第３回

多元環の表現論シンポジュウム

報告集

1988年12月

於　山梨県甲府市

序

この報告集は１９８８年１２月１５日から１７日までの３日間、山梨県甲府市のＫＫＲ「ニュー芙蓉」において開催された第3回多元環の表現論シンポジュウムの講演内容を講演者自身により書き記したものであります。

本シンポジュウムも3回目の開催となり６０名にも及ぶ参加者を得て広く定着してきた感があります。今回は多元環の研究が有限表現型からTAME型の多元環へ立ち向かいつつある現状を念頭に置き、TAME型多元環の話題を中心に据え、基本概念及び基本的結果が広く流布されるよう若手研究者に時間をかけ詳しく解説願うことにしました。同じ主旨で群表現についても行いました。

さらに他分野の研究者を迎え刺激を得る従来の方式を踏襲し、不変式論について名古屋大学理学部の森川寿先生に御講演をお願いしました。ここに先生の御好意と御協力に対し厚くお礼申し上げます。

講演者の旅費ならびに報告集の出版費等の開催経費すべては昭和６３年度文部省科学研究費（総合研究（Ａ），課題番号６３３０２００２，土方弘明京都大学教授）に依存しました。

最後に講演ならびに報告集作製のため御協力下さいました諸先生方、有益な御助言を頂きました多くの方々ならびに会場で雑務一切を引き受けてくれました筑波大学院生諸氏に深く感謝申し上げます。

１９８９年2月

山梨大学教育学部　佐藤眞久

目　次

プログラム

１２月１５日（木）

１）　９：００－　９：５０　星　野　光　男　（筑波大学数学系）
宮　地　淳　一　（東京学芸大学教育学部）

Tame Algebra への入門　I

２）　１０：００－１０：５０　浅　芝　秀　人　（大阪市立大学理学部）

Bocses と Tame Algebras　I

３）　１１：００－１１：５０　奥　山　哲　郎　（大阪市立大学理学部）

群環のAuslander-Reiten列と部分群　I

４）　１３：１０－１４：００　川　本　琢　二　（名古屋大学理学部）

CM rings of countable representation type

５）　１４：１５－１５：０５　曽　　強　（筑波大学数学系）

Quasi-hereditary Algebra について　I

６）　１５：２０－１６：００　山　形　邦　夫　（筑波大学数学系）

Quasi-hereditary algebra の global dimension

７）　１６：１５－１７：０５　河　田　　大　（京都工芸繊維大学工芸学部）

On spanning sets over semi-perfect rings

１２月１６日（金）

１）　９：００－　９：５０　宮　地　淳　一　（東京学芸大学教育学部）
星　野　光　男　（筑波大学数学系）

Tame Algebra への入門　II

２）　１０：００－１０：５０　浅　芝　秀　人　（大阪市立大学理学部）

Bocses と Tame Algebras　II

3）　１１：００－１１：５０　奥 山 哲 郎　（大阪市立大学理学部）

群環のAuslander-Reiten列と部分群 II

4）　１３：００－１３：５０　庭 崎 隆　（北海道大学理学部）

加群のコホモロジー環に関するCarlsonの予想について

5）　１４：００－１４：５０　宮 崎 充 弘　（京都大学理学部）

Level complex について

6）　１５：００－１５：５０　植 松 盛 夫　（筑波大学数学系）

Quasi-hereditary Algebra について II

7）　１６：００－１７：４０　森 川 寿　（名古屋大学理学部）

不変式論的方法

１２月１７日（土）

1）　９：００－ ９：５０　浅 芝 秀 人　（大阪市立大学理学部）

Bocses と Tame Algebras III

2）　１０：００－１０：５０　宇 佐 美 陽 子　（お茶の水女子大学）

Inertial index 2または3のabelian defect群を持つ
p-blockについて

3）　１１：００－１１：５０　浅 芝 秀 人　（大阪市立大学理学部）

Bocses と Tame Algebras VI

Tame algebra 入門

星 野 光 男（筑波大・数学）

宮 地 淳 一（東京学芸大・教育）

代数閉体上の有限次元の多元環はすべて tame または wild であり，それらは同時には起こらないという Drozd [9] の結果がある。従って，乱暴な言い方をすれば，与えられた多元環が tame であるとは，有限次元の直既約加群の同型類の代表をすべて決定できる（可能性がある）ことであり，wild であるとはその望みがないことであるといえる。

本稿では，tame と wild の定義を含めて，無限表現型の多元環の表現論における基本的な事項の解説を試みる。"tame" について詳しくは Ringel [16], [17] を参照されたい。

1. 準備

本稿を通じて，代数閉体 k（標数は任意）を固定し，k-algebra，k-category，k-linear functor のみを扱うものとする。また，Mod k により k-vector space の category を表す。A を small かつ skeletal な category とする。contravariant（covariant）functor $A \to$ Mod k を左（右）A-加群と呼ぶことにする。左 A-加群の category を Mod A，有限次元左 A-加群の category を mod A とする，ここに，$M \in$ Mod A が有限次元であるとは，$\sum_{a \in \mathcal{O}b(A)} \dim M(a) < \infty$

を意味する。以下では，主に A が quiver と relation で与えられる場合（即ち，path-category の residue category の場合）を扱うが，その場合 A-加群は relation をみたす quiver の表現と同一視される。また，A が algebra で，quiver と relation で与えられていないときには，A を (i) $Ob(A^*) = \{a\}$, (ii) $A^*(a,a) = A$, をみたす category A^* と同一視するものとする。

(1.1) Path-category. 2つの集合 Q_0, Q_1 及び写像 $t, h: Q_1 \to Q_0$ の組 $Q = (Q_0, Q_1, t, h: Q_1 \to Q_0)$ を quiver という。Q_0 の元を vertex，Q_1 の元を arrow と呼ぶ。また写像 t, h は各 $\alpha \in Q_1$ に対してその始点 $t(\alpha)$，終点 $h(\alpha)$ を対応させる（図示すれば，$t(\alpha) \xrightarrow{\alpha} h(\alpha)$）。以下，quiver はすべて locally finite，即ち，$\forall a \in Q_0$, $\#\{\alpha \in Q_1 \mid t(\alpha) = a \text{ or } h(\alpha) = a\} < \infty$ であるとする。

各 $a \in Q_0$ は長さ 0 の path $(a\|a)$ を，各 $\alpha \in Q_1$ は長さ 1 の path $(t(\alpha)|\alpha|h(\alpha))$ を定め，$n \geq 2$ に対しては，(i) $t(\alpha_1) = a$, (ii) $h(\alpha_i) = t(\alpha_{i+1})$, $1 \leq i < n$, (iii) $h(\alpha_n) = b$, をみたす arrow の列 $(a|\alpha_1 \cdots \alpha_n|b)$ によって長さ n の path を定義する。このとき，small かつ skeletal な category A を (i) $Ob(A) = Q_0$, (ii) 各 $a, b \in Ob(A)$ に対して，$A(a,b)$ は a から b への path 全体を basis に持つ vector space, (iii) 2つの path $(a|\alpha_1 \cdots \alpha_n|b)$, $(c|\beta_1 \cdots \beta_m|d)$ に対して

$$(a|\alpha_1 \cdots \alpha_n|b)(c|\beta_1 \cdots \beta_m|d) = \begin{cases} (a|\alpha_1 \cdots \alpha_n\beta_1 \cdots \beta_m|d) & (b = c) \\ 0 & (b \neq c), \end{cases}$$

によって定義する。任意の $a \in Q_0$ に対して，$id_a = (a\|a)$ である。

また，長さ $n>0$ の path $(a|\alpha_1\cdots\alpha_n|b)$ を単に $\alpha_1\cdots\alpha_n$ と書くことにする。この A を quiver Q の path-category といい kQ と書く。

任意の functor $kQ \to \mathrm{Mod}\, k$ は Q_0, Q_1 の上の値によって決定される，即ち，quiver Q の表現 によって与えられる。以下において，kQ-加群 と Q の表現 とを同一視する。

(1.2) Presentation. A を locally bounded category，即ち (i) A は small かつ skeletal，(ii) $\forall a \in \mathrm{Ob}(A)$，$A(a,a)$ は local，(iii) $\forall a \in \mathrm{Ob}(A)$，$A(-,a)$，$A(a,-)$ は有限次元，をみたす category とする。（A が basic な有限次元 algebra のときには，直交する原始巾等元の完全代表系 $\{e_1,\cdots,e_n\}$ に対して，A は (i) $\mathrm{Ob}(A^*) = \{a_1,\cdots,a_n\}$，(ii) $A^*(a_i,a_j) = e_iAe_j$，なる locally bounded category A^* と同一視される）。また，J をその Jacobson radical とする（このとき，$J(a,a) = \mathrm{rad}\, A(a,a)$，$J(a,b) = A(a,b)$ $(a\neq b)$）。このとき，quiver Q を (i) $Q_0 = \mathrm{Ob}(A)$，(ii) 各 $a,b \in Q_0$ に対して，$a \overset{\vdots}{\rightrightarrows} b$ (d_{ab} arrows)，$d_{ab} = \dim J/J^2(a,b)$，によって定義する。この Q を A の Gabriel quiver といい Q_A と書く。$Q = Q_A$ に対して，全射 $kQ \to A$ が定義されて（1意的ではない）

$$A \cong kQ/I, \quad I \subset kQ^{+2}$$

と表される（但し，kQ^{+2} は長さ2以上の path 全体の成す kQ の ideal）。これを A の quiver Q による presentation という。このとき，A-加群 は I 上で消える（即ち，relation をみたす）quiver Q の表現 と同一視される。

上の (1.1)，(1.2) について，詳しくは Bongartz-Gabriel [3] を参照。

Ex. $A = \begin{pmatrix} k & k[x]/(x^2) \\ 0 & k[x]/(x^6) \end{pmatrix}$ は次の presentation を持つ

$$\begin{cases} Q : \quad b \xrightarrow{\mu} a \circlearrowleft \alpha \\ I = \langle \alpha^6, \mu\alpha^2 \rangle \end{cases}.$$

従って，左 A-加群は次のような表現で与えられる

$$V \xleftarrow{\partial} U \circlearrowleft f \quad \text{with } f^6 = 0,\ \partial f^2 = 0$$

(1.3) Representation space. A を basic な有限次元の algebra, $A \cong kQ/I$, $I \subset kQ^{+2}$ をその presentation とする。各 dimension vector $d = (d_a) \in (\mathbb{Z}^+)^{Q_0}$ に対して，$d_a \neq 0$ なる $a \in Q_0$ 全体の生成する Q の full subquiver を d の support といい $Supp(d)$ と書く。連結な support を持つ $d \in (\mathbb{Z}^+)^{Q_0}$ に対して

$$\begin{cases} G(d) = \prod_{a \in Q_0} GL_{d_a}(k) \\ Rep(Q, d) = \prod_{\alpha \in Q_1} Mat_{d_{h(\alpha)} \times d_{t(\alpha)}}(k) \end{cases}$$

とおく（但し，$GL_0(k) = \{1\}$, $Mat_{0 \times n}(k) = \{0\} = Mat_{n \times 0}(k)$ とする）。$Rep(Q, d)$ は $\underline{\dim}\, M = d$（即ち，$\forall a \in Q_0$, $\dim M(a) = d_a$）なる Q の表現の全体とみなせる。$G(d)$ は自然に左から $Rep(Q, d)$ に作用するが，その各 orbit は Q の表現の同型類に対応する。また，

$$Rep(A, d) = \{ M \in Rep(Q, d) \mid M(I) = 0 \}$$

とおけば，$Rep(A,d)$ は $\underline{\dim} M = d$ なる左 A-加群 M の全体とみなせる。この $Rep(A,d)$ を（dimension type d の）A の representation space という。詳しくは Kac [12] を参照。

Def. A が wild であるとは，ある連結な support を持つ $d \in (\mathbb{Z}^+)^{Q_0}$ に対して，affine variety の morphism

$$\phi : \mathbb{A}_k^2 \longrightarrow Rep(A,d)$$

で $\mathrm{Im}\,\phi$ が各 $G(d)$-orbit とたかだか1点しか共有しないものが存在することである。

Def. A が tame であるとは，連結な support を持つ任意の $d \in (\mathbb{Z}^+)^{Q_0}$ に対して，有限個の affine variety の morphism

$$\phi_1, \cdots, \phi_{n_d} : \mathbb{A}_k^1 \longrightarrow Rep(A,d)$$

で任意の直既約な表現の $G(d)$-orbit が必ずある $\mathrm{Im}\,\phi_i$ と交わる，ようなが存在することである。

(2,2) において，次の事実を用いて，上の定義を加群の言葉で言い換える。

Prop. X を affine variety，$k[X]$ をその coordinate ring とする。このとき，variety の morphism $X \to Rep(A,d)$ と $\forall a \in Q_0$，$M(a,-)_{k[X]} \cong k[X]^{d_a}$，なる A-$k[X]$-bimodule M とが1対1に対応する。

具体的な対応については，Dowbor-Skowroński [8] を参照．

(1.4) <u>One-point extension</u>。 A を basic な有限次元の algebra とする。与えられた $R \in \mathrm{mod}\,A$ に対して

$$A[R] = \begin{bmatrix} A & R \\ 0 & k \end{bmatrix}$$

とおき，A の R による <u>one-point extension</u> という。このとき，任意の $X \in \mathrm{mod}\,A[R]$ は $M \in \mathrm{mod}\,A$，$V \in \mathrm{mod}\,k$ 及び linear map $V \to \mathrm{Hom}_A(R, M)$ の組 $(M, V, V \to \mathrm{Hom}_A(R, M))$ によって与えられる。

$\mathrm{End}({}_AM) \cong k$ なる $M \in \mathrm{mod}\,A$ に対して，$\mathrm{Hom}_A(R, M)$ の basis $\{f_1, \cdots, f_d\}$ を固定する。このとき，quiver $\Gamma_d : \bullet \overset{\longrightarrow}{\underset{\longrightarrow}{\vdots}} \bullet$ (d arrows) の表現

$$V \;\overset{f_1}{\underset{f_d}{\overset{\longleftarrow}{\underset{\longleftarrow}{\vdots}}}}\; U$$

に対して，$(M \otimes_k V, U, f : U \to \mathrm{Hom}_A(R, M \otimes_k V))$，$f(u)(r) = \sum f_i(r) \otimes f_i(u)$，$r \in R$，$u \in U$，を対応させて，full exact embedding $\mathrm{mod}\,k\Gamma_d \to \mathrm{mod}\,A[R]$ を得る．

(1.5) <u>Dynkin quivers</u>。 ここでは，各 Dynkin quiver Δ に対して，maximal root を dimension type に持つ直既約な表現 $M \in \mathrm{mod}\,k\Delta$ を与えておく（但し，1つの固定された orientation に対して）。それらは (1.4) での構成と共に，以下の § 3,4 において重要な役割を果す．

$$
\begin{tikzcd}
 & k \arrow[dl, "1"'] & \cdots \arrow[l, "1"'] & k \arrow[l, "1"'] \\
k & & & \\
 & k \arrow[ul, "1"] & \cdots \arrow[l, "1"] & k \arrow[l, "1"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
k & & & & \\
 & k^2 \arrow[ul, "{[1\ 0]}"'] \arrow[dl, "{[0\ 1]}"] & \cdots \arrow[l, "E_2"'] & k^2 \arrow[l, "E_2"'] & k \arrow[l, "\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}"'] \\
k & & & &
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & k \arrow[d, "\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}"] & \\
 & & k^2 \arrow[d, "\begin{bmatrix}1&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}"] & \\
k \arrow[r, "\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}"'] & k^2 \arrow[r, "\left[\begin{array}{c}0\\\hline E_2\end{array}\right]"'] & k^3 & k^2 \arrow[l, "\left[\begin{array}{c}E_2\\\hline 0\end{array}\right]"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & & k^2 \arrow[d, "\begin{bmatrix}1&1\\1&0\\1&0\\0&1\end{bmatrix}"] & & \\
k \arrow[r, "\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}"'] & k^2 \arrow[r, "\left[\begin{array}{c}0\\\hline E_2\end{array}\right]"'] & k^3 \arrow[r, "\left[\begin{array}{c}0\\\hline E_3\end{array}\right]"'] & k^4 & k^3 \arrow[l, "\left[\begin{array}{c}E_3\\\hline 0\end{array}\right]"] & k^2 \arrow[l, "\left[\begin{array}{c}E_2\\\hline 0\end{array}\right]"]
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & k^3 \arrow[d, "\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\\0&1&1\\1&0&1\\0&0&1\end{bmatrix}"] & & & & \\
k^2 \arrow[r, "\left[\begin{array}{c}0\\\hline E_2\end{array}\right]"'] & k^4 \arrow[r, "\left[\begin{array}{c}0\\\hline E_4\end{array}\right]"'] & k^6 & k^5 \arrow[l, "\left[\begin{array}{c}E_5\\\hline 0\end{array}\right]"] & k^4 \arrow[l, "\left[\begin{array}{c}E_4\\\hline 0\end{array}\right]"] & k^3 \arrow[l, "\left[\begin{array}{c}E_3\\\hline 0\end{array}\right]"] & k^2 \arrow[l, "\left[\begin{array}{c}E_2\\\hline 0\end{array}\right]"]
\end{tikzcd}
$$

2. Drozd's theorem

本節では, tame と wild の加群論的な定義を与える。それらが (1.3) でのものと同値であることについては, Dowbor-Skowroński [8] を参照されたい。

(2,1) Prop. 任意の有限次元の algebra A に対して, $k\langle u,v\rangle$-A-bimodule M で, (i) M_A は有限生成自由加群, (ii) functor $M\otimes_A -$: $\mathrm{mod}\,A \to \mathrm{mod}\,k\langle u,v\rangle$ は fully faithful, をみたすものが存在する。

A の basis $\{x_1,\cdots,x_d\}$ を固定する。$k\langle u,v\rangle$ を quiver $u \circlearrowright \bullet \circlearrowleft v$ の path-category と同一視して, 自由加群 A_A^{d+2} に $k\langle u,v\rangle$-加群の構造を

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & 0 \\ 1 & \ddots & & & \\ x_1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & & x_d & 1 & 0 \end{pmatrix} \circlearrowright A^{d+2} \circlearrowleft \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

によって定義して, 求める bimodule を得る。

(2,2) A を有限次元の algebra とする (basic かつ connected)。

Def. A が wild であるとは, A-$k\langle u,v\rangle$-bimodule M で (i) $M_{k\langle u,v\rangle}$ は有限生成自由加群, (ii) functor $M\otimes_{k\langle u,v\rangle} -$: $\mathrm{mod}\,k\langle u,v\rangle \to \mathrm{mod}\,A$ は同型類 (及び直既約性) を保存する, をみたすものが存在することである。

(2,1) によれば, 1つの wild algebra について, その有限次元の直既約加群の同型類を決定することは, 同時にすべての有限次元の algebra の有限次元の直既約加群の同型類を決定することになることに注意されたい。

Def. A が tame であるとは, 連結な support を持つ任意の dimension vector d に対して, 有限個の A-$k[x]$-bimodule

$M_1, \dots, M_{n_d}$ で (i) 各 $M_{i\,k[x]}$ は有限生成自由加群, (ii) dimension type d の任意の直既約左 A-加群はある $M_i \otimes_{k[x]} k[x]/(x-\alpha)$, $\alpha \in k$, と同型である, をみたすものが存在することである。

この定義は有限表現型を含むことに注意されたい。実際, 任意の $X \in \mathrm{mod}\,A$ に対して, $X \cong (X \otimes_k k[x]) \otimes_{k[x]} k[x]/(x-\alpha)$, $\forall \alpha \in k$, である.

