda \in P_+ := \{\lambda \in P \mid \lambda(h_i) \geq 0 \text{ for any } i \in I\}$$

である場合には、

$$J_\lambda = \sum_{i \in I} U_v f_i^{\lambda(h_i)+1} u_\lambda$$

が成り立つ。すなわち $\lambda \in P_+$ ならば、e_i, f_i は $V(\lambda)$ に locally nilpotent に作用する。

自然な射影 $M(\lambda) \to V(\lambda)$ による $u_\lambda \in M(\lambda)$ の image を同じ記号 u_λ で書くことにすれば、$V(\lambda)$ の任意の元も $f_{i_1} \cdots f_{i_l} u_\lambda$ たちの1次結合で書けることは明らかであろう。

一般に U_v-module V が次の3条件を満たすとき、integrable であるという：

(a) V は weight module である。

(b) 任意の $\in I$ に対して e_i, f_i は locally nilpotent に作用する。

(c) 有限個の $\lambda_1, \cdots, \lambda_N \in P$ が存在して

$$\mathrm{wt}(V) \subset D(\lambda_1) \cup \cdots \cup D(\lambda_N).$$

ただし、$D(\lambda) = \lambda + Q_-$.

定義から、$\lambda \in P_+$ のとき $V(\lambda)$ が既約 integrable module であることはすぐにわかるが、より強く次が成り立つ。

Theorem 6.4.2. V を既約な integrable module とすると、$\lambda \in P_+$ が存在して $V \cong V(\lambda)$ となる。さらに integrable module 全体のなす category を $\mathcal{O}_{int}$ と書けば、$\mathcal{O}_{int}$ は semisimple category で、$\{V(\lambda) \mid \lambda \in P_+\}$ が simple objects の完全代表系を与える。

6.5 Integrable $U_v(\mathfrak{g})$-module の crystal base

前節の最後に述べた定理によって、$V(\lambda)$ ($\lambda \in P_+$) の構造がわかれば integrable module の構造はわかったことになるわけだが、そもそも何をもって "構造がわかる" というのか？というのは自然な疑問であろう。その答えはいろいろあり得ると思うが、以下に述べる crystal base の概念は、その一つを与えることになる。

もう少し具体的に説明しよう。U_v は e_i, f_i, v^h で生成されていたので、これらの元の作用がわかれば「module V の構造がわかった」といってよいであろう。「作用がわかる」とはどういう意味か？というと、これも答え方はいろいろあると思うが、ここでは V のうまい基底が存在して、その基底に関して生成元たちを行列表示したとき、その行列ができるだけ簡単な形をしている、という意味とする。

今我々が考えている module V は integrable module なので、特に weight module でもある。したがって V は weight space の直和に分解する（これを weight space decomposition という）が、言い方を換えればこれは v^h たちの作用を同時対角化していることを意味する。つまり weight space decomposition がわかれば、v^h たちの作用は完全にわかったことになる。特に $V = V(\lambda)$ のときは weight space decomposition に関する公式が知られている[44]。

したがって問題は e_i および f_i たちの作用、ということになる。v を不定元と思っているとこれらの作用は非常に複雑で簡単に書き下すことは出来ないが、実は $v \to 0$ の極限をとると問題が組み合わせ論に還元されてしまって、記述が可能になる。それが crystal base と呼ばれるものである。

「$v \to 0$ の極限をとる」という意味については、すでに 6.3 節で説明した。この極限操作と e_i および f_i たちの作用は実はあまり相性がよくないので、少し modify する必要がある。例によって準備から始めよう。

Lemma 6.5.1. $V = \oplus_{\mu\in P} V_\mu$ を integrable module、$u \in V_\mu$ とする。このとき任意の $i \in I$ に対して

$$u = u_0 + f_i u_1 + \cdots + f_i^{(N)} u_N$$

を満たす $u_k \in V_{\lambda+k\alpha_i} \cap \ker e_i$ $(0 \le k \le N)$ が一意的に存在する。ここに $f_i^{(k)} = f_i^k/[k]_i!$ である。

Definition 6.5.2. Kashiwara operators $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i \in \mathrm{End}(V)$ を

$$\tilde{e}_i u := \sum_{k=1}^{N} f_i^{(k-1)} u_k, \quad \tilde{f}_i u := \sum_{k=0}^{N} f_i^{(k+1)} u_k$$

で定める。

これで crystal base の定義をするための準備が整った。

Definition 6.5.3. $V \in \mathcal{O}_{int}$ とする。組 $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ が以下の条件を満たすとき V の crystal base であるという。

(1) $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ は V の $v = 0$ における基底である。

(2) $\mathcal{L}_\lambda := \mathcal{L} \cap V_\lambda$ $(\lambda \in P)$ とするとき、$\mathcal{L} = \oplus_{\lambda\in P} \mathcal{L}_\lambda$ が成り立つ。

(3) $\mathcal{B}_\lambda := \mathcal{B} \cap (\mathcal{L}_\lambda / v\mathcal{L}_\lambda)$ とするとき、$\mathcal{B} = \sqcup_{\lambda\in P} \mathcal{B}_\lambda$ が成り立つ。

(4) 任意の $i \in I$ 対し、$\tilde{e}_i \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ かつ $\tilde{f}_i \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$. このとき $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : \mathcal{L}/v\mathcal{L} \to \mathcal{L}/v\mathcal{L}$ であるが、さらに $\tilde{e}_i \mathcal{B} \subset \mathcal{B} \sqcup \{0\}$ かつ $\tilde{f}_i \mathcal{B} \subset \mathcal{B} \sqcup \{0\}$ が成り立つ。

(5) $b.b' \in \mathcal{B}$, $i \in I$ に対して、$b' = \tilde{f}_i b \Leftrightarrow b = \tilde{e}_i b'$.

[44] Weyl-Kac character formula と呼ばれているものが、それにあたる。

このような基底が存在すれば、この節の始めに述べた「U_v の作用がわかる基底」になっていることに注意しよう。実際、B は weight 分解 $B = \sqcup_{\lambda \in P} B_\lambda$ を持っているので、v^h たちの作用はこの基底で対角化されている。また (4) および (5) より、$\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ の作用を "行列表示" すれば[45]各行各列に 1 が高々 1 つしかなく、他は全て 0 であるような行列になっていることがわかる。しかも (5) によって、$\tilde{e}_i$ と $\tilde{f}_i$ はほぼ逆になっている。

次に述べる定理は crystal base の存在と一意性を保証する、基本定理というべきものである。

Theorem 6.5.4 (Kasihira). (1) $V \in \mathcal{O}_{int}$ は常に crystal base を持ち、同型を除いて一意的である[46]。
(2) 特に $V = V(\lambda)$ の場合、

$$L(\lambda) := \sum \mathcal{A} \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_l} u_\lambda, \quad B(\lambda) := \{\tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_l} u_\lambda \bmod vL(\lambda)\} \setminus \{0\}$$

とおくと、$(L(\lambda), B(\lambda))$ は $V(\lambda)$ の crystal base である。

crystal base の global な構造を見るには crystal graph の概念が便利である。B を頂点集合として、B 上に I-colored arrow を以下のルールで書き込む：

$$b \xrightarrow{i} b' \iff b' = \tilde{f}_i b \quad (i \in I).$$

こうしてできる oriented I-colored graph を V の crystal graph と呼ぶ。

以上のようにして、inegrable module V の構造解析が crystal graph という、いわば "お絵描き" に帰着されてしまうわけである。とはいえ実際に crystal graph を書き下すのはそんなに簡単なことではない。いうまでもなく基本になるのは既約 integrable module $V(\lambda)$ の場合であるが、この場合ですら crystal graph を書き下すことは一般には出来ない[47]。詳しく分かっているのは $\mathfrak{g}$ が有限型、もしくは affine 型の場合で、その場合には種々のケースに応じて crystal graph の組合せ論的実現が知られている[48]。

6.6 U_v^- の crystal base

この節では 7 節以降の主題となる、U_v^- の crystal base を定式化したい。基本的なアイデアは integrable module の場合と同じであるが、異なる点は「U_v^- は e_i の作用で閉じていない」ということである。したがって Kashiwara operators を考えようとしても、前節のように e_i, f_i の作用を modify することでは定義できず、少々工夫が必要となる。Kashiwara operators を定義するための key になるのは次の Lemma である。

---

[45] $v \to 0$ の極限での話なので正確な言い方ではないが、主旨は伝わることと思う。
[46] 話が長くなりすぎるので、「crystal base が同型であること」の定義はあえて省略した。詳しくは [HK] 等を参照のこと。
[47] $\mathfrak{g}$ が有限型でないと、$V(\lambda)$ は無限次元になる。その場合 crystal graph は無限個の頂点を持つことになり、全体を把握するのは格段に難しくなる。
[48] この辺の事情は [HK] に詳しい解説がある。

Lemma 6.6.1. 任意の $X \in U_v^-$ に対して、$X_1, X_2 \in U_v^-$ が一意的に存在して

$$[e_i, X] = \frac{t_i X_1 - t_i^{-1} X_2}{v_i - v_i^{-1}}$$

を満たす。

このLemmaにより、$e_i' \in \mathrm{End}(U_v^-)$ を

$$e_i'(X) := X_2$$

によって定める。このとき次が成り立つ。

Lemma 6.6.2.

$$U_v^- = \bigoplus_{k \geq 0} f_i^{(k)} \ker e_i'.$$

そこでKashiwara operators $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i \in \mathrm{End}(U_v^-)$ を次のように定める。

Definition 6.6.3.

$$\tilde{e}_i(f_i^{(k)}u) := \begin{cases} f_i^{(k-1)}u, & k \geq 1, \\ 0, & k = 0, \end{cases} \qquad \tilde{f}_i(f_i^{(k)}u) := f_i^{(k+1)}u \quad \text{for } u \in \ker e_i'.$$

$\lambda \in P$ に対して、$(U_v^-)_\lambda := \{X \in U_v^- \mid v^h X v^{-h} = v^{\lambda(h)} X \text{ for } h \in P^\vee\}$ とおく。これで U_v^- のcrystal baseを定義するための準備が整った。

Definition 6.6.4. 組 $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ が以下の条件を満たすとき U_v^- のcrystal baseであるという。

(1) $(\mathcal{L}, \mathcal{B})$ は U_v^- の $v = 0$ における基底である。

(2) $\mathcal{L}_\lambda := \mathcal{L} \cap (U_v^-)_\lambda$ $(\lambda \in P)$ とするとき、$\mathcal{L} = \oplus_{\lambda \in P} \mathcal{L}_\lambda$ が成り立つ。

(3) $\mathcal{B}_\lambda := \mathcal{B} \cap (\mathcal{L}_\lambda / v\mathcal{L}_\lambda)$ とするとき、$\mathcal{B} = \sqcup_{\lambda \in P} \mathcal{B}_\lambda$ が成り立つ。

(4) 任意の $i \in I$ 対し、$\tilde{e}_i \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ かつ $\tilde{f}_i \mathcal{L} \subset \mathcal{L}$. このとき $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i : \mathcal{L}/v\mathcal{L} \to \mathcal{L}/v\mathcal{L}$ であるが、さらに $\tilde{e}_i \mathcal{B} \subset \mathcal{B} \sqcup \{0\}$ かつ $\tilde{f}_i \mathcal{B} \subset \mathcal{B}$ が成り立つ。

(5) $b, b' \in \mathcal{B}$, $i \in I$ に対して、$b' = \tilde{f}_i b \Leftrightarrow b = \tilde{e}_i b'$.

Theorem 6.6.5 (Kasiwara).

$$L(\infty) := \sum \mathcal{A} \tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_l} 1, \quad B(\infty) := \{\tilde{f}_{i_1} \cdots \tilde{f}_{i_l} 1 \bmod vL(\infty)\}$$

とおくと、$(L(\infty), B(\infty))$ は U_v^- のcrystal baseである。

今後 $1 \bmod vL(\infty) \in B(\infty)$ を b_∞ と書くことにする。前節の場合と同様に $B(\infty)$ のcrystal graphを考えることができるが、これは無限個の頂点をもつoriented I-colored graphである。その中で b_∞ は唯一のsink vertex（入ってくる矢印がないvertex）として特徴づけられる。

6.7 Crystals

前節までで crystal base の紹介をしてきたが、本節では crystal の概念を導入する。一言でいえば crystal とは、crystal base の定義を抽象化して得られるもので、1990年代の半ばごろ柏原によって導入された。6節が始まってから長々と話をしてきたが、本節をもって crystal base に関する準備は終わりである。

Definition 6.7.1. (1) $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ を Cartan datum として固定する。このとき集合 B と写像たち

$$\mathrm{wt}: B \to P, \quad \varepsilon_i : B \to \mathbb{Z} \sqcup \{-\infty\}, \quad \varphi_i : B \to \mathbb{Z} \cup \{-\infty\},$$

$$\tilde{e}_i : B \to B \sqcup \{0\}, \quad \tilde{f}_i : B \to B \sqcup \{0\}, \quad (i \in I)$$

の組が crystal であるとは、以下の公理を満たすことである：

(C1) $\varphi_i(b) = \varepsilon_i(b) + \langle h_i, \mathrm{wt}(b) \rangle$ for $i \in I$ and $b \in B$,

(C2) $b \in B$ かつ $\tilde{e}_i b \in B$ ならば、$\mathrm{wt}(\tilde{e}_i b) = \mathrm{wt}(b) + \alpha_i$, $\varepsilon_i(\tilde{e}_i b) = \varepsilon_i(b) - 1$, $\varphi_i(\tilde{e}_i b) = \varphi_i(b) + 1$,

(C2') $b \in B$ かつ $\tilde{f}_i b \in B$ ならば、$\mathrm{wt}(\tilde{f}_i b) = \mathrm{wt}(b) - \alpha_i$, $\varepsilon_i(\tilde{f}_i b) = \varepsilon_i(b) + 1$, $\varphi_i(\tilde{f}_i b) = \varphi_i(b) - 1$,

(C3) $b, b' \in B$ のとき、$b' = \tilde{e}_i b \Leftrightarrow b = \tilde{f}_i b'$,

(C4) $b \in B$ かつ $\varphi_i(b) = -\infty$ ならば、$\tilde{e}_i b = \tilde{f}_i b = 0$.

ただし (C1) における $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}^*$ の natural pairing を表す。
(2) B_1, B_2 を crystal とする。このとき B_1 から B_2 への morphism ψ とは、写像 $\psi : B_1 \sqcup \{0\} \to B_2 \sqcup \{0\}$ であって以下の条件を満たすものである。

(i) $\psi(0) = 0$,

(ii) $b \in B_1$ かつ $\psi(b) \in B_2$ ならば、$\mathrm{wt}(\psi(b)) = \mathrm{wt}(b)$, $\varepsilon_i(\psi(b)) = \varepsilon_i(b)$, $\varphi_i(\psi(b)) = \varphi_i(b)$,

(iii) $b, b' \in B_1$ が $b' = \tilde{f}_i b$ かつ $\psi(b), \psi(b') \in B_2$ を満たすならば、$\tilde{f}_i(\psi(b)) = \psi(b')$.

このとき $\psi : B_1 \to B_2$ と記す。

morphism $\psi : B_1 \to B_2$ が strict であるとは、ψ が任意の $\tilde{e}_i, \tilde{f}_i$ と可換であることをいう。また写像として $\psi : B_1 \sqcup \{0\} \to B_2 \sqcup \{0\}$ が単射であるとき、morphism $\psi : B_1 \to B_2$ は embedding であるという。

Remark . crystal というのは Cartan datum $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ を指定した上で定まる概念であることに注意されたい。通常は「crystal B」とだけ述べて Cartan datum は書かない場合が多いが、暗黙のうちに Cartan datum は固定されている。上で述べた crystal から crystal への morphism も、同じ Cartan datum を持つ crystal の間でのみ考えることが出来るのであって、異なる Cartan datum を持つ crystal の間の morphism は定義されていない。

Example 6.7.2. $B = B(\lambda)$ $(\lambda \in P_+)$、すなわち既約 integrable 表現 $V(\lambda)$ の crystal base とする。定義から $B(\lambda)$ は weight 分解 $B(\lambda) = \sqcup_{\mu \in P} B(\lambda)_\mu$ を持っていた。そこで $b \in B(\lambda)_\mu$ に対し、

$$\mathrm{wt}(b) := \mu \in P$$

と定める。また

$$\varepsilon_i(b) := \max\{k \geq 0 \mid \tilde{e}_i^k b \neq 0\}, \quad \varphi_i(b) := \max\{k \geq 0 \mid \tilde{f}_i^k b \neq 0\}$$

とおく。このとき $B(\lambda)$ は Definition 6.7.1 の意味で crystal である。

Example 6.7.3. $B = B(\infty)$ とする。定義から $B(\infty)$ は weight 分解を持っていたので、$B(\lambda)$ の場合と同様にして $\mathrm{wt} : B(\infty) \to P$ を定める。また

$$\varepsilon_i(b) := \max\{k \geq 0 \mid \tilde{e}_i^k b \neq 0\}, \quad \varphi_i(b) := \varepsilon_i(b) + \langle h_i, \mathrm{wt}(b) \rangle$$

とする。このとき $B(\lambda)$ は crystal である。

上記の 2 つの例は crystal base から来る crystal である。このようなものの他に、crystal base から来ない crystal もある。以下に重要な例を 2 つ挙げよう。

Example 6.7.4. $\lambda \in P$ とし、1 つの元からなる集合 $T_\lambda = \{t_\lambda\}$ を考える。$\mathrm{wt}(t_\lambda) = \lambda$, $\varepsilon_i(t_\lambda) = \varphi_i(t_\lambda) = -\infty$, $\tilde{e}_i(t_\lambda) = \tilde{f}_i(t_\lambda) = 0$ とおくと、T_λ は crystal である。

一般に crystal が与えられると、crystal base の場合と同様の方法で crystal graph を定義することができる。T_λ の crstal graph は非常に単純で 1 点からなり、矢印はない。

$$\underset{t_\lambda}{\circ}$$

Example 6.7.5. $j \in I$ を一つ固定する。このとき

$$B_j := \{b_j(n) \mid n \in \mathbb{Z}\},$$

$$\mathrm{wt}(b_j(n)) := n\alpha_j,$$

$$\varepsilon_i(b_j(n)) := \begin{cases} -n, & i = j, \\ -\infty, & i \neq j, \end{cases} \quad \varphi_i(b_j(n)) := \begin{cases} n, & i = j, \\ -\infty, & i \neq j, \end{cases}$$

$$\tilde{e}_i(b_j(n)) := \begin{cases} b_j(n+1), & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad \tilde{f}_i(b_j(n)) := \begin{cases} b_j(n-1), & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$$

と定義すると B_j は crystal である。集合としては B_j は $\mathbb{Z}$ と同型で、その crystal graph は以下のようになる：

$$\cdots \xrightarrow{j} \underset{b_j(n+1)}{\circ} \xrightarrow{j} \underset{b_j(n)}{\circ} \xrightarrow{j} \underset{b_j(n-1)}{\circ} \xrightarrow{j} \cdots$$

同じ Cartan datum を持つ 2 つの crystal B_1, B_2 が与えられたとき、crystal の tensor product $B_1 \otimes B_2$ を以下のように定義する：

$$B_1 \otimes B_2 := \{b_1 \otimes b_2 \mid b_i \in B_i \ (i = 1, 2)\},$$
$$\mathrm{wt}(b_1 \otimes b_2) := \mathrm{wt}(b_1) + \mathrm{wt}(b_2),$$
$$\varepsilon_i(b_1 \otimes b_2) := \max\{\varepsilon_i(b_1),\ \varepsilon_i(b_2) - \langle h_i, \mathrm{wt}(b_1)\rangle\},$$
$$\varphi_i(b_1 \otimes b_2) := \max\{\varphi_i(b_1) + \langle h_i, \mathrm{wt}(b_2)\rangle,\ \varphi_i(b_2)\},$$
$$\tilde{e}_i(b_1 \otimes b_2) := \begin{cases} (\tilde{e}_i b_1) \otimes b_2, & \text{if } \varphi_i(b_1) \geq \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes (\tilde{e}_i b_2), & \text{if } \varphi_i(b_1) < \varepsilon_i(b_2), \end{cases}$$
$$\tilde{f}_i(b_1 \otimes b_2) := \begin{cases} (\tilde{f}_i b_1) \otimes b_2, & \text{if } \varphi_i(b_1) > \varepsilon_i(b_2), \\ b_1 \otimes (\tilde{f}_i b_2), & \text{if } \varphi_i(b_1) \leq \varepsilon_i(b_2). \end{cases}$$

$\otimes$ の記号を用いているが、集合としては $B_1 \otimes B_2$ は直積 $B_1 \times B_2$ に他ならない。この直積集合の上に wt, ε_i, φ_i, $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$ を上記のように定めよ、という意味である。このとき次の Lemma は容易である。

Lemma 6.7.6. $B_1 \otimes B_2$ は crystal である。

Remark . Definition 6.7.1 の後の Remark とも関係するが、tensor product も同じ Cartan datum を持つ 2 つの crystal に対してのみ定義されており、異なる Cartan datum を持つ crystal の間の tensor product は定義出来ないことに注意されたい。

最後に $B(\infty)$ の crystal としての特徴付けについて述べる。7 節で preprojective algebra の nilpotent variety Λ_V の既約成分の集合 $\mathrm{Irr}(\Lambda_V)$ に crystal の構造が入り、さらに crystal として $B(\infty)$ と同型であることが示されるが、その際にこの特徴付けが用いられることになる。

Proposition 6.7.7 (Kashiwara-S). B を Cartan datum $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ を持つ crystal、$U_v = U_v(\mathfrak{g})$ を上の Cartan datum から定まる量子包絡環、$B(\infty)$ を U_v^- の crystal base とする。このとき B が以下の 7 条件を満たせば、B は crystal として $B(\infty)$ と同型である。

(1) $\mathrm{wt}(B) \subset Q_-$.

(2) $\mathrm{wt}(b_0) = 0$ となる $b_0 \in B$ が一意的に存在する。

(3) 任意の $i \in I$ に対し、$\varepsilon_i(b_0) = 0$.

(4) 任意の $i \in I$ および $b \in B$ に対し、$\varepsilon_i(b) \in \mathbb{Z}$.

(5) 任意の $i \in I$ に対し、strict embedding $\Psi_i : B \to B \otimes B_i$ が存在する。

(6) $\Psi_i(B) \subset \{b \otimes b_i(n) \mid b \in B,\ n \leq 0\}$.

(7) $b \neq b_0$ であるような任意の $b \in B$ に対して、ある $i \in I$ が存在して、$\Psi_i(b) \in \{b \otimes b_i(n) \mid b \in B,\ n < 0\}$.

当たり前のことであるが、$B(\infty)$ はこの 7 条件を満たす。その場合 Proposition に現れる b_0 には $b_\infty = 1 \bmod vL(\infty) \in B(\infty)$ が対応する。定義から、(1)~(4) の成立は明らかだが、(5) 以降は自明ではない。これを示すためには、$B(\infty)$ に "$*$-structure" と呼ばれる extra な構造を入れなければならないのだが、長くなるので省略する。

7 Λ_V の既約成分上の crystal structure

随分と回り道をしてしまったが、ここから nilpotent varieties の既約成分の話に戻る。

先に結論を述べよう。$\mathbb{C}$ 上の有限次元 I-graded vector space V は dimension vector d を指定すれば同型を除いて一意的に定まるから、nilpotent variety Λ_V も $d \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}$ でパラメトライズされていると思ってよい。そこで dimension vector を全て走らせて集合

$$\bigsqcup_{d \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}} \mathrm{Irr}(\Lambda_V)$$

を考える。我々の目標は、この集合に crystal の構造を定義し、さらに crystal として double quiver Γ に付随する量子包絡環 $U_v(\mathfrak{g}(\Gamma))$ の subalgebra U_v^- の crystal base $B(\infty)$ と同型であることを示すことである。

7.1 準備

最初の問題は、この集合上にどうやって crystal structure を定めるか？である。最も重要なのは Kashiwara operators $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$ の定め方であるが、その際の基本的なアイデアは 4 節で述べた「diagram が積構造を定める」というものである。Ringel-Hall algebra の場合を簡単に思い出しておこう。$(V, V', \overline{V})$ を I-graded vector space の 3 つ組として、Ringel-Hall algebra $R\Omega \cong \mathrm{K}_\Omega$ における積 $*$ は、diagram

$$(\bigstar) \qquad E_{\overline{V},\Omega} \times E_{V',\Omega} \xleftarrow{p_1} E_1 \xrightarrow{p_2} E_2 \xrightarrow{p_3} E_{V,\Omega}.$$

によって、

$$\overline{f} * f' = (p_3)_!(p_2)_\flat(p_1)^*(\overline{f} \otimes f') \quad (\overline{f} \in \mathrm{K}_{\Omega,\overline{d}},\ f' \in \mathrm{K}_{\Omega,d'})$$

と書けているのであった。

diagram $(\bigstar)$ のアナロジー (double quiver version) として、

$$(\bigstar\bigstar) \qquad X_{\overline{V}} \times X_{V'} \xleftarrow{q_1} X_{\overline{V},V'} \xrightarrow{q_2} X_V.$$

なる diagram を考える。ただし

$$X_{\overline{V},V'} = \left\{ (B, \overline{\phi}, \phi') \;\middle|\; \begin{array}{l} B \in X_V, \\ 0 \to V' \xrightarrow{\phi'} V \xrightarrow{\overline{\phi}} \overline{V} \to 0 \text{ は } I\text{-graded vector} \\ \text{space の完全系列かつ, } B(\mathrm{Im}\phi') \subset \mathrm{Im}\phi'. \end{array} \right\}.$$

また $(B, \overline{\phi}, \phi') \in X_{\overline{V},V'}$ が与えられると、自然に $\overline{B} \in X_{\overline{V}}$ と $B' \in E_{V'}$ が誘導される。このとき $q_1(B, \overline{\phi}, \phi') = (\overline{B}, B')$ とおく。また $p_2(B, \overline{\phi}, \phi') = B$ と定義する。

次の Lemma は容易である。

Lemma 7.1.1. $B \in X_V$ が Λ_V に含まれることと、$\overline{B} \in \Lambda_{\overline{V}}$ かつ $B' \in \Lambda_{V'}$ が成り立つことは同値。

したがって (★★) を、さらに nilpotent variety に制限して

$$(\diamondsuit) \qquad \Lambda_{\overline{V}} \times \Lambda_{V'} \xleftarrow{q_1} \Lambda_{\overline{V},V'} \xrightarrow{q_2} \Lambda_V.$$

なる diagram を考えることができる。ここに

$$\Lambda_{\overline{V},V'} = q_1^{-1}(\Lambda_{\overline{V}} \times \Lambda_{V'}) = q_2^{-1}(\Lambda_V)$$

である。この diagram($\diamondsuit$) は Kashiwara operators を定義する上で要となる。

7.2 Crystal structure の定義

crystal の構造を定めるためには、Cartan datum $(A, \Pi, \Pi^\vee, P, P^\vee)$ を指定して、集合 B と写像たち wt, ε_i, φ_i, $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$ を定めればよい。

我々の場合、double quiver $\Gamma = (I, H)$ から出発して、Γ に付随する量子包絡環 $U_v(\mathfrak{g}(\Gamma))$ を定めたときに用いた Cartan datum を取ってくる。いうまでもなく、集合 B は nilpotent varietis の既約成分全体の集合にとる。後々の都合のために、以後 $B(\infty, d) = \mathrm{Irr}\Lambda_V$ ($d = \underline{\dim}V$) と書くことにする。この記号のもとに

$$B = \bigsqcup_{d \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}} B(\infty, d)$$

である。以後 $\mathbb{Z}^I_{\geq 0}$ と Q_- を

$$(7.2.1) \qquad \mathbb{Z}^I_{\geq 0} \ni d = (d_i)_{i \in I} \leftrightarrow -\sum_{i \in I} d_i \alpha_i \in Q_-$$

によって同一視する。この同一視のもとに $\Lambda \in B(\infty, d)$ に対して

$$\mathrm{wt}(\Lambda) := d \ (= -\sum_{i \in I} d_i \alpha_i)$$

とおく。$Q_- \subset P$ であるから、これで $\mathrm{wt} : \bigsqcup B(\infty, d) \to P$ が定まる。

次に ε_i, φ_i を定義しよう。まず $B \in X_V$ に対して

$$\varepsilon_i(B) := \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Coker}\left(\bigoplus_{\tau \in H \ ; \ \mathrm{in}(\tau) = i} V_{\mathrm{out}(\tau)} \xrightarrow{(B_\tau)} V_i \right)$$

と定める。$\Lambda \in B(\infty, d)$ に対して、Λ の generic な点 $B \in \Lambda$ をとり、

$$\varepsilon_i(\Lambda) := \varepsilon_i(B)$$

とおく。また

$$\varphi_i(\Lambda) := \varepsilon_i(\Lambda) + \langle h_i, \mathrm{wt}(\Lambda) \rangle$$

とする。

Kashiwara operators $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$ を定義しよう。まず前節で導入した diagram ($\diamondsuit$) において、$\overline{d} = -c\alpha_i$ とした special case を考える。この場合 $d = d' - c\alpha_i$ であることに注意しよう。さらに

$$\overline{V}_j = \begin{cases} \mathbb{C}^c, & j = i, \\ \{0\}, & j \neq i \end{cases}$$

であるので、$\Lambda_{\overline{V}} = \{0\}$ である。したがって diagram ($\diamondsuit$) は

$$(\diamondsuit') \qquad \Lambda_{V'} \cong \{0\} \times \Lambda_{V'} \xleftarrow{q_1} \Lambda_{\overline{V},V'} \xrightarrow{q_2} \Lambda_V.$$

と書ける。

指定された $i \in I$, $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して

$$(\Lambda_V)_{i,p} := \{B \in \Lambda_V \mid \varepsilon_i(B) = p\}$$

とおく。このとき定義から次が成り立つことが容易にわかる。

Lemma 7.2.1.

$$q_1^{-1}\big((\Lambda_{V'})_{i,p}\big) = q_2^{-1}\big((\Lambda_V)_{i,p+c}\big).$$

そこで

$$(\Lambda_{\overline{V},V'})_{i,p} := q_1^{-1}(\Lambda_{V'})_{i,p} = q_2^{-1}(\Lambda_V)_{i,p+c}$$

とおく。($\diamondsuit'$) に現れる写像 q_1, q_2 は、一般には非常に複雑になってしまうが、定義域を $p = 0$ の場合、すなわち $(\Lambda_{\overline{V},V'})_{i,0}$ に制限すると比較的扱いやすいものになっている。

Proposition 7.2.2. (1) $p_1 : (\Lambda_{\overline{V},V'})_{i,0} \to (\Lambda_{V'})_{i,0}$ は smooth map で、その fiber は connected rational variety である。
(2) $p_2 : (\Lambda_{\overline{V},V'})_{i,0} \to (\Lambda_V)_{i,c}$ は principal fiber bundle である。

指定された $i \in I$, $p \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して、

$$B(\infty, d)_{i,p} := \{\Lambda \in B(\infty, d) \mid \varepsilon_i(\Lambda) = p\}$$

とおく。Proposition 7.2.2 により、次の Corollary が成り立つことがわかる。

Corollary 7.2.3. 写像 q_1, q_2 は全単射

$$B(\infty, d')_{i,0} \cong B(\infty, d)_{i,c}$$

を誘導する。

これで Kashiwara operators $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$ を定義する準備が整った。

Definition 7.2.4. 上の同型で、$\Lambda' \in B(\infty, d')_{i,0}$ と $\Lambda \in B(\infty, d)_{i,c}$ が対応しているとする。このとき

$$\tilde{e}_i^{\,c} : B(\infty, d)_{i,c} \to B(\infty, d')_{i,0}, \qquad \tilde{f}_i^{\,c} : B(\infty, d')_{i,0} \to B(\infty, d)_{i,c}$$

を

$$\tilde{e}_i^{\,c}(\Lambda) := \Lambda', \qquad \tilde{f}_i^{\,c}(\Lambda') := \Lambda$$

と定める。さらに写像

$$\tilde{e}_i : \bigsqcup_{d \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}} B(\infty, d) \to \left(\bigsqcup_{d \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}} B(\infty, d) \right) \sqcup \{0\},$$

$$\tilde{f}_i : \bigsqcup_{d \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}} B(\infty, d) \to \bigsqcup_{d \in \mathbb{Z}^I_{\geq 0}} B(\infty, d)$$

を以下のように定める：
$c > 0$ のとき、

$$\tilde{e}_i : B(\infty, d)_{i,c} \xrightarrow{\tilde{e}_i^{\,c}} B(\infty, d')_{i,0} \xrightarrow{\tilde{f}_i^{\,c-1}} B(\infty, d + \alpha_i)_{i,c-1}.$$

$c = 0$ のとき、

$$\tilde{e}_i : B(\infty, d)_{i,0} \to \{0\}.$$

また任意の $c \geq 0$ に対して、

$$\tilde{f}_i : B(\infty, d)_{i,c} \xrightarrow{\tilde{e}_i^{\,c}} B(\infty, d')_{i,0} \xrightarrow{\tilde{f}_i^{\,c+1}} B(\infty, d - \alpha_i)_{i,c+1}.$$

Remark . Corollary 7.2.3 の同型が定める写像を $\tilde{e}_i^{\,c}$, $\tilde{f}_i^{\,c}$ と書いているが、上のように $\tilde{e}_i$, $\tilde{f}_i$ を定義すれば、$\tilde{e}_i^{\,c}$, $\tilde{f}_i^{\,c}$ はそれぞれ「$\tilde{e}_i$ の c 乗」、「$\tilde{f}_i$ の c 乗」と思うことができる。

このとき次が成り立つ。

Theorem 7.2.5 (Kashiwara-S). $\bigsqcup_d B(\infty, d)$ は crystal である。

証明は公理をチェックすればよい。

7.3 Crystal base $B(\infty)$ の幾何学的構成

前節で定義した crystal $\bigsqcup_d B(\infty, d)$ が $B(\infty)$ と同型であることを示すのがこの節の目的である。そのためには Proposition 6.7.7 で述べた $B(\infty)$ の特徴付けの 7 つの条件 (1)〜(7) を $\bigsqcup_d B(\infty, d)$ が満たすことを言えばよい。このうち (1)〜(4) は定義からすぐわかる。問題なのは (5) の条件