(2.3) Thm (Drozd [9]). 任意の有限次元の algebra は tame または wild であり, それらは同時には起こらない。

この定理の証明の前半については Crawley-Boevey [4], 後半については (1.3) での定義と Kac [12] を参照されたい。

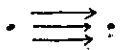
Ex. A を次の presentation を持つ algebra とする

$$\begin{cases} Q : & \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above, "\beta"] \arrow[r, "\mu"'] & \bullet \arrow[loop above, "\alpha"] & \bullet \arrow[loop above, "\gamma"] \arrow[l, "\nu"] \end{tikzcd} \\ I = \langle \alpha^n, \beta^m, \gamma^l, \beta\mu - \mu\alpha, \gamma\nu - \nu\alpha \rangle & . \end{cases}$$

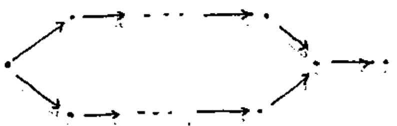
このとき, (i) $2n+m+l > 10$ なる A は wild, (ii) $2n+m+l \le 10$ なる A は tame, (iii) $2n+m+l < 10$ なる A は有限表現型, である。

3. Wild algebras

(3.1) Prop. 次の quiver の path-category は wild である

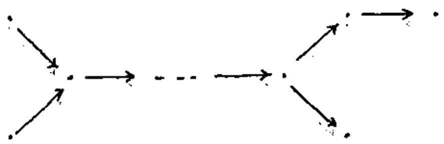


$\tilde{\tilde{A}}_{p,q}$

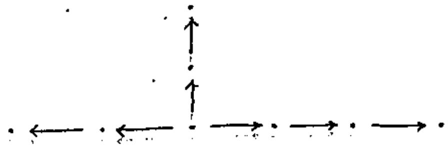


$\left\{\begin{array}{l} p \text{ clockwise arrows} \\ q \text{ anti-clockwise arrows} \end{array}\right.$

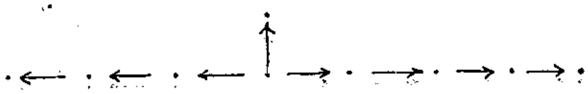
$\tilde{\tilde{D}}_n$



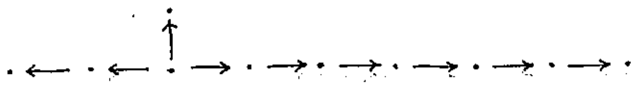
$\tilde{\tilde{E}}_6$



$\tilde{\tilde{E}}_7$



$\tilde{\tilde{E}}_8$



（但し，oriented cycle ができない限り，orientation は任意でよい）。

上の各 quiver $\tilde{\tilde{\Delta}}$ に対して，(2,2) の条件をみたす $k\tilde{\tilde{\Delta}}$-$k\langle u,v\rangle$-bimodule を具体的に構成する。次の bimodule

$$\begin{tikzcd} k\langle u,v\rangle & k\langle u,v\rangle \arrow[l, bend right, "1"'] \arrow[l, "u"] \arrow[l, bend left, "v"] \end{tikzcd}$$

$\tilde{\tilde{A}}_{11}$

$$\begin{tikzcd} k\langle u,v\rangle^4 & k\langle u,v\rangle^3 \arrow[l, shift right, "\begin{bmatrix} E_3 \\ 0 \end{bmatrix}"'] \arrow[l, shift left, "\begin{bmatrix} 0 \\ E_3 \end{bmatrix}"] & k\langle u,v\rangle \arrow[l, "\begin{bmatrix} 1 \\ u \\ v \end{bmatrix}"'] \end{tikzcd}$$

は条件をみたす。その他については，(1.5)の表現を用いて，(1.4)での構成と同様にして，full exact embedding mod $k\hat{\tilde{A}}_{11} \to$ mod $k\hat{\tilde{A}}$ を構成する。例えば，$\hat{\tilde{E}}_6$ については，$\hat{A}_{11}$ の表現

$$\begin{tikzcd} W & V \arrow[l, shift right, "f"'] \arrow[l, shift left, "g"] & U \arrow[l, "h"'] \end{tikzcd}$$

に対して，$\hat{\tilde{E}}_6$ の表現

$$\begin{tikzcd}
 & & W \arrow[d, "\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}"] & & & \\
 & & W^2 \arrow[d, "\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}"] & & & \\
W \arrow[r, "\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}"'] & W^2 \arrow[r, "\begin{bmatrix} 0 \\ E_2 \end{bmatrix}"'] & W^3 & W^2 \arrow[l, "\begin{bmatrix} E_2 \\ 0 \end{bmatrix}"] & V \arrow[l, "\begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}"] & U \arrow[l, "h"]
\end{tikzcd}$$

を対応させれば良い。この functor により，求める bimodule を得る。

(3.2) <u>Covering technique</u> I. A を locally bounded category, G を $\mathrm{Aut}(A)$ の subgroup で，$\forall a \in \mathrm{Ob}(A)$, $\forall g \in G\setminus\{1\}$, $ga \neq a$, をみたすものとする。このとき，quotient category A/G が定義され，自然な functor $F: A \to A/G$ を A/G の Galois covering という。また，${}^gM(a) = M(g^{-1}a)$, $M \in \mathrm{Mod}\,A$, $g \in G$, $a \in A$, として，G は $\mathrm{Mod}\,A$ に作用する。自然な functor $F_\cdot : \mathrm{Mod}\,A/G \to \mathrm{Mod}\,A$, $X \mapsto X \circ F$, (<u>pull-up</u> と呼ばれる) の left adjoint を $F_\lambda : \mathrm{Mod}\,A \to \mathrm{Mod}\,A/G$ (<u>push-down</u> と呼ばれる) とする。このとき，$(F_\lambda M)(Fa) \cong \bigoplus_{g \in G} {}^gM(a)$, $M \in \mathrm{Mod}\,A$, $g \in G$, $a \in A$ である。詳しくは，Gabriel [10], Bongartz-Gabriel [3] 等を参照。

Prop (Gabriel [10])。上の記法の下で次が成立

(i) 直既約な $M \in \mathrm{mod}\,A$ に対して, ${}^\forall g \in G\setminus\{1\}$, ${}^gM \not\cong M$ ならば $F_\lambda M \in \mathrm{mod}\,A/G$ も直既約.

(ii) $M, N \in \mathrm{mod}\,A$ は直既約で, ${}^\forall g \in G\setminus\{1\}$, ${}^gM \not\cong M$, ${}^gN \not\cong N$ であるとする。このとき, ${}^\forall g \in G$, ${}^gM \not\cong N$ ならば $F_\lambda M \not\cong F_\lambda N$.

Ex 上の命題を用いて, $k[x,y]/(x^3, x^2y, y^2)$ が wild であることを示す。この algebra は次の presentation を持つ

$$\begin{cases} Q : \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left, "x"] \arrow[loop right, "y"] \end{tikzcd} \\ I = \langle x^3, x^2y, y^2 \rangle \end{cases}$$

従って, Galois 群が $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ である次の Galois covering を持つ

$$A : \begin{tikzcd} & \vdots \arrow[d, "y"] & \vdots \arrow[d, "y"] & \\ \cdots \arrow[r, "x"] & \bullet \arrow[r, "x"] \arrow[d, "y"] & \bullet \arrow[r, "x"] \arrow[d, "y"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r, "x"] & \bullet \arrow[r, "x"] \arrow[d, "y"] & \bullet \arrow[r, "x"] \arrow[d, "y"] & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \end{tikzcd} \quad \text{with} \begin{cases} xy = yx \\ x^3 = x^2y = y^2 = 0 \end{cases}$$

A は residue category として次を持つ

$$B : \begin{tikzcd} & & & \bullet \arrow[r, "x"] \arrow[d, "y"] & \bullet \\ & \bullet \arrow[r, "x"] \arrow[d, "y"] & \bullet \arrow[r, "x"] \arrow[d, "y"] & \bullet & \\ \bullet \arrow[r, "x"] \arrow[d, "y"] & \bullet \arrow[r, "x"] & \bullet & & \\ \bullet & & & & \end{tikzcd} \quad \text{with } xy = yx$$

ここに，B は $\hat{\hat{E}}_7$ の <u>concealment</u> である（Ringel [16] 参照）。従って，(3.1) と同様にして，(2.2) の wild の定義における条件をみたす B-$k\langle u,v\rangle$-bimodule が構成される。そこで，functor の合成 $\mathrm{mod}\,B \hookrightarrow \mathrm{mod}\,A \xrightarrow{F_\lambda} \mathrm{mod}\,k[x,y]/(x^3, x^2y, y^2)$ により，求める bimodule を得る。（それが実際に条件をみたすことは上の命題による）。

4. <u>Tame algebras</u>

(4.1) 1変数多項式環 $k[x]$ を quiver $\bullet \circlearrowleft x$ の path-category とみなす。このとき，有限次元の直既約 $k[x]$-加群は表現

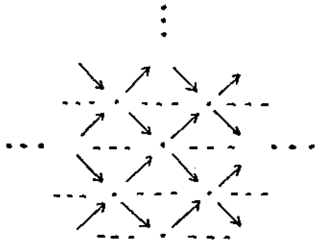
$$J(n,\alpha) \quad : \qquad k^n \circlearrowleft \begin{bmatrix} \alpha & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix} \qquad n \geq 1,\ \alpha \in k$$

によって与えられる。また，次の exact square は Auslander-Reiten sequence を与える

$$\begin{tikzcd}
 & J(n+1,\alpha) \arrow[dr, "{[E_n \mid 0]}"] & \\
J(n,\alpha) \arrow[ur, "{\left[\frac{0}{E_n}\right]}"] \arrow[dr, "{[E_{n-1} \mid 0]}"'] & & J(n,\alpha) \\
 & J(n-1,\alpha) \arrow[ur, "{\left[\frac{0}{E_{n-1}}\right]}"'] &
\end{tikzcd}$$

但し，$J(0,\alpha)=0$。即ち，$\mathrm{mod}\,k[x]$ は Auslander-Reiten sequence を持ち，その Auslander-Reiten quiver は k の元で parametrize された <u>homogeneous tube</u> $\mathbb{Z}A_\infty/1$ の union となる。ここに，quiver

$\mathbb{Z}A_\infty$:



を点線に沿って左に1つずらす automorphism を σ とし, quotient $\mathbb{Z}A_\infty/\langle\sigma^n\rangle$ を単に $\mathbb{Z}A_\infty/n$ と書き, rank n の regular tube という。また, $\mathbb{Z}A_\infty/1$ は homogeneous tube といわれる。

(4.2) Kronecker pencil. Euclidean quiver の表現論において, Kronecker pencil と呼ばれる次の quiver が本質的な役割を果す (Dlab-Ringel [5], Ringel [17] 参照)

$$\tilde{A}_{11} :\quad \bullet \rightrightarrows \bullet$$

直既約の表現は次の3つのクラスに分かれる

$$X(n) :\quad k^n \underset{\left[\begin{smallmatrix}0\\ E_{n-1}\end{smallmatrix}\right]}{\overset{\left[\begin{smallmatrix}E_{n-1}\\ 0\end{smallmatrix}\right]}{\leftleftarrows}} k^{n-1} \qquad n \geq 1$$

$$Y(n) :\quad k^{n-1} \underset{[0 \mid E_{n-1}]}{\overset{[E_{n-1} \mid 0]}{\leftleftarrows}} k^{n} \qquad n \geq 1$$

$$Z(n,\alpha) :\quad k^n \underset{\left[\begin{smallmatrix}\alpha & & 0\\ 1 & \ddots & \\ 0 & 1 & \alpha\end{smallmatrix}\right]}{\overset{E_n}{\leftleftarrows}} k^{n} \qquad n \geq 1,\ \alpha \in k$$

$$Z(n,\infty):\quad k^n \underset{E_n}{\overset{\begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{bmatrix}}{\leftleftarrows}} k^n \qquad n \geq 1$$

また，Auslander-Reiten sequence は次の形をしている

$$0 \to X(n) \to X(n+1)^2 \to X(n+2) \to 0 \qquad n \geq 1$$

$$0 \to Y(n+2) \to Y(n+1)^2 \to Y(n) \to 0 \qquad n \geq 1$$

$$0 \to Z(n,\alpha) \to Z(n-1,\alpha) \oplus Z(n+1,\alpha) \to Z(n,\alpha) \to 0 \qquad n \geq 1,\ \alpha \in k \cup \{\infty\}$$

但し，$Z(0,\alpha)=0$。従って，Auslander-Reiten quiver は

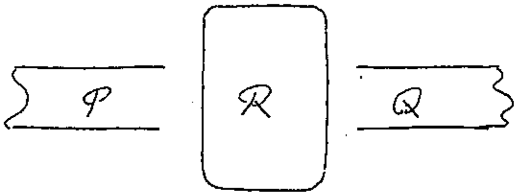
$$\begin{array}{ccccccccccc} & X(2) & \text{- - - -} & & X(4) & \text{- - - -} & & & \\ \nearrow^{(2,2)} & & \searrow^{(2,2)} & \nearrow^{(2,2)} & & \searrow^{(2,2)} & \nearrow^{(2,2)} & & \cdots \\ X(1) & \text{- - - -} & & X(3) & \text{- - - -} & & X(5) & \text{- - -} & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} & \text{- - - -} & Y(5) & \text{- - - -} & & Y(3) & \text{- - - -} & & Y(1) \\ \cdots & \nearrow^{(2,2)} & & \searrow^{(2,2)} & \nearrow^{(2,2)} & & \searrow^{(2,2)} & \nearrow^{(2,2)} & \\ & & \text{- - - -} & & Y(4) & \text{- - - -} & & Y(2) & \end{array}$$

及び $\mathbb{P}_k^1 = k \cup \{\infty\}$ でparametrizeされたhomogeneous tubeのunionとなる。$\mathcal{P}=\{X(n)\mid n\geq 1\}$，$\mathcal{Q}=\{Y(n)\mid n\geq 1\}$，$\mathcal{R}=\{Z(n,\alpha)\mid n\geq 1,\ \alpha\in\mathbb{P}_k^1\}$ とおけば

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}_{k\tilde{A}_{11}}(\mathcal{R},\mathcal{P}) = 0 \\ \mathrm{Hom}_{k\tilde{A}_{11}}(\mathcal{Q},\mathcal{P}) = 0 \\ \mathrm{Hom}_{k\tilde{A}_{11}}(\mathcal{Q},\mathcal{R}) = 0 \end{cases}$$

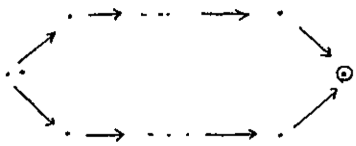
である。そこで，Auslander-Reiten quiver を次の様に図示する



ここに，$\mathcal{P}$ は preprojective component，$\mathcal{Q}$ は preinjective component
また，$\mathcal{R}$ の各連結成分は regular component と呼ばれる。また，
$\mathrm{Hom}_{k\hat{A}_{11}}(Z(n,\alpha), Z(m,\beta)) = 0$，$\alpha \neq \beta$，にも注意されたい。

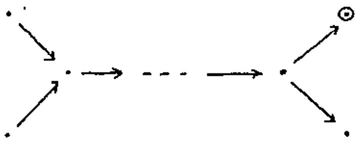
(4.3) Prop. 次の quiver の path-category は tame である

$\tilde{A}_{p,q}$

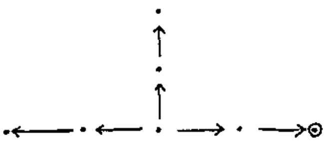


$\begin{cases} p \text{ clockwise arrows} \\ q \text{ anti-clockwise arrows} \end{cases}$

$\tilde{D}_n$

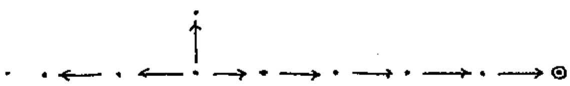


$\tilde{E}_6$



$\tilde{E}_7$

$\tilde{E}_8$



(但し，oriented cycle ができない限り，orientation は任意でよい)。

上の各 quiver $\hat{\Delta}$ に対して，vertex ⊙ を除いて得られる

Dynkin quiver を Δ とする。このとき, $k\hat{\Delta} \cong k\Delta[R]$ である, ここに, $R \in \mathrm{mod}\, k\Delta$ は次の表現で与えられる

$$\begin{tikzcd}
 & k \arrow[dl, "{[1\,0]}"'] & \arrow[l, "1"'] \cdots & \arrow[l, "1"'] k \\
k^2 & & & \\
 & k \arrow[ul, "{[0\,1]}"] & \arrow[l, "1"] \cdots & \arrow[l, "1"] k
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
k & & & & \\
 & k \arrow[ul, "1"'] \arrow[dl, "1"] & \arrow[l, "1"'] \cdots & \arrow[l, "1"'] k & \\
k & & & & 0 \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & \\
 & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & k & k \arrow[l, "1"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & k & k \arrow[l, "1"] & k \arrow[l, "1"]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & & & & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & k & k \arrow[l, "1"] & k \arrow[l, "1"] & k \arrow[l, "1"] & k \arrow[l, "1"]
\end{tikzcd}$$

また, (1.5) で与えた表現を $M \in \mathrm{mod}\, k\Delta$ とすれば, $\mathrm{End}({}_{k\Delta}M) \cong k$, $\dim \mathrm{Hom}_{k\Delta}(R, M) = 2$ となる。従って, (1.4) での構成により, full exact embedding $\mathrm{mod}\, k\hat{A}_{11} \to \mathrm{mod}\, k\hat{\Delta}$ を得る。この functor により, $\mathrm{mod}\, k\hat{\Delta}$ は $\mathrm{mod}\, k\Delta$ と $\mathrm{mod}\, k\hat{A}_{11}$ によって完全に支配される。例えば, $k\hat{\Delta}$ の Auslander-Reiten quiver は (4.2) の最後の図と同様であるが, $\hat{\Delta} \neq \hat{A}_{11}$ ならば $\mathcal{R}$ の部分は homogeneous で

でない regular tube を含み，その rank は

$$\begin{cases} \tilde{A}_{pq} & \cdots \quad p, q \\ \tilde{D}_n & \cdots \quad 2, 2, n-2 \\ \tilde{E}_n & \cdots \quad 2, 3, n-3 \end{cases}$$

である。これは，$k\Delta$ の Auslander-Reiten quiver の形によって決定される。また，$\mathcal{R}$ の連結成分が $\mathbb{P}^1_k$ で parametrize されるのも $k\tilde{A}_{11}$ の場合と同様であるが，実は上の functor により $k\tilde{A}_{11}$ の各 homogeneous tube と $\mathcal{R}$ の各連結成分とが1対1に対応している。（詳しくは Dlab-Ringel [5], Ringel [17] を参照されたい)。

上の議論は，Bernstein-Gelfand-Ponomarev [2] の構成と完全に平行であり，Ringel [17] の構成の中心を成す。

(4.4) ~~Biserial algebras~~. 知られている tame algebra の多くは Euclidean quiver の path-category に近いものであるが，かなり遠いと思われるものも以前から知られている。即ち，有限次元の直既約加群が "strings" と "bands" によって完全に決定されるような algebra のクラスがある。例えば，

$$\begin{cases} k[x, y]/(x^n, xy, y^m) & \text{(Gelfand-Ponomarev [11])} \\ k\langle u, v\rangle/(u^2, v^2, (uv)^n) & \text{(Ringel [15])} \\ \text{Brauer-tree に対応する algebra} & \text{(Donovan-Freislich [6])} \end{cases}$$

がそうである。（但し，上の2つも Brauer-tree に対応する algebra か

う得られる)。これらの algebra は次の定義の条件をみたす。

Def. basic な有限次元の algebra A が ~~special biserial~~ である とは, A の presentation $A \cong kQ/I$, $I \subset kQ^{+2}$ で (i) $\forall a \in Q_0$, $\#\{\alpha \in Q_1 \mid t(\alpha) = a\} \le 2$, $\#\{\alpha \in Q_1 \mid h(\alpha) = a\} \le 2$, (ii) $\forall \alpha \in Q_1$, $\#\{\beta \in Q_1 \mid \alpha\beta \notin I\} \le 1$, $\#\{\beta \in Q_1 \mid \beta\alpha \notin I\} \le 1$, をみたすものが存在することである。

Prop (Wald-Waschbüsch [18]). Special biserial algebra はすべて tame である。

Ex A を次の presentation を持つ algebra とする

$$\begin{cases} Q : \quad b \underset{\nu}{\overset{\mu}{\rightleftarrows}} a \circlearrowright \alpha \\ I = \langle \alpha^2 - \alpha\nu\mu,\ \alpha^2 - \nu\mu\alpha,\ \mu\nu \rangle \end{cases} .$$

これは special ではない biserial algebra である。A は self-injective で, $A/\mathrm{soc}A$ は presentation

$$\begin{cases} Q : \quad b \underset{\nu}{\overset{\mu}{\rightleftarrows}} a \circlearrowright \alpha \\ I = \langle \alpha^2,\ \alpha\nu\mu,\ \nu\mu\alpha,\ \mu\nu,\ \mu\alpha\nu \rangle \end{cases}$$

を持ち, これは special biserial である. 従って, A は tame である。

5. Vector Space Category.

これ以降，A は finite-dimentional k-algebra, module は 全て finitely generated とする。

5.1 Vector Space Category.

1.4 で A[R] の left module は triple $(M, V, V \to \mathrm{Hom}(R,M))$ で与えられることを言ったが，mod A の構造がわかってる時に Hom(R,mod A) の構造から mod A[R] を調べるのに，Rojter と Nazarova は，vector space category の概念を使い，Ringel はさらにそれを発展させた [14],[16],[17]。

(1) K が k-additive category であるとは，(a) 有限直和をもつ (b) Hom(X,Y) が有限次元 vector space である。($^\forall$ $X, Y \in K$) (c) $\mathrm{Hom}(X,Y) \times \mathrm{Hom}(Y,Z) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,Z)$ が k-bilinear である。を満たす category である。そしてさらに，(d) 全ての idempotent が split するときに，Krull-Schmidt category と呼ぶ。

(2) $(K, |?| : K \longrightarrow \mathrm{mod}\ k)$ が vector space category であるとは，(a) K が Krull-Schmidt categoery (b) |?| が faithfull functor の時いう この時 subspace category $U(K, |?|)$ とは triple $V = (X, V, \gamma_V : V \longrightarrow |X|)$, where $X \in K$, $V \in \mathrm{mod}\ k$, γ_V k-linear を object とし，morphism は $f = (f_0, f_1) : V \longrightarrow V'$, where $f_0 : X \longrightarrow X'$, $f_1 : V \longrightarrow V'$ で $\gamma_V |f_0| = f_1 \gamma_{V'}$ を満たすものである。そしてこの object を K の 表現と呼ぶ。

(3) subspace category $U(K, |?|)$ はまた Krull-Schmidt category になる。

Examples. ($\mathrm{Ext}^1(\mathrm{mod}\ A, R)$, inclusion), ($\mathrm{Hom}(R, \mathrm{mod}\ A)$, inclusion) は Krull-Schumidt categories である。 特に後者の subspace category は mod A[R] から (0,k,o) を除いた category と同じ物と考えられる

5.2 Schurian Vector Space Category and Poset.

(1) vector space category (K , |?|) が Schurian であるとは，$\mathrm{End}(X) = k$ （$^{\forall}X \in K$）が成り立つとき言う。

<u>Lemma(Ringel[16])</u> K が Schurian vector space category のとき次のことが成り立つ。

(a) K が finite-representation type ならば，任意の indecomposable object X に対して，$\dim_k |X| = 1$ である。

(b) K が wild type でないならば，任意の indecomposable object X に対して，$\dim_k |X| \leqq 2$ である。さらに X, Y 二つの indecomposable objects に対して，$\dim_k |X| \geqq 2$ ならば，$\mathrm{Hom}(X, Y) \neq 0$ または $\mathrm{Hom}(Y, X) \neq 0$ がなり立つ。

これは，1.4(2) と同様に，X を $\mathrm{End}(X) = k$ が成り立つ object とすると，$U(\mathrm{add}\ X) \simeq \mathrm{Rep}\left(\begin{tikzcd}\cdot \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "|"] & \cdot\end{tikzcd}\right)$，矢印の数 $= \dim_k |X|$. から，quiver の表現を見れば，わかる。また(b)の後半も，$\mathrm{End}(X) = \mathrm{End}(Y) = k$，$\mathrm{Hom}(X, Y) = \mathrm{Hom}(Y, X) = 0$とすると，$U(\mathrm{add}\ X \oplus Y) \simeq \mathrm{Rep}\left(\begin{tikzcd}\cdot & \cdot \arrow[l, bend right] \arrow[l, bend left] \arrow[l, phantom, "|"] \arrow[r, bend left] \arrow[r, bend right] \arrow[r, phantom, "|"] & \cdot\end{tikzcd}\right)$ となり，$\dim_k |X| + \dim_k |Y| \geqq 3$ ならば，wild になる。

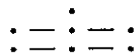
(2) Schurian の場合に，上の Lemma から，かなり構造が限定されるのだが，ここでさらに強い vector space category (K , |?|) が linear という条件 : 任意の indecomposable object X に対して，$\dim_k |X| = 1$である。を考える。このとき 任意の indecomposable objects X, Y に対して，$\dim_k \mathrm{Hom}(X, Y) \leqq 1$ が成り立ち，non-zeromorphisms の合成は，全て non-zero になる。これから，$[X] \leqq [Y]$ を $\mathrm{Hom}(X, Y) \neq 0$ と定義すると，K は poset になる。（但し [] は isomorphism class を表す。）

(3) 逆に，poset S が与えられたとき，(add kS, |?|) を (a) 任意の $X \in S$ に対して，$\dim_k |X| = 1$ (b) 任意の $X, Y \in S$ に対して，$\dim_k \mathrm{Hom}(X, Y)$

= 1 (X ≦ Y) or 0 (otherwise) とした category の additive 化 したものとすると, linear vector space category になる。実際 (K, |?|) が linear ということと, (K, |?|) ≃ (add S, |?|) ($^\exists$poset S) は同値となる。

<u>Kleiner's Theorem.</u> poset S に対して, S が finite-representation type であることと, S が finite で, 次のものを full subset として含まないことは同値である : (1,1,1,1), (2,2,2), (1,3,3), (1,2,5), or (N,4).