「任意の $i \in I$ に対し、strict embedding $\Psi_i : B \to B \otimes B_i$ が存在する。」

で、これが示されれば (6) と (7) は比較的容易に従う。そこでこのノートでは strict embedding Ψ_i の構成法について紹介したい。

まず $B \in X_V$ に対して

$$\varepsilon_i^*(B) := \dim_{\mathbb{C}} \ker \left(V_i \xrightarrow{(B_\tau)} \bigoplus_{\tau \in H\ ;\ \mathrm{out}(\tau)=i} V_{\mathrm{in}(\tau)} \right)$$

と定める。$\Lambda \in B(\infty, d)$ に対して、Λ の generic な点 $B \in \Lambda$ をとり、

$$\varepsilon_i^*(\Lambda) := \varepsilon_i^*(B)$$

とおく。また

$$(\Lambda_V)_i^p := \{B \in \Lambda_V \mid \varepsilon_i\ *(B) = p\},$$
$$B(\infty, d)_i^p := \{\Lambda \in B(\infty, d) \mid \varepsilon_i^*(\Lambda) = p\}$$

とする。

$B = (B_\tau)_{\tau \in H} \in X_V$ に対して、$B^* = (B_\tau^*)_{\tau \in H} \in X_V$ を

$$B_\tau^* := {}^t(B_{\bar{\tau}}) \quad \text{for any } \tau \in H$$

と定める。ここで ^{t} は行列の転置をあわらす。このとき $*$ は同型 $X_V \to X_V$ を誘導するが、簡単な計算により $* : \Lambda \xrightarrow{\sim} \Lambda_V$ であることがわかる。したがって $*$ は $B(\infty, d)$ の permutation を誘導するが、さらに

$$\varepsilon_i^*(\Lambda) = \varepsilon_i(\Lambda^*)$$

が成り立つ。そこで

$$\tilde{e}_i^{\,*} := * \circ \tilde{e}_i \circ *, \qquad \tilde{f}_{i_i}^{\,*} := * \circ \tilde{f}_i \circ *$$

とおけば、

$$\tilde{e}_i^{\,*c} : B(\infty, d)_i^c \xrightarrow{\sim} B(\infty, d')_i^0, \qquad \tilde{f}_i^{\,*c} : B(\infty, d')_i^0 \xrightarrow{\sim} B(\infty, d)_i^c$$

が成り立つ。

Proposition 7.3.1. 写像 $\Psi_i : \bigsqcup_d B(\infty, d) \to (\bigsqcup_d B(\infty, d)) \otimes B_i$ を次のように定める：
$\Lambda \in B(\infty, d)$ に対し、

$$\Psi_i(\Lambda) := \tilde{e}_{i_i}^{*\varepsilon_i^*(\Lambda)}(\Lambda) \otimes b_i(-\varepsilon_i^*(\Lambda)).$$

このとき Ψ_i は crystal の strict embedding である。

証明は省略する（[KS] 参照のこと）。

主張を定理の形でまとめておこう。

Theorem 7.3.2 (Kashiwara-S). $\bigsqcup_d B(\infty, d)$ は Proposition 6.7.7 の 7 つの条件を満たす。すなわち crystal として $\bigsqcup_d B(\infty, d)$ と $B(\infty)$ は同型である。

7.4 まとめ

話が錯綜してしまったので、5.3 節の最後のパラグラフで述べた「nilpotent varieties の既約成分全体が、simple module に対応する既約成分によって生成される」ことの意味について、ここでまとめておくことにしよう。

始めに記号を準備する。以下では dimension vector が d であるような I-graded vector space を $V(d)$ と書くことにする。また $\mathbb{Z}^I_{\geq 0}$ と Q_- の同一視 (7.2.1) を注意することなく用いる。例えば $V(d-\alpha_i)$ は $V(d)$ に比べて i 成分だけが 1 次元増えた I-graded vector space を表し、$V(-\alpha_i)$ は i 成分だけが 1 次元でその他は 0 の I-graded vector space を表す。後者は今までの記法で $V(i)$ と書いていたものに他ならない。

Kashiwara opetator $\tilde{f}_i : B(\infty, d)_{i,c} \xrightarrow{\sim} B(\infty, d-\alpha_i)_{i,c+1}$ ついて考えよう。話を簡単にするために、特に $c=0$ とする。このとき Definition 7.2.4 によれば、

$$\tilde{f}_i : B(\infty, d)_{i,0} \xrightarrow{\sim} B(\infty, d-\alpha_i)_{i,1} \tag{7.4.1}$$

は、diagram $(\diamondsuit)$ の特殊な場合

$$\Lambda_{V(d)} \cong \Lambda_{V(-\alpha_i)} \times \Lambda_{V(d)} \xleftarrow{q_1} \Lambda_{V(-\alpha_i),V(d)} \xrightarrow{q_2} \Lambda_{V(d-\alpha_i)} \tag{$\diamondsuit_0$}$$

から誘導されるのであった。

一方、7.1 節で述べたように diagram $(\diamondsuit)$ は、Ringel-Hall algebra $R\Omega \cong \mathbf{K}_\Omega$ を convolution 積を使って再定義した時に用いた diagram $(\bigstar)$ の、nilpotent variety 版である。今の場合、$(\diamondsuit_0)$ に対応する Ringel-Hall algebra 側の diagram は

$$E_{V(-\alpha_i),\Omega} \times E_{V(d),\Omega} \xleftarrow{p_1} E_1 \xrightarrow{p_2} E_2 \xrightarrow{p_3} E_{V(d-\alpha_i),\Omega} \tag{$\bigstar_0$}$$

となる。この diagram を用いて、積

$$* : \mathbf{K}_{V(-\alpha_i),\Omega} \otimes \mathbf{K}_{V(d),\Omega} \to \mathbf{K}_{V(d-\alpha_i),\Omega} \tag{7.4.2}$$

を定めたわけだが、今の場合 $\mathbf{K}_{V(-\alpha_i),\Omega} = \mathbb{C}\mathbf{F}_{i,\Omega}$ であるので、(7.3.2) は simple module $\mathbf{F}_{i,\Omega}$ を左から掛ける操作を定義する写像そのものであり、対応する量子群の言葉で言い換えれば、これは「生成元 f_i を左から掛けるという操作」に他ならない。

話を既約成分の場合に戻す。(7.4.1) の同型で $\tilde{f}_i(\Lambda') = \Lambda$ であったとする。$V = V(-\alpha_i)$ とした場合の nilpotent variety $\Lambda_{V(-\alpha_i)}$ は、1 点 Λ_i からなる集合である。この Λ_i に対応する preprojective algebra $P(\Gamma)$ の表現は simple module であることに注意して、Kashirawa operator $\tilde{f}_i$ を「$\Lambda' \in B(\infty, d)_{i,0}$ に、"simple module に対応する既約成分 Λ_i を左から施して"、新たに $\Lambda \in B(\infty, d-\alpha_i)_{i,1}$ を作り出す写像」と思うことにする。すなわち (7.4.1) を、(7.4.2) の "既約成分版" と考えようというわけである。

$c \neq 0$ の場合は $\tilde{f}_i$ は $\tilde{e}_i^c$ と $\tilde{f}_i^{c+1}$ の合成なので、もう少し話はややこしくなるが基本的

な考え方は同じである[49]。

ここまでの話が Theorem 7.2.5 にあたる。しかしこの段階では $\bigsqcup_d B(\infty, d)$ に crystal の構造が定義出来ると言っているに過ぎず、その全体像を把握することはまだ出来ていないことに注意されたい。Theorem 7.3.2 まで考えて、それは初めて可能になる。

$d = 0$ の場合、対応する I-graded vector space は trivial (0 次元) であり、$B(\infty, 0)$ は 1 点からなる集合になる。この元を Λ_0 と書こう。Theorem 7.3.2 の同型で $b_\infty = 1 \bmod vL(\infty) \in B(\infty)$ に対応しているのは Λ_0 である。$B(\infty)$ の任意の元は b_∞ に $\tilde{f}_i$ $(i \in I)$ たちを施すことによって得られるので、同型である $\bigsqcup_d B(\infty, d)$ でももちろん事情は同じである。すなわち、任意の既約成分は、Λ_0 に "simple module に対応する既約成分 Λ_i を左から施す写像" である $\tilde{f}_i$ たちを順次施すことによって得られるわけである。

8 最近の話題から

これまでに述べてきた話は、大部分が前世紀に得られた、いわば "ちょっと前の結果" である。このノートを締めくくるにあたって、今世紀に入ってからの進展に触れておく。ただし、その全てを網羅することは筆者の能力を超えるので、今回はは 5.3 節の Remark で述べた問題に対する Geiss-Leclerc-Schröer による解答と、それに関連する話題に限定して紹介する。

8.1 Semicanonical basis

言葉の準備から始める。X を $\mathbb{C}$ 上の algebraic variety とする。X の部分集合 A が constructible であるとは、A が有限個の局所閉集合の union で書けることをいう。また関数 $f : X \to \mathbb{C}$ が constructible であるとは、任意の $c \in \mathbb{C}$ に対して $f^{-1}(c)$ が constructible subset で、かつ有限個の $c \in \mathbb{C}$ を除いて $f^{-1}(c)$ が空集合であることをいう。X 上の constructible な関数全体を $M(X)$ と書く。これは $\mathbb{C}$-vector space である。

Y を X の既約成分、$f \in M(X)$ とする。このとき、次を満たす $c \in \mathbb{C}$ が一意的に存在することがわかる : $f^{-1}(c) \cap Y$ は Y の稠密な開集合を含む。$f \in M(X)$ に対し、この稠密な開集合上での値 $c \in \mathbb{C}$ を対応させることで、

$$\rho_Y : M(X) \to \mathbb{C}$$

を定義する。

話を我々の場合に戻そう。$(V, V', \overline{V})$ を I-graded vector space の 3 つ組とし、7.1 節で導入した diagram

$$(\diamondsuit) \qquad \Lambda_{\overline{V}} \times \Lambda_{V'} \xleftarrow{q_1} \Lambda_{\overline{V}, V'} \xrightarrow{q_2} \Lambda_V.$$

[49] 正確に言えば、$\tilde{f}_i^c$ は「U_v^- の中で、$f_i^{(c)}$ を左から掛ける操作」に対応する。また、その逆である $\tilde{e}_i^c$ は「U_v^- の中で、一番左にある $f_i^{(c)}$ を取り去る操作」に対応する。U_v^- の中で $f_i^{(c)}$ を左から掛けることはいつでもできるので、任意の Λ に対して $\tilde{f}_i^c\Lambda$ は 0 にならない。一方、「一番左にある $f_i^{(c)}$ を取り去る操作」は必ずしも行えるとは限らない。取り去ることができない場合には $\tilde{e}_i^c\Lambda = 0$ となる。

を考える。Λ_V 上の G_V-invariant な constructible function 全体を $M(\Lambda_V)^{G_V}$ と書くとき、

$$\widetilde{\mathcal{M}} := \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^I} M(\Lambda_V)^{G_V} \quad (d = \underline{\dim} V)$$

上に diagram (◇) から定まる convolution 積によって、$\mathbb{C}$-algebra structure を定めることができる[50]。

以後 7.4 節の記号を断りなく用いる。$d = -\alpha_i$ のとき、$\Lambda_{V(-\alpha_i)}$ は 1 点 Λ_i からなる集合だった。任意の $i \in I$ に対し、Λ_i の特性関数 χ_{Λ_i} は $\widetilde{\mathcal{M}}$ の元となる。χ_{Λ_i} $(i \in I)$ で生成される $\widetilde{\mathcal{M}}$ の subalgebra を $\mathcal{M}$ とし、$\mathcal{M}_d := \widetilde{\mathcal{M}} \cap M(\Lambda_V)^{G_V}$ と定める。このとき $\mathcal{M} = \oplus_d \mathcal{M}_d$ である。

Theorem 8.1.1 (Lusztig [L4]). $f_i \mapsto \chi_{\Lambda_i}$ によって定まる $\mathbb{C}$-algebra の同型写像 $\Xi : U(\mathfrak{n}_-) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$ が存在する。ここで $\mathfrak{n}_-$ は、double quiver $\Gamma = (I, H)$ に付随する Kac-Moody Lie algebra $\mathfrak{g}(\Gamma)$ の下三角 Lie subalgebra である。

Sketch of Proof. 定義から、同一視 $Q_- \cong \mathbb{Z}_{\geq 0}^I$ のもとに、Ξ が grading を保つ全射準同型写像であることは比較的容易にわかる。すなわち $\Xi : U(\mathfrak{n}_-)_d \twoheadrightarrow \mathcal{M}_d$ である。ここに $U(\mathfrak{n}_-)_d$ は weight d の weight space を表す。

次に $\Lambda \in B(\infty, d)$ $(= \mathrm{Irr}(\Lambda_V))$ に対し、

$$\rho_\Lambda(f) = 1 \quad かつ \quad \rho_{\Lambda'}(f) = 0 \text{ for any } \Lambda' \in B(\infty, d) \setminus \{\Lambda\}$$

なる $f \in \mathcal{M}_d$ が存在することを示す[51]。この f を f_Λ と書く。

作り方から $\{f_\Lambda \mid \Lambda \in B(\infty, d)\}$ は 1 次独立な $\mathcal{M}_d$ の部分集合である。また Theorem 7.3.2 から、$\dim_{\mathbb{C}} U(\mathfrak{n}_-)_d = \sharp B(\infty, d)$ である。この両者を併せると、$\Xi : U(\mathfrak{n}_-)_d \twoheadrightarrow \mathcal{M}_d$ が単射であることがわかる。 □

Definition 8.1.2. 上で構成した $U(\mathfrak{n}_-)$ の基底

$$\Xi^{-1}\left(\{f_\Lambda \mid \Lambda \in \bigsqcup_d B(\infty, d)\}\right)$$

を $U(\mathfrak{n}_-)$ の semicanonical basis と呼ぶ。

以下、$\mathcal{S} := \{f_\Lambda \mid \Lambda \in \bigsqcup_d B(\infty, d)\}$ を $U(\mathfrak{n}_-)$ の semicanonical basis と同一視して、$\mathcal{S}$ のことも semicanonical basis と呼ぶことにする。

Remark . 似た名前のもので、canonical basis と呼ばれるものがある。これは 4.3 節に述べた量子群の幾何学的構成を通じて定義される、U_v^- の基底である（Introduction 参照）。canonical basis に $v = 1$ を代入することで、$U(\mathfrak{n}_-)$ の基底が得られるが、これは一般に semicanonical basis とは一致しない[52]。

---

[50] 詳しい定義は [L4] 参照。

[51] 一番本質的なのはこの部分であるが、証明には幾何学的な準備が必要になる。詳しくは原論文を参照されたい。

[52] 一致するのは A_n $(n \leq 4)$ のときのみで、それ以外では一致しない。このことの詳しい解説が [GLS1] の Introduction にある。

8.2 Geiss-Leclerc-Schröer による解答とその周辺

本節では Γ は A,D,E 型の quiver であるとの仮定をおく。この場合には、対応する $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(\Gamma)$ は有限次元単純 Lie algebra となり、よく知られた "Lie 群と Lie 環の対応" が使える世界の話になる[53]。

$\mathfrak{g}$ に対応する Lie 群を G、$\mathfrak{n}_-$ に対応する Lie 群を N_- とおく。G は $\mathbb{C}$ 上の単純 Lie 群、N_- はその maximal unipotent subgroup である。このとき N_- の関数環 $\mathbb{C}[N_-]$ と $U(\mathfrak{n}_-)$ の間には、canonical に定まる pairing があって、互いが互いの graded dual になっている。

前節で導入した $\mathcal{M} = \oplus_d \mathcal{M}_d$ の graded dual を $\mathcal{M}^* = \oplus_d \mathcal{M}_d^*$ と書く。$\Lambda \in B(\infty, d)$ とするとき、定義から ρ_Λ は $\mathcal{M}_d^*$ の元であるが、

$$\rho_\Lambda(f_{\Lambda'}) = \delta_{\Lambda,\Lambda'} \quad (\Lambda, \Lambda' \in B(\infty, d))$$

であったので、

$$\mathcal{S}^* := \left\{\rho_\Lambda \mid \Lambda \in \bigsqcup_d B(\infty, d)\right\}$$

は $\mathcal{M}^*$ の基底で、しかも semicanomical basis $\mathcal{S}$ の双対基底になっている。$\mathcal{S}^*$ を dual semicanonical basis と呼ぶ。

Theorem 8.1.1 により、$U(\mathfrak{n}_-) \cong \mathcal{M}$ であったので、

$$\mathbb{C}[N_-] \cong \left(U(\mathfrak{n}_-)\right)^* \cong \mathcal{M}^*$$

が成り立つ。この同型によって $\mathbb{C}[N_-]$ と $\mathcal{M}^*$ を同一視し、dual semicanonical basis $\mathcal{S}^*$ を $\mathbb{C}[N_-]$ の元と思うことにする。こうすることで ρ_Λ, $\rho_{\Lambda'} \in \mathcal{S}^*$ の積、$\rho_\Lambda\rho_{\Lambda'}$ を（$\mathbb{C}[N_-]$ の中で）考えることができる[54]。

Geiss-Leclerc-Schröer が示したのは次の定理である ([GLS1])。

Theorem 8.2.1 (Geiss-Leclerc-Schröer). V_k $(k = 1, 2)$ を I-graded vector space とし、$d_k = \underline{\dim} V_k$ とおく。また $\Lambda_k \in B(\infty, d_k)$ とする。このとき $\overline{\Lambda_1 \oplus \Lambda_2} \in B(\infty, d_1 + d_2)$ ならば、$\rho_{\Lambda_1}\rho_{\Lambda_2} = \rho_{\overline{\Lambda_1 \oplus \Lambda_2}}$ である。

この定理は必要十分条件を与えているわけではないので、「問題の解答」と呼ぶにはいささか語弊があるが[55]、それでも nilpotent variety の既約成分と dual semicanonical basis の積構造との関係を記述する、興味深い結果であると思う。

---

[53] $\mathfrak{g}$ が有限次元でない場合でも、Kac-Moody Lie 群を考えることで、ある程度のことは cover できる。ただし Kac-Moody Lie 群は無限次元の Lie 群なので、話はずっとややこしくなる。

[54] 正確に言えば以下のようになる : $\mathbb{C}[N_-]$ と $U(\mathfrak{n}_-)$ に通常の Hopf algebra structure を入れるとき、両者の対応は単なる vector space としての graded dual ではなくて、Hopf algebra としての dual になっている。一方、$\mathcal{M}$ には diagram ($\diamondsuit$) を用いて Hopf algebra の構造を入れることができ、さらに同型 $\Xi : U(\mathfrak{n}_-) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}$ は Hopf algebra としての同型を与えていることがわかる。したがって $\mathcal{M}^*$ に $\mathcal{M}$ の comultiplication を使って積構造をいれておけば、上に述べた同一視 $\mathbb{C}[N_-] \cong \mathcal{M}^*$ は algebra としての同型を与えていることになる。

[55]「解答」と呼んだのは筆者の独断であり、Geiss-Leclerc-Schröer がそう言っているわけではない。

Geiss-Leclerc-Schröer は、この結果に続く形で $\mathbb{C}[N_{-}]$ の cluster algebra structure との関係 ([GLS2])、dual semicanonical basis の積公式 ([GLS3]) についても論じている。さらにこの話は Calabi-Yau algebra や mutation の概念等、最近の非可換代数幾何の話題とも密接な関係があるらしい[56]。

Ringel によって発見された箙と量子群の関係は、現在でも深化を続けているようである。

References

[A1] S. Ariki, *On the decomposition numbers of the Hecke algebra of $G(m,1,n)$*, J. Math. Kyoto Univ. 36 (1996), 789–808.

[A2] S. Ariki, *Representations of quantum algebras and combinatorics of Young tableaux*, Univ. Lecture Series 26 (2002), AMS.

[ARS] M. Auslander, I. Reiten and S. O. Smalø, *Representation theory of Artin algebras*, Cambrigde studies in adv. math. 36 (1995), Cambridge.

[BBD] A. Beilinson, J. Bernstein and P. Deligne, *Faiseaux perverse*, Analysis and topology on singular spaces, I (Luminy, 1981), Astérisque 100 (1982), 5-171.

[BK] J. Brundan and A. Kleshchev *Hecke-Clifford superalgebras, crystals of type $A_{2l}^{(2)}$ and modular branching rules for $\hat{S}_n$*, Represent. Theory 5 (2001), 317–403.

[CG] N. Chriss and V. Ginzburg, *Representation Theory and Complex Geometry*, (1997), Birkhäuser.

[C1] W. Crawley-Boevey, *On the exceptioal fibers of Kleinian singularities*, Amer. J. Math. 122 (2000), 1027-1037.

[C2] W. Crawley-Boevey, *Geometry of the moment map for representations of quivers*, Comp. Math. 126 (2001), 257-293.

[D] P. Deligne, *Cohomologie Étale*, SGA4$\frac{1}{2}$, Lecture Note in Math. 569 (1977), Springer-Verlag.

[DR] V. Dlab and C. M. Ringel, *The module theoritical approach to quasi-heriditary algebras*, Representations of algebras and related topics (Kyoto 1990), 200-224, Cambridge (1992).

[FZ] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras I: Foundations*, J. Amer. Math. Soc. 15 (2002), 497-529.

[56] これはオーガナイザーの伊山さんから喫茶店で聞いた話なので、筆者の勘違いの可能性がある。もし間違っていたら、すいません。

[GLS1] C. Geiss, B. Leclerc and J. Schröer, *Semicanonical bases and preprojective algebras*, Ann. Sci. École Norm. Sup. 38 (2005), 193-253.

[GLS2] C. Geiss, B. Leclerc and J. Schröer, *Rigid modules over preprojective algebras*, Invent. Math. 165 (2006), 589-632.

[GLS3] C. Geiss, B. Leclerc and J. Schröer, *Semicanonical bases and preprojective algebras II* , preprint, arXiv:math.RT/0506405.

[G] V. Ginzburg, *"Lagrangian" construction for representations of Hecke algebras*, Adv. in Math. 63 (1987), 100-112.

[H] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras*, London Math. Soc. Lecture Note Series, 119 (1988), Cambridge.

[HK] J. Hong and S-J. Kang, *Introduction to Quantum Groups and Crystal bases*, Graduate Studies Math. 42 (2002), AMS.

[Kac] V. Kac, *Infinite dimensional Lie algebras, 3rd ed*, (1990), Cambridge.

[K1] M. Kashiwara, *On crystal bases of the q-analogue of universal enveloping algbras*, Duke. Math. J. 63 (1991), 465-516.

[K2] M. Kashiwara, *Bases cristallines des groupes quantiques*, Cours Spécialisés 9 (2002), Société Mathématique de France.

[KS] M. Kashiwara and Y. Saito, *Geometric construction of crystal bases*, Duke. Math. J. 89 (1997), 9-36.

[KL1] D. Kazhdan and G. Lusztig, *A topological approach to Springer's representations*, Adv. in Math. 38 (1980), 222-228.

[KL2] D. Kazhdan and G. Lusztig, *Proof of the Deligne-Langlands conjecture for Hecke algebras*, Invent. Math. 87 (1987), 153-215.

[Kl] A. Kleshchev, *Linear and projective representations of symmetric groups*, Cambridge Tracts in Mathematics, 163. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[L1] G. Lusztig, *Canonical bases arising form quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. 3 (1990), 447-498.

[L2] G. Lusztig, *Quivers, perverse sheaves and quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. 4 (1991), 365-421.

[L3] G. Lusztig, *Introduction to Quantum Groups*, Progr. Math. 110 (1993), Birkhäuser.

[L4] G. Lusztig, *Semicanonical bases arising from enveloping algebras*, Adv. Math. 151 (2000), 129-139.

[N1] H. Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. 76 (1994), 365-416.

[N2] H. Nakajima, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. 91 (1998), 515-560.

[N3] H. Nakajima, *Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), 145-238.

[Rei] J. Reiten, *Dynkin diagrams and the representation theory of algebras*, Notices of the AMS 44 (1997), 546-556.

[R1] C. M. Ringel, *Tame algebras and integral quiaratic forms*, Lecture Note in Math. 1099 (1984), Springer-Verlag.

[R2] C. M. Ringel, *Hall algebras and quantum groups*, Invent. Math. 101 (1990), 583-591.

[R3] C. M. Ringel, *The preprojective algebra of a quiver*, CMS conf. Proc. 24 (1998), 467-480.

[S] Y. Saito, *An introduction to canonical bases*, Representations of finite dimensional algebras and related topics in Lie theory and geometry, Fields Inst. Commun. 40 (2004), 431-451.

[T] T. Tanisaki, *Hodge modules, equivariant K-theory and Hecke algberas*, Publ. RIMS. 23 (1987), 841-879.

[谷崎] 谷崎俊之, リー代数と量子群, (2002), 共立出版.

[谷堀] 谷崎俊之, 堀田良之, D加群と代数群, (1995), シュプリンガー・フェアラーク東京.

[中島] 中島啓, 箙多様体と量子アファイン環, 数学 52 (2000), 53-78.

[飛田] 飛田明彦, 対称群のブルエ予想, 本報告集掲載予定.

[L4] G. Lusztig, *Semicanonical bases arising from enveloping algebras*, Adv. Math. 151 (2000), 129-139.

[N1] H. Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. 76 (1994), 365-416.

[N2] H. Nakajima, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. 91 (1998), 515-560.

[N3] H. Nakajima, *Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, J. Amer. Math. Soc. 14 (2001), 145-238.

[Re] I. Reiten, *Dynkin diagrams and the representation theory of algebras*, Notices of the AMS 44 (1997), 546-556.

[R1] C. M. Ringel, *Tame algebras and integral quadratic forms*, Lecture Note in Math. 1099 (1984), Springer-Verlag.

[R2] C. M. Ringel, *Hall algebras and quantum groups*, Invent. Math. 101 (1990), 583-591.

[R3] C. M. Ringel, *The preprojective algebra of a quiver*, CMS conf. Proc. 24 (1998), 467-480.

[S] Y. Saito, *An introduction to canonical bases*, Representations of finite dimensional algebras and related topics in Lie theory and geometry, Fields Inst. Commun. 40 (2004), 131-151.

[T] T. Tanisaki, *Hodge modules, equivariant K-theory and Hecke algebras*, Publ. RIMS. 23 (1987), 841-879.

[谷崎] 谷崎俊之, リー代数と量子群, (2002), 共立出版.

[堀田] 堀田良之・谷崎俊之, D加群と代数群, (1995), シュプリンガー・フェアラーク東京.

[中島] 中島啓, 箙多様体と[illegible], 数学 52 (2000), [illegible].

[岡田] [illegible]

AN INTRODUCTION TO NONCOMMUTATIVE ALGEBRAIC GEOMETRY

IZURU MORI

ABSTRACT. There are several research fields called noncommutative algebraic geometry. In this note, we will introduce the one founded by M. Artin. Roughly speaking, in this research field, we study noncommutative algebras using ideas and techniques of algebraic geometry. Since classification of low dimensional schemes is one of the most active projects in algebraic geometry, classification of low dimensional noncommutative schemes is the main project in noncommutative algebraic geometry. In fact, since noncommutative projective curves were classified by Artin and Stafford, one of the most active projects in this field is to classify noncommutative projective surfaces. In this note, we will focus on the classification of the simplest noncommutative projective surfaces, namely, quantum projective planes, due to Artin, Tate, and Van den Bergh. We will also relate this project to the study of Frobenius Koszul algebras.

1. OVERVIEW

1.1. Motivations. In this note, we fix a field k. An algebra always means an algebra finitely generated over k, and a scheme always means a scheme of finite type over k. That is, every algebra is of the form $R = T(V)/I$ where V is a finite dimensional vector space over k, $T(V)$ is the tensor algebra on V over k, and I is a two-sided ideal of $T(V)$. By choosing a basis $\{x_1, \dots, x_n\}$ for V over k, we may also write $R = k\langle x_1, \dots, x_n\rangle/I$ where $k\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ is the free algebra on $\{x_1, \dots, x_n\}$ over k. In particular, if R is commutative, then we may write $R = S(V)/I = k[x_1, \dots, x_n]/I$ where $S(V)$ is the symmetric algebra on V over k and $k[x_1, \dots, x_n]$ is the polynomial algebra on $\{x_1, \dots, x_n\}$ over k. A scheme of finite type over k is a scheme which can be covered by a finite number of affine schemes of commutative algebras finitely generated over k. We denote by $\operatorname{Mod} R$ the category of right R-modules, and by $\operatorname{mod} R$ the full subcategory of $\operatorname{Mod} R$ consisting of finitely generated ones.

Our impossible dream is to classify all algebras. Following algebraic geometry or algebraic topology, it is natural to start classifying algebras of low dimensions. Depending on the research fields, there are several candidates for which dimension function of an algebra we should use for this purpose. Since we follow the ideas of algebraic geometry, we use Gelfand-Kirillov dimension (GKdimension) defined below.

Definition 1. Let $R = T(V)/I$ be an algebra and $R_n = (k+V)^n$ the standard filtration of R. We define the Gelfand-Kirillov dimension (GKdimension) of R by

$$\operatorname{GKdim} R = \limsup_{n\to\infty} \log(\dim_k R_n)/\log n.$$

If R is a commutative algebra, then $\operatorname{GKdim} R = \operatorname{Kdim} R$, the Krull dimension of R.

Let R be an algebra. Since $\operatorname{GKdim} R = 0$ if and only if R is finite dimensional over k, classifying all algebras of GKdimension 0 is the same as classifying all artinian algebras, which is already an impossible dream even in the commutative case. There are two natural directions to proceed:

(1) Classify only nice algebras. The concept "nice" largely depends on the research fields. For example, in representation theory of finite dimensional algebras, classifying all Frobenius (self-injective) algebras is active.
(2) Classify algebras up to something weaker than isomorphism. This also depends on the research fields. For example, in representation theory of finite dimensional algebras, classifying algebras up to Mŏrita equivalence, derived equivalence, stable equivalence, etc. is active.

In noncommutative algebraic geometry, we follow ideas of algebraic geometry. So we will first review the classification problem in algebraic geometry.

1.2. **Commutative Algebras.** Recall that every commutative algebra is of the form $R = k[x_1, \dots, x_n]/I$. Roughly speaking, the affine scheme associated to R is defined as a set by

$$X = \operatorname{Spec} R = \mathcal{V}(I) := \{p = (a_1, \dots, a_n) \in k^n \mid f(p) = 0 \text{ for all } f \in I\}$$

endowed with some topology, called Zariski topology, together with the sheaf of algebras $\mathcal{O}_X$ on it, called the structure sheaf. Note that if $I = (f_1, \dots, f_m)$ where $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n]$, then

$$\mathcal{V}(I) = \{p = (a_1, \dots, a_n) \in k^n \mid f_1(p) = \cdots = f_m(p) = 0\}.$$

There are close relationships between an algebra R and a topological space $\operatorname{Spec} R$. For example:

(1) $\operatorname{Kdim} R = \dim \operatorname{Spec} R$.
(2) R is an integral domain if and only if $\operatorname{Spec} R$ is (reduced and) irreducible, that is, it is not a union of a finite number of smaller schemes. Such a scheme is often called an affine variety.
(3) R is regular if and only if $\operatorname{Spec} R$ is smooth, that is, it has no singularities.

We have the following lemma.

Lemma 2. *Let R, R' be commutative algebras. Then*

$$\begin{aligned} & R \cong R' \\ \iff & \operatorname{Mod} R \cong \operatorname{Mod} R' \\ \iff & \operatorname{Spec} R \cong \operatorname{Spec} R'. \end{aligned}$$

It follows that:

$$\text{Classifying commutative}\begin{Bmatrix}\text{algebras}\\ \text{integral domains}\\ \text{regular algebras}\end{Bmatrix}\text{of Krull dimension } d$$

up to isomorphism

$$\Longleftrightarrow \text{Classifying commutative}\begin{Bmatrix}\text{algebras}\\ \text{integral domains}\\ \text{regular algebras}\end{Bmatrix}\text{of Krull dimension } d$$

up to Morita equivalence

$$\Longleftrightarrow \text{Classifying affine}\begin{Bmatrix}\text{schemes}\\ \text{varieties}\\ \text{smooth schemes}\end{Bmatrix}\text{of dimension } d$$

up to isomorphism.

The following example suggests that the third classification is easiest.

Example 3. Let

- $R = \mathbb{R}[x,y]/(x^3 - y^2)$.
- $R' = \mathbb{R}[x,y]/(x^3 + x^2 - y^2)$.
- $R'' = \mathbb{R}[x,y]/(x^2 - 2xy - y^3 + 3y^2 - y)$.

It is not easy to find an algebra homomorphism between the above algebras nor a functor between modules categories over the above algebras. However, it is easy to see that

- $\operatorname{Spec} R = \mathcal{V}(x^3 - y^2)$ is a cuspidal curve.
- $\operatorname{Spec} R' = \mathcal{V}(x^3 + x^2 - y^2)$ is a nodal curve.
- $\operatorname{Spec} R'' = \mathcal{V}(x^2 - 2xy - y^3 + 3y^2 - y)$ is a nodal curve.

In fact, using algebraic geometry, we can show that

$$\operatorname{Spec} R \ncong \operatorname{Spec} R' \cong \operatorname{Spec} R''.$$

As we have already mentioned, it is too difficult to classify all commutative algebras even of dimension 0, so it is too difficult to classify all affine schemes of dimension 0. In the classification of schemes in algebraic geometry, it is acceptable to assume that k is algebraically closed because classification problems become far more difficult if we do not assume so. It is also reasonable to classify only irreducible schemes (varieties) because every scheme is a finite union of irreducible ones. In dimension 0, there is only one affine variety up to isomorphism, namely a single point, or there is only one integral domain up to isomorphism, namely k itself. To classify higher dimensional ones, there are again two directions to proceed:

(1) Add more conditions on a scheme, namely, classify only smooth projective schemes.
(2) Classify schemes up to something weaker than isomorphism, namely, classify schemes up to birational equivalence.

We will explain both methods as below.

(1) Classification of smooth projective schemes. Unfortunately, classifying all smooth affine schemes of low dimensions is not yet easy. In algebraic topology, it is far easier to classify only compact surfaces than to classify arbitrary surfaces. In this principle, we want to classify only "compact" schemes. One way to proceed is to "compactify" affine schemes to make them projective schemes. A basic process is as follows.

Definition 4. An algebra A is graded if it is endowed with a k-vector space decomposition $A = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$ such that $A_iA_j \subseteq A_{i+j}$ for all $i, j \in \mathbb{Z}$. Elements of A_i are called homogeneous of degree i. A right A-module M is graded if it is endowed with a k-vector space decomposition $M = \oplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ such that $M_iA_j \subseteq M_{i+j}$ for all $i, j \in \mathbb{Z}$. We denote by $\operatorname{GrMod} A$ the category of graded right A-modules, and by $\operatorname{grmod} A$ the full subcategory of $\operatorname{GrMod} A$ consisting of finitely generated ones.

In this note, a graded algebra always means a graded algebra finitely generated in degree 1 over k, that is, $A_i = 0$ for all $i < 0$, $A_0 = k$, and $A_i = A_1 \cdots A_1$ (i-factors) for all $i \geq 1$. Typical examples are the tensor algebra $T(V)$ where $T(V)_i = V^{\otimes i}$, and a polynomial algebra $k[x_1, \cdots, x_n]$ where $k[x_1, \cdots, x_n]_i = \{$ homogeneous polynomials of degree $i\} \cup \{0\}$. In fact, every graded algebra is of the form $A = T(V)/I$ where I is a homogeneous two-sided ideal of $T(V)$, that is, I is generated by homogeneous elements of $T(V)$. Again, by choosing a basis $\{x_1, \dots, x_n\}$ for V over k, we may also write $A = k\langle x_1, \dots, x_n\rangle/I$. In particular, if A is commutative, then we may write $A = k[x_1, \dots, x_n]/I$ where I is a homogeneous ideal of $k[x_1, \dots, x_n]$, that is, I is generated by (finitely many) homogeneous polynomials.

Recall that the projective space is defined by $\mathbb{P}^{n-1} = (k^n \setminus \{(0, \dots, 0)\})/\sim$ where $(a_1, \dots, a_n) \sim (\lambda a_1, \dots, \lambda a_n)$ for all $\lambda \in k \setminus \{0\}$. For example, $(a, b) = (c, d)$ in $\mathbb{P}^1$ if and only if $ad = bc$. Let $A = k[x_1, \dots, x_n]/I$ be a commutative graded algebra where I is a homogeneous ideal of $k[x_1, \dots, x_n]$. Roughly speaking, the projective scheme associated to A is defined as a set by

$$X = \operatorname{Proj} A = \mathcal{V}(I) := \{p = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{P}^{n-1} \mid f(p) = 0 \text{ for all homogeneous } f \in I\}$$

endowed with some topology, called Zariski topology, together with the sheaf of algebras $\mathcal{O}_X$ on it, called the structure sheaf. Note that if $I = (f_1, \dots, f_m)$ where $f_1, \dots, f_m \in k[x_1, \dots, x_n]$ are homogeneous polynomials, then

$$\mathcal{V}(I) = \{p = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{P}^{n-1} \mid f_1(p) = \cdots = f_m(p) = 0\}.$$

Given a commutative algebra R, we can always homogenize the relations of R by adding one more generator t to make it a graded algebra $\tilde{R}$ generated in degree 1, so we can take $\operatorname{Proj} \tilde{R}$ as examples below. Moreover, we can recover the original algebra from $\tilde{R}$ by $R \cong (\tilde{R}[t^{-1}])_0$. Although $\operatorname{Proj} \tilde{R}$ is hardly compact in Zariski topology, it somehow behaves like a compact manifold in algebraic topology. Since $\operatorname{Spec} R$ is open and dense in $\operatorname{Proj} \tilde{R}$, this process looks like a compactification of $\operatorname{Spec} R$.

Example 5. Let

- $R = \mathbb{R}[x, y]/(x^2 - y)$ so that $\operatorname{Spec} R = \mathcal{V}(x^2 - y)$ is a parabola.
- $R' = \mathbb{R}[x, y]/(xy - 1)$ so that $\operatorname{Spec} R' = \mathcal{V}(xy - 1)$ is a hyperbola.
- $R'' = \mathbb{R}[x, y]/(x^2 + y^2 - 1)$ so that $\operatorname{Spec} R'' = \mathcal{V}(x^2 + y^2 - 1)$ is a circle.

It follows that none of the above affine schemes are isomorphic to one another. However,

- $\tilde{R} = \mathbb{R}[x,y,t]/(x^2 - yt)$ so that $\operatorname{Proj} \tilde{R} = \mathcal{V}(x^2 - yt)$ becomes a circle by adding one point $(0,1,0) \in \mathbb{P}^2$.
- $\tilde{R}' = \mathbb{R}[x,y,t]/(xy - t^2)$ so that $\operatorname{Proj} \tilde{R}' = \mathcal{V}(xy - t^2)$ becomes a circle by adding two points $(0,1,0),(1,0,0) \in \mathbb{P}^2$.
- $\tilde{R}'' = \mathbb{R}[x,y,t]/(x^2 + y^2 - t^2) = \mathbb{R}[x,y,t]/(x^2 - (y+t)(-y+t))$ so that $\operatorname{Proj} \tilde{R}'' = \mathcal{V}(x^2 + y^2 - t^2)$ is a circle as before.

It follows that

$$\operatorname{Proj} \tilde{R} \cong \operatorname{Proj} \tilde{R}' \cong \operatorname{Proj} \tilde{R}''.$$

(2) **Classification of schemes up to birational equivalence.** The second method is as follows:

Definition 6. We say that two (affine or projective) varieties X and Y are birationally equivalent if there are open dense subsets $U \subset X$ and $V \subset Y$ such that $U \cong V$.

If R is an integral domain, then we can construct the field of quotients $Q(R) = \{ab^{-1} \mid a,b \in R, b \neq 0\}$ of R, which is an extension field of k. We define the function field of $X = \operatorname{Spec} R$ by $k(X) = Q(R)$. If A is a graded integral domain, then we can construct $Q_{gr}(A)_0 = \{ab^{-1} \mid a,b \in A \text{ are homogeneous of the same degree}, b \neq 0\}$, which is an extension field of k. We define the function field of $X = \operatorname{Proj} A$ by $k(X) = Q_{gr}(A)_0$.

Theorem 7. *Two (affine or projective) varieties X and Y are birationally equivalent if and only if $k(X) \cong k(Y)$.*

That is, two affine varieties $\operatorname{Spec} R$ and $\operatorname{Spec} R'$ are birationally equivalent if and only if $Q(R) \cong Q(R')$. It follows that classifying all varieties of dimension d up to birational equivalence is the same as classifying all extension fields of transcendence degree d.

Example 8. If $R = k[x,y]/(x^3 - y^2)$, then the map

$$\mathcal{V}(x^3 - y^2) \setminus \{(0,0)\} \to k \setminus \{0\};\ (a,b) \mapsto b/a$$

is an isomorphism. If $R' = k[x,y]/(x^3 + x^2 - y^2)$, then the map

$$\mathcal{V}(x^3 + x^2 - y^2) \setminus \{(0,0)\} \to k \setminus \{0\};\ (a,b) \mapsto b/a$$

is an isomorphism. So $\operatorname{Spec} R, \operatorname{Spec} R', \operatorname{Spec} k[t]$ are all birationally equivalent. In fact, $Q(R) \cong Q(R') \cong k(t)$.

By resolution of singularities, every variety is birationally equivalent to a smooth projective scheme, so classifying all varieties up to birational equivalence is weaker than classifying all smooth projective schemes up to isomorphism. However, in dimension 1, they are the same in the sense below. From now on, we will call a variety of dimension 1 a curve, and a variety of dimension 2 a surface.

Theorem 9. *For each curve X, there exists a unique smooth projective curve up to isomorphism which is birationally equivalent to X.*

It is a common agreement that the classification of curves had been completed in a sense that, for a each curve, there is a birational invariant g, called a genus. For each genus g, there is a variety $\mathfrak{M}_g$, called the variety of moduli of curves of genus g such that

$$\dim \mathfrak{M}_g = \begin{cases} 0 & \text{if } g = 0 \\ 1 & \text{if } g = 1 \\ 3g-3 & \text{if } g \geq 2, \end{cases}$$ which parameterizes all smooth projective curves of genus g.

In dimension 2, these two classifications are not the same. In fact, classifying all smooth projective surfaces up to isomorphism is difficult. On the other hand, the classification of surfaces up to birational equivalence is considered to be successful in a sense that, for each surface, there is a unique special surface, called the minimal model, which is birationally equivalent to it, except for a rational surface (a surface birationally equivalent to $\mathbb{P}^2$), and a birationally ruled surface (a surface birationally equivalent to $\mathbb{P}^1 \times C$ where C is a curve). For these two exceptions, minimal models are not unique, but they are well-known. A minimal model is important since every surface can be obtained by blowing-up a minimal model several times.

1.3. Noncommutative Projective Varieties. Now we turn to noncommutative algebras. Since classification of low dimensional varieties has been successful in algebraic geometry, we would like to classify noncommutative algebras (varieties) of low dimensions, following ideas and techniques of algebraic geometry. As in the commutative case, we restrict ourselves to domains over an algebraically closed field k. It is easy to see that the only domain of GKdimension 0 is k. The following theorem due to Small and Warfield is rather surprising.

Theorem 10. [17] *Every finitely generated domain of GKdimension 1 is commutative.*

The above theorem says that every noncommutative affine curve is in fact commutative. It is already too difficult to classify all domains of GKdimension 2. Since every noncommutative algebra can be homogenized as in the commutative case (see examples below), we will focus on graded algebras, and classify their associated projective schemes.

In modern algebraic geometry, the category $\operatorname{Mod} \mathcal{O}_X$ of quasi-coherent $\mathcal{O}_X$-modules play an essential role to study scheme X. In fact, every scheme X determines and is determined by the category $\operatorname{Mod} \mathcal{O}_X$ by Rosenberg [15], so it is reasonable to identify a scheme X with the category $\operatorname{Mod} \mathcal{O}_X$. The following classical result is due to Serre.

Theorem 11. [16] *If A is a commutative graded algebra finitely generated in degree 1 over k and $X = \operatorname{Proj} A$, then*

$$\operatorname{Mod} \mathcal{O}_X \cong \operatorname{GrMod} A / \operatorname{Fdim} A$$

where $\operatorname{Fdim} A$ *is the full subcategory of* $\operatorname{GrMod} A$ *consisting of direct limits of finite dimensional modules over k.*

The following definition of a noncommutative projective scheme due to Artin and Zhang was motivated by the above result.

Definition 12. [5] Let A be a graded algebra. We define a noncommutative projective scheme associated to A by the quotient category

$$\operatorname{Proj} A := \operatorname{GrMod} A / \operatorname{Fdim} A.$$

If A is a noetherian graded domain, then we define the function field of $X = \operatorname{Proj} A$ by

$$k(X) := Q_{gr}(A)_0 = \{ab^{-1} \mid a, b \in A \text{ are homogeneous of the same degree}, b \neq 0\}.$$

As usual, we define $\operatorname{proj} A := \operatorname{grmod} A / \operatorname{fdim} A$ where $\operatorname{fdim} A$ is the full subcategory of $\operatorname{grmod} A$ consisting of finite dimensional modules over k. Roughly speaking, objects in $\operatorname{proj} A$ are the same as those in $\operatorname{grmod} A$, but two modules $M, N \in \operatorname{grmod} A$ are isomorphic in $\operatorname{proj} A$ if and only if $M_{\geq n} \cong N_{\geq n}$ in $\operatorname{grmod} A$ for some n. Note that $k(X)$ is a division algebra over k. We have the following lemma.

Lemma 13. *Let A, A' be noetherian graded domains, and $X = \operatorname{Proj} A, X' = \operatorname{Proj} A'$. Then*

$$\begin{aligned} & A \cong A' \\ \Longrightarrow\ & \operatorname{GrMod} A \cong \operatorname{GrMod} A' \ \textit{(graded Morita equivalent)} \\ \Longrightarrow\ & X \cong X' \\ \Longrightarrow\ & k(X) \cong k(X') \ \textit{(birationally equivalent).} \end{aligned}$$

This implies that there are four levels of classifying noetherian graded domains. If A is a noetherian graded domain of GKdimension 2, then it is reasonable to call $\operatorname{Proj} A$ a noncommutative projective curve. Artin and Stafford [3] classified noncommutative projective curves in this sense as follows.

Let A be a noetherian graded domain of GKdimension 2, $X = \operatorname{Proj} A$, and $K = Z(k(X))$, the center of $k(X)$. Potentially, there are two possibilities, either $\operatorname{tr.deg}_k K = 0$ or $\operatorname{tr.deg}_k K = 1$, however, since $\operatorname{GKdim} k(X) = 1$, it follows that $k(X)$ is finite dimensional over its center K by Small and Warfield [17], so $\operatorname{tr.deg}_k K = 1$ and $k(X) \in \operatorname{Br}(K)$, the Brauer group of K. Since k is algebraically closed, $k(X) = K$ by Tsen's theorem. By the classification of commutative curves, there exists a curve E such that $k(X) \cong K \cong k(E)$. It says that every noncommutative projective curve is birationally equivalent to a commutative curve. Surprisingly, more is true.

Theorem 14. [3] *If A is a graded domain of GKdimension 2 generated in degree 1, then A is noetherian. Moreover, there is a pair (E, σ) where E is a curve, and $\sigma \in \operatorname{Aut} E$ such that*

$$A_n \cong \mathrm{H}^0(E, \mathcal{L} \otimes_E \sigma^* \mathcal{L} \otimes_E \cdots \otimes_E (\sigma^{n-1})^* \mathcal{L})$$

for all $n \gg 0$ where $\mathcal{L} = \mathcal{O}_E(1)$ is an ample invertible sheaf on E. In particular, $\operatorname{Proj} A \cong \operatorname{Mod} \mathcal{O}_E$.

The above theorem says that every noncommutative projective curve is isomorphic to a commutative curve, so the classification of noncommutative projective curve can be regarded as settled. We will see later that a geometric pair (E, σ) above play an essential role in classifying higher dimensional noncommutative projective schemes.

If A is a noetherian graded domain of GKdimension 3, then it is reasonable to call $\operatorname{Proj} A$ a noncommutative projective surface. The classification of noncommutative projective surfaces is wide open even up to birational equivalence, which is the same as the classification of division algebras of transcendence degree 2. Here is a conjecture due to Artin (slightly modified by the author).

Conjecture 15. [1] Let A be a noetherian graded domain of GKdimension 3, $X = \operatorname{Proj} A$, and $K = Z(k(X))$.

(1) (quantum rational surface) If $\operatorname{tr.deg}_k K = 0$ so that $K = k$, then $k(X) \cong K(\text{q-}\mathbb{P}^2)$ where q-$\mathbb{P}^2$ is a quantum projective plane defined later.
(2) (birationally quantum ruled surface) If $\operatorname{tr.deg}_k K = 1$ so that there is a curve E such that $K \cong k(E)$, then $k(X) \cong K(t;\sigma)$ for some $\sigma \in \operatorname{Aut} K$ (or $\sigma \in \operatorname{Aut} E$).
(3) If $\operatorname{tr.deg}_k K = 2$ so that there is a surface S such that $K \cong k(S)$, then $k(X) \in \operatorname{Br}(K)$, that is, $k(X)$ is finite dimensional over K.

Although classification of noncommutative projective surfaces is nowhere in sight, many important techniques to classify commutative surfaces has been extended to noncommutative settings:

(1) Serre's duality [6], [23].
(2) Intersection theory [7], [14].
(3) Riemann-Roch theorem [7], [9].
(4) Blowing up [21].

In the next section, we will focus on the classification of the simplest noncommutative surfaces called quantum projective planes.

2. Quantum Projective Planes

2.1. AS-regular Algebras. The simplest surface in algebraic geometry is the affine plane, which is $\operatorname{Spec} k[x,y]$, so the simplest noncommutative surfaces must be a "quantum" affine plane, which should be "$\operatorname{Spec} R$", where R is a noncommutative analogue of $k[x,y]$. There are some noncommutative algebras analogous to $k[x,y]$ such as:

- $R = k\langle x,y\rangle/(xy - \alpha yx)$ where $\alpha \in k \setminus \{0\}$ (a skew polynomial algebra).
- $R' = k\langle x,y\rangle/(xy - yx - x)$ (the enveloping algebra of the 2-dimension non-abelian Lie algebra).
- $R'' = k\langle x,y\rangle/(xy - yx - 1)$ (the 1st Weyl algebra).

All of the above algebras are regular algebras of GKdimension 2. Although these algebras can be regarded as coordinate rings of a "quantum" affine plane, we do not have a precise definition of it yet. As in the commutative case, we can homogenize any algebras. For example:

- $\tilde{R} = k\langle x,y\rangle[z]/(xy - \alpha yx) = k\langle x,y,z\rangle/(xy - \alpha yx, yz - zy, zx - xz)$.
- $\tilde{R}' = k\langle x,y\rangle[z]/(xy - yx - xz) = k\langle x,y,z\rangle/(xy - yx - xz, yz - zy, zx - xz)$.
- $\tilde{R}'' = k\langle x,y\rangle[z]/(xy - yx - z^2) = k\langle x,y,z\rangle/(xy - yx - z^2, yz - zy, zx - xz)$.

All of the above algebras are regular graded algebras of GKdimension 3 and of global dimension 3. Since the only commutative regular graded algebra is the polynomial algebra, it may be reasonable to define a "quantum" projective space of dimension d as $\operatorname{Proj} A$ for some regular graded algebra of $\operatorname{gldim} A = d+1$. It is easy to see that the only regular graded algebra of $\operatorname{gldim} A = 0$ is k. However, since the global dimension of a free algebra $k\langle x_1, \dots, x_n\rangle$ is 1, we must add some additional conditions on a regular graded algebra to make the definition more reasonable. Although the conditions such as A is noetherian and A is a domain are most reasonable, it turns out that these conditions are very difficult to check in practice. One of the ingenuous ideas of Artin and Schelter was to define AS-regular algebras as below and classify them up to dimension 3.

Definition 16. [2] A graded algebra A is called a d-dimensional AS-regular algebra if

(1) $\operatorname{gldim} A = d < \infty$.
(2) $\operatorname{GKdim} A < \infty$.
(3) A satisfies Gorenstein condition, that is, $\dim_k \operatorname{Ext}^i_A(k,k) < \infty$ for all i, and

$$\operatorname{Ext}^i_A(k,A) = \begin{cases} k & \text{if } i = d, \\ 0 & \text{if } i \neq d. \end{cases}$$

If A is a $(d+1)$-dimensional quadratic AS-regular algebra, then we call $\operatorname{Proj} A$ a d-dimensional quantum projective space. In particular, if A is a 3-dimensional quadratic AS-regular algebra, then we call $\operatorname{Proj} A$ a quantum projective plane.

Let A be a graded algebra. The opposite graded algebra of A is denoted by A^o and the enveloping graded algebra of A is denoted by $A^e = A^o \otimes_k A$. A graded left A-module will be identified with the graded right A^o-module, and a graded A-A bimodule will be identified with a graded right A^e-module. Then Gorenstein condition above is equivalent to the following condition: if

$$0 \to F_d \to F_{d-1} \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to k \to 0$$

is the minimal free resolution of $k \in \operatorname{GrMod} A$, then $F_i \in \operatorname{grmod} A$ and

$$0 \to F_0^\vee \to F_1^\vee \cdots \to F_{d-1}^\vee \to F_d^\vee \to k \to 0$$

is the minimal free resolution of $k \in \operatorname{GrMod} A^o$ where $F_i^\vee := \operatorname{Hom}_A(F_i, A) \in \operatorname{grmod} A^o$.

Classifying AS-regular algebras up to dimension 2 is easy.

Lemma 17. *Let A be an AS-regular algebra.*

(1) $\operatorname{gldim} A = 1$ *if and only if* $A \cong k[x]$.
(2) *If* $\operatorname{gldim} A = 2$, *then* $A \cong k\langle x,y\rangle/(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2)$ *where* $(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{P}^3$.

Conversely, if $A \cong k\langle x,y\rangle/(\alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2)$, *then:*

	$\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$	$\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ *but* $\beta \neq \gamma$	$\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ *and* $\beta = \gamma$
$\operatorname{gldim} A$	*2*	*2*	∞
$\operatorname{GKdim} A$	*2*	*2*	∞
noetherian	*Yes*	*No*	*No*
domain	*Yes*	*No*	*No*
Gorenstein condition	*Yes*	*No*	*No*

Question 18. Let A be a graded algebra such that $\operatorname{gldim} A < \infty$ and $\operatorname{GKdim} A < \infty$. Then A is noetherian if and only if A is a domain if and only if A satisfies Gorenstein condition?

2.2. Geometric Algebras. Artin, Tate and Van den Bergh [4] classified all 3-dimensional AS-regular algebras using geometric techniques. Recall that every graded algebra generated in degree 1 is of the form $A = T(V)/I$. A homogeneous element $f \in I_i \subset V^{\otimes i}$ defines a linear map $f : (V^{\otimes i})^* \cong V^{*\otimes i} \to k$ where V^* is the k-vector space dual of V, or equivalently a multilinear form $f : V^{*\times i} \to k$, so we may define a sequence of schemes

$$\Gamma_i := \mathcal{V}(I_i) = \{(p_1, \dots, p_i) \in \mathbb{P}(V^*)^{\times i} \mid f(p_1, \dots, p_i) = 0 \text{ for all } f \in I_i\}.$$

If $\pi_i : \Gamma_{i+1} \to \Gamma_i$ is the projection map onto the first i coordinates, then (Γ_i, π_i) is an inverse system of schemes. We define the point scheme of A by taking the inverse limit $\Gamma := \varprojlim \Gamma_i$.

Example 19. If $A = T(V)$ is the tensor algebra, then $\Gamma_i = \mathcal{V}(0) = \mathbb{P}(V^*)^{\times i}$, so the point scheme of A is $\Gamma \cong \mathbb{P}(V^*)^{\times\infty}$.

Example 20. On the other hand, if $A = S(V) = k[x_1, \dots, x_n]$ is the polynomial algebra, then $\Gamma_i = \{(p, p, \dots, p) \in \mathbb{P}(V^*)^{\times i} \mid p \in \mathbb{P}(V^*)\}$, so the point scheme of A is $\Gamma \cong \mathbb{P}(V^*)$.

Example 21. In fact, if $A = S(V)/I$ is a commutative graded algebra generated in degree 1, then $\Gamma_i = \{(p, p, \dots, p) \in \mathbb{P}(V^*)^{\times i} \mid p \in \operatorname{Proj} A\}$ for all $i \gg 0$, so the point scheme of A is $\Gamma \cong \operatorname{Proj} A$.

Example 22. If A is artinian, then $\Gamma_i = \emptyset$ for all $i \gg 0$, so the point scheme of A is $\Gamma = \emptyset$.

Question 23. [4] If A is a noetherian finitely presented graded algebra, then does $\varprojlim \Gamma_i$ converge?

To simplify the story, we will focus on only quadratic algebras. A quadratic algebra is of the form $A = T(V)/(R)$ where $R \subset V \otimes_k V$ is a subspace and (R) is the two-sided ideal of $T(V)$ generated by R.

Definition 24. A quadratic algebra $A = T(V)/(R)$ is called geometric if there is a pair (E, σ) where $E \subseteq \mathbb{P}(V^*)$ is a scheme and $\sigma \in \operatorname{Aut} E$ is an automorphism such that
G1 $\Gamma_2 = \{(p, \sigma(p)) \in \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(V^*) \mid p \in E\}$.
G2 $R = \{f \in V \otimes_k V \mid f(p, \sigma(p)) = 0 \text{ for all } p \in E\}$.

If A satisfies the condition (G1), then A determines a geometric pair (E, σ), which is written as $\mathcal{P}(A) = (E, \sigma)$. In this case, $\Gamma_i = \{(p, \sigma(p), \dots, \sigma^{i-1}(p)) \in \mathbb{P}(V^*)^{\times i} \mid p \in E\}$ for all $i \geq 2$, so the point scheme of A is $\Gamma \cong E$. If A satisfies the condition (G2), then A is determined by a geometric pair (E, σ), which is written as $A = \mathcal{A}(E, \sigma)$.

Classifying geometric algebras is equivalent to classifying geometric pairs in the following sense.

Theorem 25. *Let $A = T(V)/(R) = \mathcal{A}(E, \sigma), A' = T(V')/(R') = \mathcal{A}(E', \sigma')$ be geometric algebras. Then $A \cong A'$ if and only if there is an isomorphism $\tau : E \to E'$ which extends to an isomorphism $\bar{\tau} : \mathbb{P}(V^*) \to \mathbb{P}(V'^*)$ such that the diagram*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\sigma"'] & E' \arrow[d, "\sigma'"] \\ E \arrow[r, "\tau"] & E' \end{tikzcd}$$

commutes.

Although the definition is technical, many noetherian quadratic algebras are geometric.

Example 26. If A is a commutative quadratic domain, then $A = \mathcal{A}(\operatorname{Proj} A, \mathrm{Id})$ is geometric.

Example 27. Let $A = k\langle x, y\rangle/(f)$ where

$$f = \alpha x^2 + \beta xy + \gamma yx + \delta y^2, \quad (\alpha, \beta, \gamma, \delta) \in \mathbb{P}^3.$$

Then

$$\begin{aligned}
& (p,q) = ((a,b),(c,d)) \in \Gamma_2 = \mathcal{V}(f) \subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \\
\iff & f(p,q) = \alpha ac + \beta ad + \gamma bc + \delta bd = 0 \\
\iff & (\beta a + \delta b)d = (-\alpha a - \gamma b)c \\
\iff & \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta a + \delta b \\ -\alpha a - \gamma b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & \delta \\ -\alpha & -\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ in } \mathbb{P}^1 \\
\iff & q = \sigma(p) \text{ where } p \in \mathbb{P}^1 \text{ and } \sigma = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ -\alpha & -\beta \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

It follows that

$$\begin{aligned}
& A \text{ satisfies (G1)} \\
\iff & \sigma \in \operatorname{Aut} \mathbb{P}^1 = \mathrm{PGL}(2,k) = \mathrm{GL}(2,k)/\sim \\
\iff & \det \sigma = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.
\end{aligned}$$

In fact, $A = \mathcal{A}(\mathbb{P}^1, \sigma)$ is geometric if and only if $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. It follows that A is a 2-dimensional AS-regular algebra if and only if $A = \mathcal{A}(\mathbb{P}^1, \sigma)$ is a geometric algebra for some $\sigma \in \operatorname{Aut} \mathbb{P}^1$.

Using geometric pairs, 3-dimensional AS-regular algebras were also classified by Artin, Tate, and Van den Bergh. We state their theorem only in the quadratic case.

Theorem 28. [4] *Let A be a quadratic algebra. Then A is a 3-dimensional AS-regular algebra if and only if $A \cong \mathcal{A}(E, \sigma)$ where*

(1) *$E = \mathbb{P}^2$ and $\sigma \in \operatorname{Aut} \mathbb{P}^2$, or*

(2) *$E \subseteq \mathbb{P}^2$ is a cubic divisor, that is, $E = \mathcal{V}(f)$ for some $f \in S(V)_3$, and $\sigma \in \operatorname{Aut} E$ such that $\sigma^*\mathcal{L} \not\cong \mathcal{L}$ but $(\sigma^2)^*\mathcal{L} \otimes_E \mathcal{L} \cong \sigma^*\mathcal{L} \otimes_E \sigma^*\mathcal{L}$ where $\mathcal{L} = \mathcal{O}_E(1)$ is the very ample invertible sheaf on E.*

Let $A = \mathcal{A}(E, \sigma)$ be a 3-dimensional quadratic AS-regular algebra. The following is a list of possibilities for E: (1) $\mathbb{P}^2$. (2) triple lines. (2) union of a double line and a single line. (3) three lines meeting at one point. (4) a triangle. (5) a line and a conic meeting at one-point. (6) a line and conic meeting at two points. (7) an elliptic curve.

Example 29. If $A = k\langle x, y, z\rangle/(zy - \alpha yz, xz - \beta zx, yx - \gamma xy)$ where $\alpha, \beta, \gamma \in k \setminus \{0\}$, then A is a 3-dimensional quadratic AS-regular algebra such that

$$E = \begin{cases} \mathbb{P}^2 & \text{if } \alpha\beta\gamma = 1, \\ \mathcal{V}(xyz) \subset \mathbb{P}^2 \text{ (a triangle)} & \text{if } \alpha\beta\gamma \neq 1. \end{cases}$$

Example 30. Let $A = k\langle x, y, z\rangle/(\alpha yz + \beta zy + \gamma x^2, \alpha zx + \beta xz + \gamma y^2, \alpha xy + \beta yx + \gamma z^2)$. For a generic choice of $\alpha, \beta, \gamma \in k \setminus \{0\}$, A is a 3-dimensional quadratic AS-regular algebra such that

$$E = \mathcal{V}(\alpha\beta\gamma(x^3 + y^3 + z^3) - (\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3)xyz) \subset \mathbb{P}^2$$

is an elliptic curve, and σ is given by the translation by the point $(\alpha, \beta, \gamma) \in E$ in the group law on E. In this case, A is called a 3-dimensional Sklyanin algebra.

Unfortunately, there exists a 4-dimensional quadratic AS-regular algebra which does not satisfy (G2) (see [20]), however, almost all known examples of 4-dimensional quadratic AS-regular algebras are geometric.

For geometric algebras, graded Morita equivalence can be characterized in terms of their geometric pairs.

Theorem 31. [10] *Let $A = T(V)/(R) = \mathcal{A}(E, \sigma), A' = T(V')/(R') = \mathcal{A}(E', \sigma')$ be geometric algebras. Then* $\operatorname{GrMod} A \cong \operatorname{GrMod} A'$ *if and only if there is a sequence of isomorphisms $\tau_n : E \to E'$ which extend to isomorphisms $\bar{\tau}_n : \mathbb{P}(V^*) \to \mathbb{P}(V'^*)$ such that the diagram*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tau_n} & E' \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma'} \\ E & \xrightarrow{\tau_{n+1}} & E' \end{array}$$

commute for all $n \in \mathbb{Z}$.

3. Frobenius Koszul Algebras

3.1. Koszul Algebras. So far, it seems that there is no connection between two research fields, noncommutative algebraic geometry and representation theory of finite dimensional algebras because the projective schemes associated to any graded algebra finite dimensional over k is empty. However, we will see that some of the ideas and techniques of noncommutative algebraic geometry can be transferred to the study of Frobenius Koszul algebras via Koszul duality.

Definition 32. Let A be a graded algebra. A linear resolution of $M \in \operatorname{GrMod} A$ is a free resolution of the form

$$\cdots \xrightarrow{[v_{ij}^{(2)}]\cdot} \oplus A \xrightarrow{[v_{ij}^{(1)}]\cdot} \oplus A \xrightarrow{[v_{ij}^{(0)}]\cdot} \oplus A \to M \to 0$$

where $v_{ij}^{(k)} \in V = A_1$ for all i, j, k. We say that A is Koszul if $k := A/A_{\geq 1}$ has a linear resolution.

It is known that if A is Koszul, then $A = T(V)/(R)$ is quadratic, and its quadratic dual $A^! = T(V^*)/(R^\perp)$ where

$$R^\perp := \{\lambda \in V^* \otimes_k V^* \mid \lambda(r) = 0 \text{ for all } r \in R\}$$

is also Koszul, which is called the Koszul dual of A.

Example 33. The following algebras are Koszul.

- A free algebra. For example,
$$A = k\langle x, y\rangle \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^! \cong k\langle x, y\rangle/(x^2, xy, yx, y^2).$$
- A skew polynomial algebra, and a skew exterior algebra. For example,
$$A = k\langle x, y\rangle/(xy - \alpha yx) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^! \cong k\langle x, y\rangle/(x^2, \alpha xy + yx, y^2).$$

- A monomial quadratic algebra. For example,

$$A = k\langle x, y\rangle/(x^2, xy) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^! \cong k\langle x, y\rangle/(yx, y^2).$$

Let A be a graded algebra. The complexity of A is defined by $c_A := \mathrm{GKdim}(\oplus \mathrm{Ext}^i_A(k, k))$. This section was motivated by the following result due to Smith.

Theorem 34. [18] *Let A be a graded algebra. Then A is Frobenius Koszul of $c_A < \infty$ if and only if $A^!$ is AS-regular Koszul.*

It follows that classifying all AS-regular Koszul algebras of GKdimension d is equivalent to classifying all Frobenius Koszul algebras of complexity d. We will see below that there are four levels of classification.

As in the commutative case, a dualizing complex defined below plays an essential role in noncommutative algebraic geometry. We define the i-th local cohomology of $M \in \mathrm{GrMod}\, A$ by

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(M) = \lim_{n\to\infty} \mathrm{Ext}^i_A(A/A_{\geq n}, M) \in \mathrm{GrMod}\, A.$$

For an abelian category $\mathcal{C}$, we denote by $\mathcal{D}^b(\mathcal{C})$ the category of bounded complexes in $\mathcal{C}$.

Definition 35. [22] Let A be a graded algebra. A bounded complex $D \in \mathcal{D}^b(\mathrm{GrMod}\, A^e)$ of graded A-A bimodules is called dualizing if it satisfies the following conditions:

(1) D has finite injective dimension over A and over A^o.
(2) D is a complex of modules finitely generated over A and over A^o.
(3) There are isomorphisms of graded A-A bimodules

$$\mathrm{Ext}^i_A(D, D) \cong \mathrm{Ext}^i_{A^o}(D, D) \cong \begin{cases} A & \text{if } i = 0 \\ 0 & \text{if } i \neq 0. \end{cases}$$

A dualizing complex D over A is called balanced if there are isomorphisms of graded A-A bimodules

$$\mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}}(D) \cong \mathrm{H}^i_{\mathfrak{m}^o}(D) \cong \begin{cases} A^* := \mathrm{Hom}_k(A, k) \in \mathrm{GrMod}\, A^e & \text{if } i = 0 \\ 0 & \text{if } i \neq 0. \end{cases}$$

Almost all noetherian graded algebras we usually consider, typically, graded quotient algebras of a noetherian AS-regular algebra, have balanced dualizing complexes.

Let $\underline{\mathrm{grmod}}A$ be the stable category of $\mathrm{grmod}\, A$ modulo projectives. We can form a triangulated category $\mathcal{S}(\underline{\mathrm{grmod}}A)$, called the stabilization of $\underline{\mathrm{grmod}}A$, by formally inverting the syzygy functor $\Omega : \underline{\mathrm{grmod}}A \to \underline{\mathrm{grmod}}A$ so that $\Omega^{-1} : \mathcal{S}(\underline{\mathrm{grmod}}A) \to \mathcal{S}(\underline{\mathrm{grmod}}A)$ is the translation functor.