<u>Nazarova's Theorem.</u> poset S 似対して, S が wild であることと, S が 次のものを含むことは同値である : (1,1,1,1,1), (1,1,1,2), (2,2,3), (1,3,4), (1,2,6), or (N,5). また S が wild でないならば, tame である。

(4) ここで, 例えば (1,3,3) は  を表している。

また, U((1,3,3)) は Rep(
$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & \bullet \arrow[dr] & \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$
) と representation equivalence になっている。このように, (1,1,1,1), (2,2,2), (1,3,3), (1,2,5), (N,4) はそれぞれ $\tilde{D}_4$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$, concealment of $\tilde{E}_8$ に対応している。

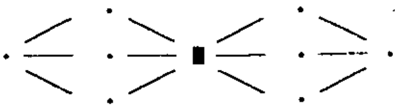
(5) <u>Example.</u>

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & 4 \arrow[d] & \\
A : & 3 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 1
\end{tikzcd}, \quad
\begin{tikzcd}[row sep=small]
 & & 4 \arrow[d] & \\
\Lambda : & 3 \arrow[r] & 2 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \\
 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

とおくと, $\Lambda = A[P_2]$ であり, Λ の Auslander-Reiten quiver は

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
P_3 \arrow[dr] & & \bullet \arrow[dr] & & \bullet \arrow[dr] & & \\
 & P_2 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & P_1 \arrow[r] & \bullet \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \\
P_4 \arrow[ur] & & \bullet \arrow[ur] & & \bullet \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$
,

で, Hom(P_2,mod A) を グラフで, 表すと,



,

但し, ・ , ■ はそれぞれ 1-dimensional, 2-dimensional vector spaces を表している。これは Schurian vector space category で poset でなく, しかも, A が tame とわかっているので, tame vector space category である。Ringel は, one-point extension に於て, Berman-Moody-Wonenburger が示した Dynkin diagrams と Eucklidean diagrams の maximal root を介しての関係を module theoretical に 拡張した wing module を介しての関係 separating tubular extension なる理論を造り, そこで tubular patterns 等の tame vector space categories を示している。ただ, その vector space category をつかって表現型がわかる algebra は herditary に近い algebra等の限られた条件のものしかない。その範囲を広げる technique が Galois covering である。

<u>6. Covering Technique II.</u>

F : A ⟶ A/G を Galois covering とする。M ∈ mod A に対し, Supp M を M(a) ≠ 0 を満たす全ての A の object a で生成される full subcategory とする。このとき A が locally support-finite であるとは, 任意の a ∈ A に対して, $\bigcup_{M\in \mathrm{ind}\ A, M(a)\neq 0}$ Supp M が finite になっているときいう([7],[10])。

<u>Dowbor-Lenzing-Skowroński's Theorem</u>. A を locally support-finite category で, F : A ⟶ A/G を Galois covering とする。このとき任意の M ∈ ind A に対して, $G_M = \{1\}$ ならば, A/G もまたlocally support-finite で F から induce された map : (ind A)/G ⟶ ind (A/G) は bijection である。特に, A が tame であることと, A/G が tame であることは同値である。

7. tame algebras の計算例([19]).

(1) $A : b \xrightarrow{\mu} a \circlearrowleft \alpha$, with $\mu\alpha^m = \alpha^n = 0$ $(m \leqq n)$ とおくと、A が tame になることと，$(m,n) = (2,6)$ は同値である。この場合に A の Galois covering として，次のものをとる。

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda : \cdots & b_{-1} \arrow[d, "\mu_{-1}"] & b_0 \arrow[d, "\mu_0"] & b_1 \arrow[d, "\mu_1"] & \cdots \\
\arrow[r] & a_{-1} \arrow[r, "\alpha_{-1}"'] & a_0 \arrow[r, "\alpha_0"'] & a_1 \arrow[r] & {}
\end{tikzcd} ,
$$

with $\mu_i\alpha_i\alpha_{i+1} = \alpha_i\alpha_{i+1}\cdots\alpha_{i+5} = 0$ $(\forall i \in Z)$. $G = \langle g\rangle$, whrere $g:\Lambda \longrightarrow \Lambda$, $g(x_i) = x_{i+1}$, with $x = a$ or b. とすると，$\Lambda/G \simeq A$ である。Λ の full subcategory (同時に factor category になっている) として

$$
\begin{tikzcd}
\Lambda_n : & & & b_{n+3} \arrow[d, "\mu_{n+3}"] & b_{n+4} \arrow[d, "\mu_{n+4}"] & b_{n+5} \arrow[d, "\mu_{n+5}"] \\
a_n \arrow[r, "\alpha_n"'] & a_{n+1} \arrow[r, "\alpha_{n+1}"'] & a_{n+2} \arrow[r, "\alpha_{n+2}"'] & a_{n+3} \arrow[r, "\alpha_{n+3}"'] & a_{n+4} \arrow[r, "\alpha_{n+4}"'] & a_{n+5}
\end{tikzcd} ,
$$

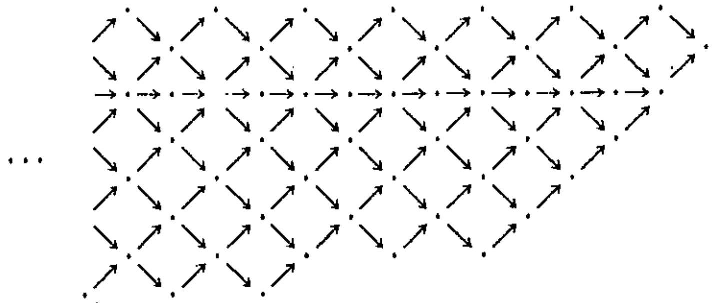
with $\mu_{n+3}\alpha_{n+3}\alpha_{n+4} = 0$. これは $\tilde{E}_8$ の concealment である。

$\Lambda'_n = \Lambda \cup \{b_{n+6}\}$, $R_n = R'_n \oplus R''_n$,

$$
\begin{tikzcd}
\text{where}\quad R'_n : & & & 0 & 0 & k & 0 \\
0 & k \arrow[l] & k \arrow[l, "1"] & k \arrow[l, "1"] \arrow[u] & k \arrow[l, "1"] \arrow[u] & k \arrow[l, "1"] \arrow[u, "1"] &
\end{tikzcd} ,
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 0 & 0 & 0 & k \\
R''_n : 0 & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] & 0 \arrow[l] \arrow[u] & 0 \arrow[l] \arrow[u] & 0 \arrow[l] \arrow[u] &
\end{tikzcd} ,
$$

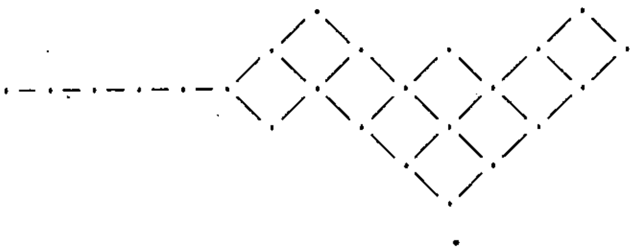
とおくと，$\Lambda'_n[R_n] \simeq \Lambda_{n,n+1}$ $(:= \Lambda_n \cup \Lambda_{n+1})$ である。このとき Λ_n の preinjective component と ind $\{b_{n+6}\}$ は，



R'_n

R''_n .

これから，$\mathrm{Hom}(R_n, \mathrm{mod}\ \Lambda'_n)$ を グラフで，表すと，



で，poset であるから，Kleiner，Nazarova の Theorem から tame とわかる．ゆえに，$\Lambda_{n,n+1}$ は tame である。同様に，任意の $m \leqq n$ に対して，

$\mathrm{Hom}(R_n, \mathrm{mod}\ (\Lambda_{m,n} \cup \{b_{n+6}\})) \simeq \mathrm{Hom}(R_n, \mathrm{mod}\ (\Lambda_n \cup \{b_{n+6}\}))$ が言えて，

$\mathrm{ind}\ \Lambda_{m,n+1} = \mathrm{ind}\ \Lambda_{m,n} \cup \mathrm{ind}\ \Lambda_{n,n+1}$, $\mathrm{ind}\ \Lambda = \cup_{n \subset Z}\ \mathrm{ind}\ \Lambda_{n,n+1}$.

Λ は locally support-finite で tame である。ゆえに，A は tame である。

(2) $A : \beta \circlearrowright b \xrightarrow{\mu} a \circlearrowleft \alpha$,with $\mu\alpha - \beta\mu = \alpha^m = \beta^n = 0$ とおくと，$1/m + 1/n >$ ならば finite representation type，= ならば tame，< ならば wild になる。$(m,n) = (6,3)$ を考えてみよう。この場合 A の Galois covering として，

$$
\Lambda : \cdots \quad
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & b_{-1} \arrow[r, "\beta_{-1}"] \arrow[d, "\mu_{-1}"] & b_0 \arrow[r, "\beta_0"] \arrow[d, "\mu_0"] & b_1 \arrow[r] \arrow[d, "\mu_1"] & {} \\
{} \arrow[r] & a_{-1} \arrow[r, "\alpha_{-1}"'] & a_0 \arrow[r, "\alpha_0"'] & a_1 \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}
\quad \cdots \qquad ,
$$

with $\mu_i\alpha_i - \beta_i\mu_{i+1} = \beta_i\beta_{i+1}\beta_{i+2} = \alpha_i\alpha_{i+1}\cdots\alpha_{i+5} = 0$

($\forall i \in Z$). $G = \langle g \rangle$, whrere $g:\Lambda \longrightarrow \Lambda$, $g(x_i) = x_{i+1}$, with $x = a$ or b.

とすると，$\Lambda/G \simeq A$ である。Λ の full subcategory (同時に factor category になっている) として

$$
\Lambda_{2n} : \quad
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & & & \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \\
\cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot &
\end{tikzcd}
\qquad ,
$$

$$
\Lambda_{2n-1} : \quad
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
 & & & \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[r] \arrow[d] & \cdot \arrow[d] \\
\cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot
\end{tikzcd}
\qquad ,
$$

L_{2n} : $\begin{smallmatrix} & & & & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & \end{smallmatrix}$, R_{2n} : $\begin{smallmatrix} & & & & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \end{smallmatrix}$,

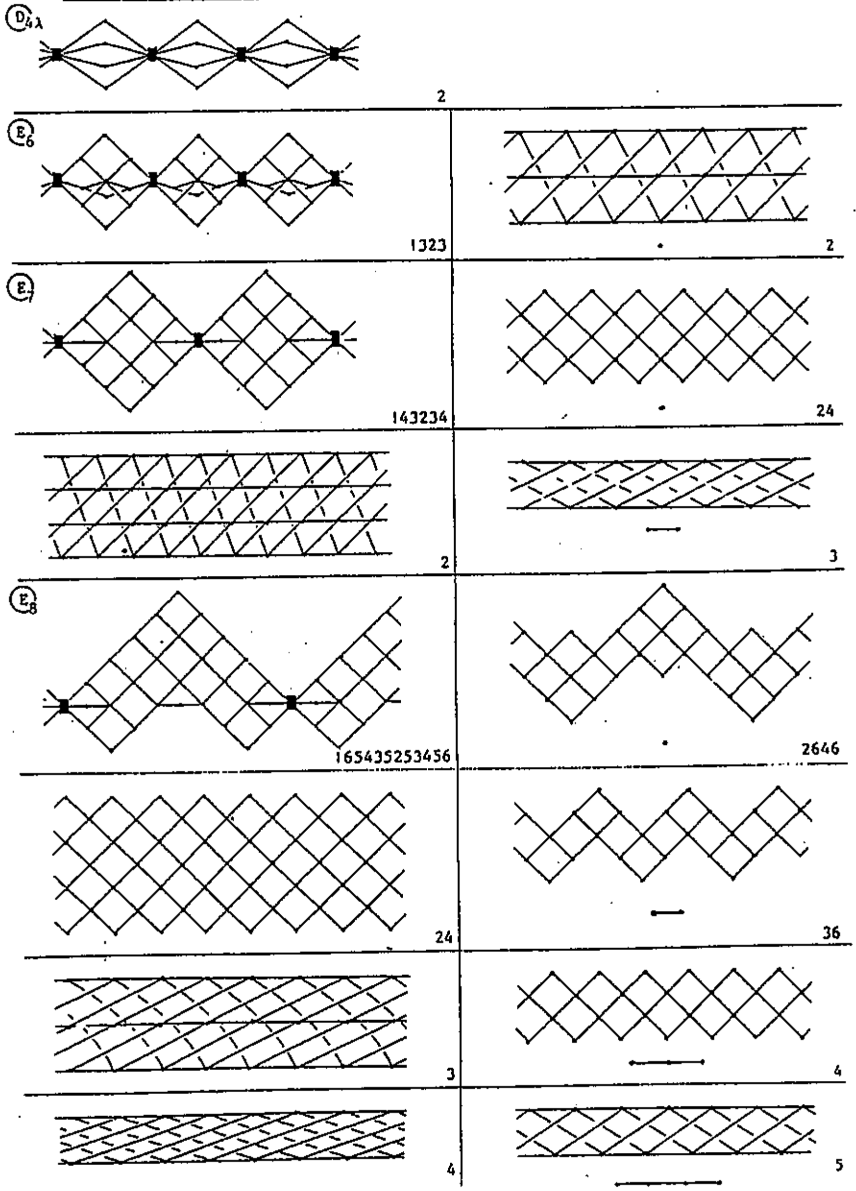
L_{2n-1} : $\begin{smallmatrix} & & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}$, R_{2n-1} : $\begin{smallmatrix} & & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}$,

とおくと，Λ_{2n}, Λ_{2n-1} は $\tilde{E}_8$ の concealement で，$\Lambda_{m-1,m+1}$ は Λ_m を R_m と DL_m で それぞれ one-point extension, co-extension したものである。この際に増える parts は (a) R_m が属している regular tube ($\simeq ZA_\infty/5$) (b) vector space categories $\mathrm{Hom}(R_m, \mathrm{mod}\,\Lambda_m)$, $\mathrm{Hom}(\mathrm{mod}\,\Lambda_m, R_m)$ である。(a) は実際の計算によって，modules が全てわかり indecomposable module の maximal support は $\Lambda_{m-1,m+1}$ である。(Ringel の言葉で言えば，ray, coray insertion) , (b)は pattern $(\tilde{E}_8, 5)$ (別図の Ⓔ の最初のもの) であることがわかる。ゆえに，$\Lambda_{m-1,m+1}$ は tame である。

同様に，任意の $m \leq n$ に対して，$\Lambda_{m-1,n+1} = \Lambda_{m-1,n}[R_n]$ であり，

$\mathrm{Hom}(R_n, \mathrm{mod}\ \Lambda_{m-1,n}) \simeq \mathrm{Hom}(R_n, \mathrm{mod}\ \Lambda_n)$ となる。ゆえに $\mathrm{ind}\ \Lambda_{m-1,n+1} = \mathrm{ind}\ \Lambda_{m-1,n} \cup \mathrm{ind}\ \Lambda_{n-1,n+1}$, $\mathrm{ind}\ \Lambda = \bigcup_{n \in Z} \mathrm{ind}\ \Lambda_{n-1,n+1}$ とくに，Λ は locally support-finite で tame である。ゆえに，Λ は tame である。

The tubular patterns



Refferences

[1] Bautista, R., Gabriel, P., Rojter, A.V. and Salmeron, L.: Representation-finite algebras and multiplicative bases, Invent. Math. 81 (1985), 217-285.

[2] Berman, S., Moody, R. and Wonenburger, M.: Certain matrices with null roots and finite Cartan matrices, Indiana Univ. Math. J. 21 (1971/1972), 57-92.

[3] Bongartz, K. and Gabriel, P.: Covering spaces in representation-theory, Invent. Math. 65 (1982), 331-378.

[4] Crawley-Boevey, W.W.: On tame algebras and bocs's, Proc. London Math. Soc. (3) 56 (1988), 451-483.

[5] Dlab, V., Ringel, C.M.: Indecomposable representations of graphs and algebras, Memoirs Amer. Math. Soc. 173 (1976).

[6] Donovan, P.W. and Freislich, M.R.: The indecomposable modular representations of certain groups with dihedral Sylow subgroups, Math. Ann. 238 (1978), 207-216.

[7] Dowbor, P., Lenzing, H. and Skowroński, A.: Galois coverings of algebras by locally support-finite categories, Springer L.N.M. (1984), 91-93.

[8] Dowbor, P. and Skowroński, A.: On the representation type of locally bounded categories, Tsukuba J. Math. 10 (1986), 63-72.

[9] Drozd, Yu.A.: On tame and wild matrix problems, Matrix Problems, Kiev 1977.

[10] Gabriel, P.: The universal cover of a representation-finite algebra, Springer L.N.M. 903 (1980), 68-105.

[11] Gelfand, I.M. and Ponmarev, V.A.: Indecomposable representations of the Lorentz group, Usp. Math. Nauk 23 (1968), 3-60.

[12] Kac, V.G.: Infinite root systems, representations of graphs and invariant thoery, Invent. Math. 56 (1980), 57-92.

[13] Nazarova, L.A.: The representations of partially ordered sets of infinite type, Springer L.N.M. 488 (1975), 244-252.

[14] Nazarova, L.A. and Rojter, A.V.: Categorical matrix problems and the Brauer-Thrall conjectures, Mitt. Math.Sem. Giessen 115 (1975).

[15] Ringel, C.M.: The indecomposable representations of the dihedral 2-groups, Math. Ann. 214 (1975), 19-34.

[16] Ringel, C.M.: Tame algebras, Springer L.N.M. 903 (1980), 137-287.

[17] Ringel, C.M.: Tame algebras and integral quadratic forms, Springer L.N.M. 1099 (1984).

[18] Wald, B. and Waschbüsch, J.: Tame biserial algebras, J. Algebra 95 (1985), 480-500.

[19] Hoshino, M. and Miyachi, J.: Tame two-point algebras, Tsukuba J. Math. 12 (1988), 65-96.

Bocses と Tame algebras

浅芸秀人

大阪市立大学理学部

k を代数的閉体として固定する. 以下で algebra といえば(とくに断わらなければ) つねに k 上有限次元の algebra を意味するものとする. ここでの目的は, Drozd の定理(およびその証明法)と Crawley-Boevey の結果を紹介することである. 前者の主張は次のとおりである:「algebras Λ の全体は, tame なものと wild なものとの disjoint union になる」 Λ が tame および wild であることの定義は以下のとおりである.

<u>定義</u> Λ が <u>tame</u> であるとは, 各次元 d に対して有限個の Λ-$k[x]$-bimodules M_i が存在して, M_i は右からみて $k[x]$ 上有限生成で自由であり, d 次元の各 indecomposable Λ-module はある simple $k[x]$-module N とある i による $M_i \otimes_{k[x]} N$ の形の module に同型となる.

<u>定義</u> Λ が <u>wild</u> であるとは, ある Λ-$k\langle x, y\rangle$-bimodule M が存在して, M は右からみて $k\langle x, y\rangle$ 上有限生成で自由であり, functor $M \otimes_{k\langle x,y\rangle} - \ : \ \mathrm{mod}\, k\langle x, y\rangle \to \mathrm{mod}\, \Lambda$ が直既約性と同型類を保つ.

この定理の証明はおおざっぱにいうと, Λ-module の直既約分解の問題を, それの minimal projective presentation を通して Λ上の行列問題とみなし, さらに Λ の k-basis を1つ固定することによって, それを k上の行列問題に

もちこみ，k上の行列変形のテクニックを用いて実行される*)。ただしk上の行列問題および行列変形は実際には，(Λのbasisのとり方によらない) bocsおよびそのreductions (これらはRoiter [7]によって導入されたものである) の形でとりあつかわれる。このように話しを進めるので，algebrasの表現論を直接bocsesの表現論に帰着させる長いめんどうな議論 (Crawley-Boevey [1, section 6]) は必要なくなったため，はぶいた。

さてCrawley-BoeveyはこのDrozdの理論をその論文[1]の中で整備し直し，tame algebrasの表現論を "minimal bocses" の表現論で近似する，という形で定式化した。さらに，これを使えば，Ringel [6]によって提出された2.3の問題は，algebrasがtameの場合には，容易に解ける，ということを示した。

§1ではalgebrasの表現論を行列問題を経由してbocsesの表現論に帰着させる素朴な方法を実例で示した。(これは実際にはalgebraのradicalの積のdualizationの計算になっている。このことに注意すれば実際の計算はもっと一般的に，容易にできる。) 同時にbocsおよびその表現を定義し，考えるbocsesの範囲をはっきりさせ，少なくともその範囲内のbocsesについて表示を与えた。この流れの中で，bocsの表現の定義がより自然に見えるようにするために，もとのRoiter-Drozd流の定義を採用した。

§2ではbocsesのreductionsについて説明を行なった。2.1ではわかりやすさを優先させたので，記述はところどころ不正確のままになっている。この節の最後に，多少わき道に入ることになるが，reductionsの最初の応用として，Brauer-Thrall conjecture I の正当性の証明を行なった。それは，(1) すでに2.1に現われるreductionsだけで，有限表現型のalgebras上のすべての表現と，この

*) $k[x]$-modulesの直既約分解の問題が$k[x]$上の行列の標準型を求める問題に帰着させられてJordan標準型として解かれること，と比較せよ。

conjectureの正当性の証明ができる，ということを強調するため；(2) §3の話しの流れがわかりやすくなると思われるため，である。

§3ではbocsesに対するDrozdの定理の証明を行なった。

§4では，Drozdの定理が§3の結果からどのように証明されるかの概略と，Auslander-Reiten理論への応用であるCrawley-Boeveyの結果を紹介した。

一般にalgebra Λ に対して，$\mathrm{mod}\,\Lambda$ および $\mathrm{mod}'\Lambda$ でそれぞれ k 上有限次元の左および右 Λ-modulesのなすcategoryを表わす。mapsの作用はscalarの作用の反対側からかくものとする。したがって $\mathrm{mod}\,\Lambda$ の中ではmorphismsは右からかかれる。

全体の目次は次のとおりである：

1. bocses

1.1 algebrasの表現論から行列問題へ

algebra Λ 上の modules をまず Λ 上の行列としてとりあつかうために、次の category $P_1(\Lambda)$ を導入する。

<u>定義</u> $P(\Lambda)$ を projectives のなす mod Λ の full subcategory とする。J を Λ の Jacobson radical とする。このとき category $P_1(\Lambda)$ を次のように定義する：

<u>objects</u>：$\mathrm{Ob}(P_1(\Lambda)) := \{(\alpha, P, Q) \mid P, Q \in \mathrm{Ob}(P(\Lambda)),\ \alpha : P \to JQ\}$

<u>morphisms</u>：$\forall\, M := (\alpha, P, Q),\ M' := (\alpha', P', Q') \in \mathrm{Ob}(P_1(\Lambda))$ に対して、

$$P_1(\Lambda)(M, M') := \left\{ (f, g) \;\middle|\; \begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\alpha} & Q \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ P' & \xrightarrow[\alpha']{} & Q' \end{array} \text{ が可換} \right\}$$

<u>composition</u>：$(f, g)(f', g') := (ff', gg')$.