Theorem 36. *Let A, B be graded algebras.*

(1) *If A and B are quadratic, then*

$$A \cong B \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^! \cong B^!.$$

(2) [13] *If A and B are Koszul, then*

$$\mathrm{GrMod}\, A \cong \mathrm{GrMod}\, B \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{GrMod}\, A^! \cong \mathrm{GrMod}\, B^!.$$

(3) [8] *If A and B are Koszul and $A, B, A^!, B^!$ are noetherian and having balanced dualizing complexes, then*

$$\mathcal{D}^b(\operatorname{grmod} A) \cong \mathcal{D}^b(\operatorname{grmod} B) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{D}^b(\operatorname{grmod} A^!) \cong \mathcal{D}^b(\operatorname{grmod} B^!).$$

(4) [9] *If A and B are Koszul and $A, B, A^!, B^!$ are noetherian and having balanced dualizing complexes, then*

$$\mathcal{D}^b(\operatorname{proj} A) \cong \mathcal{D}^b(\operatorname{proj} B) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{S}(\underline{\operatorname{grmod}} A^!) \cong \mathcal{S}(\underline{\operatorname{grmod}} B^!).$$

Note that if A is a Frobenius algebra, then $\mathcal{S}(\underline{\operatorname{grmod}} A) \cong \underline{\operatorname{grmod}} A$ as triangulated categories. If we accept the conjecture that every AS-regular (Koszul) algebra is noetherian, then we have the following correspondences:

Classifying all Frobenius Koszul algebras of complexity d

- up to isormophism
- up to graded Morita equivalence
- up to graded derived equivalence
- up to graded stable equivalence

$\Longleftrightarrow$ Classifying all (noetherian) AS-regular Koszul algebras of GKdimension d

- up to isormophism
- up to graded Morita equivalence
- up to graded derived equivalence
- up to derived equivalence of the associated projective schemes.

Since classification of Frobenius algebras is an active project in representation theory of finite dimensional algebras, there will be deep interactions between these two research fields.

3.2. Co-point Modules. If A is a Koszul algebra, then we expect that some of the techniques to study A can be used to study $A^!$. In fact, by transferring techniques of noncommutative algebraic geometry described in the previous section, we have already obtained some results in representation theory of finite dimensional algebras (see [18], [11]). We would like to make more progress in this direction.

Definition 37. A quadratic algebra A is called co-geometric if its quadratic dual $A^! = \mathcal{A}(E, \sigma)$ is geometric.

If A is co-geometric, then A determines a geometric pair by $(E, \sigma) = \mathcal{P}(A^!)$, and A is determined by a geometric pair (E, σ) by $A \cong \mathcal{A}^!(E, \sigma) := \mathcal{A}(E, \sigma)^!$. The following results are simple interpretations of the ones in the previous section.

Theorem 38. *Let $A = T(V)/(R) = \mathcal{A}^!(E, \sigma), A' = T(V')/(R') = \mathcal{A}^!(E', \sigma')$ be co-geometric algebras.*

(1) *$A \cong A'$ if and only if there is an isomorphism $\tau : E \to E'$ which extends to an isomorphism $\bar{\tau} : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ such that the diagram*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tau} & E' \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma'} \\ E & \xrightarrow{\tau} & E' \end{array}$$

commutes.

(2) *Moreover, if A, A' are Koszul algebras, then* $\mathrm{GrMod}\, A \cong \mathrm{GrMod}\, A'$ *if and only if there is a sequence of isomorphisms $\tau_n : E \to E'$ which extend to isomorphisms $\bar{\tau}_n : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ such that the diagram*

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\tau_n} & E' \\ {\scriptstyle\sigma}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\sigma'} \\ E & \xrightarrow{\tau_{n+1}} & E' \end{array}$$

commute for all $n \in \mathbb{Z}$.

Since A is a Frobenius Koszul algebra of complexity 3 if and only if $A^!$ is a 3-dimensional quadratic AS-regular algebra, Frobenius Koszul algebras of complexity 3 can be completely classified in term of geometric pairs up to isomorphism and up to graded Morita equivalence. In this section, we will find the geometric pair (E, σ) directly from A without passing through its Koszul dual.

Let $A = T(V)/I$ be a graded algebra. For $p \in \mathbb{P}(V)$, we define $N_p := A/vA \in \mathrm{GrMod}\, A$ where $v \in V = A_1$ such that $p = [v] \in \mathbb{P}(V)$. This notation is useful because, for $p, q \in \mathbb{P}(V)$, $N_p \cong N_q$ if and only if $p = q$.

Example 39. If $A = k\langle x, y, z\rangle/I$ and $p = (a, b, c) \in \mathbb{P}^2$, then

$$N_p = A/(ax + by + cz)A \in \mathrm{GrMod}\, A.$$

Definition 40. Let $A = T(V)/I$ be a graded algebra. We say that $N \in \mathrm{GrMod}\, A$ is a co-point module if N has a minimal free resolution of the form

$$\cdots \xrightarrow{v_2\cdot} A \xrightarrow{v_1\cdot} A \xrightarrow{v_0\cdot} A \to N \to 0$$

where $v_i \in V = A_1$ for all $i \in \mathbb{N}$.

We denote by $\mathrm{clin}\, A$ the full subcategory of $\mathrm{GrMod}\, A$ consisting of co-point modules. If $N \in \mathrm{clin}\, A$ is a co-point module having the resolution as above, then $\Omega^i N \cong N_{p_i} \in \mathrm{clin}\, A$ are co-point modules where $p_i = [v_i] \in \mathbb{P}(V)$ for all $i \in \mathbb{N}$. We define $\mathcal{P}^!(A) = (E, \sigma)$ where $E := \{p \in \mathbb{P}(V) \mid N_p \in \mathrm{clin}\, A\}$, and $\sigma : E \to E$ is a map defined by $\Omega N_p \cong N_{\sigma(p)}$, so that

$$\Omega^i N_p \cong N_{\sigma^i(p)}$$

for all $i \in \mathbb{N}$.

For the purpose below, we assume that the following technical condition. We say that a Koszul algebra A satisfies (*) if

(1) $\mathrm{GKdim}\, A^! < \infty$ (equivalently $c_A < \infty$),
(2) $A^!$ is noetherian, and

(3) $A^!$ satisfies Cohen-Macaulay property, that is, $\operatorname{grade} M + \operatorname{GKdim} M = \operatorname{GKdim} A^!$ for all $M \in \operatorname{grmod} A^!$ where $\operatorname{grade} M := \inf\{i \mid \operatorname{Ext}^i_{A^!}(M, A^!) \neq 0\}$.

We expect that every Frobenius Koszul algebra of finite complexity satisfies (*).

Theorem 41. [11] *If $A = \mathcal{A}^!(E,\sigma)$ is a co-geometric Frobenius Koszul algebra satisfying (*), then $\mathcal{P}^!(A) = (E,\sigma)$.*

Many important functors in representation theory of finite dimensional algebras preserve co-point modules.

Lemma 42. [12] *If $A = \mathcal{A}^!(E,\sigma)$ is a Frobenius Koszul algebra satisfying (*), then there are following functors:*

$$\begin{array}{rcl} \Omega & : & \operatorname{clin} A \to \operatorname{clin} A \\ \operatorname{Tr} & : & \operatorname{clin} A \to \operatorname{clin} A^o \\ (-)^\vee := \operatorname{Hom}_A(-,A) & : & \operatorname{clin} A \to \operatorname{clin} A^o \\ (-)^* := \operatorname{Hom}_k(-,k) & : & \operatorname{clin} A \to \operatorname{clin} A^o \\ \mathcal{N}(-) := ((-)^\vee)^* & : & \operatorname{clin} A \to \operatorname{clin} A. \end{array}$$

It follows that the Nakayama functor $\mathcal{N} : \operatorname{clin} A \to \operatorname{clin} A$ induces an automorphism $\nu \in \operatorname{Aut} E$, which is called the Nakayama automorphism.

Conjecture 43. Let $A = \mathcal{A}^!(E,\sigma), A' = \mathcal{A}^!(E',\sigma')$ be co-geometric Frobenius Koszul algebras of complexity d satisfying (*), and let $\nu \in \operatorname{Aut} E, \nu' \in \operatorname{Aut} E'$ be Nakayama automorphisms. Then $\operatorname{GrMod} A \cong \operatorname{GrMod} A'$ if and only if $\mathcal{A}^!(E, \nu\sigma^d) \cong \mathcal{A}^!(E', \nu'\sigma'^d)$.

It is easy to prove the above conjecture if $c_A \leq 2$. If $c_A = 3$ and E is an elliptic curve, then the above conjecture was proved in [10].

References

[1] M. Artin, *Some Problems on Three-dimensional Graded Domains*, Representation theory and algebraic geometry, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **238** Cambridge Univ. Press (1995), 1-19.

[2] M. Artin and W. Schelter, *Graded Algebras of Global Dimension 3*, Adv. Math. **66** (1987), 171-216.

[3] M. Artin and J.T. Stafford, *Noncommutative Graded Domains with Quadratic Growth*, Invent. Math. **122** (1995), 231-276.

[4] M. Artin, J. Tate and M. Van den Bergh, *Some Algebras Associated to Automorphisms of Elliptic Curves*, The Grothendieck Festschrift Vol. 1 Birkhauser, (1990), 33-85.

[5] M. Artin and J.J. Zhang, *Noncommutative Projective Schemes*, Adv. Math. **109** (1994), 228-287.

[6] P. Jørgensen, *Serre Duality for Tails(A)*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 709-716.

[7] P. Jørgensen, *Intersection Theory on Non-commutative Surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), 5817-5854.

[8] I. Mori, *Rationality of the Poincaré Series for Koszul Algebras*, J. Algebra **276** (2004), 602-624.

[9] I. Mori, *Riemann-Roch Like Theorem for Triangulated Categories*, J. Pure Appl. Algebra **193** (2004), 263-285.

[10] I. Mori, *Noncommutative Projective Schemes and Point Schemes*, Algebras, rings, and their representations, World Sci. Publ. (2006), 215-239.

[11] I. Mori, *Co-point Modules over Koszul Algebras*, J. London Math. Soc., to appear.

[12] I. Mori, *Co-point Modules over Frobnius Koszul Algebras*, preprint.

[13] I. Mori, *On Classification of Frobenius Koszul Algebras*, in preparation.

[14] I. Mori and S.P. Smith, *Bézout's Theorem for Non-commutative Projective Spaces*, J. Pure Appl. Algebra **157** (2001), 279-299.

[15] A.L. Rosenberg, *The Spectrum of Abelian Categories and Reconstruction of Schemes*, Rings, Hopf algebras, and Brauer groups, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 197 Marcel Dekker, New York (1998), 257-274.
[16] J.P. Serre, *Faisceaux Algébriques Cohérents*, Ann. of Math. 61 (1955), 197-278.
[17] L.W. Small and R.B. Warfield, Jr, *Prime Affine Algebras of Gelfand Kirillov Dimension One*, J. Algebra 91 (1984), 386-389.
[18] S. P. Smith, *Some Finite Dimensional Algebras Related to Elliptic Curves*, in Representation theory of algebras and related topics (Mexico City, 1994) CMS Conf. Proc. 19, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1996), 315-348.
[19] J.T. Stafford and M. Van den Bergh, *Noncommutative Curves and Noncommutative Surfaces*, Bull. Amer. Math. Soc. 38 (2001), 171-216.
[20] K. Van Rompay, *Segre Product of Artin-Schelter Regular Algebras of Dimension 2 and Embeddings in Quantum* $\mathbb{P}^3$*'s*, J. Algebra 180 (1996), 483-512.
[21] M. Van den Bergh, *Blowing Up of Non-commutative Smooth Surfaces*, Mem. Amer. Math. Soc. 154 (2001).
[22] A. Yekutieli, *Dualizing Complexes over Noncommutative Graded Algebras*, J. Algebra 153 (1992), 41-84.
[23] A. Yekutieli and J.J. Zhang, *Serre Duality for Non-commutative Projective Schemes*, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 697-707.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
FACULTY OF SCIENCE
SHIZUOKA UNIVERSITY
SHIZUOKA 422-8529 JAPAN
E-mail address: simouri@ipc.shizuoka.ac.jp

[15] A.L. Rosenberg, The Spectrum of Abelian Categories and Reconstruction of Schemes, Rings, Hopf algebras, and Brauer groups, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 197 Marcel Dekker, New York (1998), 257-274.
[16] J.-P. Serre, Faisceaux Algébriques Cohérents, Ann. of Math. 61 (1955), 197-278.
[17] L.W. Small and R.B. Warfield, Jr., Prime Affine Algebras of Gelfand-Kirillov Dimension One, J. Algebra 91 (1984), 386-389.
[18] S.P. Smith, Point Modules over Sklyanin Algebras Related to Elliptic Curves, in Representation theory of algebras and related topics (Mexico City, 1994), CMS Conf. Proc. 19, Amer. Math. Soc., Providence, RI (1996), [illegible]
[19] J.T. Stafford and M. Van den Bergh, Noncommutative Curves and Noncommutative Surfaces, Bull. Amer. Math. Soc. 38 (2001), 171-216.
[20] K. Van Rompay, Segre Product of Artin-Schelter Regular Algebras of Dimension 2 and Embeddings in Quantum $\mathbb{P}^3$'s, J. Algebra 180 (1996), 483-512.
[21] M. Van den Bergh, Blowing up of Non-commutative Smooth Surfaces, Mem. Amer. Math. Soc. 154 (2001).
[22] A. Yekutieli, Dualizing Complexes over Noncommutative Graded Algebras, J. Algebra 153 (1992), 41-84.
[23] A. Yekutieli and J.J. Zhang, Serre Duality for Noncommutative Projective Schemes, Proc. Amer. Math. Soc. 125 (1997), 697-707.

Department of Mathematics
Faculty of Science
Shizuoka University
Shizuoka 422-8529 JAPAN
E-mail address: [illegible]

対称群のブルエ予想

AKIHIKO HIDA (飛田明彦)

1. Introduction

有限群の表現論において, 現在重要な問題とされているものに群環の block の間の derived equivalence に関する Broué 予想と呼ばれるものがあります. 対称群の場合は [3], [4] によってこの予想は証明されています.

対称群の場合, [2] で weight が 2 の block について Broué 予想が証明されていますが, そこでは

(i) weight が 2 の block は全て derived equivalnet

(ii) defect group が可換な場合 (つまり $2 < p$ のとき) その中に特別な block で wreath product

$$(S_p \times S_p) \rtimes S_2$$

の block と equivalent になるものが存在する

という 2 点が証明されています. これらと知られている結果をあわせると Broué 予想は証明されたことになります. この (i) (ii) を weight が 2 の場合に限らず一般に証明できれば, 対称群についての Broué 予想は証明されることになります.

(i) の方は Rickard によるもので, (defect group が可換ということと関係なく) 一般の weight の block について成立することが予想されていました. (ii) の特別な block は Rouquier によって見出されたもので, [3] により (weight 2 に限らず) 一般の場合に証明されました. [4] において, (i) が一般の場合に証明され, 対称群についての Broué 予想が証明されたことになります. [4] では (i) の一般の場合に相当する主張が有限一般線形群に対しても示されています. 有限一般線形群 の場合, (ii) の一般の場合に相当する部分は, 宮地兵衛, Turner [8] により証明されています.

[4] では対称群の場合の手法を一般化して, sl_2-categorification という概念を導入しています. これは対称群, (あるいは有限一般線形群) などの有限群だけではなく, Hecke algebra, $\mathfrak{gl}_n$ の category $\mathcal{O}$ や代数群の rational representation なども範囲に含むものです.

ここでは, 対称群の場合を例にとり sl_2-categorification と derived equivalence について (上の (i) の一般の場合にあたる部分) の解説を試みます.

なお, 筆者の力不足のため, 誤解している部分や不正確なところもあると思います. 特に次の点お詫びします.

- パラメーター q が 1 の場合に限定してしまったこと
- affine Lie algebra $\hat{sl}_p$ の作用やクリスタルグラフとの関係に触れない様にしたため不自然な記述になっていること
- minimal categorification に関する部分 Theorem 4.6 (これは重要で興味ある部分だと思うのですが) の証明を略してしまったこと

sl_2-categorification の対象としては上にもあるように, 初めから Lie theory と何らかの関係があるものが多い訳ですが, Lie theory とは関係無い有限群の block や有限次元多元環の場合に適用されることもあればおもしろいのではないか, などと素人考えですが思ったりしています.

以下, 2章では有限群の block と Broué 予想について簡単に述べます. 3章では対称群の表現についてごく簡単に述べます. 4章では対称群の場合を例に sl_2-categorification について説明し, derived equivalence に関する主結果を述べ, 5章で主定理を証明します. Broué 予想について詳しくは [6] を, 対称群の表現については, [1], [5], [7] などを参照してください.

最後になりましたが, 伊山さん他お世話になりました方々にこの場を借りまして御礼申し上げます. ありがとうございました.

2. 有限群のブロックと BRAUER 対応

G を有限群, k を正標数 p の代数的閉体とする. 群環 kG の中心

$$Z(kG) = \{x \in kG \mid xy = yx, \ \forall y \in kG\}$$

の原始べき等元を kG の block という. つまり, $b \in Z(kG)$, $b \neq 0$, $b^2 = b$ となる b で, $b = b_1 + b_2$, $b_i \in Z(kG)$, $b_i^2 = b_i$, $b_1 b_2 = 0$ ならば $b_1 = 0$ または $b_2 = 0$ となるもののことである. 対応するイデアル kGb を block と呼ぶこともある.

G の部分群 H に対して,

$$(kG)^H = \{x \in kG \mid h^{-1}xh = x, \ \forall h \in H\}$$

とおく. $K \leq H \leq G$ に対して,

$$Tr_K^H : (kG)^K \longrightarrow (kG)^H$$

を

$$Tr_K^H(x) = \sum_{h \in K\backslash H} h^{-1}xh$$

と定義する.

b を kG の block とすると, $b \in Z(kG) = (kG)^G$ である. $b \in Tr_D^G((kG)^D)$ となる部分群 D で極小なものを b の defect group という. これは共役を除き一意的に決まる p-部分群である.

Theorem 2.1 (Brauer の第一主定理). D を G の p-部分群, $N_G(D)$ を D の正規化群とする. このとき, *defect group が D の kG の block と defect group が D の $kN_G(D)$ の block との間に一対一の対応がある.*

b を kG の block で defect group が D のもの, b' を b の Brauer 対応 (上の定理で b に対応する $kN_G(D)$ の block) とする. defect group が正規部分群の場合, つまり, $kN_G(D)b'$ はかなりわかりやすい状況となっている. そこで, $kN_G(D)b'$ から kGb の情報を得られるか, $kN_G(D)b'$ と kGb の関係はどうなっているかということが問題となる.

Conjecture 2.2 (Broué). *D が可換群の場合, kGb と $kN_G(D)b'$ は derived equivalent.*

n 次対称群 S_n の場合の状況を見てみよう. b_i $(i = 1, 2)$ を kS_{n_i} の block, D_i を b_i の defect group, N_i を S_{n_i} での D_i の正規化群, b_i' を kN_i での b_i の Brauer 対応とする. もし $D_1 \cong D_2$ ならば kN_1b_1' と kN_2b_2' は Morita equivalent であることがわかる. よってこ

の予想を証明するためには次の2つを証明すればよい.

(1) 対称群 S_n $(n = 1, 2, \cdots)$ の block で defect group が同型なものは全て derived equivalent.

(2) defect group が可換 のときには, その中に Brauer 対応と derived equivalent なものがある.

(2) は [3] の結果である. ここでは [4] による (1) について解説していくことにする.

3. 対称群の表現

対称群のモヂュラー表現について必要な事項をごく簡単に述べる.

自然数の分割

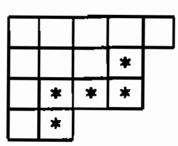
n を自然数とし, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$, $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \cdots \geq 0$, $\sum \alpha_i = n$ となるとき α を n の partition という. 任意の k に対して, $\#\{j \mid \alpha_j = k\} < p$ となるとき, α を p-regular partiton という. □ を上から左端をそろえて α_1 個, α_2 個, ... と並べた図を Young 図形という. 以下 partition と Young 図形を同一視することもある. α (の Young 図形) の (上から) i 行 (左から) j 列の node (i, j) に対して, その p-residue を $j - i \mod p$ と定義する.

Example 3.1. $p = 3$ の場合.

$$\begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 0 & \cdots \\ 2 & 0 & 1 & & \\ 1 & 2 & 0 & & \end{matrix}$$

α の node (i, j) に対して, i 行の右端から j 列の一番下までの連続した p 個を p-rim hook という.

Example 3.2. $p = 5$, $\alpha = (5442)$. $*$ の部分が 5-rim hook の例.



α から p-rim hook を取り除いていくと, p-rim hook のない図形に到達する. それを α の p-core, p-rim hook を取り除く回数を weight という. (p-rim hook の取り方によらず決まる).

Example 3.3. $p=2$, $n=4,5$, 2-regular partition の場合.

α	Young 図形	2-core	weight
(5)	$\yng(5)$	$\yng(1)$	2
(32)	$\yng(3,2)$	$\yng(1)$	2
(41)	$\yng(4,1)$	$\yng(2,1)$	1
(4)	$\yng(4)$	$\emptyset$	2
(31)	$\yng(3,1)$	$\emptyset$	2

対称群の block

simple kS_n-module の同型類は n の p-regular partition と一対一に対応していることが知られている. α に対応する kS_n-module を D^α で表す. 2つの simple kS_n-module D^α と D^β が同じ block に属するのは α と β の p-core が同じときである. つまり, 対称群の block は p-core と weight で決まる訳である. また, 2つの block の defect group が同型となるのは weight が等しいときである.

b を kS_n の block で p-core が τ, weight w とする. $t=n-wp$ とおくと τ は t の partition である. b の defect group D を適当にとると, 次の様になる.

$$S_{wp}\times S_t \le S_n, \quad D\in \mathrm{Syl}_p(S_{wp})$$
$$N_{S_n}(D)=N_{S_{wp}}(D)\times S_t.$$

kS_nb の Brauer 対応は

$$kN_{S_{wp}}(D)\bigotimes_k kS_tb_\tau$$

である. $kN_{S_{wp}}(D)$ はひとつの block しか持たない. b_τ は p-core τ, weight 0 の kS_t の block で kS_tb_τ は simple algebra であり,

$$kN_{S_{wp}}(D)\bigotimes_k kS_tb_\tau$$

は $kN_{S_{wp}}(D)$ と Morita equivalent になっている.

対称群の weight w の block について, defect group が可換となるのは $w<p$ のときである. 特に p が小さい場合はほとんど可換とはならない.

Example 3.4. $p=2$ とする.

(1) kS_4 (これ自身がひとつの block). (2-core $\emptyset$, weight 2.) simple module は 2つ $D^{(4)}$, $D^{(31)}$ で k 上の次元は 1, 2 である. projective indecomposable module の構造は次の様になっている. $D^{(4)}=1$, $D^{(31)}=2$ とそれぞれ次元で略記する. P_i を i の projective cover とする.

$$P_1=\begin{pmatrix} & 1 & \\ 1 & & 2\\ 2 & & 1\\ & 1 & \end{pmatrix}, \quad P_2=\begin{pmatrix} & 2 & \\ 1 & & 2\\ 1 & & \\ & 2 & \end{pmatrix}$$

(2) kS_5 の principal block (自明な表現の属する block). (2-core (1), weight 2). simple module は $D^{(5)}$, $D^{(32)}$ で次元は 1, 4.

$$P_1 = \left(\begin{array}{ccc} & 1 & \\ 1 & & 4 \\ 4 & & 1 \\ 1 & & 1 \\ 1 & & 4 \\ 4 & & 1 \\ & 1 & \end{array}\right), \quad P_4 = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{array}\right)$$

どちらの block も defect group D は位数 8 の二面体群 (非可換) であり Brauer 対応は kD である. これらの 2 つの block は derived equivalent であるが kD とは derived equivalent ではない.

Functor E, F

$i = 0, 1, \ldots, p-1$ とする. b を kS_n の block で p-core κ, b' を kS_{n+1} の block で p-core κ' とする. core が κ である n の partition λ と core が κ' である $n+1$ の partition λ' で λ に residue が i の node を付け加えると λ' となるようなものがあるとき, $b \xrightarrow{i} b'$ とかくことにする.

Example 3.5. $p = 2$, $i = 0$ とする. partition の列

$$\begin{ytableau} 0 & 1 \\ 1 \end{ytableau} \to \begin{ytableau} 0 & 1 & 0 \\ 1 \end{ytableau} \to \begin{ytableau} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{ytableau} \to \begin{ytableau} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 \end{ytableau}$$

に対して, 2-core (または block) の列.

$$\ydiagram{2,1} \xrightarrow{0} \emptyset \xrightarrow{0} \ydiagram{1} \xrightarrow{0} \ydiagram{3,2,1}$$

$b \xrightarrow{i} b'$ のとき 2 つの functor を,

$$E_i = b'kS_{n+1}b \bigotimes_{kS_n b} - : kS_n\text{-mod} \longrightarrow kS_{n+1}\text{-mod}$$

$$F_i = bkS_{n+1}b' \bigotimes_{kS_{n+1}b'} - : kS_{n+1}\text{-mod} \longrightarrow kS_n\text{-mod}$$

と定義する. $b \xrightarrow{i} b'$ となる b または b' がないときは 0 とする. このとき,

$$\mathrm{Ind}_{S_n}^{S_{n+1}} = \bigoplus E_i, \quad \mathrm{Res}_{S_n}^{S_{n+1}} = \bigoplus F_i$$

であり E_i と F_i は互いに (left and right) adjoint の関係にある. block の列

$$b_0 \xrightarrow{i} b_1 \xrightarrow{i} \cdots \xrightarrow{i} b_n$$

($b' \xrightarrow{i} b_0$, $b_n \xrightarrow{i} b''$ となるようなぱ, b''　ないとする) があるとする．このとき, $0 \leq l \leq n$ に対し

$$b_l \overset{i}{\sim} b_{n-l}$$

とかくことにする．このとき weight が同じ block について次が知られている．

Theorem 3.6. b, b' を対称群の *block* で *weight* が同じものとする．$0 \leq i_0, \ldots, i_{m-1} \leq p-1$ と *block* $b_1, \ldots, b_{m-1}$ で

$$b \overset{i_0}{\sim} b_1 \overset{i_1}{\sim} \cdots \overset{i_{m-1}}{\sim} b'$$

となるものが存在する．

よって, 対称群の weight が同じ block は全て derived equivalent であることをいうためには, $b \overset{i}{\sim} b'$ ならば 2 つの block は derived equivalent であることを示せばよい．

$sl_2(\mathbb{Q})$ の表現
Lie algebra

$$sl_2(\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{Q},\ a + d = 0 \right\}$$

の基底を

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad h = [e, f] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

とする．有限次元 $sl_2(\mathbb{Q})$-module V と $\lambda \in \mathbb{Z}$ に対して

$$V_\lambda = \{ v \in V \mid hv = \lambda v \}$$

とおくと

$$V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$$

となっている．$s = exp(-f)exp(e)exp(-f)$ とおくとこれは V 上の線形写像として意味を持ち

$$s : V_{-\lambda} \xrightarrow{\sim} V_\lambda$$

となる．$v \in V_{-\lambda}$ ならば

$$sv = \sum_r (-1)^r \frac{e^{\lambda+r}}{(\lambda+r)!} \frac{f^r}{r!} v$$

である．
b_j を kS_{m+j} の block,

$$b_0 \xrightarrow{i} b_1 \xrightarrow{i} \cdots \xrightarrow{i} b_n$$

($b' \xrightarrow{i} b_0$, $b_n \xrightarrow{i} b''$ となる b, b'' はない) とする．

$$A = \bigoplus_j kS_{m+j} b_j$$

$$E_i = \bigoplus E_i, \quad F_i = \bigoplus F_i : A\text{-mod} \longrightarrow A\text{-mod}$$

とする．$K_0(A\text{-mod})$ を Grothendieck group とする．

Theorem 3.7. $V = \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(A\text{-}mod)$ とする．

$$e \mapsto [E_i], \quad f \mapsto [F_i]$$

により V は $sl_2(\mathbb{Q})$-*module* となり

$$V_{-n+2j} = \mathbb{Q} \bigotimes_{\mathbb{Z}} K_0(kS_{m+j}b_j\text{-mod})$$

である．

この V への $sl_2(\mathbb{Q})$ の作用を考えると 上記の sv の形から

$$D^b(kS_{m+l}b_l\text{-mod}) \simeq D^b(kS_{m+n-l}b_{n-l}\text{-mod})$$

を与える complex が推測される．($\lambda = n - 2l$ とおくと $V_{-\lambda} = \mathbb{Q} \otimes K_0(kS_{m+l}b_l\text{-mod})$, $V_\lambda = \mathbb{Q} \otimes K_0(kS_{m+n-l}b_{n-l}\text{-mod})$ である.) $\frac{e^{\lambda+r}}{(\lambda+r)!}$, $\frac{f^r}{r!}$ に対応する functor

$$E^{(\lambda+r)}, \quad F^{(r)}$$

を構成し，次のような complex を考えることになる．

$$\longrightarrow E^{(\lambda+r)}F^{(r)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow E^{(\lambda+1)}F \longrightarrow E^{(\lambda)} \longrightarrow 0$$

詳しくは次章で述べることにする．

Functor F_i の別の記述

先に定義した F_i の別の定義の仕方に触れておこう．

$$L_n = (1n) + (2n) + \cdots + (n-1, n) \in kS_n$$

を Jucys-Murphy element という．$(1n)$ は 1 と n を入れ替える互換である．$M \in kS_n$-mod に対して，L_n の固有値 i についての広義固有空間を考えると，

$$F_i(M) = \{m \in M \mid (L_n - i)^k m = 0, k \gg 0\}$$

となっている．L_n は S_{n-1} と可換なのでこれは確かに kS_{n-1}-module である．

4. sl_2-CATEGORIFICATION

sl_2-categorification の設定と定義

A を k 上の有限次元多元環, $\mathcal{A} = A$-mod とする．

Definition 4.1 (sl_2-categorification for $q = 1$). 次のデータが与えられたとき，それらを sl_2-categorification on $\mathcal{A}$ という．

- $a \in k$
- exact functor $E, F : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$, E と F は互いに (左と右両方の) adjoint
- $e \mapsto [E]$, $f \mapsto [F]$ により $V = \mathbb{Q} \otimes K_0(\mathcal{A})$ は $sl_2(\mathbb{Q})$-module
- $S \in \mathcal{A}$ が simple ならばその同型類 $[S] \in V$ について $[S] \in V_\lambda$, $\exists\lambda \in \mathbb{Z}$
- $X \in \mathrm{End}(E)$, $T \in \mathrm{End}(E^2)$ で次をみたすもの

$$(ET) \circ (TE) \circ (ET) = (TE) \circ (ET) \circ (TE)$$

$$T^2 = \mathrm{Id}$$

$$(XE) \circ T = T \circ (EX) + \mathrm{Id}$$

- $X - a$ は locally nilpotent

V の weight 分解 $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$ に対応して $\mathcal{A}$ も分解する. つまり, $\mathcal{A}_\lambda = \{M \in \mathcal{A} \mid [M] \in V_\lambda\}$ とおくと

$$\mathcal{A} = \bigoplus_\lambda \mathcal{A}_\lambda$$

となる. この状況で equivalence

$$D^b(\mathcal{A}_{-\lambda}) \simeq D^b(\mathcal{A}_\lambda), \quad K^b(\mathcal{A}_{-\lambda}) \simeq K^b(\mathcal{A}_\lambda)$$

が存在する, というのが主結果 (Theorem 4.7) である.

Example 4.2. 対称群の block の場合. $0 \le a \le p-1$ とする. b_j を kS_{m+j} の block,

$$b_0 \xrightarrow{a} b_1 \xrightarrow{a} \cdots \xrightarrow{a} b_n$$

$(b' \xrightarrow{a} b_0,\ b_n \xrightarrow{a} b''$ となる b, b'' はない) とする.

$$A = \bigoplus kS_{m+j}b_jB_j, \quad \mathcal{A} = A\text{-mod}$$

$$E = \bigoplus E_a = \bigoplus (b_jkS_{m+j}b_{j-1} \bigotimes_{kS_{m+j-1}b_{j-1}} -)$$

$$F = \bigoplus F_a = \bigoplus (b_{j-1}kS_{m+j}b_j \bigotimes_{kS_{m+j}b_j} -)$$

とおく. E, F が互いに adjoint であること, $sl_2(\mathbb{Q})$ の $V = \mathbb{Q} \otimes K_0(\mathcal{A})$ への作用については既にみた. $X \in \mathrm{End}(E)$ と $T \in \mathrm{End}(E^2)$ は次のように定義する. block をかけたり直和をとることを省略して書き, functor $kS_t \otimes_{kS_{t-1}} -$, $kS_t \otimes_{kS_{t-2}} -$ を bimodule kS_t と同一視する.

$$X : kS_t \longrightarrow kS_t$$

は L_t の右からの積,

$$T : kS_t \longrightarrow kS_t$$

は $s_{t-1} = (t-1, t)$ の右からの積と定義する. このとき関係式,

$$(ET) \circ (TE) \circ (ET) = (TE) \circ (ET) \circ (TE)$$

は $s_{t-1}s_ts_{t-1} = s_ts_{t-1}s_t$ より,

$$T^2 = \mathrm{Id}$$

は $s_t^2 = 1$ より,

$$(XE) \circ T = T \circ (EX) + \mathrm{Id}$$

は $L_ts_{t-1} = s_{t-1}L_{t-1} + 1$ よりわかる. また $(X - a)$ が locally nilpotent であることは L_t を用いた F の記述からわかる. 以上により (a, E, F, X, T) は $\mathcal{A}$ 上の sl_2-categorification となっている.

Degenerate Hecke algebra

k-algebra $\mathcal{H}_n$ を次のように定義する. 生成元は,

$$T_1, \ldots, T_{n-1}, X_1, \ldots, X_n$$

関係式は

$$T_i^2 = 1, \quad T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1}$$
$$T_iT_j = T_jT_i \ (|i-j| > 1)$$

$$X_iX_j = X_jX_i, \quad X_iT_j = T_jX_i \ (i-j \neq 0,1)$$
$$X_{i+1}T_i = T_iX_i + 1$$
で与えられる. $T_1, \ldots, T_{n-1}$ の生成する subalgebra は kS_n と同型であり (以下同一視することもある), $X_1, \ldots, X_n$ の生成する subalgebra は多項式環 $k[X_1, \ldots, X_n]$ である.