<u>定義</u> $P_2(\Lambda)$ を $\{(\alpha, P, Q) \in \mathrm{Ob}(P_1(\Lambda)) \mid \mathrm{Ker}\,\alpha \leq JP\}$ で定義される $P_1(\Lambda)$ の full subcategory とする。

各 Λ-module に対して、その minimal projective presentation を考えることにより次を得る：

<u>補題</u> $\mathrm{Cok} : P_1(\Lambda)/I(\Lambda) \to \mathrm{mod}\,\Lambda$ は equivalence,
$\mathrm{Cok} : P_2(\Lambda) \to \mathrm{mod}\,\Lambda$ は representation-equivalence

である。ただし

$$I(\Lambda)(M, M') := \left\{ (f, g) \;\middle|\; \begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\alpha} & Q \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle \exists} & \downarrow{\scriptstyle g} \\ P' & \xrightarrow[\alpha']{} & Q' \end{array} \right\} \leq P_1(\Lambda)(M, M')$$

<u>注意</u> indecomposable projectives の list を $P_1, \cdots, P_n$ とすれば、$P_1(\Lambda)$ の object $M = (\alpha, P, Q)$ は、

$$\alpha = (\alpha_{ij}) : \bigoplus_{i=1}^{n} P_i^{a_i} \to \bigoplus_{j=1}^{n} P_j^{b_j}, \quad \alpha_{ij} \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P_i, JP_j) \hookrightarrow J \leq \Lambda$$

というΛ上の(およびJ上の)行列の形にかける。さらにMと$M' := (\alpha', P', Q') \in Ob(P_1(\Lambda))$との間の各morphism $(f, g) : M \to M'$について、f, gおのおのが同様にΛ上の行列でかけるから、(f, g)もΛ上の行列として表わすことができる。

各i, jに対して、$\mathrm{Hom}_\Lambda(P_i, JP_j)$の$k$-basisを選んで固定しておけば、$M$を$k$上の行列で表わすことができる。$P_1(\Lambda)$のmorphismも同様に$k$上の行列であらわされる。ゆえに$P_1(\Lambda)$自身が$k$上の行列の言葉で表わされることになる。このことを次の例によって説明しよう。

例. Λをbounden quiver $\overset{\alpha}{\circlearrowright} 1 \xrightarrow{\beta} 2$; $\alpha^2 = 0$で定義されるalgebraとする。e_iでtrivial path (at i)をあらわすことにすると、

$$\begin{cases} P_1 = \langle e_1, \alpha, \beta, \beta\alpha \rangle, & P_2 = \langle e_2 \rangle \\ \mathrm{Hom}_\Lambda(P_1, JP_1) = \langle \alpha \rangle, & \mathrm{Hom}_\Lambda(P_1, JP_2) = 0 \\ \mathrm{Hom}_\Lambda(P_2, JP_1) = \langle \beta, \beta\alpha \rangle, & \mathrm{Hom}_\Lambda(P_2, JP_2) = 0 . \end{cases}$$

すると、$P_1(\Lambda)$のobject Mは一意的に

$$\begin{pmatrix} M(a_1)\alpha & 0 \\ M(a_2)\beta + M(a_3)\beta\alpha & 0 \end{pmatrix} : P_1^{m_1} \oplus P_2^{m_2} \to P_1^{n_1} \oplus P_2^{n_2}$$

$$M(a_1) \in (k)_{m_1 \times n_1}, \quad M(a_2), M(a_3) \in (k)_{m_2 \times n_1}$$

の形にかける。したがってMには一意的に3つのk上の行列の組$(M(a_1), M(a_2), M(a_3))$ (ただし列の数はすべて同じで、$M(a_2)$と$M(a_3)$は行の数も等しい)が対応する。あるいはlinear map

$$[\mathrm{obj}] \quad \begin{pmatrix} M(a_1) & 0 \\ M(a_2) + M(a_3) & 0 \end{pmatrix} : k^{m_1} \oplus k^{m_2} \to k^{n_1} \oplus k^{n_2}$$

が対応すると考えてもよい。また $N\in Ob(P_1(\Lambda))$ が上と同様に

$$\begin{pmatrix} N(a_1) & 0 \\ N(a_2)+N(a_3) & 0 \end{pmatrix} : k^{p_1}\oplus k^{p_2} \to k^{q_1}\oplus k^{q_2}$$

と対応しているとするとき，これらの間の morphism について考える。 $F: M\to N$ を $P_1(\Lambda)$ の morphism とせよ。すると，

$$\begin{cases} \mathrm{Hom}_\Lambda(P_1, P_1) = \langle e_1, \alpha\rangle, & \mathrm{Hom}_\Lambda(P_1, P_2) = 0 \\ \mathrm{Hom}_\Lambda(P_2, P_1) = \langle \beta, \beta\alpha\rangle, & \mathrm{Hom}_\Lambda(P_2, P_2) = \langle e_2\rangle \end{cases}$$

であるから， F が $P_1(\Lambda)$ の morphism であることは次の図式が可換であることと同値である：

$$\begin{tikzcd} P_1^{m_1}\oplus P_2^{m_2} \arrow[r, "M"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} F(\omega_1)e_1+F(v_1)\alpha & 0 \\ F(v_2)\beta+F(v_3)\beta\alpha & F(\omega_2)e_2 \end{pmatrix}"'] & P_1^{n_1}\oplus P_2^{n_2} \arrow[d, "\begin{pmatrix} F(\omega_1')e_1+F(v_1')\alpha & 0 \\ F(v_2')\beta+F(v_3')\beta\alpha & F(\omega_2')e_2 \end{pmatrix}"] \\ P_1^{p_1}\oplus P_2^{p_2} \arrow[r, "N"'] & P_1^{q_1}\oplus P_2^{q_2} \end{tikzcd}$$

F を 10 個の k 上の行列の組

$$[\mathrm{mor}]\quad \left(\begin{pmatrix} F(\omega_1)+F(v_1) & 0 \\ F(v_2)+F(v_3) & F(\omega_2) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} F(\omega_1')+F(v_1') & 0 \\ F(v_2')+F(v_3') & F(\omega_2') \end{pmatrix}\right)$$

に対応させると，上の可換性は

$$(\mathrm{mor})\quad \begin{cases} M(a_1)F(\omega_1') = F(\omega_1)N(a_1) \\ M(a_2)F(\omega_1') = F(\omega_1)N(a_2) \\ M(a_2)F(v_1') + M(a_3)F(\omega_1') = F(\omega_2)N(a_3) + F(v_2)N(a_1) \end{cases}$$

が成り立つことと同値となる。 ここで $G: N\to L$ を $P_1(\Lambda)$ の morphism とするとき，F と G との合成を FG とかくことにすると，合成の定義から

$$(\mathrm{cmp})\quad \begin{cases} (FG)(\omega_1) = F(\omega_1)G(\omega_1), \quad (FG)(\omega_2) = F(\omega_2)G(\omega_2) \\ (FG)(v_1) = F(\omega_1)G(v_1) + F(v_1)G(\omega_1) \\ (FG)(v_2) = F(v_2)G(\omega_1) + F(\omega_2)G(v_2) \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l}(FG)(v_3) = F(v_2)G(v_1) + F(v_3)G(\omega_1) + F(\omega_2)G(v_3) \\ \omega_1', \omega_2', v_1', v_2', v_3' \text{ についても同様.}\end{array}\right.$$

となる。以上により $P_1(\Lambda)$ から次の category $\mathscr{C}$ が定義された：

$\mathscr{C}$ の objects は [obj] の形をもつ 3つの k上の行列の組である.
$\mathscr{C}$ の morphisms は (mor) をみたす [mor] の形の 10個の k上の行列の組である.
$\mathscr{C}$ の composition は 式 (cmp) によって定義される.

明らかに $P_1(\Lambda)$ と $\mathscr{C}$ とは equivalent である。よって $P_1(\Lambda)$ における，与えられた object M の直既約分解を求める問題は，M に対応する行列の組 $(M(a_1), M(a_2), M(a_3))$ の $\mathscr{C}$ における標準形を求める問題，すなわち $\mathscr{C}$ によって定義される行列問題に翻訳される。

1.2 行列問題から bocses の表現論へ

上の $\mathscr{C}$ によって定義される行列問題を例にとって，行列問題を bocses の表現論に翻訳する方法を説明する。まず，bocs および bocs の表現を定義する.

定義. bocs とは skeletally small category A とその上の coalgebra V との組 (A, V) のことである (a bimodule over a category with a coalgebra structure).
すなわち V は A-A-bimodule であり，bimodule maps $\varepsilon_V\ V \to A$, $\mu_V : V \to V \otimes_A V$ をもち，次の図式が可換となっている：

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\mu_V} & V\otimes_A V \\ {\scriptstyle\mu_V}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mu_V\otimes V} \\ V\otimes_A V & \xrightarrow[V\otimes\mu_V]{} & V\otimes_A V\otimes_A V \end{array}
\qquad
\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\text{can.}"', "\sim"] \arrow[d, "\mu_V"] \arrow[dr, "\text{can}", "\sim"'] & \\ V\otimes_A A & V\otimes_A V \arrow[l, "V\otimes\varepsilon_V"] \arrow[r, "\varepsilon_V\otimes V"'] & A\otimes_A V \end{tikzcd}$$

ε_V は counit，　μ_V は comultiplication とよばれている。$\bar{V} := \operatorname{Ker}\varepsilon_V$ を bocs (A, V) の

kernel とよぶ.

定義 (A, A) を principal bocs とよぶ. ただし ε_A は identity, μ_A は canonical isomorphism.

定義 $\mathcal{A} = (A, V)$ を bocs とする. $\mathcal{A}$ の表現 の category $R(\mathcal{A})$ は次のように定義される：

objects : $\mathrm{Ob}(R(\mathcal{A})) := \mathrm{Ob}(\mathrm{mod}^r A)$

morphisms : $\forall M, N \in \mathrm{Ob}(R(\mathcal{A}))$ に対して,

$$R(\mathcal{A})(M, N) := \mathrm{Hom}({}_AV_A\ ,\ \mathrm{Hom}_k(M_A, N_A))$$

ここで Hom は A-A-bimodule hom を表わす.

composition $M \xrightarrow{F} N \xrightarrow{G} L$ in $R(\mathcal{A})$ に対して,

$$FG : {}_AV_A \xrightarrow{\mu} V \otimes_A V \xrightarrow{F \otimes G} \mathrm{Hom}_k(M, N) \otimes_A \mathrm{Hom}_k(N, L) \xrightarrow{*} \mathrm{Hom}_k(M, L)$$

ここで $*$ は mod k における composition を表わす.

注意 $M \in \mathrm{Ob}(R(\mathcal{A}))$ に対する identity は 合成

$$V \xrightarrow{\varepsilon} A \xrightarrow[\text{map of } M_A]{\text{the structure}} \mathrm{Hom}(M_A, M_A)$$

に等しい.

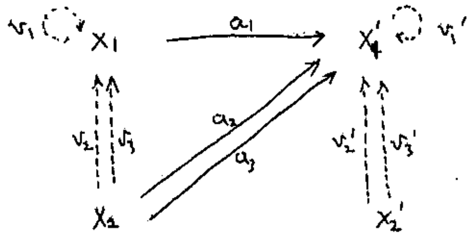
さて $\mathcal{C}$ に対して, bocs $\mathcal{A}$ をつくって $\mathcal{C}$ と $R(\mathcal{A})$ とが equivalent になるようにしよう. $\mathcal{C}$ の object $\begin{pmatrix} M(a_1) & 0 \\ M(a_2)+M(a_3) & 0 \end{pmatrix} : k^{m_1} \oplus k^{m_2} \to k^{n_1} \oplus k^{n_2}$ の形から A としては quiver category

$$A : \begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "a_1"] & X_1' \\ X_2 \arrow[ur, shift left, "a_2"] \arrow[ur, shift right, "a_3"'] & X_2' \end{tikzcd}$$

をとればよいことがわかる.

[mor] の形をもつ 10個の行列の組で条件 (mor) をみたすものが，$\mathscr{C}$ での morphism であった。だからうまく V をつくって，V から $\mathrm{Hom}_k(M_A, N_A)$ への A-A- bimodule map が自動的にそのような 10個の行列の組に対応するようにすればよい。以下のように作る：
まず $F(v_1), F(v_2), \cdots$ の定義域と値域を見ながら biquiver

Q:



をつくる。各 solid arrow $a: X \to Y$ を path $(X|a|Y)$ と同一視し，各 dotted arrow $v: X \dashrightarrow Y$ を path $(X|v|Y)$ と同一視する。各点 X に対して，solid trivial path $e_X = (X||X)$ と dotted trivial path $\omega_X = (X|\omega_X|X)$ を用意しておく。$\omega_{X_i} = \omega_i$，$\omega_{X_i'} = \omega_i'$ と略記する。paths の合成はふつうの定義のとおりとする。たとえば，$(X_2|a_2|X_1')(X_1'|v_1'|X_1') = (X_2|a_2, v_1'|X_1')$。そこで $\bar{V}$ を dotted arrows $v_1, v_2, v_3, v_1', v_2', v_3'$ から生成される自由 A-A-bimodule とし，Ω を dotted trivial paths $\omega_1, \omega_2, \omega_1', \omega_2'$ から生成される自由 A-A-bimodule とする。A の中の各 arrow $a: X \to Y$ について，$\delta(a) := a\omega_X - \omega_Y a$ とおく。そこで V を

$$V := (\bar{V} \oplus \Omega)/\langle\delta\rangle$$

ただし $\langle\delta\rangle$ とは $\delta(a_1) - 0$，$\delta(a_2) - 0$，$\delta(a_3) - (v_2 a_1 - a_2 v_1')$ で生成される $\bar{V} \oplus \Omega$ の subbimodule とする。次に V の counit および comultiplication を定義する。(μ は (cmp) をみたすように決める)

$$\varepsilon : V \to A \ : \ \varepsilon(v) := \begin{cases} 0 & \text{if} \quad v \in \bar{V} \\ 1_X & \text{if} \quad v = \omega_X \quad \text{for some } X \end{cases},$$

$$\mu : V \to V \otimes_A V \quad ; \quad \mu(v) := \begin{cases} \omega_X \otimes \omega_X & \text{if } v = \omega_X \text{ for some } X, \\ \omega_X \otimes v + v \otimes \omega_Y & \text{if } v : X \to Y = v_1, v_2, v_1' \text{ or } v_2' \\ \omega_2 \otimes v_3 + v_3 \otimes \omega_1 + v_2 \otimes v_1 & \text{if } v = v_3 \\ \omega_2 \otimes v_3' + v_3' \otimes \omega_1 + v_2' \otimes v_1' & \text{if } v = v_3' \end{cases}$$

ε は $\varepsilon(\delta(a)) = a - a = 0$, $\varepsilon(v_2 a_1 - a_2 v_1') = 0 - 0 = 0$ (a は A の中の各 arrow) より well-defined. $\mathscr{C}$ の composition の associativity から μ の coassociativity が出て, V はこの ε と μ で A-coalgebra になることがわかる。以上で $\mathcal{A} = (A, V)$ が定義できた。ここで $\mathscr{C}$ が $R(\mathcal{A})$ と equivalent であることを確かめる。まず約束により, mod k における map は左から右へ合成されるから, $Ob(\mathscr{C}) = Ob(\mathrm{mod}^{r} A)$ とみなせる。よって $Ob(\mathscr{C}) = Ob(R(\mathcal{A}))$. $\forall M, N \in Ob(\mathscr{C})$ に対して, $F : V \to \mathrm{Hom}_k(M_A, N_A)$ は $\hat{F} : \bar{V} \otimes \Omega \to \mathrm{Hom}_k(M_A, N_A)$ で $\hat{F}(\langle\delta\rangle) = 0$ となるものと同一視できる。$\hat{F}$ は10個の生成元 $\omega_1, \omega_2, v_1, \cdots$ での像 (これを $\tilde{F}$ とかく) できまっているから, $\mathrm{Hom}(\bar{V} \otimes \Omega, \mathrm{Hom}_k(M_A, N_A))$ と [mor] の形の行列の組とは $\hat{F} \leftrightarrow \tilde{F}$ で1対1に対応する。また $\hat{F}(\langle\delta\rangle) = 0$ は $\tilde{F}$ が条件 (mor) をみたすことと同値である。よって F と $\tilde{F}$ とを同一視することにより, $\mathrm{mor}(\mathscr{C}) = \mathrm{mor}(R(\mathcal{A}))$ とみなせる。(cmp) と μ の定義の形および $R(\mathcal{A})$ での composition の定義から, $\mathscr{C}$ と $R(\mathcal{A})$ とでは composition の定義も一致することがわかる。よって $\mathscr{C}$ と $R(\mathcal{A})$ とは equivalent である。

1.3 bocses の category

定義. $\mathcal{A} = (A, V)$, $\mathcal{B} = (B, W)$ を bocses とする。このとき $\theta = (\theta_0, \theta_1) : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が **bocs morphism** であるとは $\theta_0 : A \to B$ が functor で $\theta_1 : {}_AV_A \to {}_AW_A$ が A-A-bimodule map (θ_0 によって ${}_BW_B$ を ${}_AW_A$ とみなす) であって, 次の図式が可換である

ことである：

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\varepsilon_V} & A \\ \theta_1 \downarrow & & \downarrow \theta_0 \\ W & \xrightarrow[\varepsilon_W]{} & B \end{array} \quad , \qquad \begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\mu_V} & V \otimes_A V & \xrightarrow{\theta_1 \otimes \theta_1} & W \otimes_A W \\ \theta_1 \downarrow & & & & \downarrow \mathrm{can} \\ W & \xrightarrow[\mu_W]{} & W \otimes_B W & = & W \otimes_B W \end{array}$$

<u>定義</u> $\mathcal{A} \xrightarrow{\theta} \mathcal{B} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{C}$ を bocs morphism とする ただし $\mathcal{A}=(A,V)$, $\mathcal{B}=(B,W)$, $\mathcal{C}=(C,X)$, $\theta=(\theta_0,\theta_1)$, $\varphi=(\varphi_0,\varphi_1)$ とする このとき，

$$\theta\varphi := (\theta_0\varphi_0, \theta_1\varphi_1)$$

とおき，これを θ と φ との<u>合成</u>とよぶ，ここで $\varphi_1 : {}_BW_B \to {}_BX_B$ は θ_0 によって $\varphi_1 : {}_AW_A \to {}_AX_A$ とみなす。 この $\theta\varphi$ が bocs morphism $\mathcal{A} \to \mathcal{C}$ になっていることは容易に確かめられる

上の bocs morphism とその合成によって bocs の全体は category をなす，この category を Bocs と表わす。

<u>定義</u> $\theta : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ を bocs morphism とする．ただし $\mathcal{A}=(A,V)$, $\mathcal{B}=(B,W)$, $\theta=(\theta_0,\theta_1)$ とする このとき functor

$$\theta^* : R(\mathcal{B}) \to R(\mathcal{A})$$

を次のように定義する

$\forall M \in \mathrm{Ob}(R(\mathcal{B}))$ に対して，$\theta_0 : A \to B$ によって M_B を M_A とみなす．i.e.,

$$\theta^*(M_B) := M_A \quad (\text{by } \theta_0).$$

$\forall F : {}_BW_B \to \mathrm{Hom}_k(M_B, N_B)$ に対して，これを θ_0 によって $F : {}_AW_A \to \mathrm{Hom}_k(M_A, N_A)$ とみて，

$$\theta^*(F) : {}_AV_A \xrightarrow{\theta_1} {}_AW_A \xrightarrow{F} \mathrm{Hom}_k(M_A, N_A)$$

とおく．

命題 R と Θ^* は contravariant functor Bow → k-cat を与える。ただし k-cat は skeletally small k-categories の category.

1.4 grouplike と differential

$\mathcal{A}=(A,V)$ を bow とする。A' は A の subcategory で $Ob(A')=Ob(A)$ となっているものとする。また A' を skeletally small とする。$i : A' \hookrightarrow A$ を inclusion functor とする。

定義 A' にかんする $\mathcal{A}$ の grouplike とは、A'-A'-bimodule map $\omega : A' \to V$ で $(i,\omega) : (A',A') \to \mathcal{A}$ が bow morphism となっているものである。

注意 (i,ω) が bow morphism という ことは次の図式が可換であることであった:

$$\begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{id} & A' \\ \omega\downarrow & & \downarrow i \\ V & \xrightarrow[\varepsilon]{} & A \end{array} \qquad , \qquad \begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow[\sim]{can} & A'\otimes_{A'}A' & \xrightarrow{\omega\otimes\omega} & V\otimes_{A'}V \\ \omega\downarrow & & & & \downarrow can \\ V & & \xrightarrow[\mu]{} & & V\otimes_A V \end{array}$$

このことからとくに 各 $X\in Ob(A)$ について、$\varepsilon(\omega(1_X))=1_X$, $\mu(\omega(1_X))=\omega(1_X)\otimes\omega(1_X)$ が成立つ。

定義 grouplike ω が reflector であるとは、$(i,\omega)^* : R(\mathcal{A}) \to R(A',A')$ が isomorphisms を reflect することである。

定義 grouplike ω に対して、A'-A'-bimodule maps

$$A \xrightarrow{\delta_0} \overline{V} \xrightarrow{\delta_1} \overline{V}\otimes_A\overline{V}$$

を $\delta_0 : (a : X\to Y) \mapsto a\omega_Y - \omega_X a$, $\delta_1 : (v : X\to Y) \mapsto \mu(v) - \omega_X\otimes v - v\otimes\omega_Y$ で定義し、これらを A' と ω に関する differential とよぶ。これらが well-defined であることは計算によって確かめられる。上では $\omega_X := \omega(1_X)$ と略記した。

命題 $\delta_2 = \delta_1 \otimes \bar{V} - \bar{V} \otimes \delta_1$ とおくと、$\delta_0, \delta_1, \delta_2$ は

(dif) $\delta_1\delta_0 = 0$, $\delta_2\delta_1 = 0$

をみたす。逆に(dif)をみたす δ_0, δ_1 と A-A-bimodule $\bar{V}$ が与えられると、bocs が1つ定められる。grouplike をもつ bocs はつねにこのようにして得られる。

したがって grouplike をもつ bocs を定めるには その kernel と differential を決めればよいことになる。以後 δ_0 と δ_1 とは区別せず単に δ とかく。とくに $\delta_0 = \delta_1 = 0$ とおくと、つねに(dif)がみたされているから、与えられた A-A-bimodule を kernel とするような bocs はいつでも作ることができる。このような bocs を基本的なものと思えば、δ_0, δ_1 は与えられた bocs が基本的なものからどれだけズレているかを表わしているとも見られる。

1.5 layered bocses と minimal bocses

algebras の表現論から得られる bocses を含みつつ、あとでのべる reductions を行なっても閉じているような bocses の範囲(layered bocses)を定める。

定義 category A' が minimal であるとは A' が basic (つまり skeletal) であり $\underbrace{\mathrm{add}\,k \times \cdots \times \mathrm{add}\,k}_{m} \times \mathrm{add}\,R_1 \times \cdots \times \mathrm{add}\,R_n$ ($m \geq 0$, $n \geq 0$, $m+n \geq 1$) に equivalent であることである。ただし R_i は $k[x, f(x)^{-1}]$ ($f(x) \in k[x]$) の形の ring で、ここでは add R (R: ring) は 有限生成で自由な R-modules の category を表わす。$n=0$ のとき A' を trivial という。

定義 bocs $\mathcal{A} = (A, V)$ が layered であるとは、$\mathcal{A}$ がある layer をもつことである ただし layer とは (A'; ω, $a_1, \cdots, a_n$: $v_1, \cdots, v_m$) ($n, m \geq 0$) の形の組であり、次の条件をみたすものである:

(1) A' は minimal category である

(2) ω は A' に関する reflector である

(3) $a_1, \cdots, a_n$ は indecomposable であり, A' 上で category A を自由に生成している

(4) $v_1, \cdots, v_m$ は indecomposable であり, A 上で A-A-bimodule $\overline{V}$ を自由に生成している。

(5) (triangularity) すべての i について $\delta(a_i)$ が $a_1, \cdots, a_{i-1}$ と $v_1, \cdots, v_m$ の積と和でかける ただし $a_i : X_i \to Y_i$ が indecomposable とは, X_i, Y_i ともに indecomposable であることを意味する. v_i についても同様である 上の(1)を

(1') A' はある minimal category A'' の indecomposable objects 全体からなる full subcategory である.

にとりかえたものが成り立つとき, ここでは $(A'; \omega; a_1, \cdots, a_n; v_1, \cdots, v_m)$ を <u>ind-layer</u> とよんでおくことにする.

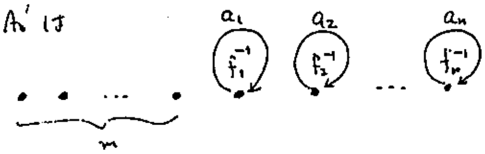
<u>定義</u> bocs $\mathcal{A} = (A, V)$ が <u>minimal</u> であるとは, $\mathcal{A}$ が $A = A'$ となる layer (i.e. $n=0$ となる layer) をもつことである

以後, 断わらなければ bocses はつねに layered bocses であるとする

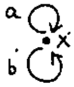
<u>1.6 bocses の表示</u>.

ここでは bocses の表示について考える 少なくとも layered bocses が表示できるようにする bocs $\mathcal{A} = (A, V)$ において A が Krull-Schmidt category (e.g. layered bocs) であるとき A の indecomposable objects の全体のなす full subcategory $\mathrm{indec}(A)$ を A_0 とおく。 V の $A_0 \times A_0$ への制限を V_0 とすると, $\mathcal{A}_0 = (A_0, V_0)$ も bocs であり, $\mathcal{A}$ は $\mathcal{A}_0$ によって完全に定まる よって $\mathcal{A}_0$ を表示することができればよい。 $\mathcal{A}$ が layered であるときは, たとえば $(A'; \omega; a_1, \cdots, a_n; v_1, \cdots, v_m)$ を layer にもつときは, $\mathcal{A}_0$ は ind-layer $(A_0'; \omega_0; a_1, \cdots, a_n; v_1, \cdots, v_m)$ をもつ。 ただし $A_0' := \mathrm{indec}(A')$, $\omega_0 := \omega|_{A_0'} : A_0' \to V_0$. ゆえに 命題1.4 により, A_0, $\overline{V_0}$, δ_0 を与えれば $\mathcal{A}_0$ が定まる ただし δ_0 は ω_0 から 定義される differential である

条件1.5(1)より A_0' は

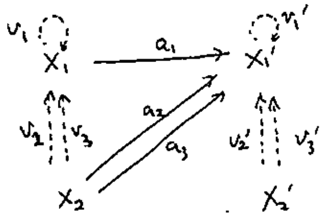


の形の bounded quiver algebra として表わせる。ただし  , $f\in k[a]$ とは

 ; $f(a)b=e_x$, $bf(a)=e_x$

の略記である。条件1.5(3)より A_0 は上の A_0' の bounded quiver に arrows $a_1,\dots,a_n$ を追加したものによって与えられる。relation が上の形のものに限る bounded quiver をとくに <u>localized quiver</u> とよぶことにする。条件1.5(4)より $\overline{V}_0$ は dotted arrows $v_1,\dots,v_m$ を A_0 の quiver に追加することによって表わされる。こうして得られる quiver を <u>localized biquiver</u> とよぶ。最後に δ は $a_1,\dots,a_n$, $v_1,\dots,v_m$ 上の値で完全に決まるから、これらを表わしておけば、以上で $\mathcal{A}$ の表示が得られたことになる。このようにしてできた表示を <u>localized differential biquiver</u> 略して <u>LDB</u> とよぶ。

<u>例</u>　1.2 で得られた bocs を LDB の形で表示すると次のようになる：



$$;\begin{cases}\delta(a_3)=v_2a_1-a_2v_1' \\ \delta(v_3)=v_2v_1 \\ \delta(v_3')=v_2'v_1' \\ \text{others}=0\end{cases}$$

与えられた LDB から bocs をつくる方法は 1.2 でのべた方法と全く同様である。

2. bocses a reductions

2.1 基本的な行列問題

次の問題を考えよう：

<u>問題</u> k上の1つの行列を横2つに分けたもの $M=(A\,|\,B)$ において，次の4つの変形が許されているものとする：

(i) Mの行基本変形（すなわち A, B の行をいっせいに変形する）

(ii) A の列基本変形

(iii) Bの列基本変形

(iv) Aの列の定数倍をBの列に足す.

これらの有限回の変形のもとで，$M=(A\,|\,B)$ の"標準型"を求めよ.

<u>1つの解答</u> (a) まず A に (i) および (ii) の変形を有限回ほどこして，Mを次の形にする：

$$\left(\begin{array}{c:c|c} E & O & B_1 \\ \hdashline O & O & B_2 \end{array}\right)$$

ここで E は適当なサイズの単位行列を表わす.

(b) 次に (iv) の変形によって

$$\left(\begin{array}{c:c|c} E & O & O \\ \hdashline O & O & B_2 \end{array}\right)$$

(c) 最後に (i) および (iii) によって

$$\begin{array}{c} m\{ \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{c:c|c:c} \overbrace{E}^{m} & \overbrace{O}^{s} & \multicolumn{2}{c}{O} \\ \hdashline O & O & E & O \\ \hdashline & & \underbrace{O}_{n} & \underbrace{O}_{t} \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \}n \\ \}r \end{array}$$

$$= (1\,|\,J_{10})^{(m)} \oplus (J_{10}\,|\,1)^{(n)} \oplus (J_{10}\,|\,J_{10})^{(r)} \oplus (J_{01}\,|\,J_{00})^{(s)} \oplus (J_{00}\,|\,J_{01})^{(t)}$$

これが求める標準型である。

ただし，$J_{n0}: k^n \to 0$，$J_{0n}: 0 \to k^n$ は empty matrices である。

上の(a),(b)の操作はのちに bocs の edge reduction に一般化，定式化され，(b)は bocs の regularization となる。以上の変形だけで有限表現型の algebra の indecomposable はすべて求めることが理論的に可能であり，その計算は bocs の reduction の形でコンピューターを使って実行できる。また Brauer-Thrall conjecture I の正当性もこれらの変形だけで証明できる。

まず上の問題が前節の行列問題の形としてとらえられることをはっきりさせる。次にこれを bocses の表現論の問題にかえることによって上の (a), (b), (c) の変形を bocses の reductions に翻訳する。ここではそのふんいきがつかめれば十分である。だから細かく説明しなかったところもある。次の節で bocses の reductions を induced bocses をつくるという形に定式化する。

$(A|B)$ から有限回 (i)〜(iv) をほどこして得られる行列全体を $[(A|B)]$ で表わすと，

$$[(A|B)] = \{ (P^{-1}AQ \mid P^{-1}BR - P^{-1}AX) \mid P \in GL_m,\ Q \in GL_a,\ R \in GL_b,\ X \in (k)_{a\times b} \}.$$

（ただし m, a, b は A, B のサイズで $A \in (k)_{m\times a}$，$B \in (k)_{m\times b}$ とする）

よって $[(A'|B')] = [(A|B)]$ となる必要十分条件は，上のような P, Q, R, X が存在して

$$(\mathrm{mor}) \quad AQ - PA' = 0, \quad BR - PB' = AX$$

をみたすことである。そこで次のような category $\mathscr{C}$ を考える：

objects：$(A|B)$，$A \in (k)_{m\times a}$，$B \in (k)_{m\times b}$　$m, a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

morphisms：$\forall$ $A \in (k)_{m\times a}$，$B \in (k)_{m\times b}$，$A' \in (k)_{m'\times a'}$，$B' \in (k)_{m'\times b'}$ に対して，

$$\mathscr{C}((A|B), (A'|B')) := \{ (P, Q, R, X) \in (k)_{m\times m'} \times (k)_{a\times a'} \times (k)_{b\times b'} \times (k)_{a\times b'} \mid (\mathrm{mor}) \}$$

composition：$[(A|B)]$ の形から次のように定義する：

$$(P, Q, R, X)\cdot(P', Q', R', X') := (PP', QQ', RR', XR' + QX')$$

するとこのとき，

$$(\mathrm{ref}) \quad \text{“} [(A'|B')] = [(A|B)] \text{”} \iff \text{“} (A'|B') \cong (A|B) \text{ in } \mathscr{C} \text{”}$$

が成り立つ。ここで標準型は indecomposable は $(A|B)$ の形のものの直和になっていることから、上の問題は結局 category $\mathscr{C}$ における indecomposable をすべて求めるという問題に帰着される。

次に $\mathscr{C}$ のこの問題を bocs の表現論に翻訳する。前節のようにして、LDB表示すると：

$$\mathscr{A}:\quad \begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dl, "a_1"'] \arrow[dr, "a_2"] & \\ X_2 \arrow[rr, dashed, "v_1"'] & & X_3 \end{tikzcd} \quad ; \quad \delta(a_2)=a_1v_1,\ \text{others}=0$$

$(A=M(a_1),\ B=M(a_2),\ P=M(\omega_1),\ Q=M(\omega_2),\ R=M(\omega_3),\ X=M(v_1)$ と思え。$)$

もとの行列問題を次の形にあらわしておけば、LDB表示との対応がよくわかると思う：

$$\begin{array}{cc} & \begin{tikzcd} M(X_2) \arrow[loop above, dashed, "\omega_2"] \arrow[r, dashed, "v_1"'] & M(X_3) \arrow[loop above, dashed, "\omega_3"] \end{tikzcd} \\ \begin{tikzcd} M(X_1) \arrow[loop left, dashed, "\omega_1"] \end{tikzcd} & \left(\begin{array}{c|c} M(a_1) & M(a_2) \end{array}\right) \end{array}$$

((i)〜(iv) が $\omega_1, \omega_2, \omega_3, v_1$ に対応する。$\mathscr{A}$ の LDB表示では $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ が省略されている、と思えばよい。)

さて (a) の操作をほどこすと、この行列問題は次のように変形される：

$$\begin{array}{cc} & \begin{tikzcd} M(X_2') \arrow[loop above, dashed, "\omega_2'"] \arrow[rr, dashed, bend left, "v_1'"] & M(X_2'') \arrow[loop above, dashed, "\omega_2''"] \arrow[l, dashed, "v_2"'] \arrow[r, dashed, "v_1''"] & M(X_3) \arrow[loop right, dashed, "\omega_3"] \end{tikzcd} \\ \begin{tikzcd} M(X_1') \arrow[loop above, dashed, "\omega_1'"] \arrow[d, dashed, "v_3"'] \\ M(X_1'') \arrow[loop below, dashed, "\omega_1''"] \end{tikzcd} & \left(\begin{array}{c:c|c} E & O & M(a_2') \\ \hdashline O & O & M(a_2'') \end{array}\right) \end{array}$$

LDB表示すると、

$$\begin{tikzcd} X_1' \arrow[r, dashed, "v_3"] \arrow[rr, "a_2'"] \arrow[d, equal, "E"'] & X_1'' \arrow[r, "a_2''"] & X_3 \\ X_2' \arrow[rr, dashed, bend right, "v_1'"'] & X_2'' \arrow[l, dashed, "v_2"'] \arrow[r, dashed, "v_1''"] & X_3 \end{tikzcd}$$

を通って、

$$\mathcal{B}:\quad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed, "v_3"] \arrow[dr, "a_2'"] \arrow[dr, dashed, bend right, "v_1'"'] & X_1'' \arrow[d, "a_2''"] \\ X_2'' \arrow[u, dashed, "v_2"] \arrow[r, dashed, "v_1''"'] & X_3 \end{tikzcd} \quad ; \begin{cases} \delta(a_2') = v_1' + v_3 a_2'' =: v \\ \text{others} = 0 \end{cases}$$

となる。すなわち a_1 のところだけをとり出すと、

$$\left(X_1 \xrightarrow{a_1} X_2 \;,\; \delta(a_1)=0 \right) \longmapsto \left(\begin{tikzcd}[column sep=small] & Y \arrow[dl, dashed, "v_3"'] & \\ X_1'' & & X_2'' \arrow[ul, dashed, "v_2"'] \end{tikzcd} \;;\; \delta=0 \right)$$

となり、残りの arrows は分解 $X_1 = Y \oplus X_1''$，$X_2 = Y \oplus X_2''$ に応じて分解することによって得られる。ここで一般に行列問題が category $\mathcal{C}$ で与えられたとき、$\mathcal{C}$ の object である行列の組 $(M(a_1), \cdots, M(a_n)) = M$ に対して、M の <u>norm</u> $\|M\|$ を、$\|M\| :=$ M の成分の数 $:= \sum_{i=1}^{n}$ ($M(a_i)$ の行の数)・($M(a_i)$ の列の数) で定義する。すると、上の変形において、$M(a_1) \neq 0$ ならば、すなわち $\dim M(X_1) \neq 0$ かつ $\dim M(X_2) \neq 0$ ならば、変形後の表現は変形前と同値でありながら、より小さい norm をもつことがわかる。このことは norm にかんする帰納法が使えることを暗示している。ここでのべた変形は、上のように edge (=始点と終点が異なる(solid) arrow) a_1 を消す操作であることから、あとで edge reduction とよばれて定式化される。

次に、(b) の操作によって上の $\mathcal{B}$ の問題は次の行列問題に変形される：

$$\left(\begin{array}{c:c|c} E & O & O \\ \hdashline O & O & M(a_2'') \end{array} \right) \;,\qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, dashed, "v_3"] & X_1'' \arrow[d, "a_2''"] \\ X_2'' \arrow[u, dashed, "v_2"] \arrow[r, dashed, "v_1''"'] & X_3 \end{tikzcd} \;;\; \delta(a_2'')=0$$

すなわち $\delta(a)=v$ となる pair (a, v) は同時に消すことができる。これはのちに regularization の形に定式化される。ここでも　$M(a_2') \neq 0$ なら、つまり $\dim M(Y) \neq 0$, $\dim M(X_3) \neq 0$ ならば norm が小さくなっていることがわかる。

最後の (c) の操作は上の (a) と同様である。

2.2 induced bocses

以上の reductions はすべて次の induced bocs をつくるという操作の形に理論化される。

<u>定義</u> $\mathcal{A}=(A,V)$ を (layered とは限らない) bocs とし、$\theta: A \to B$ を functor とする。この $\mathcal{A}$ と θ から新しい bocs $\mathcal{A}^{\theta}=\mathcal{A}^{B}$ を次のようにつくる。これを $\mathcal{A}$ から θ によって <u>induce</u> された bocs (<u>induced bocs</u>) とよぶ。(ただし B を skeletally small category とする)

$\mathcal{A}^{B} := (B, {}^{B}V^{B})$ で、${}^{B}V^{\theta}$ の counit と comultiplication は次の合成で与える:

$$\text{counit}: \; {}^{B}V^{B} := B\otimes_A V\otimes_A B \xrightarrow{{}^{B}\varepsilon^{B}} B\otimes_A A\otimes_A B \xrightarrow{\text{can}} B,$$

$$\text{comultiplication}: \; {}^{B}V^{B} \xrightarrow{{}^{B}\mu^{B}} {}^{B}V\otimes_A V^{B} \underset{\text{can}}{\xrightarrow{\sim}} {}^{B}V\otimes_A A\otimes_A V^{B} \xrightarrow{{}^{B}V_{\theta}V^{B}} {}^{B}V\otimes_A B\otimes_A V^{B}$$

$$\underset{\text{can}}{\xrightarrow{\sim}} {}^{B}V\otimes_A B\otimes_B B\otimes_A V^{B} = {}^{B}V^{B}\otimes_B {}^{B}V^{B}.$$

このとき $\theta_1 : V \to {}^{B}V^{B}$ を合成 $V \xrightarrow{\sim} A\otimes_A V\otimes_A A \xrightarrow{\theta\otimes V\otimes\theta} B\otimes_A V\otimes_A B$ で与えると、

$\theta_{\mathrm{I}} := (\theta, \theta_1) : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^{B}$ は bocs morphism となる。

<u>補題</u> $\mathcal{A}$, B, θ は上と同じ。このとき

$$\theta_{\mathrm{I}}^{*}: R(\mathcal{A}^{B}) \to R(\mathcal{A})$$

は fully faithful である

bocses の reduction において上の補題は非常に基本的なものである

2.3 reductions

<u>定義</u> $\mathcal{A}$ を layer $(A'; \omega; a_1,\cdots,a_n : v_1,\cdots,v_m)$ をもつ bocs とする $A_0' := \mathrm{indec}(A')$ とおく。各 $M\in \mathrm{Ob}(R(\mathcal{A}))$ に対して、

$$\underline{\dim}\, M := (\dim M(X))_{X\in \mathrm{Ob}(A_0')}$$

$$\dim M := \sum_{X \in Ob(A_0')} \dim M(X)$$

$$\| M \| := \sum_{i=1}^{n} \dim M(X_i) \dim M(Y_i) + \sum_{\substack{X \in Ob(A_0') \\ A'(X,X) \neq k}} (\dim M(X))^2$$

（ただし $a_i : X_i \to Y_i$ ）

とおき，それぞれ，M の dimension vector，M の dimension，M の norm とよぶ。

また，M が性質「$\forall X \in Ob(A_0')$, $M(X) \neq 0$ （$\Leftrightarrow \forall X \in Ob(A')$, $M(X) = 0$ implies $X = 0$）」をもつとき，M は sincere であるという。（norm は 2.1 で定義したものと同値である。）

記号　上の定義の設定のもとで，$d \geq 0$ に対して，

$$R^d(A) := \{ M \in Ob(R(A)) \mid \dim M \leq d \}$$

$$R_d(A) := \{ M \in Ob(R(A)) \mid \|M\| \leq d \}$$

とおく。また $C \subseteq Ob(R(A))$ に対して，

$$sC := \{ M \in C \mid M : \text{sincere} \}$$

とおく。$X \in Ob(A_0')$，$A'(X,X) = k[x, f(x)^{-1}] \supseteq k[x] \ni g(x) \neq 0$ のとき

$$C^{g(x)} := \{ M \in C \mid M(g(x)) : M(X) \to M(X) \ : \text{non-invertible} \}$$

$$C_{g(x)} := \{ M \in C \mid M(g(x)) : M(X) \to M(X) \ : \ \text{invertible} \}$$

とおく。

記号　$F : R \to S$ が functor で，$R' \subseteq Ob(R)$，$S' \subseteq Ob(S)$ のとき，

$$R' \overset{F}{\twoheadrightarrow} S' \quad :\Leftrightarrow \forall s \in S', \exists r \in R' \text{ st. } F(r) \cong s$$

とかくことにする。また $F_i : R_i \to S$ $(i = 1, \cdots, n)$ が functors で，$R_i' \subseteq Ob(R_i)$，$S' \subseteq Ob(S)$ のとき

$$\left. \begin{matrix} R_1' \xrightarrow{F_1} \\ \vdots \quad \vdots \\ R_n' \xrightarrow{F_n} \end{matrix} \right\} \twoheadrightarrow S' \quad :\Leftrightarrow \forall s \in S', \exists i \in \{1, \cdots, n\}, \exists r \in R_i' \text{ st. } F_i(r_i) \cong s$$

とかく。

以下に layered boxes の reductions を list する。この reductions において、$\mathcal{A}=(A,V)$ は layer $(A';\omega;a_1,\cdots,a_n:v_1,\cdots,v_m)$ をもつ box とする。

変形操作1 (edge reduction) $a_1: X\to Y$, $X\neq Y$, $\delta(a_1)=0$, $A'(X,X)$, $A'(Y,Y)=k$

$\Rightarrow$ $\exists B$: category $\exists$ functor. $\theta: A\to B$ st.