Functor $E^{(\tau,n)}$, $F^{(\tau,n)}$
(a, E, F, X, T) を $\mathcal{A}$ 上の sl_2-categorification とする.
$$\gamma_n : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathrm{End}(E^n)$$
を
$$T_i \mapsto E^{n-i-1}TE^{i-1}$$
$$X_i \mapsto E^{n-i}XE^{i-1}$$
と定義する. E, T, X の関係式と $\mathcal{H}_n$ の関係式より, $M \in \mathcal{A}$ に対して,
$$\gamma_n(M) : \mathcal{H}_n \longrightarrow \mathrm{End}(E^n(M))$$
は k-algebra hom. であり $E^n(M)$ は right $\mathcal{H}_n$-module となる.
$$\tau = 1 \text{ または } \mathrm{sgn} : S_n \longrightarrow k$$
を自明な表現または符号表現とする.
$$c_n^\tau = \sum_{w \in S_n} \tau(w)w \in kS_n \subseteq \mathcal{H}_n$$
$$E^{(\tau,n)} = E^n c_n^\tau$$
と定義する.
$$E^n \cong \bigoplus E^{(\tau,n)} \ (n! \text{ 個の直和})$$
となっている. 同様に $F^{(\tau,n)}$ も定義される.

Minimal categorification
$a \in k$, $\mathcal{H}_n$ を degenerate Hecke algebra, $\mathfrak{m}_n = (X_1 - a, \ldots, X_n - a)$ を $k[X_1, \ldots, X_n]$ の極大イデアルとする. さらに,
$$\mathfrak{n}_n = \mathfrak{m}_n^{S_n} \subseteq Z(\mathcal{H}_n)$$
を S_n-不変式の全体,
$$\bar{\mathcal{H}}_n = \mathcal{H}_n / \mathcal{H}_n \mathfrak{n}_n$$
$$\bar{\mathcal{H}}_{i,n} = (\mathcal{H}_i + \mathcal{H}_n\mathfrak{n}_n)/\mathcal{H}_n\mathfrak{n}_n \cong \mathcal{H}_i / \mathcal{H}_i \cap \mathcal{H}_n\mathfrak{n}_n$$
とおく.

Proposition 4.3. $\bar{\mathcal{H}}_n$ は有限次元の *simple algebra* でその次元は $(n!)^2$ である. $\bar{\mathcal{H}}_{i,n}$ は *local symmetric k-algebra* である.

$B_i = \bar{\mathcal{H}}_{i,n}$ とおく. subalgebra の列
$$k = B_0 \subset B_1 \subset \cdots \subset B_n = \bar{\mathcal{H}}_n$$
に対して,
$$\mathcal{A}(n) = \bigoplus B_i\text{-mod}$$

$$E = \bigoplus (B_i \bigotimes_{B_{i-1}} -), \quad F = \bigoplus (B_i \bigotimes_{B_i} -)$$

$X \in \mathrm{End}(E)$ は X_i の右からの積, $T \in \mathrm{End}(E^2)$ は T_{i-1} の右からの積, と定義する.

Proposition 4.4. この (a, E, F, X, T) は *sl_2-categorification on $\mathcal{A}(n)$ となる (minimal categorification と呼ぶ).* $\mathbb{Q} \otimes K_0(\mathcal{A}(n))$ は $n+1$ 次元の *simple $sl_2(\mathbb{Q})$-module* である.

Minimal categorification $\mathcal{A}(n)$ と一般の $\mathcal{A}$

(a, E, F, X, T) を $\mathcal{A}$-上の sl_2-categorification, U を simple ($\in \mathcal{A}$), $FU = 0$, $E^n U \neq 0$, $E^{n+1}U = 0$ とする.

Proposition 4.5.

$$\gamma_i(U) : \mathcal{H}_i \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(E^i U)$$

から同型

$$\bar{\mathcal{H}}_{i,n} \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(E^i U)$$

が得られる.

$B_i = \bar{\mathcal{H}}_{i,n}$ とおくと, $E^i U$ は right B_i-module となり,

$$R_U = \bigoplus (E^i U \bigotimes_{B_i} -) : \mathcal{A}(n) \longrightarrow \mathcal{A}$$

は sl_2-categorification の morphism というものになっている.

Rickard's complex

(a, E, F, X, T) を $\mathcal{A}$-上の sl_2-categorification とする. $\lambda \in \mathbb{Z}$ に対して

$$\Theta_\lambda : C^b(\mathcal{A}_{-\lambda}) \longrightarrow C^b(\mathcal{A}_\lambda)$$

を次のように定義する. $r \geq 0, \lambda + r \geq 0$ のとき,

$$\Theta_\lambda^{-r} = E^{(\mathrm{sgn}, \lambda+r)} F^{(1,r)} : \mathcal{A}_{-\lambda} \longrightarrow \mathcal{A}_\lambda$$

他のときは 0 とする. adjoint (E, F) の counit $\varepsilon : EF \longrightarrow \mathrm{Id}$ から

$$E^{\lambda+r-1} EFF^{r-1} \longrightarrow E^{\lambda+r-1} F^{r-1}$$

が得られ, その制限として,

$$d^{-r} : \Theta_\lambda^{-r} = E^{(\mathrm{sgn}, \lambda+r)} F^{(1,r)} \longrightarrow \Theta_\lambda^{-(r-1)} = E^{(\mathrm{sgn}, \lambda+r-1)} F^{(1,r-1)}$$

とすると

$$\Theta_\lambda : \cdots \longrightarrow \Theta_\lambda^{-r} \xrightarrow{d^{-r}} \Theta_\lambda^{-r+1} \longrightarrow \cdots$$

は functor の complex となる. total complex をとることにより,

$$\Theta_\lambda : C^b(\mathcal{A}_{-\lambda}) \longrightarrow C^b(\mathcal{A}_\lambda), \quad \Theta = \bigoplus \Theta_\lambda : C^b(\mathcal{A}) \longrightarrow C^b(\mathcal{A})$$

が得られ, 構成に用いた全ての functor は exact なので,

$$\Theta : K^b(\mathcal{A}) \longrightarrow K^b(\mathcal{A}), \quad \Theta : D^b(\mathcal{A}) \longrightarrow D^b(\mathcal{A})$$

が得られる.

Theorem 4.6. *minimal categorification* $\mathcal{A}(n)$ の場合. $\lambda = n - 2l$ に対して,

$$\Theta_\lambda : 0 \longrightarrow \Theta_\lambda^{-l} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Theta_\lambda^0 \longrightarrow 0$$

となり, *homology* については $i \neq -l$ のとき $H^i(\Theta_\lambda) = 0$ であり, $H^{-l}(\Theta_\lambda)$ は同値

$$\mathcal{A}(n)_{-\lambda} \simeq \mathcal{A}(n)_\lambda$$

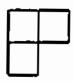
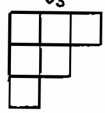
を与えている.

Theorem 4.7. 一般の $\mathcal{A}$ の場合.

$$\Theta : K^b(\mathcal{A}) \simeq K^b(\mathcal{A}), \quad D^b(\mathcal{A}) \simeq D^b(\mathcal{A})$$

$$\Theta_\lambda : K^b(\mathcal{A}_{-\lambda}) \simeq K^b(\mathcal{A}_\lambda), \quad D^b(\mathcal{A}_{-\lambda}) \simeq D^b(\mathcal{A}_\lambda)$$

Example 4.8. $p = 2$, $\mathcal{A} = \oplus_{j=0}^3 kS_{3+j}b_j$-mod とする. ただし,

n	3	4	5	6
kS_n の block	b_0	b_1	b_2	b_3
core		$\emptyset$		

とする.

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_{-3} \oplus \mathcal{A}_{-1} \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_3$$

となっている.

$$\Theta_1 : D^b(kS_4b_1\text{-mod}) \longrightarrow D^b(kS_5b_2\text{-mod})$$

は

$$b_2kS_5b_0c_2^{\mathrm{sgn}} \bigotimes_{kS_3b_0} b_0kS_4b_1 \longrightarrow b_2kS_5b_1$$

で与えられる. $c_2^{\mathrm{sgn}} = 1 - (45)$ である. 4 次元の simple kS_5-module の projective cover を P_4, 2 次元の simple kS_4-module の projective cover を Q_2 とおくと左側の項 (degree -1) は

$$P_4 \bigotimes_k Q_2^*$$

と同型である.

5. 定理の証明

ここでは Theorem 4.6 を仮定して Theorem 4.7 の証明の概略を述べる.

$$\Theta : C^b(\mathcal{A}) \longrightarrow C^b(\mathcal{A})$$

に対してその adjoint $\Theta^\vee$ があり, その counit の mapping cone

$$\Theta\Theta^\vee \longrightarrow \mathrm{Id} \longrightarrow Z \longrightarrow$$

を考える. $Z : C^b(\mathcal{A}) \longrightarrow C^b(\mathcal{A})$ である. $D^b(\mathcal{A}) \longrightarrow D^b(\mathcal{A})$ の functor として $Z = 0$ であることを示そう.

Lemma 5.1. $U \in \mathcal{A}$ が *simple* で $FU = 0$ ならば, 任意の $i \geq 0$ について $K^b(\mathcal{A})$ において $Z(E^iU) = 0$ である.

Proof. $E^nU \neq 0$, $E^{n+1}U = 0$ とする.

$$R_U : \mathcal{A}(n) \longrightarrow \mathcal{A}$$

から

$$R_U : K^b(\mathcal{A}(n)) \longrightarrow K^b(\mathcal{A})$$

が得られる. $\mathcal{A}(n)$ での Rickard complex を Θ', Z に相当するものを Z' で表すことにする. Theorem 4.6 より $K^b(\mathcal{A}(n))$ において $Z'(B_i) = 0$ がわかる. 図式

$$\begin{array}{ccc} K^b(\mathcal{A}(n)) & \xrightarrow{R_U} & K^b(\mathcal{A}) \\ {\scriptstyle Z'}\downarrow & & {\scriptstyle Z}\downarrow \\ K^b(\mathcal{A}(n)) & \xrightarrow{R_U} & K^b(\mathcal{A}) \end{array}$$

は可換であり, $R_U(B_i) = E^iU$ であったので $Z(E^iU) = 0$ となる. □

Lemma 5.2. *$D^b(\mathcal{A}) \longrightarrow D^b(\mathcal{A})$ の functor として $Z = 0$.*

Proof. $C \in D^b(\mathcal{A})$, $Z(C) \neq 0$ と仮定する. Z の adjoint $Z^\vee$ に対して, $C' = Z^\vee Z(C)(\neq 0)$ とおく. $H^n(C') \neq 0$ となる最少の n をとる. $F^i(H^n(C')) \neq 0$, $F^{i+1}(H^n(C')) = 0$ として simple $U \subseteq F^i(H^n(C'))$ をとると $FU = 0$ である.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(E^iU, H^n(C')) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(U, F^i(H^n(C'))) \neq 0$$

なので

$$\mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(E^iU, C'[n]) \neq 0$$

となる. しかし Lemma 5.1 より

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(E^iU, Z^\vee Z(C)[n]) &\simeq \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(E^iU, Z^\vee Z(C[n])) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(ZE^iU, Z(C[n])) = 0. \end{aligned}$$

□

次に $\Theta : K^b(\mathcal{A}) \simeq K^b(\mathcal{A})$ のために $K^b(\mathcal{A})$ の functor としても $Z = 0$ であることを示す.

Lemma 5.3. *$M \in \mathcal{A}$ とする. ある有限次元 k-algebra A', A'-mod 上の sl_2-categorification と functor (sl_2-categorification の morphism といわれるもの)*

$$R : A'\text{-mod} \longrightarrow \mathcal{A}$$

で M が $R(A')$ の直和因子になるものが存在する.

Proof. $N = \oplus_{i,j} E^iF^jM$ とおき $N = \oplus_\lambda N_\lambda$, $N_\lambda \in \mathcal{A}_\lambda$ と分解する.

$$A'_\lambda = \mathrm{End}_{\mathcal{A}}(N_\lambda), \quad A' = \bigoplus A'_\lambda$$

とする.

$$E' = \bigoplus_\lambda (\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N_{\lambda+2}, EN_\lambda) \bigotimes_{A'_\lambda} -)$$

$$F' = \bigoplus_\lambda (\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(N_{\lambda-2}, FN_\lambda) \bigotimes_{A'_\lambda} -)$$

を用いて A'-mod に sl_2-categorification を決めることができる.

$$R = \bigoplus (N_\lambda \bigotimes_{A'_\lambda} -) : A'\text{-mod} \longrightarrow \mathcal{A}$$

とすればよい. □

Lemma 5.4. $K^b(\mathcal{A})$ の *functor* として $Z = 0$ である.

Proof. $M \in \mathcal{A}$ に対して $K^b(\mathcal{A})$ において $Z(M) = 0$ を示せば十分である. Lemma 5.3 の

$$R : A'\text{-mod} \longrightarrow \mathcal{A}$$

をとる. A'-mod で Z に相当するものを Z'' とすると Lemma 5.2 より $D^b(A'\text{-mod})$ において $Z''(A') = 0$ である. しかし $Z''(A') \in K^b(A'\text{-proj})$ であるから $K^b(A'\text{-proj})$ において $Z''(A') = 0$ であり, 可換図式

$$\begin{array}{ccc} K^b(A'\text{-proj}) & \xrightarrow{R} & K^b(\mathcal{A}) \\ {\scriptstyle Z''}\downarrow & & {\scriptstyle Z}\downarrow \\ K^b(A'\text{-proj}) & \xrightarrow{R} & K^b(\mathcal{A}) \end{array}$$

と M は $R(A')$ の直和因子であることから $K^b(\mathcal{A})$ において $Z(M) = 0$ を得る. □

References

[1] 有木進, $A^{(1)}_{r-1}$ 型量子群の表現論と組み合わせ論, 上智大学数学講究録 43 (2000).

[2] J. Chuang, *The derived categories of some blocks of symmetric groups and a conjecture of Broué*, J. Algebra 217 (1999), 114-155.

[3] J. Chuang and R. Kessar, *Symmetric groups, wreath products, Morita equivalences, and Broué's abelian defect group conjecture*, Bull. London Math. Soc. 34 (2002), 174-184.

[4] J. Chuang and R. Rouquier, *Derived equivalence for symmetric groups and sl_2-categorification*, Annals of Math., to appear.

[5] A. Kleshchev, Linear and projective representations of symmetric groups, Cambridge tracts in mathematics 163, Cambridge University Press (2005).

[6] S. König and A. Zimmermann, Derived equivalences for group rings, Lecture Notes in Mathematics 1685, Springer-Verlag Berlin Heidelberg (1998).

[7] A. Lascoux, B. Leclerc and J.-Y. Thibon, *Hecke algebras at roots of unity and crystal bases of quantum affine algebras*, Commun. Math. Phys. 181 (1996), 205-263.

[8] W. Turner, *Equivalent blocks of finite general linear groups in non-describing characteristic*, J. Algebra 247 (2002), 244-267.

Faculty of Education
Saitama University (埼玉大学教育学部)
Shimo-Okubo 255, Sakura-ku, Saitama city
338-8570 JAPAN

E-mail address: ahida@math.edu.saitama-u.ac.jp

MATRIX FACTORIZATIONS AND MIRROR SYMMETRY
行列因子化とミラー対称性

ATSUSHI TAKAHASHI
高橋 篤史

Abstract. This is a survey note on the mirror symmetry for weighted homogeneous isolated hypersurface singularities (Landau–Ginzburg orbifolds) in two dimension. After giving the definition of regular weight systems, duality of weight systems (= topological mirror symmetry) and some triangulated categories associated to weight systems including triangulated categories of graded matrix factorizations, we study properties of these triangulated catogories motivated by homological mirror symmetry.

1. はじめに

有限次元代数の表現論と Maximal Cohen-Macaulay 加群の表現論はとても似ている

このように感じておられた方は多いのではないでしょうか.

ある良い状況下では，これは単なる類似ではなくそれぞれに付随する三角圏 (triangulated category) の間にミラー対称性という背景から自然に導かれる三角同値 (triangulated equivalence) があることの反映である，ということを説明するのが目的です.

この報告集では，まず簡単にミラー対称性の背景を述べたのち，特異点の位相的ミラー対称性について具体的に説明します．次に，特異点に付随したいくつかの互いに同値な三角圏を導入します．その一つが次数付き Maximal Cohen-Macaulay 加群のなす三角圏です．そして位相的ミラー対称性のカテゴリー化 (categorification) であるところのホモロジー的ミラー対称性により，それらの三角圏が持つべき性質について議論し，数学的予想として述べます．最後にいくつかの例に対してその予想が正しいこと，つまり，特異点に付随したこれらの三角圏が，ある有限次元代数の表現の導来圏と三角同値になることを述べます.

2. ミラー対称性の物理的背景

弦理論では, 点ではなく 1 次元の自由度を持った弦が世界を記述すると考えます．例えば我々が日常観測する粒子は, 弦の振動によって表現されます．いくつもの弦が時間発展・相互作用することにより, 複雑に穴の空いた 2 次元面 Σ ができます．非常に大雑把な言い方ですが, 時空 X 上の弦理論とは, 写像 $\Sigma \to X$ および超対称性等が定める付加的構造の全体のなす空間 $\mathcal{M}$ を解析することです.

X を n 次元カラビ・ヤウ多様体, 標準束 K_X が自明な複素 n 次元射影的多様体, としましょう．このときカラビ・ヤウ多様体 X 上, $N=2$ の超対称性を持つ超弦理論を考えることができます．驚くべきことに, それが別のカラビ・ヤウ多様体 Y 上の $N=2$ の超対称性を持つ超弦理論と「等価」になること, つまり両者から得られる物理量が全て一致すると

The detailed version of this paper may be submitted for publication elsewhere or put on the internet.

いう現象が発見されました．この現象のことをミラー対称性とよび，とくにYをXのミラー多様体と呼びます．

さらに，$N=2$の超対称性を持つ超弦理論に「ひねり」といわれる操作を施すことによって，2種類の弦理論，A模型と呼ばれる(複素化された)ケーラー形式の変形を司る理論およびB模型と呼ばれる複素構造の変形を司る理論，が得られます．このとき，

$$X\text{上の}A\text{模型} \overset{\text{ミラー対称性}}{\Longleftrightarrow} Y\text{上の}B\text{模型} \tag{2.1}$$

という関係があります．この対応を調べることで，数学的に豊かな結果や予想が次々と現れます．ミラー対称性を仮定すれば，片側の比較的容易に調べられる量を用いて，反対側の非常に難しい量を調べることができるからです．

有名な例をあげると，XとYを3次元カラビ・ヤウ多様体とするとき，Xの有理Gromov-Witen不変量($\mathbb{P}^1$からXへの正則写像の数)の母函数をYの正則3形式の周期を用いて具体的に書き下せる，ということがあります．

3. ミラー対称性の数学的側面

上の対応(2.1)に関して，次は数学的に自然ですが非常に難しい問いです．

(1) XやYとしてどのような幾何学的対象を取るのか．

(2) A模型やB模型というのは，Xに対して何を対応させることなのか．

(3) Xに対して，ミラー多様体Yをどのように見つけるか．

これらの「完全な」答えはわかっていません．しかし，次のような現象が知られています．

例 1 (古典的ミラー対称性). X,YをXをn次元カラビ・ヤウ多様体とし，$A(X)$をXの量子コホモロジー環，$B(Y):=\bigoplus_{p,q}H^q(Y,\wedge^pTY)$とします．環として$A(X)\simeq B(Y)$のとき，対$(X,Y)$は古典的ミラー対であるといいます．

ベクトル空間としては$A(X)\simeq\oplus_{p,q}H^q(X,\wedge^pT^*X)$なので，$(X,Y)$が古典的ミラー対であるとき，ホッジ数$h^{p,q}(X):=\dim_{\mathbb{C}}H^q(X,\wedge^pT^*X)$の間に

$$h^{p,q}(X)=h^{n-p,q}(Y) \tag{3.1}$$

という関係(位相的ミラー対称性)が成り立ちます．そのため，うまくホッジ数を並べた絵を書くと，$h^{p,q}(Y)$達は鏡に写った$h^{p,q}(X)$達の像のように見えます．これがミラー対称性の名前の由来となっています．$h^{p,q}(X)=h^{n-p,q}(Y)$という関係をみたすカラビ・ヤウ多様体の組(X,Y)は位相的ミラー対と呼ばれ，Greene-Plesserのオービフォールド構成やその一般化である反射的多面体(reflexive polytope)を用いたBatyrevの方法によって大量に構成することができます．

例 2 (ホモロジー的ミラー対称性). Xをシンプレクティック多様体，Yを射影的代数多様体とします．また$A(X)$として，X上のラグランジアン部分多様体とその上の直線束のなす深谷圏$\mathcal{F}(X)$の導来圏$D^b\mathcal{F}(X)$を，$B(Y)$としてY上の連接層の有界複体のなす導来圏$D^b(Y)$をとります．三角圏として$A(X)\simeq B(Y)$, $B(X)\simeq A(Y)$が成り立つとき，対(X,Y)はホモロジー的ミラー対であるといいます．楕円曲線(2次元トーラス)に対するホモロジー的ミラー対称性は，テータ函数の和公式に基づいて，深谷賢治らによって証明されています．

最も注目すべき点は，ミラー対称性で，

$$X\text{上のシンプレクティック幾何学} \overset{\text{ミラー対称性}}{\Longleftrightarrow} Y\text{上の複素幾何学} \tag{3.2}$$

という, 全く異なる幾何学が結びつくということです.

4. 正規ウェイト系

ここで一度話題を変え，次のような組み合わせ論的対象を考えることにしましょう．この節の内容は，多少記号法は変えていますが，基本的に齋藤恭司の論文 [11] に基づいています．個々の結果に関するより詳しい文献は [11] の文献表を御覧ください．

定義 3. $a, b, c, h \in \mathbb{Z}_{>0}$, $\gcd(a, b, c, h) = 1$ とする．このとき組 $W := (a, b, c; h)$ が正規 weight 系 (regular weight system) であるとは,

$$\chi(W, t) := \frac{(1-t^{1-\frac{a}{h}})(1-t^{1-\frac{b}{h}})(1-t^{1-\frac{c}{h}})}{(1-t^{\frac{a}{h}})(1-t^{\frac{b}{h}})(1-t^{\frac{c}{h}})} \tag{4.1}$$

が $t^{\frac{1}{h}}$ の多項式となることとする.

このとき次のことが齋藤恭司によって示されています.

定理 4. 次は同値.

(1) $W = (a, b, c; h)$ は正規 weight 系.

(2) Euler の方程式

$$E_W f_W = f_W, \quad E_W := \frac{a}{h} \cdot x\frac{\partial}{\partial x} + \frac{b}{h} \cdot y\frac{\partial}{\partial y} + \frac{c}{h} \cdot z\frac{\partial}{\partial z} \tag{4.2}$$

を満たす 3 変数の多項式 $f_W(x, y, z)$ を一般的に (generic に) 取るとき,

$$X_{W,0} := \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid f_W(x, y, z) = 0\} \tag{4.3}$$

は, 原点のみに高々孤立特異点を持つ.

□

正規ウェイト系 W が与えられ，一般の f_W を一つ固定したとき，$R_W := \mathbb{C}[x, y, z]/(f_W)$ とおくことにします．ウェイト a, b, c により，次のように自然に次数付き環になります:

$$R_W = \oplus_{d \in \frac{2}{h}\mathbb{Z}_{\geq 0}} R_{W,d}, \quad R_{W,d} := \{g \in R_W \mid 2E_W g = dg\}. \tag{4.4}$$

注意 5. $W = (a, b, c; h)$ が正規 weight 系のとき,

$$J_W := \mathbb{C}[x, y, z] \bigg/ \left(\frac{\partial f_W}{\partial x}, \frac{\partial f_W}{\partial y}, \frac{\partial f_W}{\partial z}\right) \tag{4.5}$$

は有限次元次数付き $\mathbb{C}$-代数となり, とくに $\chi(W, t)$ は J_W の Poincaré 多項式です.

例 6. (A_l 型正規 weight 系)
$W = (1, b, l+1-b; l+1)$ としましょう (b は $0 < b < l+1$ を満たす整数). このとき定義により

$$\chi(W, t) = \frac{1-t^{\frac{l}{l+1}}}{1-t^{\frac{1}{l+1}}} \tag{4.6}$$

となります. $f_W(x, y, z) = x^{l+1} + yz$ と取ることができて,

$$J_W \simeq \mathbb{C}[x]/(x^l) \tag{4.7}$$

となること，その Poincaré 多項式が $\chi(W, t)$ で与えられることはすぐにわかります.

次に，正規 weight 系 $W=(a,b,c;h)$ に対していくつか不変量を定義していきます．

定義 7. $\chi(W,1)$ を μ_W で表し，Milnor 数と呼ぶ．とくに

$$\mu_W = \dim_{\mathbb{C}} J_W = \frac{(h-a)(h-b)(h-c)}{abc}. \tag{4.8}$$

注意 8. 平坦構造 (flat structure) またはフロベニウス構造 (Frobenius structure) の観点からは，階数と呼ばれます．

定義 9. 有理数

$$n_W := (1-\frac{2a}{h})+(1-\frac{2b}{h})+(1-\frac{2c}{h}) = 3-2\frac{a+b+c}{h} \tag{4.9}$$

を正規 weight 系の次元と呼ぶ．

定義 10. $\epsilon_W := a+b+c-h$ とおき，最小指数 (minimal exponent) と呼ぶ．

注意 11. 後で見るように，ϵ_W は超平面特異点 R_W の標準加群 (canonical module) の次数を与えます．そして次数付き特異点の三角圏の構造に関して重要な役割を果たします．

ϵ_W を用いて，次のように正規ウェイト系を粗く分類することができます．

事実 12. (1) $\epsilon_W>0$ ならば $\epsilon_W=1$ (後で導入する，正規ウェイト系の多重度に関する定理から従います)．とくに W は ADE 特異点に対応する 5 種類：

正規ウェイト系 W	f_W	特異点の型
$(1,b,l+1-b;l+1)$	$x^{l+1}+yz$	A_l 型特異点
$(2,l-2,l-1;2l-2)$	$x^{l-1}+xy^2+z^2$	D_l 型特異点
$(3,4,6;12)$	$x^4+y^3+z^2$	E_6 型特異点
$(6,4,9;18)$	$x^3+xy^3+z^2$	E_7 型特異点
$(6,10,15;30)$	$x^5+y^3+z^2$	E_8 型特異点

(2) $\epsilon_W=0$ ならば，W は単純楕円型特異点に対応する 3 種類：

正規ウェイト系 W	f_W	特異点の型
$(1,1,1;3)$	$x^3+y^3+z^3$	$\tilde{E}_6$ 型特異点
$(1,1,2;4)$	$x^4+y^4+z^2$	$\tilde{E}_7$ 型特異点
$(1,2,3;6)$	$x^6+y^3+z^2$	$\tilde{E}_8$ 型特異点

(3) $\epsilon_W<0$ の正規ウェイト系 W は無限個存在する．ただし ϵ_W を固定するごとに有限個である．

□

さらに不変量の定義を続けます．

定義 13. $\chi(W,t)$ は $t^{\frac{1}{h}}$ の多項式だったので，

$$\chi(W,t)=\sum_{i=1}^{\mu_W} t^{p_i},\quad 0=:p_1<p_2\leq\dots p_{\mu-1}<p_\mu:=n_W,\quad p_i\in\frac{1}{h}\mathbb{Z}_{\geq 0} \tag{4.10}$$

のように展開できる．整数 $m_i := h\cdot p_i+\epsilon_W$ のことを，正規ウェイト系 W の指数 (exponent) と呼ぶ．

注意 14. $\chi(W,t)$ の定義により

$$\chi(W,t^{-1}) = t^{n_W}\chi(W,t) \tag{4.11}$$

となるので，p_i および指数 m_i たちの間に次の双対性がある：

$$p_i + p_{\mu_W-i+1} = n_W, \quad m_i + m_{\mu_W-i+1} = h, \quad i = 1, \ldots, \mu_W. \tag{4.12}$$

正規ウェイト系 W に対して，指数が $k(\in \mathbb{Z})$ となるものの個数を $mult_W(k)$ であらわすことにします.

定義 15. $mult_W := mult_W(-1) + mult_W(1)$ とおき，正規ウェイト系の多重度 (multipulicity) と呼ぶ.

次は重要な結果ですが，ここではその役割について述べることはできません.

定理 16. 正規ウェイト系 W に対して，多重度は常に 1 以上 ($mult_W \geq 1$). □

さらに，もう少し幾何学的な情報を W から取り出しましょう.

定義 17. $g_W := mult_W(0)$ とおき，正規ウェイト系の種数 (genus) と呼ぶ.

定理 18. 正規ウェイト系 W に対して，射影スキーム $C_W := \mathrm{Proj}(R_W) = X_{W,0}\backslash\{0\}/\mathbb{C}^*$ は 1 次元の滑らかな射影的代数多様体となる．とくに，その種数 $g(C_W)$ は g_W である. □

次数付き環 R_W は $R_{W,\frac{2}{h}}$ の元から生成されていないので，より精密に，商スタック $C_W := \mathbb{P}\mathrm{roj}(R_W) = [X_{W,0}\backslash\{0\}/\mathbb{C}^*]$ を考えることができます．別の言い方をすると，C_W の情報に加えて，ウェイトで自然に定まる $\mathbb{C}^*$ 作用に関する固定点と固定化群の情報 (オービフォールドデータ) を付け加えたものが商スタック C_W です．この固定化群のデータも正規ウェイト系 W から次のように算術的に読みとることが出来ます.

定義 19. 正規ウェイト系 $W = (a_1, a_2, a_3; h)$ に対して，

$$m(a_i, a_j : h) := \sharp\{(u,v) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2 \mid a_i u + a_j v = h\} \tag{4.13}$$

とおく．次の正の整数からなる多重集合 (multi-set)

$$A'_W := \left\{a_i \mid \frac{h}{a_i} \notin \mathbb{Z},\ i = 1,2,3\right\} \coprod \left\{\gcd(a_i,a_j)^{(m(a_i,a_j:h)-1)} \mid 1 \leq i < j \leq 3\right\} \tag{4.14}$$

を考える．ここで記号 $\gcd(a_i,a_j)^{(m(a_i,a_j:h)-1)}$ で，$(m(a_i,a_j:h)-1)$ 個の $\gcd(a_i,a_j)$ を A'_W に含めるということをあらわす．A'_W の中で 1 に等しいものを除いた多重集合を $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_r$ と規格化しておき，$A_W = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ と書く．A_W を正規ウェイト系 W の標識 (signature) と呼ぶ.

最後に，もう一つ重要な概念を与えておきます.