(1) $\mathcal{A}^B$: layered box.

(2) θ_I^* : equivalence.

(3) $\forall d\in\mathbb{N}$, $R_{d-1}(\mathcal{A}^B)\xrightarrow{\theta_I^*} {}_sR_d(\mathcal{A})$.

変形操作2 (regularization) $\delta(a_1)=v_1$

$\Rightarrow$ $B:=$ "the subcategory of A generated by A', $a_2,\cdots,a_n$"
$\theta: A\to B$ defined as $\theta|_{A'}=1_{A'}$, $\theta(a_1)=0$, $\forall i\neq 1$. $\theta(a_i)=a_i$ } によって

(1) $\mathcal{A}^B$ は layer $(A';\omega\circ\theta_1;a_2,\cdots,a_n:\theta_1(v_2),\cdots,\theta_1(v_m))$ をもつ.

(2) θ_I^* : equivalence.

(3) $\forall d\in\mathbb{N}$, $R_{d-1}(\mathcal{A}^B)\xrightarrow{\theta_I^*} {}_sR_d(\mathcal{A})$.

変形操作3 (partial loop reduction 1) $X\in Ob(A'_0)$, $A'(X,X)=k[x,f(x)^{-1}]\supseteq k[x]\ni g(x)\neq 0$, $r\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ $\exists B$: category, $\exists$ functor $\theta: A\to B$ st.

(1) $\mathcal{A}^B$ · layered

(2) $R_{r-1}(\mathcal{A}^B)\xrightarrow{\theta_I^*} {}_sR_r(\mathcal{A})^{g(x)}$

変形操作4 (partial loop reduction 2) $A'(X,X)=k[x,f(x)^{-1}]\supseteq k[x]\ni g(x)\neq 0$

$\Rightarrow$ $\exists B$ · category $\supseteq A$ with $Ob(A)=Ob(B)$, $\varphi: A\hookrightarrow B$ st.

(1) $\mathcal{A}^B$ は layer $(B';\omega';a_1,\cdots,a_n;\varphi_1(v_1),\cdots,\varphi_1(v_m))$ をもつ. ただし $\forall Y\in Ob(A'_0)$,

$$B'(Y,Y):=\begin{cases}A'(Y,Y) & \text{if } Y\neq X\\ k[x,f(x)^{-1},g(x)^{-1}] & \text{if } Y=X\end{cases}$$

(2) $sR_d(\mathcal{A}^B) \xrightarrow{\theta_I^*} sR_d(\mathcal{A})_{g(d)}$, $\forall d \in \mathbb{N}$

(3) ω' によって与えられる differential δ' に対して, $\delta'(\varphi(a_i)) = \varphi_1(\delta(a_i))$, $\forall i$ が成立つ.

<u>注意</u> 変形操作 3 以外では, B や θ, φ は d に依存せずに決まる. しかし 変形操作 3 だけは, B, θ は r に依存して決まる。また変形操作 1,2,3 では d や r が"下がる"ことに注意する.

2.4 support bocses

$\mathcal{A} = (A, V)$ を layer $(A'; \omega; a_1, \cdots, a_n; v_1, \cdots, v_m)$ をもつ bocs とする. 各 $M \in Ob(R(\mathcal{A}))$ に対して, $supp' M :=$ " $\{X \in Ob(A') \mid M(X) \neq 0\}$ で生成される A' の full subcategory "

$=$ " $\{X \in Ob(A'_0) \mid M(X) \neq 0\}$ で生成される A' の full subcategory "

とおく. $B' = supp' M$ とおくと, $A' = B' \times C$ とかけるから, $\theta' : A' \to B'$ を canonical projection functor とおくことができる. skeletally small categories の category の中で pushout

$$\begin{array}{ccc} A' & \hookrightarrow & A \\ {\scriptstyle \theta'} \downarrow & & \downarrow {\scriptstyle \theta} \\ B' & \longrightarrow & B \end{array}$$

をつくる. この B を $supp M$ とおく. この θ によって induced bocs $\mathcal{A}^B$ をつくり, これを $Supp M$ とおいて, M の <u>support bocs</u> とよぶ。

<u>命題</u> 上の設定のもとで,

(1) $\mathcal{A}^B$ も layer $(B'; \omega \cdot \theta_1; \{\theta(a_i)\}_{I_0}, \{\theta_1(v_j)\}_{I_1})$ をもつ. ただし

$I_0 := \{i \mid a_i$ の始点も終点も B' に入っている$\}$

$I_1 := \{j \mid v_j$ の始点も終点も B' に入っている$\}$.

(2) $\theta_I^* : R(\mathcal{A}^B) \to R(\mathcal{A})'$ は norm を保つ equivalence である. ただし

$R(\mathcal{A})' :=$ full subcategory of $R(\mathcal{A})$ consisting of those M with $M|_C = 0$

(3) $\forall N \in Ob(R(\mathcal{A}^B))$, $(\theta_I^*)(N)(X) \neq 0, \forall X \in Ob(B') \Longrightarrow N$: sincere.

すなわち (1) より Supp M も layered bocs であり, (2),(3) から, $\forall M \in Ob(R(\mathcal{A}))$ は, Supp M 上で sincere である。 上の命題を別の形にあらわすと,

<u>変形操作 5</u>　　$\exists B_1, \dots, B_t$: categories, $\exists$ functors $\theta_i : A \to B_i$ st.

(1) $\forall i$, $\mathcal{A}^{B_i}$: layered bocs.

(2) $\forall d \in \mathbb{N}$,

$$\left.\begin{array}{c} s R_d(\mathcal{A}^{B_1}) \xrightarrow{\theta_{1I}^*} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ s R_d(\mathcal{A}^{B_t}) \xrightarrow[\theta_{tI}^*]{} \end{array}\right\} \longrightarrow R_d(\mathcal{A}).$$

<u>2.5 Brauer-Thrall conjecture I</u>

以上の reductions の最初の応用として, Brauer-Thrall conjecture I を解いてみる.

<u>定義</u> algebra Λ 上の indecomposable (left) modules の dimensions に上界があるとき, Λ を<u>有界表現型</u>とよぶ。　(例 有限表現型の algebras は明らかにこの型をもつ.)

<u>定義</u> bocs $\mathcal{A}$ の indecomposable representations の norms に上界があるとき, $\mathcal{A}$ を<u>有界型</u>とよぶ。その最小の上界を $\cancel{bd}(\mathcal{A})$ で表わす.

<u>定理1</u> (Brauer-Thrall conjecture I) 有界表現型の algebras は有限表現型である.

この定理を証明するために準備をする。以下で $\underbrace{\mathcal{A}}_{=(A,V)}$ は layer $(A'; \omega; a_1 \cdots a_n; v_1 \cdots v_m)$ をもつ bocs であるとする.

<u>定義</u> $a_i : X_i \to Y_i$ とせよ. $X_i = Y_i$ のとき a_i を <u>loop</u>, $X_i \neq Y_i$ のとき a_i を <u>edge</u> とよぶ。また $\delta(a_i) = 0$ のとき, a_i は <u>central</u> であるという.

<u>補題1</u> $\mathcal{A}$ が有界型であれば, A' は trivial であり, どの a_i も central loop ではない.

<u>証明</u>　A' が trivial でないか, または ある a_i が central loop であれば, Jordan 標準型に対応する representation をつくることにより, いくらでも norm の大きい indecomposable representation が得られる//

<u>補題2</u>　A' が trivial であれば, $\mathcal{A}$ は regularize できるか, または $\delta(a_1)=0$ である.

<u>証明</u>　$a_1 : X \to Y$ とせよ.　$\{v_i \mid v_i \in V(X,Y)\} = \{v_1, \cdots, v_r\}$ としてよい. すると layer の triangularity から, $\delta(a_1) = \sum_{i=1}^{r} t_i v_i$, $\exists\, t_i \in A'(X,X) \otimes_k A'(Y,Y)^{op}$. ここで A' が trivial であることから, $A'(X,X) \otimes_k A'(Y,Y)^{op} = k$.　$\delta(a_1) \neq 0$ とすると, $\exists j$, $t_j \neq 0$. このとき $v_j' = \sum_{i=1}^{r} t_i v_i$ とおくと, $v_j = t_j^{-1}\left(v_j' - \sum_{i \neq j} t_i v_i\right)$ ととけるから, $(A' ; \omega ; a_1, \cdots, a_n ; v_1, \cdots, v_{j-1}, v_j', v_{j+1}, \cdots, v_m)$ も $\mathcal{A}$ の layer になる. この layer のもとで $\delta(a_1) = v_j'$ が成り立つから $\mathcal{A}$ は regularize できる //

<u>定理2</u> (Brauer-Thrall conjecture I for bocses) 有界型 の bocs は有限表現型 (= indecomposable representations の同型類は有限個しかない) である.

<u>証明</u>　補題1, 2 から次が得られる:

<u>系</u>　$\mathcal{A}$ が有界型であれば, A' は trivial であり, $\mathcal{A}$ は regularization か edge reduction かできる.

さて $\mathrm{Ob}(R(\mathcal{A})) = \bigcup_{d=0}^{\infty} R_d(\mathcal{A})$ に注意すると, 2.4 から $\exists\, \mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_t$: categories, $\exists$functors $\theta_i : A \to B_i$ s.t. (1) 各 $\mathcal{B}_i = \mathcal{A}^{\theta_i}$ も layered で, (2) $\forall i$, $bd(\mathcal{B}_i) \le bd(\mathcal{A})$ であり

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{Ob}(R(\mathcal{B}_1)) \xrightarrow{\theta_{1I}^{*}} \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ \mathrm{Ob}(R(\mathcal{B}_t)) \xrightarrow{\theta_{tI}^{*}} \end{array}\right\} \longrightarrow \mathrm{Ob}(R(\mathcal{A}))$$

よって各 $\mathcal{B}_i$ にも系が適用できて, 2.3 から layered bocses $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_t$ が存在して

$$\forall i, \qquad R(\mathcal{C}_i) \xrightarrow{\sim} R(\mathcal{B}_i) \quad \text{かつ} \quad bd(\mathcal{C}_i) < bd(\mathcal{A}).$$

以上を合成すると,

$$\left.\begin{array}{l} Ob(R(\mathscr{C}_1)) \longrightarrow \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \\ Ob(R(\mathscr{C}_t)) \longrightarrow \end{array}\right\} \twoheadrightarrow Ob(R(\mathscr{A})), \quad bd(\mathscr{C}_i) < bd(\mathscr{A}),\ \forall i.$$

となる。いまの操作を各$\mathscr{C}_i$にくり返すことができる。この操作は bd の値がどんどん小さくなっていくために有限回で終わる。最後に bocses $\mathscr{D}_1, \cdots, \mathscr{D}_r$ で終わったとすると，系によりこれらは minimal bocses で下にある minimal categories は trivial になっている（注．regularization でも edge reduction でも必ず edge が1つ（この場合）消える．edge が残っている限り上の操作はくり返すことができる）したがって，各$\mathscr{D}_i$は有限表現型となり，$\mathscr{A}$もそうであることがわかる。 //

<u>定理1の証明.</u> Λを有界表現型の algebra とせよ．§1の方法でΛに対応する bocs $\mathscr{A}$ をつくる（これは必然的に layered になる）。次の図式を考える：

$$R(\mathscr{A}) \xrightarrow{\sim} P_1(\Lambda) \xrightarrow{\mathrm{Cok}} \mathrm{mod}\,\Lambda$$

$$L \longmapsto (\alpha, P, Q,) \longmapsto M$$

$$\dim L = \dim \mathrm{top}\, P + \dim \mathrm{top}\, Q \leqslant (\ell+1)\dim M$$

ここで ℓ は projective indecomposables の dimensions の最大のものである。Λが有界表現型であることから，$\mathscr{A}$ の indecomposable representations の dimensions に上界があることがわかる．（注．$P_2(\Lambda) \xrightarrow{\mathrm{Cok}} \mathrm{mod}\,\Lambda$ は representation equivalence で $P_1(\Lambda)$ の indecomposable objects と $P_2(\Lambda)$ のそれらとは有限個の差いしかない.）他方 $\forall\, L \in Ob(R(\mathscr{A}))$ に対して，

$$\|L\| \leq (n + \#\, Ob(A'_0))(\dim L)^2$$

が成り立つ．（ここで$\mathscr{A}$は layer $(A'; \omega; a_1, \cdots, a_n; v_1, \cdots, v_m)$ をもつものとしている．）したがって，$\mathscr{A}$は有界型である．よって定理2より $\mathscr{A}$は有限表現型となり，$P_1(\Lambda)$，$P_2(\Lambda)$もそうとなり，結局Λも有限表現型である。 //

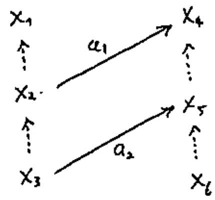
<u>注意.</u> 以上の証明は有界表現型の（従って有限表現型の）algebras 上のすべての indecomposable modules を計算する具体的な方法を与えている。しかも使っている reductions は edge reduction と regularization だけである。

例　簡単な有限表現型のalgebraについて，定理1の証明で行なっていることを実際にやってみる。次のbounden quiverで定義されるalgebraをΛとする：

$$\Lambda.\quad 1 \xrightarrow{\alpha} 2 \xrightarrow{\beta} 3 \quad ; \quad \beta\alpha = 0$$

Λに対応するlayered bocsは次のようになる：

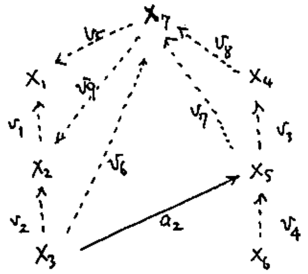
$\mathcal{A}$:



; $\delta = 0$

a_1にedge reductionを行なうと，

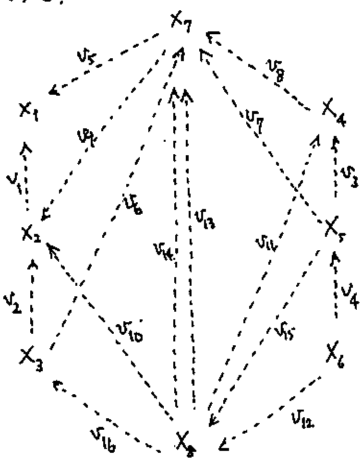
$\mathcal{B}$:



; $\begin{cases} \delta(v_2) = v_6 v_9 \\ \delta(v_5) = v_9 v_1 \\ \delta(v_7) = v_3 v_8 \\ \text{others} = 0 \end{cases}$

a_2にedge reductionを行なうと，

$\mathcal{C}$:



; $\begin{cases} \delta(v_2) = v_6 v_9 \\ \delta(v_3) = v_{15} v_{11} \\ \delta(v_5) = v_9 v_1 \\ \delta(v_7) = v_3 v_8 + v_5 v_{14} \\ \delta(v_{10}) = v_{13} v_9 + v_{16} v_2 \\ \delta(v_{12}) = v_4 v_{15} \\ \delta(v_{13}) = v_{16} v_6 \\ \delta(v_{14}) = v_{11} v_8 \\ \text{others} = 0 \end{cases}$

となる。ここで $\mathrm{mod}\,\Lambda \simeq P_1(\Lambda)/I(\Lambda) \simeq R(\mathcal{A})/I_\Lambda \simeq R(\mathcal{C})/I'_\Lambda$ を確かめてみる。

(I_Λ, I'_Λ はそれぞれ$R(\mathcal{A})$, $R(\mathcal{C})$の適当なidealである)

$R(\mathscr{C})/I'_\Lambda$ は次の bocs の表現の category として与えられる:

$$\begin{tikzcd}
X_7 & & \\
& & X_4 \arrow[llu, dashed, "v_8"'] \\
& & X_5 \arrow[u, dashed, "v_3"'] \arrow[ddll, dashed, "v_{15}"] \\
& & X_6 \arrow[u, dashed, "v_4"'] \\
X_8 \arrow[uuurr, dashed, "v_{11}"] & &
\end{tikzcd}
\quad ; \quad \begin{cases} \delta(v_3) = v_{15}\, v_{11} \\ \text{others} = 0 \end{cases}$$

並べかえて表現の category をかくと, (indecomposable representations とそれらの間の non-zero map で表示)

$$\begin{tikzcd}
& S(X_5) \arrow[dr, "m(v_{15})"'] \arrow[ddrr, bend left, "m(v_3)"] & & & \\
S(X_6) \arrow[ur, "m(v_4)"] & & S(X_8) \arrow[dr, "m(v_{11})"'] & & S(X_7) \\
& & & S(X_4) \arrow[ur, "m(v_8)"'] &
\end{tikzcd}
\quad ; \quad m(v_3) = m(v_{15}) \cdot m(v_{11})$$

ここに $S(X_i)$ は X_i のところだけが k でその他の点の上で 0 とする simple representation を表わし, $m(v_j)$ は v_j に対応する non-zero map である. これは Λ の Auslander-Reiten quiver Γ_Λ と"同型"である:

$$\Gamma_\Lambda : \quad \begin{tikzcd}
& \binom{2}{3} \arrow[dr] & & & \\
(3) \arrow[ur] \arrow[rr, dash, dashed] & & (2) \arrow[dr] \arrow[rr, dash, dashed] & & (1) \\
& & & \binom{1}{2} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

すなわち, $\operatorname{mod}\Lambda = k(\Gamma_\Lambda)$ と $R(\mathscr{C})/I'_\Lambda$ とは equivalent である. 実際に equivalences を逆にたどっていくと, $S(X_6)$ は (3) に, $S(X_5)$ は $\binom{2}{3}$ に, $\cdots$ と対応していることがわかる.

3. Tame-Wild Theorem for bocses

3.1 wild bocses

<u>定義</u> $\Sigma := \mathrm{add}\, k\langle x, y\rangle$ = "有限生成自由 $k\langle x,y\rangle$-modules のなす category"

$\mathcal{A} = (A, V)$: bocs (layered とは限らない)

とする。このとき $\mathcal{A}$ が <u>wild</u> であるとは、functor $F : A \to \Sigma$ が存在して、

$(F, \varepsilon \circ F)^* : R(\Sigma, \Sigma) \to R(\mathcal{A})$ が同型類と直既約性を保つことである。

<u>命題</u> $\mathcal{A}$ を layer $(A'; \omega; a_1, \cdots, a_n; v_1, \cdots, v_m)$ をもつ bocs とし、$a_1 : X \to Y$ とする。

$\mathcal{A}$ は次のいずれかのとき wild になる：

(1) $\delta(a_1) = 0$, $A'(X, X)$ か $A'(Y, Y)$ が nontrivial ; or

(2) $A'(X, X)$, $A'(Y, Y)$ ともに nontrivial で、$\exists\, r \in A'(X,X) \otimes_k A'(Y,Y)^{op}$: non-invertible

s.t. $\delta(a_1) = r v_1$.

<u>注意</u> 次の証明から分かるように、bocs を変形していく過程で上の命題の形 (1), (2) が現われなければ $\mathcal{A}$ は "tame" である。逆にいえば wild bocs では変形の過程で必ず上の形 (1) or (2) が現われる。

3.2 証明

ここでは次の定理を証明する。

<u>定理</u> (Tame-Wild Theorem for bocses) $\mathcal{A} = (A, V)$ が wild でない layered bocs で $d \in \mathbb{N}$ ならば categories $B_1, \cdots, B_t$ と functors $\theta_i : A \to B_i$ が存在して、

(1) 各 $\mathcal{A}^{B_i}$ は minimal bocs である。

(2)
$$\left.\begin{array}{c} R(\mathcal{A}^{B_1}) \xrightarrow{\theta_{1I}^*} \\ \vdots \qquad \vdots \\ R(\mathcal{A}^{B_t}) \xrightarrow[\theta_{tI}^*]{} \end{array}\right\} \longrightarrow R^d(\mathcal{A}).$$

(上で $R(\mathcal{A}^{B_i})$ とかいているところは、今までの約束の上では $\mathrm{Ob}(R(\mathcal{A}^{B_i}))$ とかくことになるが単に $R(\mathcal{A}^{B_i})$ とかく)

<u>証明</u>　上の定理を書き直して，次の形にする：

各 $d \in \mathbb{N}$ に対して

$T(d)$：$\mathcal{A}=(A, V)$ が wild でない layered bocs ならば「上の定理の『ならば』以降が成り立つ．

さて $(A'; \omega; a_1, \cdots, a_n; v_1, \cdots, v_m)$ を $\mathcal{A}$ の1つの layer とする．$\forall M \in \mathrm{Ob}(R(\mathcal{A}))$ に対して，$\dim M \leq d$ ならば，2.5のときと同様に $\|M\| \leq (n+\#\mathrm{Ob}(A_0'))d^2 =: f(d)$ であるから，$R^d(\mathcal{A}) \subseteq R_{f(d)}(\mathcal{A})$．よって $T(d)$ の(2)を

$$(2')\quad \left.\begin{array}{c} R(\mathcal{A}^{B_1}) \xrightarrow{\theta_{1I}^*} \\ \vdots \qquad \vdots \\ R(\mathcal{A}^{B_t}) \xrightarrow[\theta_{tI}^*]{} \end{array}\right\} \longrightarrow R_d(\mathcal{A})$$

にかえたもの $T'(d)$ を各 d について証明すればよい（$\because T'(f(d)) \to T(d)$）．さらに変形操作5より(2')を

$$(2'')\quad \left.\begin{array}{c} R(\mathcal{A}^{B_1}) \xrightarrow{\theta_{1I}^*} \\ \vdots \qquad \vdots \\ R(\mathcal{A}^{B_t}) \xrightarrow[\theta_{tI}^*]{} \end{array}\right\} \longrightarrow sR_d(\mathcal{A})$$

にかえたもの $T''(d)$ を示せば十分である．d に関する induction で $T''(d)$ がすべての $d \in \mathbb{N}$ について成り立つことを示す．$T''(d-1)$ を仮定すると，変形操作5により，$T'(d-1)$ も成り立っていることに注意する．

<u>$d=0$ のとき</u>　$\exists M \in sR_0(\mathcal{A})$ とすると，A はもともと trivial（$\because$ $n \geq 1$ なら $\|M\| \neq 0$ となるし，$\exists X \in \mathrm{Ob}(A_0')$，$A(X,X) \neq k$ ならやはり定義から $\|M\| \neq 0$ となる）である．すなわち $\mathcal{A}$ は minimal．よって $B := A$，$\theta = 1_A$ とればよい。

<u>$d>0$ のとき</u>　まず「central loop の A' への くり込み」を実行する。

(*)　$\delta(a_1)=0$ ，　$X \circlearrowleft a_1$ · loop

が成り立っていると，$\mathcal{A}$ の layer を $(A''; \omega''; a_2, \cdots, a_n; v_1, \cdots, v_m)$ にとりかえることができる。
ただし A'' は A' と a_1 とで生成された A の subcategory で，$\omega'' := \omega_L|_{A''}$．ここに
$\omega_L : {}_A A_{A'} \to {}_A V_{A'}$ は $\omega_L(a) := a\,\omega(1_Y)$，$\forall a \in A(X, Y)$ と定義された A-A'-bimodule map。
これをくり返して，a_1 は $(*)$ を満たさないと仮定してよい。そのときもし A の free generators である a_i がもう残っていなければ，$\mathcal{A}$ はもともと minimal となって OK．これ以外の場合を以下 4つに分けて考える，wild でない bocs から induce された bocs もまた wild ではないことを注意しておく。

<u>Case 1.</u> $\delta(a_1) = 0$，$a_1 : X \to Y$，$X \neq Y$ (i.e. a_1 が central edge) のとき．

命題 3.1 (1) より edge reduction の仮定が成り立っている。帰納法の仮定から $T'(d-1)$ が成り立って，

$$\left.\begin{array}{cc} R((\mathcal{A}^B)^{C_1}) & \xrightarrow{\varphi_{1I}^{*}} \\ \vdots & \vdots \\ R((\mathcal{A}^B)^{C_t}) & \xrightarrow[\varphi_{tI}^{*}]{} \end{array}\right\} \longrightarrow R_{d-1}(\mathcal{A}^B) \xrightarrow{\theta_I^{*}} sR_d(\mathcal{A})$$

ここで，$\theta \circ \varphi_i : A \xrightarrow{\theta} B \xrightarrow{\varphi_i} C_i$ によって $(\mathcal{A}^B)^{C_i} = \mathcal{A}^{C_i}$ も minimal bocses で，
$(\theta \circ \varphi_i)_I^k = \varphi_{iI}^k \circ \theta_I^k$ だから

$$\left.\begin{array}{cc} R(\mathcal{A}^{C_1}) & \xrightarrow{(\theta\circ\varphi_1)_I^{*}} \\ \vdots & \vdots \\ R(\mathcal{A}^{C_t}) & \xrightarrow[(\theta\circ\varphi_t)_I^{*}]{} \end{array}\right\} \longrightarrow sR_d(\mathcal{A})$$

すなわち $T''(d)$ が成り立つ。

以上で $\delta(a_1) = 0$ の場合がすべておわった。以後 $\delta(a_1) \neq 0$ としてよい。$a_1 : X \to Y$ とせよ。
$R := A'(X, X) \otimes_k A'(Y, Y)^{op}$ とすると，$V(X, Y)$ は left R-module とみられる。layered bocs の triangularity より，$\{v_j \mid v_j \in V(X, Y)\} = \{v_1, \cdots, v_t\}$ とおくと，

$$\delta(a_1) = \sum_{i=1}^{t} r_i v_i \quad , \exists r_i \in R$$

とかける。$\delta(a_1) \neq 0$ より $r \geqq 1$．$r_i = 0$ はすべてとり除いておいて，すべて $r_i \neq 0$ としてよい。
この場合 R は k，$k[x; f(x)^{-1}]$，$k[x, y, f(x)^{-1}, g(y)^{-1}]$ のどれかの形をしていることに注意する。
2.5 の補題 2 の論法と同様に次の場合がとりあつかえる：

Case 2. ある r_i が R で invertible のとき.

(注. 例えば $A'(X,X), A'(Y,Y) = k$ のとき $R = k$ となるからこの場合が起こる.)

このとき $v_i' := r_1 v_1 + \cdots + r_t v_t \quad (= \delta(a_1))$ とおくと,

$$v_i = r_i^{-1}\left(v_i' - \sum_{j \neq i} r_j v_j\right)$$

より A の layer を $(A';\ \omega;\ a_1, \cdots, a_n;\ v_1, v_2, \cdots, v_{i-1}, v_i', v_{i+1}, \cdots, v_m)$ にとりかえることができる。 すると regularization が pair (a_1, v_i') について行なうことができる。 帰納法の仮定と, このことから OK:

$$\left.\begin{array}{l} R(\text{minimal}) \longrightarrow \\ \quad\vdots \\ R(\text{minimal}) \longrightarrow \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{帰納法の仮定}} R_{d-1}(\mathcal{A}^B) \xrightarrow{\text{regularization}} \mathcal{S}R_d(\mathcal{A})$$

Case 3. $A'(X,X)$, $A'(Y,Y)$ いずれか一方だけが trivial のとき.

このときは $R = k[x, f(x)^{-1}]$ の形になる。各 r_i は $r_i = r_i' f(x)^{-p_i}$, $r_i' \in k[x]$, $p_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ の形になっているが, ここでは $f(x)$ は R の unit だから $\mathcal{A}$ の layer の中の各 v_i を

$$v_i' := f(x)^{-p_i} v_i$$

にかえたものも $\mathcal{A}$ の layer になる。このようにして, 最初から各 r_i は $k[x]$ の元であると仮定してよい。 partial loop reduction 1, 2 を $g(x) = r_1(x)$, $r = d$ に適用すると,

$$R_{d-1}(\mathcal{A}^B) \xrightarrow{\text{par. loop. red. 1}} \mathcal{S}R_d(\mathcal{A})^{g(x)}$$

$$\left(R_{d-1}((\mathcal{A}^C)^D) \xrightarrow[\text{regularization}]{} \mathcal{S}R_d(\mathcal{A}^C)\right) \xrightarrow[\text{par. loop. red. 2}]{} \mathcal{S}R_d(\mathcal{A})_{g(x)}$$

$$\mathcal{S}R_d(\mathcal{A}) = \mathcal{S}R_d(\mathcal{A})^{g(x)} \cup \mathcal{S}R_d(\mathcal{A})_{g(x)}.$$

ここで $\mathcal{A}^C$ は $(C';\ \omega';\ a_1, \cdots, a_n;\ \varphi_1(v_1), \cdots, \varphi_1(v_m))$ の形の layer をもっていて, $\delta'(a_1) = \varphi_1 \delta(a_1) = \sum_{i=1}^{t} r_i \varphi_1(v_i)$ であり, r_1 は C' で invertible になっているから, Case 2 のようにして OK. (上の図の( )内を見よ.)

<u>Case 4</u>　$A'(X,X)$, $A'(Y,Y)$ ともに non-trivial のとき．$A'(X,X)=k[x,f(x)^{-1}]$, $A'(Y,Y)=k[y,g(y)^{-1}]$.

このときは $R=k[x,y,f(x)^{-1},g(y)^{-1}]$ の形になる。Case 3 のときと同様にして，各 r_i は $k[x,y]$ の元であるとしてよい。$h(x,y)$ を $r_i(x,y)$ $(i=1,\cdots,t)$ の最大公約元とし $g_i(x,y) := r_i(x,y)/h(x,y)$ とおく。$g_i(x,y)$ を単項イデアル整域 $k(x)[y]$ の互いに素な元であると見ると，$\exists\, s_i(x,y)\in k[x,y]$，$\exists\, c(x)\in k[x]$ s.t.

$$(\#)\qquad 1=\sum_{i=1}^{t}\left(s_i(x,y)\,c(x)^{-1}\right)g_i(x,y)$$

すなわち　$c(x)=\sum_{i=1}^{t} s_i(x,y)\,g_i(x,y)\in A'(X,X)$

partial loop reductions 1, 2 を $c(x)$ に適用すると，

$$R_{d-1}(\mathcal{A}^B)\xrightarrow{\text{par. loop red. 1}} sR_d(\mathcal{A})^{c(x)}$$

$$\left(R_{d-1}((\mathcal{A}^C)^D)\ \underset{\text{regularization}}{\dashrightarrow}\right) sR_d(\mathcal{A}^C)\ \xrightarrow[\text{par. loop red. 2}]{}\ sR_d(\mathcal{A})_{c(x)}$$

$$sR_d(\mathcal{A})=sR_d(\mathcal{A})^{c(x)}\cup sR_d(\mathcal{A})_{c(x)}$$

さて $\mathcal{A}^C$ は $(C';\omega';a_1,\cdots,a_n;\varphi_1(v_1),\cdots,\varphi_1(v_n))$ の形の layer をもつ。また

$$\delta'(a_1)=\varphi_1(\delta(a_1))=\sum_{i=1}^{t} r_i\,\varphi_1(v_i)=h\sum_{i=1}^{t} g_i w_i\ ,\quad w_i:=\varphi_1(v_i).$$

(#) を $S:=k[x,y,c(x)^{-1}]$ の式とみると，Seshadri's Theorem より S に対しては Serre's conjecture が成立していることから，S はとくに Hermite ring となる。すなわち S 上の $t\times t$ 正則行列 Q が存在して，Q の第1行が $(g_1,\cdots,g_t)$ となっている。（Lam [5] 参照）

$$Q=\left(\begin{array}{c} g_1\cdots\cdots g_t \\ \hline \\ * \\ \end{array}\right)\in GL_t(S)$$

そこで

$$\begin{pmatrix} w_1' \\ \vdots \\ w_t' \end{pmatrix} := Q \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ w_t \end{pmatrix} \quad \text{とくに} \ w_1' = \sum_{i=1}^{t} g_i w_i$$

とおくと，Qが正則だから $\mathcal{A}^c$ の layer の中の各 w_i を w_i' にかえたものも $\mathcal{A}^c$ の layer になる。すると $\delta'(a_1) = h w_1'$ となる。ここで命題 3.1 (2) より h は invertible でなければならない。よって Case 2 のようにして OK.（前ページの図の $(\cdots\rightarrow)$ のところを見よ）.

//

4 Tame algebras

4.1 Drozd の定理

定理（Drozd の定理，Crawley-Boevey による formulation）Λ が wild でない algebra で $d \in \mathbb{N}$ ならば minimal bocses $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n$ with $\mathcal{B}_i = (B_i, W_i)$ と有限生成 B_i-Λ^{op} bimodules T_i が存在して，

(1) $-\otimes_{B_i} T_{i\Lambda^{op}} : R(\mathcal{B}_i) \to \mathrm{mod}\,\Lambda$ が full で isomorphisms を reflect する。

(2)
$$\left.\begin{array}{ccc} R(\mathcal{B}_1) & \xrightarrow{-\otimes_{B_1} T_1} & \\ \vdots & \vdots & \\ R(\mathcal{B}_n) & \xrightarrow[-\otimes_{B_n} T_n]{} & \end{array}\right\} \longrightarrow \mathrm{mod}^d\Lambda := \{ M \in \mathrm{Ob}(\mathrm{mod}\,\Lambda) \mid \dim M \le d \}.$$

(3) $\forall i$, $-\otimes_{B_i} T_i$ が homomorphism $K_0(R(\mathcal{B}_i)) \to K_0(\mathrm{mod}\,\Lambda)$ を導く。
$$\underline{\dim}\, M \longmapsto \underline{\dim}(\mathrm{top}\ M \otimes_{B_i} T_i)$$

証明の概略　§1 のように Λ に対して bocs $\mathcal{A} = (A, V)$ をつくり equivalence $\Xi : R(\mathcal{A}) \to P_1(\Lambda)$ を用意しておく。このとき有限生成の bimodule ${}_A T_{\Lambda^{op}}$ がとれて $-\otimes_A T \cong \Xi \circ \mathrm{Cok} : R(\mathcal{A}) \to \mathrm{mod}\,\Lambda$ となる。まず Λ が wild でないことから $\mathcal{A}$ も wild でないことを示す。次に定理 3.2 を使って求める $\mathcal{B}_i$ の候補をつくる。最後に各 functor $\theta_I^{*} \circ \Xi$ の image が $P_2(\Lambda)$ に入るように調整する。T_i は上の T からつくられる。//

4.2 Tame-Wild Theorem for algebras

<u>定理</u> (Tame-Wild Theorem for algebras, Drozd の定理) 任意の algebra は tame か wild であり，この2つは同時には起こらない。

<u>証明の概略</u> 同時に起こらないことは Drozd [3] で示されている。tame か wild のどちらかになることは，定理 4.1 と次の命題 (Dowbor-Skowroński [2]) からわかる。

<u>命題</u> algebra Λ について，次は同値である。

(1) Λ は tame である。

(2) $\forall d \in \mathbb{N}$ に対して，有限個の $k[x, f(x)^{-1}]$ の形の algebras $R_1, \cdots, R_n$ と bimodules ${}_{R_i}S_{\Lambda^{op}}$ が存在して，${}_{R_i}S_i$ は有限生成で，d 次元の各 indecomposable left Λ-module は，ある i とある indecomposable right R_i-module L による $L \otimes_{R_i} S_i$ の形の module に同型である。 //

4.3 minimal bocses の表現論

<u>定義</u> A を minimal category, $X \in \mathrm{Ob}(A_0)$ とする。

(i) $A(X, X) = k1_X$ のとき，

$$S(X)(Y) := \begin{cases} k & \text{if } Y = X \\ 0 & \text{if } Y \neq X \end{cases}, \quad \forall Y \in \mathrm{Ob}(A_0)$$

によって A-module $S(X)$ を定義する。

(ii) $A(X, X) = k[x, f(x)^{-1}]$ のとき，$n \in \mathbb{N}$ とし，λ を $f(x)$ の根でない k の元として，

$$J(X, n, \lambda)(Y) := \begin{cases} k^n & \text{if } Y = X \\ 0 & \text{if } Y \neq X \end{cases}, \quad \forall Y \in \mathrm{Ob}(A_0)$$

$$J(X, n, \lambda)(x) := \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}}_{n} \Big\} n : k^n \longrightarrow k^n$$

によって A-module $J(X, n, \lambda)$ を定義する。

<u>補題1</u> $\mathcal{A} = (A, V)$ を minimal bocs とすると、$S(X)$; $J(X, n, \lambda)$ の形の $\mathcal{A}$ の representations の全体は、$\mathcal{A}$ の indecomposable representations の同型類の完全代表系をなす。

<u>補題2</u> $\mathcal{A} = (A, V)$ を minimal bocs とする。

(1) $R((A,A))$ における Auslander-Reiten sequence はすべて次の形である：

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & J(X,2,\lambda) \arrow[dr] & \\ J(X,1,\lambda) \arrow[ur] \arrow[rr, dotted, no head] & & J(X,1,\lambda) \end{tikzcd} \quad \text{or} \quad \begin{tikzcd}[column sep=small] & J(X,n+1,\lambda) \arrow[dr] & \\ J(X,n,\lambda) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[rr, dotted, no head] & & J(X,n,\lambda) \\ & J(X,n-1,\lambda) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

($n \geq 2$ のとき)

(2) σ が $R((A,A))$ で sink map (i.e. minimal right almost split map) であれば、$(1, \varepsilon)^*(\sigma)$ は $R(\mathcal{A})$ で right almost split map である。

(3) $\alpha : M \to J(X, n, \lambda)$ が $R(\mathcal{A})$ の irreducible map であれば、M は $J(X, n+1, \lambda)$, $J(X, n-1, \lambda)$, $J(X, n+1, \lambda) \oplus J(X, n-1, \lambda)$ のどれかと同型である。

<u>4.4 Ringel の問題</u>

ここでは、Drozd の定理（定理4.1）の Auslander-Reiten 理論への応用となっている、Crawley-Boevey の結果を紹介する。まず便宜上、次の言葉を定義する。

<u>定義</u> Λ を algebra, $\mathrm{ind}\,\Lambda$ を indecomposable left Λ-modules の同型類の完全代表系、$\mathcal{C}$ を $\mathrm{ind}\,\Lambda$ の subclass とする。このとき $\mathcal{C}$ が <u>dimension-wise finite</u> であるとは、各 $d \in \mathbb{N}$ に対して、$\mathcal{C}^d := \{M \in \mathcal{C} \mid \dim M = d\}$ が有限であることである。

<u>定理</u> algebra Λ が tame であれば、dimension-wise finite な $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{ind}\,\Lambda$ が存在して、$\forall M \in \mathrm{ind}\,\Lambda \setminus \mathcal{C}$ に対して、$\tau M \cong M$ が成り立つ。（ここに τ は Auslander-Reiten translation を表わす。）

<u>証明</u> $\forall d \in \mathbb{N}$ を1つ固定する。このdに対して次のような $e \in \mathbb{N}$ が存在する：${}_{\Lambda}M$ を d次元以下の projective ではない indecomposable，$0 \to \tau M \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} M \to 0$ を AR-sequence とするとき，$\dim(\tau M \oplus E \oplus M) \leq e$．

定理4.2 より Λ は wild でないから，定理4.1 をこの e に対して適用できる。projective・indecomposable も τM が simple となる indecomposable M も有限個しかないから，M は non-projective，$\dim M \leq d$，τM : not simple としてよい。定理4.1 より minimal bocs $\mathcal{B}$ と $N \in Ob(R(\mathcal{B}))$ と，full で isomorphisms を reflect する functor $F : R(\mathcal{B}) \to \mathrm{mod}\Lambda$ が存在して，$F(N) \cong \tau M \oplus E \oplus M$ となる。すると $N = M_0 \oplus M_1 \oplus M_2$ と分解できて，$F(M_2) \cong \tau M$，$F(M_1) \cong E$，$F(M_0) \cong M$ となる。$\mathcal{B} = (B, W)$ とする。$S(X)$，$X \in Ob(B_0)$ の形の modules は有限個しかないから，$M_0 \cong S(X)$，$\exists X \in Ob(B_0)$ となる M も有限個しかない。よって M_0 は $S(X)$，$X \in Ob(B_0)$ の形をしていないと仮定してよい。すると 4.3の補題1 から $M_0 \cong J(X, n, \lambda)$ の形となる。F は full functor であるから，$\exists g' : M_1 \to M_0$ st. $F(g') = g : E \to M$．ここで，full で isomorphisms を reflect する functor は irreducible maps を reflect することに注意する。すると，g が irreducible であることから，g' も irreducible となる。4.3の補題2(3) から，M_1 は $J(X, n+1, \lambda)$，$J(X, n-1, \lambda)$，$J(X, n+1, \lambda) \oplus J(X, n-1, \lambda)$ のどれかに同型となる。

(i) $M_1 \cong J(X, n-1, \lambda)$ のとき．

$\underline{\dim}\, J(X, n-1, \lambda) + \underline{\dim}\, J(X, 1, \lambda) = \underline{\dim}\, M_0$ で F は $K_0(R(\mathcal{B})) \to K_0(\mathrm{mod}\Lambda)$，$\underline{\dim}\, N \mapsto \underline{\dim}\, \mathrm{top}\, F(N)$ を導くから，

$$\underline{\dim}\, \mathrm{top}\, E + \underline{\dim}\, \mathrm{top}\, F(J(X, 1, \lambda)) = \underline{\dim}\, \mathrm{top}\, M .$$

これより，$\underline{\dim}\, \mathrm{top}\, E < \underline{\dim}\, \mathrm{top}\, M$．しかし $g : E \to M$ が epimorphism だから，このようなことは起こりえない。

(ii) $M_1 \cong J(X, n+1, \lambda)$ のとき．

F が full だから $\exists f' : M_2 \to M_1$ st. $F(f') = f : \tau M \to E$．f が irreducible だから，f' も irreducible．τM が indecomposable だから M_2 も indecomposable．よって 4.3の補題2(3) から，M_2 は $J(X, n, \lambda)$ か $J(X, n+2, \lambda)$ に同型である。

(a) $M_2 \cong J(X, n, \lambda)$ のとき.

$M_2 \cong M_0$ より $\tau M \cong M$ となる。

(b) $M_2 \cong J(X, n+2, \lambda)$ のとき

$\underline{\dim}\, M_1 + \underline{\dim}\, J(X,1,\lambda) = \underline{\dim}\, M_2$. (i)のときと同様にして, $\underline{\dim}\, \mathrm{top}\, E < \underline{\dim}\, \mathrm{top}\, \tau M$ となる。しかし τM は simple でないから, canonical epimorphism $\pi : \tau M \longrightarrow \mathrm{top}\, \tau M$ は non-section.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \tau M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & E \arrow[r, "g"] \arrow[dl, dashed, "\exists h"] & M \arrow[r] & 0 \quad (\text{AR-sequence}) \\ & \mathrm{top}\, \tau M & & & \end{tikzcd}$$

上の図式を考え, π が epimorphism ということから h も epimorphism. よって $\underline{\dim}\, \mathrm{top}\, E \geq \underline{\dim}\, \mathrm{top}\, \tau M$ となって矛盾。

(iii) $M_1 \cong J(X, n-1, \lambda) \oplus J(X, n+1, \lambda)$ のとき.

mod Λ の中で irreducible maps

$$\begin{tikzcd} & F(J(X,n+1,\lambda)) \\ \tau M \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & F(J(X,n-1,\lambda)) \end{tikzcd}$$

が存在するから, F が full であることと, irreducible maps を reflect することを使って, irreducibles

$$\begin{tikzcd} & J(X,n+1,\lambda) \\ M_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & J(X,n-1,\lambda) \end{tikzcd}$$

が $R(B)$ の中にみつかる。 M_2 が indecomposable だから 補題2(3) (4.30) により, $M_2 \cong J(X, n, \lambda) \cong M_0$. よって $\tau M \cong M$. //

<u>系1</u> algebra Λ が tame であれば, dimension-wise finite な $\mathcal{C} \subseteq \mathrm{ind}\,\Lambda$ が存在して, $\forall M \in \mathrm{ind}\,\Lambda \setminus \mathcal{C}$ に対して, M は homogeneous tubes ($\mathbb{Z}A_\infty/1$) の中に入っている

<u>系2</u> algebra Λ が 無限表現型 の tame であれば 次の3つが成り立つ (Γ_Λ を Λ の AR-quiver とする):

(1) Γ_Λ の homogeneous tubes の 個数 は k の cardinality に等しい。

(2) Γ_Λ の homogeneous tubes 以外の component は高々可算個である

(3) Γ_Λ の各 component は dimension-wise finite である

Ringel の問題

問題1 algebra の AR quiver の各 component は dimension-wise finite であるか.