定義 20. W の特性多項式 (characteristic polynomial) を

$$\varphi_W(\lambda) := \prod_{i=1}^{\mu_W}(\lambda - \mathrm{e}[\frac{m_i}{h}]) \tag{4.15}$$

で定める．$\varphi_W(\lambda)$ は円分多項式なので，割り算によって半順序が定められた, h の約数からなるある有限集合 $M(W)$ によって

$$\varphi_W(\lambda) = \prod_{i \in M(W)} (\lambda^i - 1)^{e_W(i)} \tag{4.16}$$

とただ一通りに書くことができる．この $e_W(i)$ のことを正規ウェイト系 W の円分指数 (cyclotomic exponent) と呼ぶ．

これで必要な不変量を定義し終えました．再度具体例の表でこれまで与えた不変量たちを整理しておきましょう．

例 21. $\epsilon_W = 1$ の場合．

W	μ_W	$mult_W$	g_W	A_W	$\varphi_W(\lambda)$	型
$(1, b, l+1-b; l+1)$	l	1	0	$(b, l+1-b)$	$\frac{\lambda^{l+1}-1}{\lambda-1}$	A_l
$(2, l-2, l-1; 2l-2)$	l	1	0	$(2, 2, l-2)$	$\frac{(\lambda^{2l-2}-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^{l-1}-1)(\lambda-1)}$	D_l
$(3, 4, 6; 12)$	6	1	0	$(2, 3, 3)$	$\frac{(\lambda^{12}-1)(\lambda^3-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^6-1)(\lambda^4-1)(\lambda-1)}$	E_6
$(6, 4, 9; 18)$	7	1	0	$(2, 3, 4)$	$\frac{(\lambda^{18}-1)(\lambda^3-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^9-1)(\lambda^6-1)(\lambda-1)}$	E_7
$(6, 10, 15; 30)$	8	1	0	$(2, 3, 5)$	$\frac{(\lambda^{30}-1)(\lambda^5-1)(\lambda^3-1)(\lambda^2-1)}{(\lambda^{15}-1)(\lambda^{10}-1)(\lambda^6-1)(\lambda-1)}$	E_8

例 22. $\epsilon_W = 0$ の場合．

W	μ_W	$mult_W$	g_W	A_W	$\varphi_W(\lambda)$	型
$(1, 1, 1; 3)$	8	3	1	$\{\emptyset\}$	$\frac{(\lambda^3-1)^3}{\lambda-1}$	$\widetilde{E}_6$
$(1, 1, 2; 4)$	9	2	1	$\{\emptyset\}$	$\frac{(\lambda^4-1)^2(\lambda^2-1)}{\lambda-1}$	$\widetilde{E}_7$
$(1, 1, 1; 3)$	10	1	1	$\{\emptyset\}$	$\frac{(\lambda^6-1)(\lambda^3-1)(\lambda^2-1)}{\lambda-1}$	$\widetilde{E}_8$

5. 位相的ミラー対称性と正規ウェイト系の双対性

さて，正規ウェイト系に対してさらに重要な不変量を定義しましょう．この節は筆者の論文 [13] の概要です．個々の結果に関するより詳しい文献は [13] の文献表を御覧ください．

$W = (a_1, a_2, a_3; h)$ を正規ウェイト系とします．$GL(3, \mathbb{C})$ の有限アーベル部分群 G であって，G の任意の元は $GL(3, \mathbb{C})$ の $\mathbb{C}^3$ への自然な作用で $\mathrm{diag}(\mathrm{e}[\omega_1\alpha_1], \mathrm{e}[\omega_2\alpha_2], \mathrm{e}[\omega_3\alpha_3])$ の形であらわされ，$f_W(x_1, x_2, x_3)$ を不変にする，という性質をもつものを考えます．ここで，$\mathrm{e}[\cdot] := \exp(2\pi\sqrt{-1}\cdot)$, $\omega_i := a_i/h$ および $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ とします．

とくに $\mathrm{diag}(\mathrm{e}[\omega_1], \mathrm{e}[\omega_2], \mathrm{e}[\omega_3])$ で生成される $GL(3, \mathbb{C})$ の有限アーベル部分群 $(\simeq \mathbb{Z}/h\mathbb{Z})$ のことを G_W であらわすことにします．

これらの準備の下で，組 (W, G) に対してオービフォールドポアンカレ多項式 (orbifold Poincaré polynomial) と呼ばれる不変量 $\chi_\alpha(W, G)(y, \bar{y})$ を与えることができます：

定義 23 (Vafa の公式).

$$\chi(W, G)(y, \bar{y}) := \frac{(-1)^3}{|G|} \sum_{\alpha \in G} \chi_\alpha(W, G)(y, \bar{y}), \tag{5.1}$$

$$\begin{aligned} \chi_\alpha(W, G)(y, \bar{y}) := & \sum_{\beta \in G} \prod_{\omega_i\alpha_i \notin \mathbb{Z}} (y\bar{y})^{\frac{1-2\omega_i}{2}} \left(\frac{y}{\bar{y}}\right)^{-\omega_i\alpha_i + [\omega_i\alpha_i] + \frac{1}{2}} \\ & \times \prod_{\omega_i\alpha_i \in \mathbb{Z}} \mathrm{e}\left[\omega_i\beta_i + \frac{1}{2}\right] \frac{1 - \mathrm{e}\left[(1-\omega_i\beta_i)\right](y\bar{y})^{1-\omega_i}}{1 - \mathrm{e}\left[\omega_i\beta_i\right](y\bar{y})^{\omega_i}}, \end{aligned} \tag{5.2}$$

ここで $[\omega_i\alpha_i]$ で $\omega_i\alpha_i$ を越えない最大の整数をあらわす．

注意 24. $t := y\bar{y}$ とおいたとき，正規ウェイト系 W と自明な群 $G = \{1\}$ の組に対するオービフォールドポアンカレ多項式は

$$\chi(W, \{1\})(y, \bar{y}) = \chi(W, t) \tag{5.3}$$

となっており，先に定義した通常のポアンカレ多項式に一致します．

このオービフォールドポアンカレ多項式 $\chi(W, G)(y, \bar{y})$ は，射影的代数多様体 X に対するホッジ数の母函数

$$\chi(X)(y, \bar{y}) := \sum_{p,q}(-1)^{p+q} y^p \bar{y}^q \dim_{\mathbb{C}} H^q(X, \wedge^p T^* X) \tag{5.4}$$

のアナロジーです．これは次のような例で確認できます．

例 25. $W = (1, 1, 1; 3)$, $G = G_W$ とする．$f_W(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$ が $\mathbb{P}^2$ の中で定める楕円曲線を X とするとき，

$$\chi(W, G_W)(y, \bar{y}) = 1 - y - \bar{y} + y\bar{y} = \chi(X)(y, \bar{y}) \tag{5.5}$$

が成立します．

最初に述べたように，n 次元カラビ・ヤウ多様体の組 (X, Y) は，

$$\chi(X)(y, \bar{y}) = (-1)^n y^n \chi(Y)(y^{-1}, \bar{y}) \tag{5.6}$$

を満たすとき，位相的ミラー対と呼ばれます．射影的代数多様体 X と組 (W, G) のアナロジーに基づくと，次のような位相的ミラー対称性のアイデアに至ります:

定義 26 (群作用付き正規ウェイト系の位相的ミラー対称性)**.** 組 (W, G) と組 (W^*, G^*) が位相的ミラー対であるとは，

$$\chi(W, G)(y, \bar{y}) = (-1)^{n_{W^*}} y^{n_{W^*}} \chi(W^*, G^*)(y^{-1}, \bar{y}) \tag{5.7}$$

が成り立つこととする．

例 27. $W = W^* = (1, 1, 1; 3)$, $G = G_W$, $G^* = \left\langle (\mathrm{e}[\frac{1}{3}], \mathrm{e}[\frac{1}{3}], \mathrm{e}[\frac{1}{3}]), (1, \mathrm{e}[\frac{1}{3}], \mathrm{e}[\frac{2}{3}]) \right\rangle$ とする．このとき組 (W, G) と組 (W^*, G^*) は位相的ミラー対となります．とくに組 (W^*, G^*) は楕円曲線 X のミラー楕円曲線 X^* に対応します．

注意 28. 物理では (一般次元の) 群作用付き超曲面特異点のことをランダウ・ギンツブルグ軌道体模型 (Landau-Ginzburg orbifold model) と呼んでいます．歴史的には，このランダウ・ギンツブルグ軌道体模型の位相的ミラー対称性の研究から，カラビ・ヤウ多様体のミラー対称性の研究が発展しました．

どのような組 (W, G) と組 (W^*, G^*) が位相的ミラー対になるかを決定するのは，部分的なアイデアは知られているものの一般的には非常に難しい問題です．いま，正規ウェイト系に付随した特別な群 G として，私たちは二種類の群 $\{1\}$ および G_W を知っています．これらを用いて，次のように正規ウェイト系の双対性を定義することにしましょう:

定義 29. 正規ウェイト系 W に対して，W^* が W の双対 (dual) であるとは，

$$\chi(W, \{1\})(y, \bar{y}) = (-1)^{n_{W^*}} y^{n_{W^*}} \chi(W^*, G_{W^*})(y^{-1}, \bar{y}) \tag{5.8}$$

が成り立つこととする．

これらの準備の下で，次のことが成立することがわかります．

定理 30. (1) W^* が W に双対ならば $(W^*)^* = W$.

(2) $mult_W = mult_{W^*} = 1$, $g_W = g_{W^*} = 0$ となる．とくに標識は $A_W = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ と書ける．(つまり $r = 3$).

(3) W^* が W に双対であることと，齋藤恭司の意味で双対であること，すなわち

$$\varphi_{W^*}(\lambda) = \prod_{i \in M(W^*)} (\lambda^i - 1)^{e_{W^*}(i)} = \prod_{i \in M(W)} (\lambda^i - 1)^{-e_W(h/i)} =: \varphi^*_W(\lambda) \tag{5.9}$$

が成り立つこと，は同値である．

□

注意 31. 厳密に言えば，上の (iii) の項目において「齋藤恭司の意味で双対」の部分を一部修正する必要があります．詳しくは [13] の定義 2.4. を御覧ください．

W^* を持つことができる W は次の 5 系列の正規ウェイト系に限られることがわかっています．具体的に列挙しましょう．

I 型

$$W = W^* = (p_2p_3, p_3p_1, p_1p_2; p_1p_2p_3). \tag{5.10}$$

ただし，$(p_i, p_j) = 1$, $i = 1, 2, 3$. 特異点の定義多項式として，

$$f_W(x, y, z) := x^{p_1} + y^{p_2} + z^{p_3}, \quad f_{W^*}(x_*, y_*, z_*) = x_*^{p_1} + y_*^{p_2} + z_*^{p_3} \tag{5.11}$$

を取ることができる．

II 型

$$W = (p_3, \frac{p_1p_3}{p_2}, (p_2 - 1)p_1; p_1p_3), \tag{5.12}$$

$$W^* = (p_3, p_1p_2, (\frac{p_3}{p_2} - 1)p_1; p_1p_3). \tag{5.13}$$

ただし，$p_2 \neq p_3$, $p_2|p_3$, $(p_1, p_3) = 1$, $(p_2 - 1, p_3) = 1$, $(p_3/p_2 - 1, p_3) = 1$. 特異点の定義多項式として，

$$f_W(x, y, z) := x^{p_1} + y^{p_2} + yz^{\frac{p_3}{p_2}}, \quad f_{W^*}(x_*, y_*, z_*) = x_*^{p_1} + y_*^{\frac{p_3}{p_2}} + y_*z_*^{p_2} \tag{5.14}$$

を取ることができる．

III 型

$$W = W^* = (p_2, p_1q_2, p_1q_3; p_1p_2). \tag{5.15}$$

ただし，$(p_1, p_2) = 1$, q_2 と q_3 は $p_2 + 1 = (q_2 + 1)(q_3 + 1)$ および $(q_2, q_3) = 1$ をみたす自然数とする．特異点の定義多項式として，

$$f_W(x, y, z) := x^{p_1} + y^{q_3+1}z + yz^{q_2+1}, \quad f_{W^*}(x_*, y_*, z_*) = x_*^{p_1} + y_*^{q_3+1}z_* + y_*z_*^{q_2+1} \tag{5.16}$$

を取ることができる．

IV 型

$$W = (\frac{p_3}{p_1}, (p_1 - 1)\frac{p_3}{p_2}, p_2 - p_1 + 1; p_3), \tag{5.17}$$

$$W^{*} = (p_2, (\frac{p_3}{p_2} - 1)p_1, \frac{p_3}{p_1} - \frac{p_3}{p_2} + 1; p_3). \tag{5.18}$$

ただし，$p_1 \neq p_2 \neq p_3$, $p_1|p_3$, $p_2|p_3$, $(p_1-1, p_2) = 1$, $(p_2-p_1+1, p_3) = 1$, $(p_3/p_2-1, p_3/p_1) = 1$, $(p_3/p_1 - p_3/p_2 + 1, p_3) = 1$. 特異点の定義多項式として，

$$f_W(x,y,z) := x^{p_1} + xy^{\frac{p_2}{p_1}} + yz^{\frac{p_3}{p_2}}, \quad f_{W^*}(x_*, y_*, z_*) = x_*^{\frac{p_3}{p_2}} + x_* y_*^{\frac{p_2}{p_1}} + y_* z_*^{p_1} \tag{5.19}$$

を取ることができる．

V 型

$$W = (lm - m + 1, mk - k + 1, kl - l + 1; h), \tag{5.20}$$

$$W^{*} = (lm - l + 1, mk - m + 1, kl - k + 1; h). \tag{5.21}$$

ただし，kはl, m　$h = klm + 1$, $(lm - m + 1, h) = 1$，$(lm - l + 1, h) = 1$ を満たす任意の自然数とする．特異点の定義多項式として，

$$f_W(x,y,z) := zx^k + xy^m + yz^l, \quad f_{W^*}(x_*, y_*, z_*) = z_* x_*^k + x_* y_*^l + y_* z_*^m \tag{5.22}$$

を取ることができる．

注意 32. ADE 特異点に対応する正規ウェイト系 ($\epsilon_W = 1$) は全て自己双対 $W = W^*$ です．また，3 つの単純楕円型特異点に対応するもの ($\epsilon_W = 0$) は，いずれも $g_W = 1$ なので，双対なウェイト系を持ちません．

6. 正規ウェイト系の双対性とアーノルドの奇妙な双対性

正規ウェイト系の双対性が興味深いのは，それがアーノルドの奇妙な双対性 (strange duality) を自然に拡張しているからです．少し具体的に見てみましょう．

アーノルドはユニモーダルな超曲面特異点の分類を行い，とくに $\mathbb{C}^*$ 作用を持つものに限ると先に挙げた 3 つの単純楕円型特異点と次に挙げる 14 個の例外型特異点 ($\epsilon_W = -1$) となることを示しました．

正規ウェイト系 W	f_W	A_W	B_W	双対ウェイト系 W^*
$(6, 14, 21; 42)$	$x^7 + y^3 + z^2$	(2,3,7)	$(2,3,7)$	$(6, 14, 21; 42)$
$(6, 8, 15; 30)$	$x^5 + xy^3 + z^2$	(2,3,8)	$(2,4,5)$	$(4, 10, 15; 30)$
$(4, 10, 15; 30)$	$x^5y + y^3 + z^2$	(2,4,5)	$(2,3,8)$	$(6, 8, 15; 30)$
$(6, 8, 9; 24)$	$x^4 + y^3 + xz^2$	(2,3,9)	$(3,3,4)$	$(3, 8, 12; 24)$
$(3, 8, 12; 24)$	$zx^4 + y^3 + z^2$	(3,3,4)	$(2,3,9)$	$(6, 8, 9; 24)$
$(4, 6, 11; 22)$	$yx^4 + xy^3 + z^2$	(2,4,6)	$(2,4,6)$	$(4, 6, 11; 22)$
$(4, 5, 10; 20)$	$x^5 + y^2z + z^2$	(2,5,5)	$(2,5,5)$	$(4, 5, 10; 20)$
$(3, 5, 9; 18)$	$zx^3 + xy^3 + z^2$	(3,3,5)	$(2,4,7)$	$(4, 6, 7; 18)$
$(4, 6, 7; 18)$	$x^3y + y^3 + xz^2$	(2,4,7)	$(3,3,5)$	$(3, 5, 9; 18)$
$(3, 4, 8; 16)$	$x^4y + y^2z + z^2$	(3,4,4)	$(2,5,6)$	$(4, 5, 6; 16)$
$(4, 5, 6; 16)$	$x^4 + zy^2 + z^2$	(2,5,6)	$(3,4,4)$	$(3, 4, 8; 16)$
$(3, 5, 6; 15)$	$zx^3 + y^3 + xz^2$	(3,3,6)	$(3,3,6)$	$(3, 5, 6; 15)$
$(3, 4, 5; 13)$	$x^3y + y^2z + z^2x$	(3,4,5)	$(3,4,5)$	$(3, 4, 5; 13)$
$(3, 4, 4; 12)$	$x^4 + y^2z + yz^2$	(4,4,4)	$(4,4,4)$	$(3, 4, 4; 12)$

ここで，A_W は先ほど定義した正規ウェイト系の標識で，今の文脈ではドルガチェフ数 (Dolgachev number) と呼ばれています [4]．一方 B_W は特異点のミルナー格子 (交叉行列) の情報から定まる量で，ガブリエロフ数 (Gabrielov number) と呼ばれています [5]．上の表を注意深く見ると，$A_W = B_{W^*}$ が全ての W について成立していることがわかります．この現象はアーノルドによって最初に観察されて，奇妙な双対性と呼ばれています．

前節の考察により，このアーノルドの奇妙な双対性は群作用付きの特異点の位相的ミラー対称性と解釈することができました．位相的ミラー対称性はホモロジー的ミラー対称性に圏化されるので，アーノルドの奇妙な双対性 $A_W = B_{W^*}$ を三角圏の立場から考察することで，よりこの不思議な現象を自然に理解することが可能になると期待できます．

7. 消滅サイクルと一般ルート系

正規ウェイト系に対して，幾何学的に，一般ルート系 (generalized root system) と呼ばれる古典ルート系の拡張概念を対応させることができます．この節では [12] の 5 節の内容を復習し，問題提示を行います．

$W=(a,b,c;h)$ を正規ウェイト系，f_W を W に付随した多項式とします．このとき

(7.1) $$f_W : \mathbb{C}^3 \backslash f_W^{-1}(0) \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$$

は位相的に局所自明なファイバー束となります．そこで，ミルナーファイバー (Milnor fiber) と呼ばれる一般ファイバー

(7.2) $$X_{W,1} := f_W^{-1}(1)$$

を考えると，これは複素 2 次元 (実 4 次元) の複素多様体ですので

(7.3) $$I : H_2(X_{W,1},\mathbb{Z}) \times H_2(X_{W,1},\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

という交叉形式 (intersection form) が存在します．ミルナーの定理により $H_2(X_{W,1},\mathbb{Z})$ は階数 μ_W の自由加群となり，消滅サイクル (vanishing cycle) がこの自由加群を生成するということが知られています．組 $(H_2(X_{W,1},\mathbb{Z}) - I)$ はミルナー格子 (Milnor lattice) と呼ばれます．

また，モノドロミー $\rho : \pi_1(\mathbb{C}\backslash\{0\},1) \to \mathrm{Aut}(H_2(X_{W,1},\mathbb{Z}),I)$ による $\pi_1(\mathbb{C}\backslash\{0\},*)$ の生成元の像 $C \in \mathrm{Aut}(H_2(X_{W,1},\mathbb{Z}),-I)$ をミルナーモノドロミー (Milnor monodromy) と呼びます．C は有限位数，とくに $C^h=1$ となり，C の特性多項式は

(7.4) $$\det(\lambda\cdot \mathrm{Id} - C) = \varphi_W(\lambda)$$

と，正規ウェイト系の特性多項式に一致することがわかります．

このとき，もっとも重要なのは次の事実です．

事実 33. $\epsilon_W = 1$，つまり f_W が ADE 特異点を定義するとき，$(H_2(X_{W,1},\mathbb{Z}),-I)$ は対応する型のルート格子を与える．さらに，とくに消滅サイクルのホモロジー類のなす集合はルートの集合を与え，ミルナーモノドロミー C はコクセター変換を与える．すなわち，正規ウェイト系からミルナーファイバーの中間ホモロジーを経由することによって，ルート系が得られる．

齋藤恭司は古典的ルート系の概念を拡張した一般ルート系の公理を与えました．そして，W が一般の正規ウェイト系の場合にも，ミルナー格子 $(H_2(X_{W,1},\mathbb{Z}),-I)$，消滅サイクルの集合，ミルナーモノドロミー C，これらのデータが一般ルート系の公理を満たすことを示しました．

一般化ルート系に着目するのは，原始形式による周期写像および平坦構造 (Frobenius structure) を具体的に研究するためです．しかしながら，この幾何学的構成は非常に超越的な消滅サイクルの幾何学に基づいており，極めて困難なものです．さらに，正規ウェイト系も一般ルート系も組み合わせ論的データによって定義された対象です．そこで齋藤恭司は次の問題を提起しました:

問題 34 ([12]). 正規ウェイト系 $W=(a,b,c;h)$ から，ミルナーファイバーのホモロジー $H_2(X_{W,1},\mathbb{Z})$ を経由することなく，算術的または組み合わせ論的に一般ルート系を構成せよ．

8. 位相的ミラー対称性からホモロジー的ミラー対称性へ

まず，スローガンを書くことにします．

正規ウェイト系から代数的に構成される三角圏を用いて，齋藤恭司の問題を解決する！

このスローガンの下，最初に注意すべきは次のことです:

ミルナーファイバー $X_{W^*,1}$ の消滅サイクルは W^* に付随する深谷圏 $D^b\mathcal{F}(W^*)$ の対象

これは，$\mathbb{C}^3$ に標準的なシンプレクティック形式を入れたとき，それから導かれる $X_{W^*,1}$ 上のシンプレクティック形式に関して，消滅サイクルがラグランジアン部分多様体になっていることから非常に自然に期待されることです．問題は，「W^* に付随する深谷圏 $D^b\mathcal{F}(W^*)$」と書いたものの，それを数学的に正確に定義することすら非常に難しいということです．

次に注意することは，正規ウェイト系の双対性です:

$$(W,G_W)\overset{\text{位相的ミラー対称性}}{\Longleftrightarrow}(W^*,\{1\}).$$

ホモロジー的ミラー対称性とは，シンプレクティック幾何学から定まる三角圏と複素 (非可換) 代数幾何学から定まる三角圏を入れ替える対称性のことでした．したがって，位相的ミラー対称性がホモロジー的ミラー対称性に圏化されるのならば，組 (W,G_W) から代数的に定まる三角圏 $\mathcal{T}_{W,G_W}$ であって，「深谷圏 $D^b\mathcal{F}(W^*)$」と同値になるものがあると期待できます．より具体的には，ホモロジー的ミラー対称性によって，次の表の左右の対象は

シンプレクティック側	複素 (非可換) 代数幾何側
$(W^*,\{1\})$	(W,G_W)
$H_2(X_{W^*,1},\mathbb{Z})$ 中間ホモロジー群	$K_0(\mathcal{T}_{W,G_W})$ グロタンディーク群 (Grothendieck group)
$-I$ I: 交差形式	$\chi+{}^t\chi$ χ: オイラー形式
ルート ＝消滅 cycle のホモロジー類	直既約な対象の類 $\in K_0(\mathcal{T}_{W,G_W})$
Coxeter 変換 ＝ミルナーモノドロミー	$S\circ T^{-1}$ S: セール函手 (Serre functor)

同じものの異なる実現であると期待されます．したがって，代数的に定まる $\mathcal{T}_{W,G_W}$ を調べることで，非常に超越的な消滅サイクルの幾何を調べることが可能になると思われるのです．これは，今の場合本来超越的な対称性であるミラー対称性が組み合わせ的対称性に帰着されている，という特殊性によっています．それでは，$\mathcal{T}_{W,G_W}$ はどのように定義されると思えるでしょうか？今の設定においてもっとも自然な候補は次のようなものです．

正規ウェイト系 W に対して，孤立特異点を定める多項式 $f_W\in\mathbb{C}[x,y,z]$ をひとつ固定します．このとき，組 $\mathcal{A}_{f_W}:=(\mathbb{C}[x,y,z],f_W)$ を弱 A_∞-圏とみなすことができます (弱 A_∞-

圏などの定義は残念ながら省略することにします)．そして $\mathcal{A}_{f_W}$ 上の $\widehat{G_W}$-同変な右 A_∞-加群のなす三角圏 $D_{\widehat{G_W}}(\mathrm{Mod}\text{-}\mathcal{A}_{f_W})$ を考えます．ここで，$\widehat{G_W}$ は

$$(8.1) \qquad 0 \to \mathbb{Z} \to \widehat{G_W}(\simeq \mathbb{Z}) \to G_W(\simeq \mathbb{Z}/h\mathbb{Z}) \to 0$$

で定義されるものです (群 G_W が $\mathbb{C}^*$-作用に起源をもつことによる拡大です)．

この圏 $D_{\widehat{G_W}}(\mathrm{Mod}\text{-}\mathcal{A}_{f_W})$ は，代数多様体 X に群 G が作用しているときの，G-同変な準連接層の複体のなす導来圏 $D_G(\mathrm{Qcoh}X)$ のアナロジーです．X が滑らかであって，X/G がクレパントな特異点解消 Y を持つとすると，$D_G(\mathrm{Qcoh}X)$ のコンパクトな対象 (対応する余表現可能函手が無限直和と可換となる対象) 全体のなす充満部分三角圏は, G-同変な連接層の有界複体のなす導来圏 $D^b_G(\mathrm{coh}X)$ と同値になり，とくに $D^b_G(\mathrm{coh}X) \simeq D^b(\mathrm{coh}Y)$ です．このアナロジーに基づくと，いまの設定において $\mathcal{A}_{f_W}$ は「滑らかで"$\mathcal{A}_{f_W}/G_W$"はクレパントな特異点解消をもつ」と考えられるため (再び，残念ながら，ここでは「」内についてこれ以上説明しません)，$D_{\widehat{G_W}}(\mathrm{Mod}\text{-}\mathcal{A}_{f_W})$ のコンパクトな対象全体のなす充満部分三角圏が求める三角圏 $\mathcal{T}_{W,G_W}$ であって，$\mathcal{T}_{W,G_W}$ は弱 A_∞-圏 $\mathcal{A}_{f_W}$ の $\widehat{G_W}$-同変な導来圏 $D_{\widehat{G_W}}(\mathcal{A}_{f_W})$ と同値である，と考えられます．後で見るように，この三角圏 $D_{\widehat{G_W}}(\mathcal{A}_{f_W})$ は maximal Cohen-Macauley 加群の研究において導入された，行列因子化 (matrix factorization) のなす三角圏そのものになります．

このようにして，ミラー対称性の観点から行列因子化が登場します．さて，もう一方の有限次元代数はどうでしょうか？シンプレクティック幾何側，消滅サイクルの幾何側では，ルート格子 $(H_2(X_{W^\bullet,1}, \mathbb{Z}), -I)$ の「よい基底」となる，消滅サイクルの特別な基底 (distinguished basis) が取れることが知られています．これの圏論的対応物が後で定義する exceptional collection と呼ばれる三角圏の対象の列 $(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_\mu)$ です．さらにこの exceptional collection がとくに strongly exceptional collection と呼ばれるものになっているとき，つまり $\mathcal{E}_i$ たちの間に Hom^0 以外全ての Ext が消えているとき，この自己準同型代数 $\mathrm{End}(\mathcal{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}_\mu)$ として有限次元代数が登場します．ミラー対称性の要請から，この有限次元代数の有限次元表現の複体のなす導来圏と (G_W-作用付き) 行列因子化の三角圏が三角同値となることが期待されるのです．

次の節から順に必要な定義を行い，この「期待」を予想として定式化しましょう．

9. $\mathbb{C}^*$ 作用付き特異点の三角圏

最初に基本的な記号法を整理することからはじめます．この節では，少し一般的な枠組みで議論することにします．

ある正の整数 h を一つ固定して与えます．そして S を $d+1$ 次元の $\frac{2}{h}\mathbb{Z}$-次数付き可換正則 (regular) ネーター環で，$S = \oplus_{k \in \frac{2}{h}\mathbb{Z}_{\geq 0}} S_k$, $S_0 = \mathbb{C}$ とかけるものとします．また，f を S の次数 2 の元とするとき，$R := S/(f)$ で定義します．とくに唯一の斉次極大イデアルを $\mathfrak{m}_R := \oplus_{k \in \frac{2}{h}\mathbb{Z}_{>0}} R_k$ と書くことにします．これからの議論では，R が次数付き孤立特異点であることが重要になりますので，それをまず仮定することとします:

仮定 35. $\mathfrak{m}_R$ 以外の任意の斉次素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して，局所化 $R_{(\mathfrak{p})}$ は正則環になる．

次数付き R-加群とは，R-加群 M であって，$M = \oplus_{k \in \frac{2}{h}\mathbb{Z}} M_k$ と書け，さらに任意の $i, j \in \frac{2}{h}\mathbb{Z}$ に対して $R_i \cdot M_j \subset M_{i+j}$ が成り立つものとします．また，次数付き R-加群 M, N にたいして，$g : M \to N$ が次数 $s \in \frac{2}{h}\mathbb{Z}$ の準同型であるとは，g が R-準同型であって任意の i に対して $g(M_i) \subset N_{i+s}$ が成り立つこととします．次数付き R-加群のなすアーベル圏

を gr−R と書きます．R はネーター環なので，$\mathrm{Ext}^i_R(M,N) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{gr}-R}(\tau^{-n}M,N) = \oplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Ext}^i_{\mathrm{gr}-R}(M,\tau^nN)$ が成り立っていることに注意してください．また $R_0=\mathbb{C}$ なので，任意の次数付き射影的 R-加群は自由加群となります．gr−R 上には，次数付き加群の次数をずらす操作

$$(\tau M)_k := M_{k+\frac{2}{h}} \tag{9.1}$$

により，自己同値 (auto-equivalence)τ が定まります．

次数付き射影加群のなす完全圏 (拡大で閉じている gr−R の充満部分圏) を grproj−R をあらわします．

定義 36 ([3][10])**.** 三角圏 $D^{gr}_{Sg}(R) := D^b(\mathrm{gr}-R)/D^b(\mathrm{grproj}-R)$ を $\mathbb{C}^*$-作用付き特異点の三角圏と呼ぶ．

T でこの三角圏 $D^{gr}_{Sg}(R)$ 上の移動函手をあらわします．

10. 次数付き MAXIMAL COHEN-MACAULEY 加群の三角圏

$D^{gr}_{Sg}(R)$ の定義は極めて単純なものですが，その圏の持つ定量的構造を調べるのにはあまり向いていません．というのも，局所化された圏として定義されているために，準同型の空間が非常に複雑だからです．そのため $D^{gr}_{Sg}(R)$ と三角同値な別の圏を導入しましょう．

定義 37. 次数付き R 加群 $M\in \mathrm{gr}-R$ が

$$\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}_R, M) = 0,\quad i<d=\dim R \tag{10.1}$$

を満たすとき，M を次数付き maximal Cohen-Macauley$R$-加群と呼ぶ．

次数付き maximal Cohen-Macauley R-加群のなす gr−R の充満部分圏 $\mathrm{CM}^{gr}(R)$ は完全圏となります．maximal Cohen-Macauley R-加群の同値な特徴づけがいくつかあるので，それを書いておきます．その前に一つ定義を行います．

定義 38. $K_R\in \mathrm{CM}^{gr}(R)$ が $i\neq d$ のとき $\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m}_R,K_R)\simeq 0$ および $\mathrm{Ext}^d_R(R/\mathfrak{m}_R,K_R)\simeq\mathbb{C}$ を満たすとき，K_R は R の標準加群 (canonical module) であると呼ばれる．

補題 39. 次の条件は同値：

(1) $M\in\mathrm{CM}^{gr}(R)$.
(2) $H^i_{\mathfrak{m}_R}(M)=0,(i\neq d)$. ここで，$H^\bullet_{\mathfrak{m}_R}$ は{$\mathfrak{m}_R$}　台を持つ局所コホモロジー函手，つまり $H^i_{\mathfrak{m}_R}(M) := \varinjlim\mathrm{Ext}^i_R(R/R_{\geq n},M)$, $R_{\geq n} := \oplus_{i\in\frac{2}{h}\mathbb{Z}_{\geq n}}R_i$ によって定義されるもの．
(3) $\mathrm{Ext}^i_R(M,K_R)=0,(i>0)$.

□

定義 40. 環 R は入射次元が有限で，その標準加群 K_R が存在して $\tau^{-\epsilon(R)}R$ とある $\epsilon(R)\in\mathbb{Z}$ に対して書けるとき，ゴーレンシュタイン (Gorenstein) であると呼ばれる．ここで $\epsilon(R)$ は R のゴーレンシュタインパラメーターと呼ばれる．

注意 41. 正規ウェイト系 W に対して定まる環 R_W は超曲面特異点なので，ゴーレンシュタイン環である．とくに $\epsilon(R)=\epsilon_W$ となる．

R は超曲面特異点と仮定したのでゴーレンシュタイン環，よって次が成り立つ:

補題 42 (Auslander). $\mathrm{CM}^{gr}(R)$ はフロベニウス圏である，すなわち，充分豊富な射影的対象と入射的対象をもつ完全圏で，とくに射影的対象のクラスと入射的対象のクラスが一致するものである． □

定義 43. 加法圏 $\underline{\mathrm{CM}}^{gr}(R)$ を次のように定める: $Ob(\underline{\mathrm{CM}}^{gr}(R)) = Ob(\mathrm{CM}^{gr}(R))$．準同型の空間 $\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N)$ を $\mathrm{Hom}_{\mathrm{gr}-R}(M,N)/\mathcal{P}(M,N)$ で定義する．ここで，$\mathcal{P}(M,N)$ は射影的対象を経由する準同型全体のなす部分加群，つまり $g \in \mathcal{P}(M,N)$ とはある射影的対象 P と準同型 $g' : M \to P$ および $g'' : P \to N$ があって $g = g'' \circ g'$ となることである．

$\underline{\mathrm{CM}}^{gr}(R)$ はフロベニウス圏 $\mathrm{CM}^{gr}(R)$ の安定圏 (stable category) である．それゆえ

命題 44 (Happel). $\underline{\mathrm{CM}}^{gr}(R)$ は三角圏となる． □

$\underline{\mathrm{CM}}^{gr}(R)$ は自然に $D^{gr}_{Sg}(R)$ の充満部分三角圏となりますが，次数付き $R-$ 加群 (の有界複体) のシジギー (syzygy) を考えることで，次の定理が得られます:

定理 45 ([3][10]). $\underline{\mathrm{CM}}^{gr}(R)$ は $D^{gr}_{Sg}(R)$ と三角同値． □

注意 46. いま，R は超曲面孤立特異点であることを仮定していたので，これらの三角圏 $\mathcal{T}_R := \underline{\mathrm{CM}}^{gr}(R) \simeq D^{gr}_{Sg}(R)$ は局所有限，すなわち，$\sum_i \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_R}(\mathcal{E}, T^i\mathcal{F}) < \infty$ がすべての対象 $\mathcal{E}, \mathcal{F} \in \mathcal{T}_R$ に対して成立します．さらに，$\mathcal{T}_R$ は Krull-Schmidt 的，つまり $\mathcal{T}_R$ の任意の対象は有限個の直既約対象の直和と同型で，かつ $\mathcal{T}_R$ のにおける任意の $p^2 = p$ となる準同型 p は分裂します．

$\underline{\mathrm{CM}}^{gr}(R)$ 上には，移動函手 T と次数ずらし函手 τ (gr$-R$ 上のそれから導かれる)，という二つの自己同値がありました．ここで AR 移動函手 (Auslander-Reiten translation functor)τ_{AR} を $\tau_{AR} := T^{d-2}\tau^{-\epsilon(R)}$ で定めます．このとき次の重要な結果が知られています:

命題 47 (Auslander-Reiten duality[1]). $\underline{\mathrm{CM}}^{gr}(R)$ 上，次のような次数 0 の双函手的同型が存在する：

$$\mathrm{Ext}^d_{\mathrm{gr}-R}(\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N), K_R) \simeq \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{gr}-R}(N, \tau_{AR}(M)). \tag{10.2}$$

□

AR 移動函手の本当の定義や性質，上の命題の証明については本 [15] を御覧ください．これにより，$\underline{\mathrm{CM}}^{gr}(R) \simeq D^{gr}_{Sg}(R)$ はセール函手を持つことが直ちに従います：

定理 48. 函手 $\mathcal{S} := T\tau_{AR} = T^{d-1}\tau^{-\epsilon(R)}$ は $\underline{\mathrm{CM}}^{gr}(R)$ 上のセール函手である．すなわち，$\mathcal{S}$ は双函手的同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\underline{\mathrm{Hom}}_R(M,N), \mathbb{C}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_R(N, \mathcal{S}M), \quad M, N \in \underline{\mathrm{CM}}^{gr}(R),$$

を導く自己同値である． □

11. 次数付き行列因子化の三角圏

$D^{gr}_{Sg}(R)$ はかなり構造がわかりやすい圏 $\underline{\mathrm{CM}}^{gr}(R)$ に帰着されましたが，それでも具体的に対象・準同型を計算するには難しい圏です．より簡単な記述はないのでしょうか？

$R = S/(f)$ で，S は $d+1$ 次元の正則環でした．ですから，任意の次数付き maximal Cohen-Macauley$R$-加群 M は，ある有限階数の次数付き自由 S-加群 F_0 と F_1 を用いて，

$$0 \to \tau^{-h}F_1 \xrightarrow{f_1} F_0 \to M \to 0 \tag{11.1}$$

という，(次数付き S-加群の圏 $\mathrm{gr}-S$ における) 射影的分解を持ちます．とくに，f を掛けるという操作は M 上では 0 を掛けることになるので，次数 0 の S-準同型 $f_0 : F_0 \to F_1$ であって $f_1 f_0 = f \cdot \mathrm{Id}_{F_0}$ および $f_0 f_1 = f \cdot \mathrm{Id}_{F_1}$ となるものをとることができます．このことから，次数付き maximal Cohen-Macauley$R$-加群の研究のために，Eisenbud は行列因子化 (matrix factorization) の概念を導入しました．

定義 49. F_0, F_1 を有限階数の次数付き自由 S-加群とします．次数 0 の S-準同型 $f_0 : F_0 \to F_1$ と次数 2 の S-準同型 $f_1 : F_1 \to F_0$ で $f_1 f_0 = f \cdot \mathrm{Id}_{F_0}$ および $f_0 f_1 = f \cdot \mathrm{Id}_{F_1}$ をみたすもが与えられたとき，

$$\overline{F} := \left(F_0 \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} F_1 \right)$$

と書いて，これを次数付き行列因子化と呼ぶ．$g : \overline{F} \to \overline{F'}$ が行列因子化の準同型であるとは，次数 0 の S-準同型 $g_0 : F_0 \to F_0'$ および $g_1 : F_1 \to F_1'$ の組 $g = (g_0, g_1)$ が $g_1 f_0 = f_0' g_0$ と $g_0 f_1 = f_1' g_1$ をみたすことをいう．

注意 50. 行列因子化 $\overline{F}$ に対して，F_0 の階数と F_1 の階数は等しい．この階数を行列因子化 $\overline{F}$ の階数と呼ぶことにします．

組 (S, f) に対して，加法圏 $\mathrm{MF}_S^{gr}(f)$ を f の次数付き行列因子化とします．F_0 および F_1 の項ごとに定まる完全列により，$\mathrm{MF}_S^{gr}(f)$ に完全圏の構造が導かれ，さらに，

補題 51 ([10]). $\mathrm{MF}_S^{gr}(f)$ はフロベニウス圏 □

であることがわかります．

このフロベニウス圏の安定圏 (今の場合ホモトピー圏と呼ばれる) を考えましょう．そのために，0 にホモトピー同値な準同型 (null-homotopic homomorphism) を次のように定義します:

定義 52. 行列因子化の準同型 $g = (g_0, g_1) : \overline{F} \to \overline{F'}$ が 0 にホモトピー同値であるとは，次数 -2 の S-準同型 $\psi_0 : F_0 \to F_1'$ および次数 0 の S-準同型 $\psi_1 : F_1 \to F_0'$ が存在して，$g_0 = f_1' \psi_0 + \psi_1 f_0$ と $g_1 = \psi_0 f_1 + f_0' \psi_1$ が成り立つこと．

$\mathrm{MF}_S^{gr}(f)$ における射影的対象を経由する準同型の全体は，ちょうどこの 0 にホモトピー同値な準同型の全体に一致しています．

定義 53. フロベニウス圏 $\mathrm{MF}_S^{gr}(f)$ の安定圏 (ホモトピー圏) を $\mathrm{HMF}_S^{gr}(f)$ であらわす．

$\mathrm{HMF}_S^{gr}(f)$ は自然に三角圏の構造を持ちますが，とくに対応

$$\overline{F} = \left(F_0 \underset{f_1}{\overset{f_0}{\rightleftarrows}} F_1 \right) \mapsto M := \mathrm{Coker}(f_1) \tag{11.2}$$

を考えることで，$\mathrm{HMF}_S^{gr}(f)$ と $\underline{\mathrm{CM}^{gr}}(R)$ は三角同値になります．よって，今までの結果をまとめると次のようになります．

命題 54 ([10][15]). $\mathrm{HMF}_S^{gr}(f)$ と $\underline{\mathrm{CM}^{gr}}(R)$ と $D_{S_g}^{gr}(R)$ は自然に三角同値となり，とくに自己同値函手 τ と整合的．

これらの圏の自己同値 T, τ の作用に関しては次の節でもう少し詳しく述べることにします．

12. A_∞-圏の導来圏としての次数付き行列因子化の三角圏

この節では $\mathrm{HMF}^{gr}_S(f)$ の構造をより詳しく見てみましょう．行列因子化を調べることは，具体的に自由加群の基底を取ることで，まさに文字通り，S-に成分をもつ行列のなす線型代数に帰着されます．これは，$\mathrm{HMF}^{gr}_S(f)$ を A_∞-圏 (S,f) の導来圏として解釈するということに他なりません．この観点からもう一度記述してみましょう．

定義 55. 組 (Q,G) が，(S,f) に対するサイズ r の次数付きねじれ複体 (graded twisted complex) であるとは，

$$Q=\begin{pmatrix}0 & Q_{-+}\\ Q_{+-} & 0\end{pmatrix},\quad Q_{\pm\mp}\in\mathcal{M}_{2r\times 2r}(S),\quad Q^2=f\cdot\mathrm{Id}_{2r\times 2r},\tag{12.1}$$

$$G=\mathrm{diag}(\frac{2a_1}{h},\ldots,\frac{2a_r}{h},\frac{2b_1}{h}-1,\ldots,\frac{2b_r}{h}-1),\quad a_i,b_i\in\mathbb{Z},i=1,\ldots,r,\tag{12.2}$$

$$2E(Q)-GQ+QG=Q\tag{12.3}$$

を満たすもののことする．

例 56. $S:=\mathbb{C}[x]$, $f(x):=x^{l+1}$, $R:=S/(f)$ とする．

$$M_{i,j}:=\left(\begin{pmatrix}0 & x^{l+1-i}\\ x^i & 0\end{pmatrix},\mathrm{diag}\left(\frac{2i}{l+1},\frac{2(i+j)}{l+1}-1\right)\right),i=0,\ldots,l+1,j\in\mathbb{Z},\tag{12.4}$$

は $(\mathbb{C}[x],x^{l+1})$ に対する次数付きねじれ複体である．

定義 57. 二つの次数付きねじれ複体に対して準同型の空間を

$$\mathrm{Hom}\left((Q,G),(Q',G')\right):=$$
$$\left\{\Phi=\begin{pmatrix}\Phi_{++} & 0\\ 0 & \Phi_{--}\end{pmatrix},\Phi_{\pm\pm}\in M_{2r'\times 2r}(S)\mid Q'\Phi-\Phi Q=0,2E(\Phi)-G'\Phi+\Phi G=0\right\}/\sim$$

で定める．ここで $\Phi\sim 0$ とは，ある $\Psi\in M_{2r'\times 2r}(S)$ があって，$\Phi=Q'\Psi+\Psi Q$ となることとする．

定義 58. 次数付きねじれ複体 (Q,G) の全体を対象，上で定めた $\mathrm{Hom}((Q,G),(Q',G'))$ を射の集合とすることで加法圏が定まる．これを $D^b_{\mathbb{Z}}(S,f)$ と書く．

圏 $D^b_{\mathbb{Z}}(S,f)$ は次に定義する二つの自己同値 T および τ を持ちます．

定義 59. サイズ r の次数付きねじれ複体 (Q,G) に対して，サイズ r の次数付きねじれ複体 $T(Q,G)$ を次のように定める：

$$T(Q,G):=\tag{12.5}$$
$$\left(\begin{pmatrix}0 & -Q_{+-}\\ -Q_{-+} & 0\end{pmatrix},\mathrm{diag}\left(\frac{2b_1}{h},\ldots,\frac{2b_r}{h},\frac{2(a_1+h)}{h}-1,\ldots,\frac{2(a_r+h)}{h}-1\right)\right)$$

定義 60. サイズ r の次数付きねじれ複体 (Q,G) に対して，サイズ r の次数付きねじれ複体 $\tau(Q,G)$ を次のように定める：

$$\tau(Q,G):=\left(Q,G+\frac{2}{h}\right)\tag{12.6}$$

定義から，これら二つの自己同値の間には関係 $T^2=\tau^h$ が成り立ちます．

定義 61. $\Phi \in \mathrm{Hom}((Q,G),(Q',G'))$ に対して，写像錐 $C(\Phi)=(Q_{C(\Phi)},G_{C(\Phi)})$ を次で定める：

$$Q_{C(\Phi)} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -Q_{+-} & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_{++} & Q'_{-+} \\ -Q_{-+} & 0 & 0 & 0 \\ \Phi_{--} & Q'_{+-} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad G_{C(\Phi)} := \tag{12.7}$$

$$\mathrm{diag}\left(\frac{2b_1}{h},\ldots,\frac{2b_r}{h},\frac{2a'_1}{h},\ldots,\frac{2a'_r}{h},\frac{2(a_1+h)}{h}-1,\ldots,\frac{2(a_r+h)}{h}-1,\frac{2b'_1}{h}-1,\ldots,\frac{2b'_r}{h}-1\right).$$

これらの準備の下，次のことが成立します:

定理 62. $D^b_{\mathbb{Z}}(S,f)$ は, T を移動函手,

$$(Q,G)\xrightarrow{\Phi}(Q',G')\to Cone(\Phi)\to T(Q,G)$$

を完全三角形とする三角圏の構造を持つ．とくに，自由加群の基底を取るという操作によって，自己同値函手 τ と整合的で自然な三角同値 $\mathrm{HMF}^{gr}_S(f)\simeq D^b_{\mathbb{Z}}(S,f)$ がある．

注意 63. 三角圏 $D^b_{\mathbb{Z}}(S,f)$ は，組 (S,f) を弱 A_∞-圏とみなしたとき，この弱 $A_\infty-$ 圏の $\mathbb{Z}$-同変な有界導来圏そのものを具体的に記述したものです．したがって，Bondal-Kapranov によって導入された強化三角圏 (enhanced triangulated category)[2] と呼ばれる「よいクラスの」三角圏となっています．

準備に時間がかかりましたが, これで正確に主張を述べることができました．

定理 64. これまでに導入した 4 つの三角圏は互いに三角同値：

$$D^{gr}_{S_g}(R)=D^b(\mathrm{gr}{-}R)/D^b(\mathrm{grproj}{-}R)\simeq \underline{\mathrm{CM}}^{gr}(R)\simeq \mathrm{HMF}^{gr}_S(f)\simeq D^b_{\mathbb{Z}}(S,f). \tag{12.8}$$

これらの三角圏はセール函手 $\mathcal{S}=T^{d-1}\tau^{-\epsilon(R)}$ をもち，とくに，$\mathcal{S}$ は $\mathcal{S}^h=T^{h(d-1)-2\epsilon(R)}$ を満たす． □

セール函手 $\mathcal{S}$ が $\mathcal{S}^h=T^{n'},h,n'\in\mathbb{Z}$ を満たすような三角圏は，次元 $n:=n'/h$ を持つ分数的カラビ・ヤウ (fractional Calabi–Yau) 的三角圏であると呼ばれます．というのも，射影的代数多様体 X の連接層の有界複体のなす導来圏 $D^b(\mathrm{coh}X)$ を考えたとき，そのセール函手 $\mathcal{S}_X$ は X の標準束 K_X を用いて，$\mathcal{S}_X(\cdot)\simeq T^{\dim_{\mathbb{C}}X}\circ K_X\otimes\cdot$ と書け，とくに X がカラビ・ヤウ多様体ならば $\mathcal{S}_X\simeq T^{\dim_{\mathbb{C}}X}$ となるからです．

正規ウェイト系 W に付随する，特異点を定める多項式 f_W を一つ固定します．そしてこれまでに定義した同値な三角圏 (のいずれか) を $\mathcal{T}_W$ であらわします．つまり

$$\mathcal{T}_W := D^{gr}_{S_g}(R_W)=\underline{\mathrm{CM}}^{gr}(R_W)\simeq \mathrm{HMF}^{gr}_S(f_W)\simeq D^b_{\mathbb{Z}}(S,f_W) \tag{12.9}$$

とします．すると $d=2$ ので，$\mathcal{T}_W$ は次元 $(h-2\epsilon_W)/h=n_W$ を持つ分数的カラビ・ヤウ的三角圏となります．正規ウェイト系の節において，有理数 n_W を次元と呼んだ理由が少し伝わったでしょうか．

13. 予想

いよいよ$\mathcal{T}_W$が満たすべき性質を正確に述べられる直前まで来ました．まず主張を述べるために言葉を準備します．

定義 65. $\mathbb{C}$-線型な三角圏$\mathcal{T}$の対象$\mathcal{E}$が$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E},T^p\mathcal{E})=0$, $(p\neq 0)$および$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E},\mathcal{E})=\mathbb{C}$を満たすとき，$\mathcal{E}$はexceptionalであると呼ばれる．exceptionalな対象の列$(\mathcal{E}_0,\dots,\mathcal{E}_n)$がすべての$p$と$i>j$に対して$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E}_i,T^p\mathcal{E}_j)=0$を満たすとき，列$(\mathcal{E}_0,\dots,\mathcal{E}_n)$はexceptional collectionと呼ばれる．exceptional collection$(\mathcal{E}_0,\dots,\mathcal{E}_n)$を含む最小の三角圏が$\mathcal{T}$と同値となるとき，$(\mathcal{E}_0,\dots,\mathcal{E}_n)$はfullである，または$\mathcal{T}$はfull exceptional collectionを持つといわれる．

さらに，exceptional collection $(\mathcal{E}_0,\dots,\mathcal{E}_n)$が，すべての$i,j$および0以外のすべての$p$に対して$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(\mathcal{E}_i,T^p\mathcal{E}_j)=0$を満たすとき，それはstrongly exceptional collectionであると呼ばれる．

特異点に対して位相的ミラー対称性がホモロジー的ミラー対称性に持ち上がるならば，$\mathcal{T}_W$は次の性質を持つはずです．

予想 66 ([14]). 正規ウェイト系Wは双対ウェイト系W^*を持つとする．

(1) $\mathcal{T}_W$は*full strongly exceptional collection* $(\mathcal{E}_1,\dots,\mathcal{E}_{\mu_W^*})$を持つ．したがって，$A:=\mathrm{End}(\mathcal{E})$, $\mathcal{E}:=\oplus_{i=1}^{\mu_W^*}\mathcal{E}_i$とおいたとき，次の三角同値が成り立つ：

$$\mathcal{T}_W\simeq D^b(\mathrm{mod}-A). \tag{13.1}$$

(2) 格子の同型

$$(K_0(\mathcal{T}_W),\chi+{}^t\chi)\simeq(H_2(X_{W^*,1},\mathbb{Z}),-I) \tag{13.2}$$

が成り立つ，ここで，$\chi(\mathcal{E},\mathcal{F}):=\sum_i(-1)^i\dim_{\mathbb{C}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}_W}(\mathcal{E},\mathcal{F})$とする．

この予想を示すことができれば，齋藤恭司の問題に肯定的に答えることができます．

14. 主結果

現在のところ，以下に述べるいくつかの結果が得られています．

定理 67 ([7]). $\epsilon_W=1$ならば前節の予想は正しい．とくにAは対応する型のDynkin箙の経路代数(path algebra). □

系 68. 正規ウェイト系WがI型のとき，前節の予想は正しい． □

定理 69 ([8]). $\epsilon_W=-1$かつ$g_W=0$となる正規ウェイト系Wに対して，三角圏$\mathcal{T}_W$は*full strongly exceptional collection*を持つ．とくにWが双対ウェイト系W^*を持つとき，格子の同型$(K_0(\mathcal{T}_W),\chi+{}^t\chi)\simeq(H_2(X_{W^*,1},\mathbb{Z}),-I)$が成り立つ． □

これらの定理は，行列因子化を具体的に計算することで「非常に良い振る舞いをする対象」を予想される格子の階数の個数見つけて，次にそれらが生成する充満部分三角圏が実は全体に一致するということを示す，という方法で証明されます．全体に一致することを証明する部分において，「$M\in\mathrm{CM}^{gr}(R)$が，$i\neq d$のとき$\mathrm{Ext}^i_R(R/\mathfrak{m},M)\simeq 0$をみたすならば，$M$は標準加群(の次数ずらし)の直和である」ということを用います．

一方で，tor$-R$を長さ有限の次数付きR-加群のなすgr$-R$の充満部分圏とするとき，Orlovはgr$-R$, grproj$-R$, tor$-R$という三つのカテゴリーの「大小関係」を比較するというアイデアから次の構造定理を示しています:

定理 70 ([10]). (1) $\epsilon(R) > 0$ のとき，$D^b(\mathrm{gr}-R/\mathrm{tor}-R) \simeq \langle \tau^{-\epsilon(R)+1}R, \ldots, R, D^{gr}_{Sg}(R)\rangle$.
(2) $\epsilon(R) = 0$ のとき，$D^b(\mathrm{gr}-R/\mathrm{tor}-R) \simeq D^{gr}_{Sg}(R)$.
(3) $\epsilon(R) < 0$ のとき，$D^{gr}_{Sg}(R) \simeq \langle R/\mathfrak{m}, \ldots, \tau^{-\epsilon(R)+1}R/\mathfrak{m}, D^b(\mathrm{gr}-R/\mathrm{tor}-R)\rangle$.

□

さて，正規ウェイト系に対して標識 $A_W = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$ という概念を定義していました．標識 A_W に基づき定義されるアーベル群

$$\oplus_{i=1}^r \mathbb{Z}\vec{x}_i \,/(\alpha_i\vec{x}_i - \alpha_j\vec{x}_j; i, j = 1, \ldots, r) \tag{14.1}$$

を次数に持つ環，A_W-次数付き環，を次のように定義します:

$$R_{A_W,\lambda} := \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_r]/I_{A_W,\lambda}, \quad I_{A_W,\lambda} := (X_1^{\alpha_1} - X_2^{\alpha_2} + \lambda_i X_i^{\alpha_i}; i = 3, \ldots, r), \tag{14.2}$$

ここで，$\lambda_3 := 1$, $\lambda_i (4 \le i \le r)$ は $\mathbb{P}^1\backslash\{0, 1, \infty\}$ の相異なる $r-3$ 点とし，各変数 X_i は A_W-次数 $\vec{x}_i$ を持つとします．

この $\mathbb{P}^1\backslash\{0, 1, \infty\}$ の相異なる $r-3$ 点 λ_i を固定することで，正規ウェイト系に付随する特異点を定める多項式 f_W を固定することができます．これを $f_{W,\lambda}$，して $R_{W,\lambda} := \mathbb{C}[x, y, z]/(f_{W,\lambda})$ と書くことにしましょう．

注意 71. W が双対 W^* を持つときには $r = 3$ なので，パラメーター λ は現れず，したがって三角圏 $\mathcal{T}_W$ は f_W の取り方によりません．

定理 72 ([9]). $g_W = 0$ ならば，次の代数的スタックとしての同型がある:

$$\mathcal{C}_{W,\lambda} \simeq \mathcal{C}_{A_W,\lambda}. \tag{14.3}$$

つまり，次のアーベル圏としての圏同値が成り立つ:

$$\mathrm{gr}-R_{W,\lambda}/\mathrm{tor}-R_{W,\lambda} \simeq \mathrm{gr}-R_{A_W,\lambda}/\mathrm{tor}-R_{A_W,\lambda}. \tag{14.4}$$

□

とくに Geigle-Lenzing の結果 [6] により，$D^b(\mathrm{coh}(\mathcal{C}_{A_W,\lambda}))$ が full strongly exceptional collection を持つことが知られています．よって，これらの結果を合わせると，次のことがわかります：

系 73 ([9]). $g_W = 0$ のとき，$\mathcal{T}_W$ は *full exceptional collection* を持つ． □

15. おわりに

前節のあたりまで書いたところでこの原稿の締め切りが過ぎてしまいました．必要最小限のことは書きましたが，$\epsilon_W = -1$ のときの有限次元代数の具体的表示，関係式をもつ箙の経路代数，のことや，三角圏 $\mathcal{T}_W$ 上に自然に定まる Bridgeland-Douglas 安定性条件・t-構造のことなど，まだまだ多くの書くべきことが残ってしまいました．

大変申し訳ありませんが，今回は残念ながらここで筆を置くことにします．可能ならもう少し詳しく書いたものをそのうちどこかのホームページに置きたいと考えています．

References

[1] M. Auslander and I. Reiten, *Almost split sequences for Z-graded rings*, Singularities, representation of algebras, and vector bundles (Lambrecht, 1985), 232–243, Lecture Notes in Math., 1273, Springer, Berlin, 1987.

[2] A. Bondal and M. Kapranov, *Enhanced triangulated categories*, Math. USSR Sbornik, Vol.70, (1991) No.1, 93–107.

[3] R. Buchweitz, *Maximal Cohen-Macaulay modules and Tate-cohomology over Gorenstein rings*, a note.

[4] I. V. Dolgachev, *Conic quotient singularities of complex surfaces*, (Russian) Funkcional. Anal. i Prilo v zen. 8 (1974), no. 2, 75–76.

[5] A. M. Gabrielov, *Dynkin diagrams of unimodal singularities*, (Russian) Funkcional. Anal. i Prilo v zen. 8 (1974), no. 3, 1–6.

[6] W. Geigle and H. Lenzing, *A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite-dimensional algebras*, Singularities, representation of algebras, and vector bundles (Lambrecht, 1985), 9–34, Lecture Notes in Math., 1273, Springer, Berlin, 1987.

[7] H. Kajiura, K. Saito and A. Takahashi, *Matrix Factorizations and Representations of Quivers II: type ADE case*, math.AG/0511155, to appear in Adv. Math..

[8] ———, *Categories of matrix Factorizations for exceptional singularities*, in preparation.

[9] ———, *Weighted projective lines associated to regular weight systems*, in preparation.

[10] D. Orlov, *Derived categories of coherent sheaves and triangulated categories of singularities*, math.AG/0503632

[11] K. Saito, *Duality for Regular Systems of Weights*, Asian. J. Math. 2 no.4 (1998) 983-1048.

[12] ———, *Around the Theory of the Generalized Weight System: Relations with Singularity Theory, the Generalized Weyl Group and Its Invariant Theory, Etc.*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) Vol.183 (1998) 101- 143.

[13] A. Takahashi, *K. Saito's Duality for Regular Weight Systems and Duality for Orbifoldized Poincaré Polynomials*, Commun. Math. Phys. 205 (1999) 571-586.

[14] ———, *Matrix Factorizations and Representation of Quivers I*, math.AG/0506347.

[15] Y. Yoshino, *Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings*, London Mathematical Society Lecture Note Series, 146, Cambridge University Press, Cambridge, 1990. viii+177 pp.

Research Institute for Mathematical Sciences
Kyoto University
Kyoto, Kyoto 606-8502 JAPAN
E-mail address: atsushi@kurims.kyoto-u.ac.jp

加群の圏の分類

RYO TAKAHASHI (高橋 亮)

R を可換 Noether 環とする。Mod R で R 加群の圏を表し，mod R で有限生成 R 加群全体のなす Mod R の充満部分圏を表す。有限生成射影 R 加群の有限鎖複体を完全鎖複体という。$\mathcal{D}(R)$ を Mod R の導来圏とし，$\mathcal{D}_{\mathrm{perf}}(R)$ を完全鎖複体と同型な鎖複体全体のなす$\mathcal{D}(R)$ 充満部分圏とする。三角圏の三角充満部分圏で，直和因子で閉じているものをépaisse 部分圏という。Spec R の部分集合 S について,「$\mathfrak{p} \in S$ かつ $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\, R$ ならば $\mathfrak{q} \in S$」が成り立つとき，S は特殊化で閉じているという。鎖複体 X に対し，$H(X)$ で X のホモロジー加群を表す（すなわち $H(X) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} H_i(X)$）。$R$ 加群 M に対し，$\mathrm{Supp}\, M = \{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \}$ とおく。1990年前後に，Hopkins [1] と Neeman [3] が次の分類定理を証明した。

定理 1 (Hopkins-Neeman). 次の一対一対応がある。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{D}_{\mathrm{perf}}(R) \text{ の} \\ \text{épaisse 部分圏} \end{array} \right\} \underset{g_1}{\overset{f_1}{\rightleftarrows}} \left\{ \begin{array}{l} \text{特殊化で閉じた} \\ \mathrm{Spec}\, R \text{ の部分集合} \end{array} \right\}$$

f_1 と g_1 はそれぞれ $f_1(\mathcal{X}) = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} \mathrm{Supp}\, H(X)$ と $g_1(S) = \{ X \in \mathcal{D}_{\mathrm{perf}}(R) \mid \mathrm{Supp}\, H(X) \subseteq S \}$ で与えられる。

mod R の充満部分圏で部分加群，商加群，拡大で閉じているものを Serre 部分圏という。すなわち Serre 部分圏とは，有限生成 R 加群の任意の完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ に対して「$B \in \mathcal{M} \Leftrightarrow A, C \in \mathcal{M}$」となる mod R の充満部分圏 $\mathcal{M}$ のことである。mod R の充満部分圏で核，余核，拡大で閉じているものを連接部分圏という。言い換えると，連接部分圏とは，有限生成 R 加群の任意の完全列 $A \to B \to C \to D \to E$ に対して「$A, B, D, E \in \mathcal{M} \Rightarrow C \in \mathcal{M}$」となる mod R の充満部分圏 $\mathcal{M}$ のことである。定義からすぐわかるように，Serre 部分圏は常に連接部分圏である。Serre 部分圏については次の分類がある。

命題 2. 次の一対一対応がある。

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathrm{mod}\, R \text{ の} \\ \text{Serre 部分圏} \end{array} \right\} \underset{g_2}{\overset{f_2}{\rightleftarrows}} \left\{ \begin{array}{l} \text{特殊化で閉じた} \\ \mathrm{Spec}\, R \text{ の部分集合} \end{array} \right\}$$

f_2 と g_2 はそれぞれ $f_2(\mathcal{M}) = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \mathrm{Supp}\, M$ と $g_2(S) = \{ M \in \mathrm{mod}\, R \mid \mathrm{Supp}\, M \subseteq S \}$ で与えられる。

この命題から次の系が得られる。

系 3. M, N を有限生成 R 加群とする。もし $\mathrm{Supp}\, M \subseteq \mathrm{Supp}\, N$ ならば，M は N で生成された（i.e. N を含む最小の）mod R の Serre 部分圏に入る。

Hovey [2] は，Hopkins-Neeman の定理と上の命題を用いて次の定理を証明した。

定理 4 (Hovey). R を Noether 正則環の準同型像とする。このとき，

(1) 次の一対一対応がある。

$$\left\{\begin{matrix}\text{mod}\,R\,\text{の}\\ \text{連接部分圏}\end{matrix}\right\} \underset{g_3}{\overset{f_3}{\rightleftarrows}} \left\{\begin{matrix}\mathcal{D}_{\text{perf}}(R)\,\text{の}\\ \text{épaisse}\quad\text{部分圏}\end{matrix}\right\}$$

f_3 と g_3 はそれぞれ $f_3(\mathcal{M}) = \{X \in \mathcal{D}_{\text{perf}}(R) \mid H(X) \in \mathcal{M}\}$ と $g_3(\mathcal{X}) = (\{H(X) \mid X \in \mathcal{X}\}$ で生成された $\text{mod}\,R$ の連接部分圏) で与えられる。

(2) $\text{mod}\,R$ の連接部分圏はみな Serre 部分圏である。

第一の主定理は，Hovey の定理の R に関する条件は省くことができる，という主張である。

定理 5. R を可換 Noether 環とする。このとき，$\text{mod}\,R$ の任意の連接部分圏が Serre 部分圏である。結果として，次の可換図式が成り立つ。

$$\begin{tikzcd}
\left\{\begin{matrix}\mathcal{D}_{\text{perf}}(R)\,\text{の}\\ \text{épaisse 部分圏}\end{matrix}\right\} \arrow[r, shift left, "f_1"] \arrow[d, shift left, "g_3"] \arrow[dr, phantom, "\square"] & \left\{\begin{matrix}\text{特殊化で閉じた}\\ \text{Spec}\,R\,\text{の部分集合}\end{matrix}\right\} \arrow[l, shift left, "g_1"] \arrow[d, shift left, "g_2"] \\
\left\{\begin{matrix}\text{mod}\,R\,\text{の}\\ \text{連接部分圏}\end{matrix}\right\} \arrow[u, shift left, "f_3"] \arrow[r, equal] & \left\{\begin{matrix}\text{mod}\,R\,\text{の}\\ \text{Serre 部分圏}\end{matrix}\right\} \arrow[u, shift left, "f_2"]
\end{tikzcd}$$

証明. $\mathcal{M}$ を $\text{mod}\,R$ の連接部分圏とする。$\mathcal{M}$ が Serre 部分圏になることを示す。そのためには，$\mathcal{M}$ が部分加群で閉じていることを確かめれば十分である。そこで，$\mathcal{M}$ は部分加群で閉じていないと仮定する。このとき，$\mathcal{M}$ に属する R 加群 M と，M の部分加群 N で $\mathcal{M}$ に属さないものが存在する。R は Noether 環で M は有限生成 R 加群なので，M は Noether 加群である。よって，N を M の部分加群 N' で $\mathcal{M}$ に属さないものの中で包含関係に関して極大にとることができる。N は M と異なるから，元 $x \in M - N$ がとれる。$L = N + Rx$ とおくと，これは N を真に含む M の部分加群である。N の極大性より，L は $\mathcal{M}$ に属する。$I = \{a \in R | ax \in N\}$ とおくと，これは R のイデアルである。L/N は R/I と同型なので，R 加群の完全列

$$0 \to N \to L \xrightarrow{\pi} R/I \to 0$$

が存在する。$N \notin \mathcal{M}$ かつ $L \in \mathcal{M}$ であり，$\mathcal{M}$ は核で閉じているので，上の完全列から $R/I \notin \mathcal{M}$ であることがわかる。

一方，上の完全列中の写像 π は，$y \in L$ の L/IL における剰余類を $\pi(y)$ に移す R/I 加群の全射準同型写像

$$\overline{\pi} : L/IL \to R/I$$

を誘導する。R/I は R/I 加群として射影的なので，写像 $\overline{\pi}$ は分裂全射である。よって，R/I は L/IL の直和因子と同型である。R は Noether 環なので，イデアル I は有限生成である。そこで $I = (a_1, a_2, \ldots, a_n)R$ とかくと，R 加群の完全列

$$R^{\oplus n} \xrightarrow{(a_1,\ldots,a_n)} R \longrightarrow R/I \longrightarrow 0$$

が得られる。この完全列に R 加群 L をテンサーすると，完全列

$$L^{\oplus n} \xrightarrow{(a_1,\ldots,a_n)} L \longrightarrow L/IL \longrightarrow 0.$$

が得られる。ここで定義より，$\mathcal{M}$ は有限直和と余核と直和因子で閉じていることがわかるので，$L^{\oplus n}$ は $\mathcal{M}$ に属し，よって L/IL，R/I も $\mathcal{M}$ に属する。これは矛盾である。したがって $\mathcal{M}$ は部分加群で閉じる。 $\square$

$\mathcal{D}(R)$ の三角充満部分圏で任意の直和で閉じているものを localizing 部分圏といい，Bousfield localization が任意の直和と可換になる localizing 部分圏を smashing 部分圏という。Neeman [3] は次の定理を示した。

定理 6 (Neeman). 次の二組の一対一対応がある。

$$
\begin{array}{ccc}
\left\{\begin{matrix}\mathcal{D}(R)\text{ の} \\ \text{localizing 部分圏}\end{matrix}\right\} & \underset{g_4}{\overset{f_4}{\rightleftarrows}} & \left\{\begin{matrix}\operatorname{Spec} R\text{ の} \\ \text{部分集合}\end{matrix}\right\} \\
\subseteq\uparrow & \square & \subseteq\uparrow \\
\left\{\begin{matrix}\mathcal{D}(R)\text{ の} \\ \text{smashing 部分圏}\end{matrix}\right\} & \underset{g_5}{\overset{f_5}{\rightleftarrows}} & \left\{\begin{matrix}\text{特殊化で閉じた} \\ \operatorname{Spec} R\text{ の部分集合}\end{matrix}\right\}
\end{array}
$$

f_4 と g_4 はそれぞれ $f_4(\mathcal{X}) = \{\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_R^{\mathbf{L}} X \neq 0\, (\exists X \in \mathcal{X}) \,\}$ と $g_4(S) = (\{\, \kappa(\mathfrak{p}) \mid \mathfrak{p} \in S \,\}$ で生成された $\mathcal{D}(R)$ の localizing 部分圏) で与えられ，f_5 と g_5 はそれぞれ f_4 と g_4 の制限写像である。

R 加群 M に対し，Ass M　M の素因子全体の集合を表す。第二の主定理は，上の Neeman の定理の加群版である。

定理 7. R を可換 Noether 環とする。このとき，次の可換図式が成り立つ。

$$
\begin{array}{ccc}
\left\{\begin{matrix}\text{部分加群と拡大で閉じた} \\ \operatorname{mod} R\text{ の充満部分圏}\end{matrix}\right\} & \underset{g_6}{\overset{f_6}{\rightleftarrows}} & \left\{\begin{matrix}\operatorname{Spec} R\text{ の} \\ \text{部分集合}\end{matrix}\right\} \\
\subseteq\uparrow & \square & \subseteq\uparrow \\
\left\{\begin{matrix}\operatorname{mod} R\text{ の} \\ \text{Serre 部分圏}\end{matrix}\right\} & \underset{g_2}{\overset{f_2}{\rightleftarrows}} & \left\{\begin{matrix}\text{特殊化で閉じた} \\ \operatorname{Spec} R\text{ の部分集合}\end{matrix}\right\}
\end{array}
$$

f_6 と g_6 はそれぞれ $f_6(\mathcal{M}) = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \operatorname{Ass} M$ と $g_6(S) = \{\, M \in \operatorname{mod} R \mid \operatorname{Ass} M \subseteq S \,\}$ で与えられ，それぞれ命題 2 の f_2 と g_2 を誘導する。

この定理は次の二つの補題を用いて示される。

補題 8. $\mathcal{M}$ を部分加群と拡大で閉じた $\operatorname{mod} R$ の充満部分圏とする。M を有限生成 R 加群とし，$\operatorname{Ass} M = \{\mathfrak{p}\}$ と仮定する。このとき，もし $R/\mathfrak{p} \in \mathcal{M}$ ならば $M \in \mathcal{M}$ である。

証明. M が $\mathcal{M}$ に入らないと仮定する。$M_0 = M$ とおき，$h_{0,1}, \dots, h_{0,s_0}$ を有限生成 R 加群 $\operatorname{Hom}_R(M_0, R/\mathfrak{p})$ の生成系とする。次の完全列が存在する。

$$
0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_0 \xrightarrow{\begin{pmatrix} h_{0,1} \\ \vdots \\ h_{0,s_0} \end{pmatrix}} (R/\mathfrak{p})^{\oplus s_0}
$$

$M_0 = M \notin \mathcal{M}$ かつ $(R/\mathfrak{p})^{\oplus s_0} \in \mathcal{M}$ であり，$\mathcal{M}$ は部分加群と拡大で閉じているので，$M_1 \notin \mathcal{M}$ であることがわかる。特に $M_1 \neq 0$ なので $\operatorname{Ass} M_1 = \{\mathfrak{p}\}$ である。$h_{1,1}, \ldots, h_{1,s_1}$ を R 加群 $\operatorname{Hom}_R(M_1, R/\mathfrak{p})$ の生成系とすると，次の完全列が得られる。

$$0 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} h_{1,1} \\ \vdots \\ h_{1,s_1} \end{pmatrix}} (R/\mathfrak{p})^{\oplus s_1}.$$

$M_1 \notin \mathcal{M}$ かつ $(R/\mathfrak{p})^{\oplus s_1} \in \mathcal{M}$ なので，$M_2 \notin \mathcal{M}$ であり $\operatorname{Ass} M_2 = \{\mathfrak{p}\}$ であることがわかる。この操作を繰り返すと，各整数 $i \geq 0$ に対し，R 加群の完全列

$$0 \longrightarrow M_{i+1} \longrightarrow M_i \xrightarrow{\begin{pmatrix} h_{i,1} \\ \vdots \\ h_{i,s_i} \end{pmatrix}} (R/\mathfrak{p})^{\oplus s_i},$$

が得られる。ただし，$h_{i,1}, \ldots, h_{i,s_i}$ は R 加群 $\operatorname{Hom}_R(M_i, R/\mathfrak{p})$ の生成系であり，$\operatorname{Ass} M_i = \{\mathfrak{p}\}$ である。R 加群の降鎖列 $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$ を $\mathfrak{p}$ で局所化すると，$R_\mathfrak{p}$ 加群の降鎖列

$$M_\mathfrak{p} = (M_0)_\mathfrak{p} \supseteq (M_1)_\mathfrak{p} \supseteq (M_2)_\mathfrak{p} \supseteq \cdots$$

が得られる。各 $(M_i)_\mathfrak{p}$ は $R_\mathfrak{p}$ 加群として長さ有限なので，$(M_t)_\mathfrak{p} = (M_{t+1})_\mathfrak{p} = (M_{t+2})_\mathfrak{p} = \cdots$ となる整数 t が存在する。完全列

$$0 \longrightarrow (M_{t+1})_\mathfrak{p} \xrightarrow{=} (M_t)_\mathfrak{p} \xrightarrow{\begin{pmatrix} (h_{t,1})_\mathfrak{p} \\ \vdots \\ (h_{t,s_t})_\mathfrak{p} \end{pmatrix}} \kappa(\mathfrak{p})^{\oplus s_t},$$

より，$\operatorname{Hom}_{R_\mathfrak{p}}((M_t)_\mathfrak{p}, \kappa(\mathfrak{p})) = R_\mathfrak{p}(h_{t,1})_\mathfrak{p} + \cdots + R_\mathfrak{p}(h_{t,s_t})_\mathfrak{p} = 0$ であることが従う。よって $(M_t)_\mathfrak{p} = 0$ である。これは $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M_t \subseteq \operatorname{Supp} M_t$ であることに反する。ゆえに M は $\mathcal{M}$ に入らなくてはならない。 □

補題 9. $\mathcal{M}$ を部分加群と拡大で閉じた $\operatorname{mod} R$ の充満部分圏とし，M を有限生成 R 加群とする。任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ に対し，$R/\mathfrak{p}$ が $\mathcal{M}$ に入ると仮定する。このとき M も $\mathcal{M}$ に入る。

証明. $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_s$ を M の素因子全体とし，

$$0 = N_1 \cap \cdots \cap N_s$$

を M の零部分加群 0 の無駄のない準素分解とする。ただし各 N_i は M の $\mathfrak{p}_i$ 準素部分加群である。このとき自然な準同型写像

$$M = M/N_1 \cap \cdots \cap N_s \to M/N_1 \oplus \cdots \oplus M/N_s$$

は単射である。$\operatorname{Ass} M/N_i = \{\mathfrak{p}_i\}$ なので補題 8 より各 M/N_i は $\mathcal{M}$ に入る。よって $M/N_1 \oplus \cdots \oplus M/N_s$ も $\mathcal{M}$ に入り，したがって M も $\mathcal{M}$ に入る。 □

定理 7 の証明. $\mathcal{M}$ を部分加群と拡大で閉じた $\operatorname{mod} R$ の充満部分圏とする。$g_6 f_6(\mathcal{M})$ は，$\operatorname{Ass} N \subseteq \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \operatorname{Ass} M$ をみたす有限生成 R 加群 N 全体から成る。よって $g_6 f_6(\mathcal{M})$ が $\mathcal{M}$ を含むことは明らかである。N を $\operatorname{Ass} N \subseteq \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \operatorname{Ass} M$ をみたす有限生成 R 加群とする。$\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} N$ に対し，$\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ となる R 加群 $M \in \mathcal{M}$ がとれる。単射準同型

$R/\mathfrak{p} \to M$ が存在するので，$R/\mathfrak{p}$ は $\mathcal{M}$ に入る。よって補題 9 より，N も $\mathcal{M}$ に入る。こうして $g_6 f_6(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ である。

S を $\operatorname{Spec} R$ の部分集合とする。$f_6 g_6(S)$ は，$\operatorname{Ass} M \subseteq S$ をみたす有限生成 R 加群 M 全体に関する $\operatorname{Ass} M$ たちの和集合である。よって $f_6 g_6(S)$ が S に含まれることは明らかである。また，$\mathfrak{p} \in S$ に対し $\operatorname{Ass} R/\mathfrak{p} = \{\mathfrak{p}\} \subseteq S$ なので，$\mathfrak{p}$ は $f_6 g_6(S)$ に入る。ゆえに $f_6 g_6(S) = S$ である。以上により，f_6 は g_6 を逆写像にもつ全単射である。

一方，S を特殊化で閉じた $\operatorname{Spec} R$ の部分集合とする。M を $\operatorname{Ass} M \subseteq S$ をみたす有限生成 R 加群とし，$\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} M$ をとる。このとき，$\mathfrak{p}$ に含まれる素イデアル $\mathfrak{q} \in \operatorname{Min} M \subseteq \operatorname{Ass} M$ がとれる。$\mathfrak{q}$ は S に入り S は特殊化で閉じているので，$\mathfrak{p}$ も S に入る。こうして，$g_6(S) = \{ M \in \operatorname{mod} R \mid \operatorname{Ass} M \subseteq S \}$ は $g_2(S) = \{ M \in \operatorname{mod} R \mid \operatorname{Supp} M \subseteq S \}$ に一致する。

$\mathcal{M}$ を $\operatorname{mod} R$ の Serre 部分圏とする。加群 $N \in \mathcal{M}$ と素イデアル $\mathfrak{p} \in \operatorname{Supp} N$ をとる。$\mathfrak{p}$ に含まれる素イデアル $\mathfrak{q} \in \operatorname{Min} N$ をとると，$\mathfrak{q}$ は N の素因子なので単射準同型 $R/\mathfrak{q} \to N$ が存在する。$\mathcal{M}$ は部分加群で閉じているので，$R/\mathfrak{q}$ は $\mathcal{M}$ に属する。自然な全射準同型 $R/\mathfrak{q} \to R/\mathfrak{p}$ があり $\mathcal{M}$ は商加群で閉じているので，$R/\mathfrak{p}$ も $\mathcal{M}$ に属する。よって $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} R/\mathfrak{p} \subseteq \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \operatorname{Ass} M$ である。したがって $f_2(\mathcal{M}) = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \operatorname{Supp} M$ は $f_6(\mathcal{M}) = \bigcup_{M \in \mathcal{M}} \operatorname{Ass} M$ に含まれ，ゆえに $f_6(\mathcal{M}) = f_2(\mathcal{M})$ であることがわかる。こうして f_2 と g_2 はそれぞれ f_6 と g_6 から誘導される。 □

ここで系 3 に類似する結果が成り立つことを確かめる。

系 10. M と N を有限生成 R 加群とし，$\operatorname{Ass} M \subseteq \operatorname{Ass} N$ と仮定する。このとき，N で生成された，部分加群と拡大で閉じた $\operatorname{mod} R$ の充満部分圏に M は属する。

証明. N で生成された，部分加群と拡大で閉じた $\operatorname{mod} R$ の充満部分圏を $\mathcal{E}$ で表す。補題 9 より，任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ に対して $R/\mathfrak{p}$ が $\mathcal{E}$ に入ることを示せばよい。$\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} M$ をとると，仮定より $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass} N$ である。したがって R 加群の単射準同型 $R/\mathfrak{p} \to N$ が存在する。N は $\mathcal{E}$ に属し $\mathcal{E}$ は部分加群で閉じているので，$R/\mathfrak{p}$ も $\mathcal{E}$ に属する。 □

最後に，写像 f_6 と g_6 が作る，部分加群と拡大で閉じた $\operatorname{mod} R$ の充満部分圏と $\operatorname{Spec} R$ の部分集合の間の対応を調べる。I を R のイデアルとし，M, N を R 加群とする。$\Gamma_I(M)$ で I のべきで零化される M の元全体の集合を表す。これは M の部分加群となり，M の **I-torsion 部分加群**と呼ばれる。$\Gamma_I(M) = M$ のとき M は I-torsion であるといい，$\Gamma_I(M) = 0$ のとき M は **I-torsionfree** であるという。M が I-torsion であることと $\operatorname{Ass} M \subseteq V(I)$ となることが同値であり，M が I-torsionfree であることと $\operatorname{Ass} M \cap V(I) = \emptyset$ となることが同値である。$\operatorname{grade}(N, M) = \inf\{ i \mid \operatorname{Ext}^i_R(N, M) \neq 0 \}$，$\operatorname{grade}(I, M) = \operatorname{grade}(R/I, M)$，$\operatorname{grade} I = \operatorname{grade}(I, R)$，$\operatorname{grade} M = \operatorname{grade}(\operatorname{Ann} M, R)$ とおく。

例 11. 写像 f_6 と g_6 により，次の対応が得られる。n を非負整数，I を R のイデアル，X を有限生成 R 加群とする。

(1) $\{ M \in \operatorname{mod} R \mid M \text{ は } I\text{-torsion} \} \leftrightarrow V(I)$
(2) $\{ M \in \operatorname{mod} R \mid \operatorname{grade}(X, M) > 0 \} \leftrightarrow \operatorname{Spec} R \setminus \operatorname{Supp} X$
(3) $\{ M \in \operatorname{mod} R \mid M \text{ は } I\text{-torsionfree} \}$
$= \{ M \in \operatorname{mod} R \mid \operatorname{grade}(I, M) > 0 \} \leftrightarrow D(I)$
(4) $\{ M \in \operatorname{mod} R \mid \operatorname{grade}(M, X) \geq n \} \leftrightarrow \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \operatorname{grade}(\mathfrak{p}, X) \geq n \}$
(5) $\{ M \in \operatorname{mod} R \mid \operatorname{rank} M = 0 \} = \{ M \in \operatorname{mod} R \mid \operatorname{grade} M > 0 \}$
$\leftrightarrow \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \operatorname{grade} \mathfrak{p} > 0 \}$

(6) $\{ M \in \operatorname{mod} R \mid X$ 上の非零因子は M 上の非零因子 $\}$
$\leftrightarrow \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \operatorname{grade}(\mathfrak{p}, X) = 0 \}$
(7) $\{ M \in \operatorname{mod} R \mid M$ はねじれがない $\} \leftrightarrow \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \operatorname{grade} \mathfrak{p} = 0 \}$
(8) $\{ M \in \operatorname{mod} R \mid \operatorname{ht} \operatorname{Ann} M \geq n \} \leftrightarrow \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \operatorname{ht} \mathfrak{p} \geq n \}$
(9) $\{ M \in \operatorname{mod} R \mid \dim M \leq n \} \leftrightarrow \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \dim R/\mathfrak{p} \leq n \}$
(10) $\{ M \in \operatorname{mod} R \mid M$ は長さ有限 $\} \leftrightarrow \operatorname{Max} R$.

上の例において (1)(4)(5)(8)(9)(10) については，左辺は $\operatorname{mod} R$ の Serre 部分圏であり，右辺は特殊化で閉じた $\operatorname{Spec} R$ の部分集合である。したがってこれら 6 つの対応は実際には f_2 と g_2 によって与えられる。

REFERENCES

[1] HOPKINS, M. J. Global methods in homotopy theory. *Homotopy theory (Durham, 1985)*, 73–96, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 117, *Cambridge Univ. Press, Cambridge*, 1987.
[2] HOVEY, M. Classifying subcategories of modules. *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), no. 8, 3181–3191.
[3] NEEMAN, A. The chromatic tower for $D(R)$. With an appendix by Marcel Bökstedt. *Topology* **31** (1992), no. 3, 519–532.
[4] TAKAHASHI, R. Classifying subcategories of modules over a commutative noetherian ring. Preprint (2006).
[5] THOMASON, R. W. The classification of triangulated subcategories. *Compositio Math.* **105** (1997), no. 1, 1–27.

〒390-8621　長野県松本市旭 3-1-1
信州大学理学部数理・自然情報科学科
E-mail address: takahasi@math.shinshu-u.ac.jp

ON THE PERIODICITY OF SYZYGY FUNCTOR
(SYZYGY FUNCTOR の周期性について)

YOSUKE OHNUKI
(大貫 洋介)

ABSTRACT. In this paper, we study the periodicity of syzygy functors or Auslander-Reiten translation which is related to whether Auslander-Reiten components are the tubes. First recall the basic properties of these periodicity and the classification of symmetric algebras of tame type. Next we suggest the method to prove that any module of some tame self-injective algebra is periodic with respect to syzygy functor.

1. 定義と記号

この報告では, 自己入射的な多元環上の射影的でない直既約な加群が syzygy 関手や Auslander-Reiten 関手に関して周期的であることに関する最近の研究の概説である. これらの周期性は Auslander-Reiten component の形が tube だけからなる多元環の研究と深く関連し調べられている.

以下, K を代数的閉体, 環は K 上の基本 (basic) 有限次元多元環を考えるものとする. 多元環 Λ に対して Λ^e を Λ の enveloping 多元環 $\Lambda^{op} \otimes_K \Lambda$ とし, 以後簡単のためテンサー積の記号 $\otimes_K$ を $\otimes$ と表すことにする. また, 加群は有限次元右加群を意味し, 有限次元右 Λ-加群の成す圏を $\mathrm{mod}\,\Lambda$ と表す. $\mathrm{mod}\,\Lambda^e$ は Λ-Λ-両側加群の成す圏に同値であることに注意しておく.

Lemma 1. 多元環 Λ に対して $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を互いに直交する原始べき等元全体の集合とする. このとき, 直既約な射影 Λ^e 加群は $\Lambda e_i \otimes e_j \Lambda$ の形に同型である. ただし, $e_i, e_j \in \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ とする.

この Lemma により, $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ を互いに直交する Λ の原始べき等元全体の集合とする. このとき, $\{e_i \otimes e_j\}_{i,j}$ が互いに直交する Λ^e の原始べき等元全体の集合であることに注意しておく.

Lemma 2. 多元環 Λ に対して, P を射影 Λ^e-加群とし M を任意の Λ-加群とする. すると $M \otimes_\Lambda P$ は射影 Λ-加群である.

Proof. 直既約な射影 Λ-加群 $e_j\Lambda$ と K 上の n-次元ベクトル空間 V について, $V \otimes e_j\Lambda$ は $e_i\Lambda$ の n 個のコピーの直和に同型なので, $V \otimes e_j\Lambda$ は射影 Λ-加群である.
Lemma 1. により, P は Λ^e-加群として $\oplus_{i,j} (\Lambda e_i \otimes e_j\Lambda)$ に同型である. よって, $M \otimes_\Lambda P \cong \oplus_{i,j} ((M \otimes_\Lambda \Lambda e_i) \otimes e_j\Lambda)$ により $M \otimes P$ は射影 Λ-加群である. □

Λ-加群 M に対して, M の射影被覆 $P_\Lambda(M) \to M$ を考え, その核として M の syzygy 加群 $\Omega_\Lambda(M)$ を定義する. このとき, Λ-加群としての次の完全列が得られる.

$$0 \longrightarrow \Omega_\Lambda(M) \longrightarrow P_\Lambda(M) \longrightarrow M \longrightarrow 0.$$

The paper is in a final form and no version of it will be submitted for publication elsewhere.

ここで, 多元環 Λ が対称的ならば syzygy 関手 Ω はその安定圏の自己同型関手を導くことに注意する. 簡単のために, この自己同型関手を $\Omega : \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ と表すことにする.

Λ-module M が Λ-periodic であるとは $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ において M が $\Omega^n_\Lambda(M)$ に同型のときとする (ただし, n はある自然数とする). さらに, Λ の射影的でない直既約な全ての加群が Λ-periodic のとき Λ の加群が全て periodic であると呼ぶことにする.

Lemma 3. Λ が Λ^e-*periodic* ならば, Λ の加群は全て *periodic* である.

Proof. Λ が Λ^e-periodic であるとし, Λ^e-加群として $\Omega^n_{\Lambda^e}(\Lambda) \cong \Lambda$ を満たす自然数を n とする. すると, $\mathrm{mod}\,\Lambda^e$ としての完全列

$$0 \to \Lambda \to P_n \to P_{n-1} \to \cdots \to P_2 \to P_1 \to \Lambda \to 0 \tag{1.1}$$

が得られる. ただし, P_i は全て射影 Λ^e-加群とする. ここで, 射影的でない直既約な Λ-加群 M を用いてテンサー関手 $M \otimes_\Lambda -$ を完全列 (1.1) に作用させると, Λ-加群としての完全列

$$0 \to M \to M \otimes_\Lambda P_n \to M \otimes_\Lambda P_{n-1} \to \cdots \to M \otimes_\Lambda P_2 \to M \otimes_\Lambda P_1 \to M \to 0$$

が得られる. Lemma 2. により, この完全列から左側の M を取り除いた完全列は $\mathrm{mod}\,\Lambda$ における M の射影分解 (projective resolution) なので $\Omega^n_\Lambda(M)$ は M に同型となり, Λ の加群は periodic である. □

2. TAME 型の対称多元環について

自己入射的な多元環 Λ に対して, τ を Λ の Auslander-Reiten 関手, $\mathcal{N}$ を Λ の中山関手とする. 多元環が自己入射的ならば, これらは射影加群を射影加群に対応させるので, 安定圏 $\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda$ の自己同型関手を導く. 簡単のために, これらを安定圏の間の自己同型関手として再び τ や $\mathcal{N}$ と表すことにする. [1] において, 自己入射的な多元環の安定圏については $\tau \cong \Omega^2\mathcal{N} \cong \mathcal{N}\Omega^2$ が成り立つことが示されている.

最初に, 加群の syzygy 関手 Ω に関する周期性と Auslander-Reiten 関手 τ に関する周期性, 及び中山関手 $\mathcal{N}$ に関する周期性の関連について調べる.

Lemma 4. 自己入射的な多元環上の加群 M が $\Omega, \tau, \mathcal{N}$ のうちの 2 つに関して周期的ならば, 残りの関手に関しても周期的である.

特に, Λ が対称的ならば $\mathcal{N}$ が恒等関手に同値なので, M が Ω に関して周期的であることと, τ に関して周期的であることは同値である.

多元環の加群が全て periodic であるという性質は Auslander-Reiten component の形と密接に関連している, 実際に, 多元環 Λ が対称的ならば, 加群が全て periodic であるという性質とその Auslander-Reiten component が全て tube の形を持つことが同値となる (メビウスの輪のように tube が捩れていることもあるが). [10], [11] において, 射影加群を含まない Auslander-Reiten component が τ-periodic な加群を含むならば, その component 内の加群は全て τ に関して周期的である. すなわち, その component は tube の形を持つ. また, 多元環が対称的でなくてもある自然数 n により $\mathcal{N}^n = id_{\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda}$ が成り立つならば, 同様の議論が成立する.

ここでは, どのような多元環ならば全ての加群が (syzygy 関手に関して) periodic であるかを調べることが目的であり, 関連するいくつかの結果が示されている. 既知の結果は Auslander-Reiten component が tube であるもの (τ-periodic) に限られることに注意して

おく. ここでは, tame 型の自己入射的な多元環の加群が全て periodic かどうかに関する, 次の定理を紹介する.

Theorem 5 ([6]). 単純でない既約 *(connected)* な自己入射的な多元環 Λ に対して次の条件は同値である.

(1) Λ は *tame* 型の対称的な多元環で, その全ての加群は *periodic* である.
(2) Λ は次のいずれかに同型である.
- *Dynkin* 型の対称的な多元環の *socle deformation.*
- *tubular* 型の対称的な多元環の *socle deformation.*
- *quoternion* 型の多元環.

$\{\mathbb{A}_m, \mathbb{D}_m, \mathbb{E}_6, \mathbb{E}_7, \mathbb{E}_8\}$ のいずれかに一致する図形を Dynkin 図形と呼び, 向きを考えないとき Dynkin 図形 Δ となる有向グラフ $\overrightarrow{\Delta}$ について, この path 多元環を $H = K\overrightarrow{\Delta}$ とする. すると, H は hereditary であり傾斜 H-加群 T を持つ. ここで, T が傾斜加群であるとは, $\mathrm{Ext}^1_H(T,T) = 0$ を満たし, かつ T の互いに非同型な直既約直和因子の数が n 個であるとする.

ここで T の準同型環 $B = \mathrm{End}_H T$ は Δ 型の傾斜多元環と呼ばれ, この repetitive 多元環 $\widehat{B}$ とその同型写像により作られる admissible 群 G を用いて構成される軌道多元環 $\widehat{B}/G$ として Dynkin Δ 型の自己入射多元環を定義する.

同様に, tame concealed 多元環を元に tube に属する加群を用いて one-point 拡大を繰り返し取ることで tubular 型と呼ばれる $(2,2,2,2), (3,3,3), (2,4,4), (2,3,6)$ となるまで拡大したとき, 拡大環を tubular 多元環と呼ぶ. tubular 多元環 B の repetitive 多元環 $\widehat{B}$ とその同型写像により生成される admissible 群 G を用いて構成される軌道多元環 $\widehat{B}/G$ を tubular 型の自己入射多元環とする。

Dynkin 型 や tubular 型の自己入射多元環 $A = \widehat{B}/G$ については, $\widehat{B}$ の正方向の自己同型写像 g により生成される無限群 $G = \langle g \rangle$ を用いてガロワ被覆 $\widehat{B} \to \widehat{B}/G = A$ を自然に構成することができる. Dynkin 型の自己入射多元環は standard な有限表現型、tubular 型の自己入射多元環は standard な non-domestic polynomial growth 多元環である.

また, socle deformation についても復習しておく. A を自己入射的な K 上の多元環とし, I を A の両側イデアル, $B = A/I$ を剰余多元環とする. また, $\{e_1, e_2, \ldots, e_m, e_{m+1}, \cdots e_n\}$ を A の互いに直交する原始べき等元の集合とし,

$$\begin{cases} e_i \in I & \text{ただし } i = 1, 2, \ldots, m \\ e_i \notin I & \text{ただし } i = m+1, m+2, \ldots, n \end{cases}$$

を満たすように並べたとき, べき等元 $e = \sum_{i=1}^{n}$ を考えると e の剰余元は B の単位元となる. ここで, 基礎体 K が代数的閉体なので B はある有向グラフと relation により表すことができるのだが, この有向グラフが有向サイクルを含まずに, かつ eAe のイデアル eIe が I の右から考えても左から考えても零化イデアルとなるとき ($eIe = \{eae \in eAe \mid Ieae = 0\} = \{eae \in eAe \mid eaeI = 0\}$), I は deforming イデアルと呼ばれる.

典型的な例としては, 自明な拡大環 $A \ltimes D(A)$ は deforming イデアル $D(A)$ を持つことを確かめることができる. なお, これを利用し, deforming イデアル I を持つ自己入射的な多元環 A については, 剰余多元環 $B = A/I$ の repetitive 多元環 $\widehat{B}$ とその自己同型写像から生成される群 G の軌道多元環 $\widehat{B}/G$ と socle 同値 ($A/\mathrm{soc}\,A \cong (\widehat{B}/G)/\mathrm{soc}(\widehat{B}/G)$) であることが示されている. (実際には, 自明な拡大環 $B \ltimes I$ と socle 同値である [15]). こ

のように deforming イデアルの違いで, 自己入射多元環 $\widehat{B}/G$ と socle 同値になる自己入射的な多元環を $\widehat{B}/G$ の socle deformation と呼ぶ.

次の条件を全て満たす多元環 Λ を quaternion 型と呼ぶ.

- Λ は既約な無限表現 tame 型の対称多元環である.
- Λ の加群は全て periodic であり, かつ射影的でない直既約 Λ-加群 の周期は全て 4 の倍数である.
- Λ のカルタン行列は non-singular である.

一般化された quaternion 型の有限群の群環のブロックは quaternion 型の多元環である。また, quaternion 型の多元環は有向グラフと relation により定義される無限表現型の 12 個の対称多元環のいずれかと森田同値となることが示されている [2], [3], [4].

Proposition 6. 自己入射的な有限表現型の多元環 Λ の全ての加群は *periodic* である.

Proof. 多元環 Λ が自己入射的なので, syzygy 関手 Ω は直既約 Λ-加群 M を直既約 Λ-加群 $\Omega(M)$ に移す. よって, すべての自然数 n について $\Omega^n(M) \not\cong M$ ならば非同型な直既約 Λ-加群が無限個存在してしまうので, Λ が有限表現型であることに反する. よって, 各直既約 Λ-加群 M について $\Omega^n(M) \cong M$ となる自然数 n が存在するので, Λ の全ての加群が periodic である. □

Corollary 7 ([14]). 単純でない既約な *tame* 型の対称多元環 Λ で, 全ての加群が *periodic* とすると, 次が成り立つ.

(1) Λ のカルタン行列が *singular* であることと, Λ がある *tubular* 多元環 B の自明な拡大環 $B \ltimes D(B)$ に同型である.
(2) Λ が無限表現型ならば, 単純加群の数は 10 個以下で, 多元環の *Auslander-Reiten component* から射影加群を取り除いたものはランク 6 以下の *tube* だけから成る.
(3) Λ は無限表現型で, かつカルタン行列は *non-singular* であるならば, 単純加群の数は 4 個以下で, 多元環の *Auslander-Reiten component* から射影加群を取り除いたものはランク 4 以下の *tube* だけから成る.

有限表現型のとき成り立つように, 対称的でない自己入射的な多元環についてもその全ての加群が周期的となる例は数多く存在する. tame 型の対称的でない自己入射的な多元環について成り立つのか, という自然な問題も考えられるが一般論は存在していない. [14] において, tame 型の対称的でない自己入射的な多元環の具体的な構成法や分類が与えられているので, この問題を調べる際には大変参考になる.

最後に, Λ^e-periodic である wild 多元環 Λ も存在することに注意しておく. 例えば Dynkin 型の preprojective 多元環 Λ は Λ^e-periodic である, よって, これは全ての加群が periodic である wild 多元環の例となる.

3. 多元環の全ての加群が周期的であることを示すための方法

Theorem 8. レヴィ列の長さが 2 以上の安定同値な自己入射的多元環 Λ と Λ' について, Λ の加群が全て *periodic* であることと, Λ' の加群が全て *periodic* であることは同値である.

Proof. 2 つの多元環の安定圏に対する, 安定同値な関手 $F : \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda \xrightarrow{\sim} \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda'$ について, [1] において, 各対象に対しては F が syzygy 関手と可換であることが示されている. すなわち安定圏の任意の対象 $M \in Ob(\underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda)$ に対して $F\Omega_\Lambda(M) \cong \Omega_{\Lambda'}F(M)$ が成り

立つ. ただし, $\Omega_\Lambda, \Omega_{\Lambda'}$ はそれぞれ Λ, Λ' の syzygy 関手とする. この同型により自然に $F\Omega^n_\Lambda(M) \cong \Omega^n_{\Lambda'}F(M)$ が得られるので, Λ の加群が全て periodic であることと, Λ' の加群が全て periodic であることは同値となる. □

[12], [13] において 2 つの自己入射多元環が導来同値ならば安定同値が導かれるので, 全ての加群が periodic であるという性質は多元環の導来同値の不変量でもあることが分かる.

Theorem 9 ([8]). 代数的閉体 K 上の既約な有限次元多元環 Λ について, 次の条件は同値である.

(1) 全ての単純 Λ-加群が Λ-*periodic* である.
(2) $\Omega^n_{\Lambda^e}(\Lambda) \cong {}_\Lambda\Lambda_\sigma$ と $\sigma(e_i) = e_i$ を満たす自然数 n と Λ の自己同型写像 σ が存在する. ただし, $\{e_i\}$ は Λ の互いに非同型な直交べき等元の全体の集合とする.

さらに Λ が, この同値条件をみたすならば, 自己入射的な多元環である.

ここで, Λ-加群 M と Λ の自己準同型写像 f について, M の元 m と Λ の元 a に対して $m \cdot a = mf(a)$ により作用を変化させた新しい Λ-加群を M_f と表す. また f が恒等写像 $id : \Lambda \xrightarrow{\sim} \Lambda$ のとき, 単に $M = M_\Lambda$ と表すこともある. 左加群 N に対する ${}_\sigma N$ や ${}_\Lambda N$ も同様に定める.

Theorem 10 ([5]). 単純でない既約な自己入射多元環 Λ について, 次の条件は同値である.

(1) Λ^e-加群としての同型 $\Omega^2_{\Lambda^e}(\Lambda) \cong {}_\Lambda\Lambda_\sigma$ を満たす Λ の自己同型写像 σ が存在する.
(2) Λ は中山多元環である.

よく知られた Auslander-Reiten component が全て tube から成る自己入射多元環の場合でさえ, 全ての加群が periodic であることは分かっていない. しかしながら, 一般に示されている結果がなくとも, Theorem 9. を利用する事で具体例ならば多元環の全ての加群が periodic であることを示すことができることがある.

Lemma 11. 自己入射多元環 Λ について, その単純加群が全て Λ-*periodic* であるとする. このとき, *Theorem 9.* で構成される Λ の自己同型写像 σ がある自然数 n について $\sigma^n = id$ を満たすならば Λ は Λ^e-*periodic* である. よって Λ の加群は全て *periodic* である.

ここで, Theorem 9. で与えられる Λ の自己同型写像 σ の構成法を紹介しておく. 詳細は [8] にある. 多元環 Λ の単純 Λ-加群が全て periodic であると仮定し, 全ての単純 Λ-加群 S について $\Omega^n_\Lambda(S) \cong S$ を満たす最小の自然数 n をとる. Λ の Λ^e-加群としての極小射影分解 (minimal projective resolution) が任意の単純 Λ-加群の極小射影分解をテンサー関手 $S \otimes_\Lambda -$ を作用させることで導くこと [11] や加群の長さの比較を繰り返すことにより, この自然数 n を用いて左 Λ-加群としての $\Omega^n_{\Lambda^e}(\Lambda) \cong \Lambda$ が得られる.

A^e-加群としての射影被覆 $\varphi : \oplus_i(Ae_i \otimes_k e_iA) \to \Omega^n_{\Lambda^e}(A)$ に対して $b = \varphi(\sum_i e_i \otimes e_i)$ とおき, 右から元 b を作用させることで左 Λ-加群としての同型写像 $\psi : \Lambda \to \Omega^n_{\Lambda^e}(\Lambda), \lambda \mapsto \lambda b$ が得られる. 実際に, この左 Λ-加群としての同型写像が Λ の自己同型写像 $\sigma : \Lambda \xrightarrow{\sim} \Lambda, r \mapsto \psi^{-1}(br)$ により Λ^e-加群として (両側 Λ-加群として) の同型写像 $\Omega^n_{\Lambda^e}(\Lambda) \cong {}_\Lambda\Lambda_\sigma$ を導く.

References

[1] M. Auslander, I. Reiten and S. O. Smalø, *Representation theory of Artin algebras*, Cambridge Studies in Adv. Math. 36, Cambridge 1995.

[2] K. Erdmann, *Algebras of quaternion defect groups I*, Math. Ann. 281 (1988). 545-560.
[3] K. Erdmann, *Algebras of quaternion defect groups II*, Math. Ann. 281 (1988). 561-582.
[4] K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras*, Lecture Notes in Math. 1428 (Springer-Verlag1988).
[5] K. Erdmann and T. Holm, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n*, Forum Math. 11 (1999). no.2, 177-201.
[6] K. Erdmann and A. Skowronski, Classification of tame symmetric algebras with periodic modules, preprint.
[7] K. Erdmann, T. Holm and N. Snashall, *Twisted bimodules and Hochschild cohomology for self-injective algebras of class A_n, II*, Algebr. Represent. Theory 5 (2002), no. 5, 457-482.
[8] E. L. Green, N. Snashall and Ø. Solberg, *The Hochschild cohomology ring of a selfinjective algebra of finite representation type*, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), no. 11, 3387-3393.
[9] D. Happel, *Hochschild cohomology of finite-dimensional algebras*, Lecture Notes in Math. 1404 (Springer, 1989). 108-126.
[10] D. Happel, U. Preiser and C. M. Ringel, *Vingberg's characterization of Dynkin diagrams using subadditive functors with application to DTr-periodic modules*, in: Representation theory II, Lecture Notes in Math. 832 (Springer-Verlag, 1980). 280-294.
[11] M. Hoshino, *DTr-invariant modules*, Tsukuba J. Math. 7 (1983), no. 2, 205-214.
[12] B. Keller and D. Vossieck, *Sous les catégories dérivées*, C. R. Acad. Soc. Paris, 305 (1987), 225–228.
[13] J. Rickard, *Derived categories and stable equivalence*, J. Pure Appl. Alg. 61 (1989), 303–317.
[14] A. Skowroński, *Selfinjective algebras: finite and tame type*, Trends in representation theory of algebras and related topics, Contemp. Math. 406 Amer. Math. Soc. Providence, RI (2006). 169-238.
[15] A. Skowroński and K. Yamagata, *Socle deformations of self-injective algebras*, Proc. London Math. Soc. 72 (1996). 545-566.

SUZUKA NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY
SHIROKO-CHO, SUZUKA, MIE, 510-0294 JAPAN
E-mail address: ohnuki@genl.suzuka-ct.ac.jp