問題2 Λ を algebra Γ_Λ をその AR quiver とするとき,

(1) Γ_Λ の有限個以外の components は $\mathbb{Z}A_\infty$, $\mathbb{Z}A_\infty/n$, $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$, $\mathbb{Z}D_\infty$ のどれかになるか

(2) Γ_Λ の高々可算個以外の components は $\mathbb{Z}A_\infty$, $\mathbb{Z}A_\infty/1$ のどちらかであるか。

注意 系2 (2) は 問題2 (2) に YES, 系2 (3) は問題1 に YES と答えている (ただし Λ が無限表現型の tame のとき). 他方 Λ が有限表現型のときは, 問題1も問題2 (2)も自明に成り立っている。したがって 有限, 無限表現型のいずれについても, ともかく Λ が tame であれば, 上の問題1, 問題2 (2) ともに肯定的に解かれたことになる

References

[1] W. W. Crawley-Boevey : On tame algebras and bocses, Proc. London Math. Soc. (3) 56 (1988) 451-483.

[2] P. Dowbor and A. Skowroński : On the representation type of locally bounded categories, Tsukuba J. Math. 10 (1986) 63-72.

[3] Yu. A. Drozd : On tame and wild matrix problems, Matrix problems, Inst. Mat. Akad. Nauk Ukrain. SSR, Kiev, (1977) 104-144 (Russian).

[4] Yu. A. Drozd : Tame and wild matrix problems, Representations and quadratic forms, Inst. Mat. Akad. Nauk Ukrain. SSR, Kiev (1979) 39-74 (Russian) ; English transl., Amer. Math. Soc. Transl. (2) 128 (1986) 31-55.

[5] T. Y. Lam : Serre's conjecture, Lect. Notes in Math. 635 (Springer, Berlin 1978).

[6] C. M. Ringel : Representation theory of finite-dimensional algebras, Representations of Algebras, Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 116 (1986) 7-79.

[7] A. V. Roiter : Matrix problems and representations of BOCS's, Representations and quadratic forms, Inst. Mat. Akad. Nauk Ukrain. SSR, Kiev (1979) 3-38 ; English transl., Representation theory I, Lect. Notes in Math. 831 (Springer 1980) 288-324.

Quasi-hereditary Algebraについて I

曽　　強（筑波大学・数学系）

Quasi-hereditary Algebraという概念は E.Cline、B.Parshallと L.Scottがリー代数と代数群の表現論に生じたいわゆる highest weight categoryを描述するために導入したものである。（[2]、[3]と[8]を参照する）。彼らはすべてのweightが有限個であるhighest weight categoryは ある体上有限次元なQuasi-hereditaryな多元環上のモジュール・カテゴリーと圏同値であることを示した。
Quasi-hereditary Algebraは環上の適当なイデアルのチェーンの存在によって定義されるものであり、大域次元（global dimension）が有限なもので、近年、V.DlabとC.M.Ringelとの一連の論文[4]、[5]、[6]と[7]があるようによく研究され始めている。本文はおもに[4]のPart 1、2に沿って、Quasi-hereditary Algebraに関する基本的と思われる諸性質の解説を試み、最後に、[6]の結果を紹介する。

Definition　Aを単元1を持つ半準素環（semiprimary ring）とする。即ち、A／Nは半単純環となり、Nがベキ零となる。但し、NはAのJacobson根基（radical）を表す。JをAの両側イデアルとする。JがAのheredityなイデアルであるとは次の三つの条件を満たすイデアルのこととする。

（Ⅰ）　$JJ=J$；

（Ⅱ）　$JNJ=0$；

（Ⅲ）　Jが右射影A－加群である。　□

Aがsemiprimaryだから、以上の定義の中で、（Ⅰ）を満た すJに対して、あるベキ等元eが存在して、$J=AeA$と書かれる。（Ⅱ）より、Jが右射影的であることと、掛け算写像　（multiplication map）：　$Ae\otimes eA\to AeA$（左の$\otimes$はeAe上のテンソル積）が全単射であることと、Jが左射影的であることとは互いに同値である。従って、この場合、（Ⅲ）が成立する事はJが左射影的A－加群であることと同値である。

Definition　Aを単元1を持つsemiprimaryな環とする。このとき、Aが準遺伝的（quasi-hereditary）であるとはAの両側イデアル　$0=J_0$、J_1、・・・、J_{m-1}、$J_m=A$が存在し、J_t/J_{t-1}がA/J_{t-1}のheredityなイデアルであるようなAのイデアルのチェーン　$0=J_0\subsetneq J_1\subsetneq\cdots\subsetneq J_{t-1}\subsetneq J_t\subsetneq\cdots\subsetneq J_m=A$　$(1\leq t\leq m)$が存在するときと定義される。このようなチェーンをAのheredityなチェーンと呼ぶことにする。　□

Aが体k上有限次元なhereditaryな多元環とする。$1=\Sigma^n e_i$は単元の直交原始なベキ等元の分解とする。このとき 、$J=Ae_iA$（i=1、・・・、n）が射影的であり、eNeの任意の元xに誘導される全射：$eA\to xA$は非可逆（non-invertible）で、xAが射影的であるから、$x=0$、故に$eNe=0$、つまりJがheredityとなり、Aがquasi-hereditaryであることがわかる。実際、次の同値が証明できる：有限次元で semiprimaryな環Aに対して、Aがhereditaryである必要かつ十分な条件はすべてのAのベキ等イデアルの成すチェーンがAのheredityなチェーンに修正（細分）できる事である。[4]

Lemma 1　Jが右射影的なAのイデアルとする。B:＝A／Jとおけば、次のことが成り立つ：

$$\text{proj. dim } X_A \leq 1 + \text{proj. dim } X_B、$$

ただし、X_Bは任意の右B－加群とする。

証明　proj. dim $X_B=0$ のとき、$0\to J_A\to A_A\to A/J_A\to 0$ がexactであるから、proj. dim $X_A\leq 1$。一般に proj. dim$X_B=t<d$ のとき、命題が真とする。proj. dim $X_B=d$のとき、X_Bのprojective presentation $0\to X'_B\to P_B\to X_B\to 0$ に対して、proj. dim $X'_B=d-1$。次の完全列（exact sequence）
$\mathrm{Ext}^{d+1}(X'_A, Y_A)\to \mathrm{Ext}^{d+2}(X_A, Y_A)\to \mathrm{Ext}^{d+2}(P_A, X_A)$ より、
proj. dim$X_A\leq d+1$。□

Lemma 2　Aがsemiprimaryな環で、NをAのradicalとする。JをJNJ＝0で、J_Aが右射影的であるようなAのイデアルとする。B＝A／Jとおくと、つぎの不等式が成立する：

$$\text{gl. dim } A\leq \text{gl. dim } B+2.$$

証明　gl. dim B＝d<∞とする。任意の右A－加群X_Aに対して、$\pi: P\to XJ$がXJの射影的被覆（projective cover）とする。また、任意のXの元xに対して、$J_x:=J_A$、$P':=\oplus_{x\in X}J_x$とすると、自然な全射$\pi': P'\to XJ$が作られる。P'が射影的だから、PがP'の直和因子となる。よって、
$\ker\pi\subseteq \mathrm{rad}P=PN\subseteq P'N=\oplus_{x\in X}J_xN$。従って、$(\ker\pi)N=0$、つまり、$\ker\pi$はB－加群で、Lemma 1より、proj. dim（$\ker\pi$）≦proj. dim（$\ker\pi$＋1。
故に、proj. dim $(XJ)_A\leq d+2$。完全列

$$0\to (XJ)_A\to X_A\to (X/(XJ))_A\to 0$$

より、gl. dim A≦d＋2であることが分かる。□

Lemma 3　JJ＝J、J_Aが右射影的加群とする。B:＝A／Jとおくならば、

$$\text{gl. dim } B\leq \text{gl. dim } A$$

となる。

証明　任意の右B－加群X_B、Y_Bに対して、$\mathrm{Hom}_B(X_B, Y_B)\simeq \mathrm{Hom}_A(X_A, Y_A)$。また、$\mathrm{Ext}^1(X_B, Y_B)\subseteq \mathrm{Ext}^1(X_A, Y_A)$。一方、すべての完全列

$$0\longrightarrow Y_A\xrightarrow{\mu} Z_A\longrightarrow X_A\longrightarrow 0$$

に対して、XJ＝0より、$ZJ=ZJJ\subseteq\mu(Y)J=0$、よって、ZはB－加群となり、$\mathrm{Ext}^1(X_B, Y_B)\simeq \mathrm{Ext}^1(X_A, Y_A)$。
今、$\mathrm{Ext}^d(X_B, Y_B)\simeq \mathrm{Ext}^d(X_A, Y_A)$とすると、任意の$P_B$が右射影的であるような完全列 $0\to X'_B\to P_B\to X_B\to 0$ に対して、

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathrm{Ext}_B^d(P,Y) & \to & \mathrm{Ext}_B^d(X',Y) & \to & \mathrm{Ext}_B^{d+1}(X,Y) & \to & \mathrm{Ext}_B^{d+1}(P,Y)\\
\| & & \|\wr & & \downarrow\iota & & \|\\
\mathrm{Ext}_A^d(P,Y) & \to & \mathrm{Ext}_A^d(X',Y) & \to & \mathrm{Ext}_A^{d+1}(X,Y) & \to & \mathrm{Ext}_A^{d+1}(P,Y)\\
\| & & & & & & \|\\
0 & & & & & & 0
\end{array}$$

は可換図となり（ここで、ιはcanonical injectionを意味する）、だから、
$\mathrm{Ext}^{d+1}(X_B, Y_B)\simeq \mathrm{Ext}^{d+1}(X_A, Y_A)$。今、gl.dim A＝d<∞とすると、任意の右加群X_B、Y_Bに対して、$\mathrm{Ext}^{d+1}(X_B, Y_B)\simeq \mathrm{Ext}^{d+1}(X_A, Y_A)=0$、
よって、gl. dim B≦dであることが分かる。□

Proposition 4　Aがquasi-hereditaryな多元環であるならば、Aが有限な大域次元（global dimension）を持つ。

証明　$0=J_0 \subsetneq J_1 \subsetneq \cdots \subsetneq J_{t-1} \subsetneq J_t \subsetneq \cdots \subsetneq J_m = A$ がAの一つのheredityなチェーンとすると、Lemma 2 より、gl. dim $A \leq 2m-2$。

□

注：　実際、長さmであるheredityなチェーンを持ち、gl.dim $A=2m-2$であるquasi-hereditary多元環Aの存在が知られている。論文[4]を参照されたい。

Theorem 5　Aが体上有限次元で、かつsemiprimaryな環とする。このとき、gl. dim $A=2$であれば, Aがquasi-hereditaryである。

証明　先ず、次のことをしめす：「Aがsemiprimaryな環で、gl. dim $A=2$とする。eをAの原始ベキ等元で、eAのLoewy length $L(eA)$が極小とする。このとき、AeAがAのheredityなイデアルと成る。」 実は、$J=AeA$とおくと、$JJ=J$。$eNe \neq 0$とすれば、eNeの元$x \neq 0$を取ると、xによる掛け算写像$\nu: eA \to eA$　via　$ea \to eax$ に対して、$L(eA)$が極小であるので、$0 \neq \ker\nu \subsetneq eN$。gl.dim $A=2$より、$\ker\nu$が射影的となる。従って、$L(\ker\nu) \geq L(eA)$。ところが、$L(\ker\nu) \leq L(eN) = L(eA)-1$。
故に、$eNe=0$、i.e、$JNJ=0$。最後に、$p: P \to J_A$をJAの射影的被覆とする。pが全単射ではなければ、Pの有限生成な直和因子P'が存在して、s.t. $p|_{P'}$が全 単射ではない。PとP'とがeAのコピーの直和であるから、$P'=P'' \oplus \overline{P}$と$p|_{P''}$が単射となり、$\overline{P}=eA$となるようにP'は直和分解される。
そこで、$X:=p(P'')$とおくと次の可換図式がある：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & \longrightarrow & \ker p' & \longrightarrow & \ker \overline{p} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & P'' & \longrightarrow & P' & \longrightarrow & P & \longrightarrow & 0 \\
 & & p'' \downarrow & & p' \downarrow & & \overline{p} \downarrow & & \\
0 & \rightarrow & X & \xrightarrow{\iota} & A & \xrightarrow{n} & A/X & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

ここでιが包含写像であり、$\overline{p}$、p''とnが自然な射影写像である。pの定義から、$\overline{p} \neq 0$。p'がpに引き起こされたもので、単射ではない。よって、$\ker p' \neq 0$。
一方、$\ker p'$が射影的であるから$L(\ker p') \geq L(eA)$。ところが、
$L(\ker p') = L(\ker \overline{p}) < L(eA)$。ゆえに、pが全単射となり、$J_A$が右射影的である。つまり、AeAがheredityとなる。いま、定理の設定のAに対して、$L(eA)$が極小と成るように、Aの原始ベキ等元eを取り、$J:=AeA$がheredityとなる。Lemma3より、gl. dim $A/J \leq$ gl. dim A。帰納法によれば、A/Jがquasi-hereditaryとなり、従って、Aがquasi-hereditaryである。□

注：　この定理からAuslander algebraはquasi-hereditary多元環であることが明らかになる。本報告集の[9]では Auslander algebraのheredity chainの構成が論じられる。尚、本報告集の[10]の中で山形氏がglobal dimensionとdominant dimension が共に3であり、しかし、quasi-hereditaryとはならない興味ある有限次元な多元環の例を挙げているので参照されたい。

さて、M.Auslanderが[1]で、既に、すべての左アルチン環Rがあるglobal dimensionが有限なsemiprimaryな環A上の射影右加群の自己準同型環になることを示した。実際、Rがアルチンだから、semiprimaryであって、$N=\mathrm{rad}R$とおけば、ある自然数nがあって、s.t. $N^n=0$。nをNのベキ零指標(nilpo-tency index)とすれば、$M_R:=\bigoplus^n (R/N^i)_R$、よって、$A=\mathrm{End}(M_R)$がsemiprimaryとなる。しかも、Aのあるベキ等元eがあって、$R=eAe \simeq \mathrm{End}_A(eA)$。
[1]で、gl. dim $A \leq n+1$であることが分かる。文末の定理8はある意味で、Auslanderの結果の別証明ともなる。それを述べる前に、まず、つぎの LemmaとPropositionを準備しておく。

Lemma 6　X、Y、Mが加群であり，cが自然数で、cMがc個のMのコピーの直和を意味するとする。δをY→cM、γをcM→Xの写像とし、ωをEnd（cM）のベキ等元とする。$\omega' := 1-\omega$とおく。ι_rをM→cMのr番目の包含写像、ε_rをcM→Mのr番目の射影写像とする（$1 \leq r \leq c$）。このとき、Hom（M, X）$\otimes$Hom（Y, M）の中で（$\otimes$はEnd（M）上のもの），

$$\Sigma^c \gamma \iota_r \otimes \varepsilon_r \delta = \Sigma^c \gamma \omega \iota_r \otimes \varepsilon_r \omega \delta + \Sigma^c \delta \omega' \iota_r \otimes \varepsilon_r \omega \delta$$

が成立する。

証明　以下、Σは1からcまでの和を意味することとする。$\Sigma \iota_r \varepsilon_r = 1_{cM}$、$\varepsilon_r \omega \iota_s \in \mathrm{End}(M)$より、

$$\begin{aligned}
\Sigma_r \gamma \omega \iota_r \otimes \varepsilon_r \omega \delta &= \Sigma_r (\Sigma_t \gamma \iota_t \varepsilon_t \omega \iota_r) \otimes (\Sigma_s \varepsilon_i \omega \iota_s \varepsilon_s \delta) \\
&= \Sigma_{r,t,s} \gamma \iota_t \varepsilon_t \omega \iota_r \otimes \varepsilon_r \omega \iota_s \varepsilon_s \delta \\
&= \Sigma_{r,t,s} \gamma \iota_t \varepsilon_t \omega \iota_r \varepsilon_r \omega \iota_s \otimes \varepsilon_s \delta \\
&= \Sigma_{t,s} \gamma \iota_t \varepsilon_t \omega \iota_s \otimes \varepsilon_s \delta
\end{aligned}$$

同様に、$\Sigma_r \gamma \omega' \iota_r \otimes \varepsilon_r \omega' \delta = \Sigma_{t,s} \gamma \iota_t \varepsilon_t \omega' \iota_s \otimes \varepsilon_s \delta$.
また、$\omega + \omega' = 1$、$\varepsilon_t \iota_t = 1_M$、$\varepsilon_t \iota_s = 0 (t \neq s)$。したがって、

$$\begin{aligned}
&\Sigma_r \gamma \omega \iota_r \otimes \varepsilon_r \omega \delta + \Sigma_r \gamma \omega' \iota_r \otimes \varepsilon_r \omega' \delta \\
&= \Sigma_{t,s} \gamma \iota_t \varepsilon_t \omega \iota_s \otimes \varepsilon_s \delta + \Sigma_{t,s} \gamma \iota_t \varepsilon_t \omega' \iota_s \otimes \varepsilon_s \delta \\
&= \Sigma_{t,s} \gamma \iota_t \varepsilon_t \iota_s \otimes \varepsilon_s \delta \\
&= \Sigma_t \gamma \iota_t \otimes \varepsilon_t \delta .
\end{aligned}$$

□

Proposition 7　M'、M、M"を右R－加群とし、End（M'）、End（M）、End（M"）はsemiprimaryであるとする。更に、次の条件(a)、(b)を満たすと仮定する：

(a)　任意のMの直既約な直和因子X，Yに対して、γ：Y→Xが非可逆であれば、γがaddM'を通過する。（即ち、M'によって、生成されるmodRのfull addtive subcategory addM'に属するQとγ'：Y→Q、γ''：Q→Xが存在して、$\gamma = \gamma'' \gamma'$。）

(b)　任意のM$\oplus$M"の直既約な直和因子X、Yに対して、CがaddMの元で、δ：Y→Cとγ：C→Xの合成$\gamma\delta$：Y→C→XはaddM'を通過するならば、$C = C_1 \oplus C_2$と分解され、それに対応する分解$\delta = [\delta_1, \delta_2]^t$、$\gamma = [\gamma_1, \gamma_2]$において、$\gamma_1$と$\delta_2$とがaddM'を通過する。

このとき、A：＝End（M'$\oplus$M$\oplus$M"）、

J'：＝{ a∈A｜aはaddM'を通過する}、

J：＝{ a∈A｜aはadd（M'$\oplus$M）を通過する}

とおけば、J／J'はA／J'のheredityなイデアルとなる。

証明　M_1、...、M_vをMの互いに非同型な直既約可群で、M'の直和因子に非同型であって、add（M'$\oplus \oplus^v M_i$）＝add（M'$\oplus$M）となるように取る。
$\widetilde{M} \oplus (\oplus^v M_i) = M$とする。M"のかわりにM$\oplus$M"を取ればよいから、以下、$\widetilde{M} = \oplus^v M_i$と仮定してよい。
e'：M'$\oplus$M$\oplus$M"→M'、e_i：M'$\oplus$M$\oplus$M"→M_i (i=1,...,v)をそれぞれcanonical projectionとすると、J'＝A e' A、J＝A（e'＋e）A、
但し、$e = \Sigma^v e_i$。$\overline{J} := J / J'$とおく．まず，明らかに、$\overline{J}\,\overline{J} = \overline{J}$；
次に(a)より、$\overline{e}\,\overline{A}\,\overline{e}$はdivision ring $\overline{e}_i \overline{A}\,\overline{e}_i = \mathrm{End}(M_i) / \mathrm{radEnd}(M_i)$の直和となり、よって、$\overline{e}\,\overline{A}\,\overline{e} = \mathrm{End}(M) / \mathrm{rad}(M)$、従って、$\overline{e}\,(\mathrm{rad}\overline{A})\,\overline{e} = 0$。
最後に、M$\oplus$M"の任意の直既約加群X、Yに対して、e_X、e_Yをそれに対応するAのベキ等元とする。写像$\eta : \overline{e}_X \overline{A}\,\overline{e} \otimes \overline{e}\,\overline{A}\,\overline{e}_Y \to \overline{e}_X \overline{A}\,\overline{e}\,\overline{A}\,\overline{e}_Y$ via
$\Sigma^c \overline{\gamma}_r \otimes \overline{\delta}_r \to \Sigma^c \overline{\gamma}_r \overline{\delta}_r = \overline{\gamma\delta}$（ここで$\otimes$は$\overline{e}\,\overline{A}\,\overline{e}$上のもの）を考える。
C：＝cM、$\gamma = [\gamma_1, ..., \gamma_c]$：C→X、$\delta = [\delta_1, ..., \delta_c]^t$：Y→C。
$\overline{\gamma\delta} = 0$ならば、$\gamma\delta$はaddM'を通過する。(b)より、C＝C'$\otimes$C"、

$\gamma=[\gamma',\gamma'']$、$\delta=[\delta',\delta'']^t$と直和分解され、s.t. γ'、δ''はaddM' を通過する。$\omega:C\to C'$ を標準的射影（canonical projection）とし、$\omega':=1-\omega$、$\iota_r:M\to cM$がr番目の包含写像、$\varepsilon_r:cM\to M$がr番目の射影写像とすると、$\gamma_r=\gamma\iota_r$、$\delta_r=\varepsilon_r\delta$、r=1、...、c。Lemma 6 より、

$$\Sigma\gamma_r\otimes\delta_r=\Sigma\gamma\omega\iota_r\otimes\varepsilon_r\omega\delta+\Sigma\gamma\omega'\iota_r\otimes\varepsilon_r\omega'\delta。$$

$\gamma'=\gamma\omega$がaddM' を通過し、$\delta''=\omega\delta$がaddM'' を通過するから、$\Sigma^c\overline{\gamma}_r\otimes\overline{\delta}_r=0$。すなわち、$\eta$が単射となり、乗法写像$\overline{A}\,\overline{e}\otimes\overline{e}\,\overline{A}\to\overline{A}\,\overline{e}\,\overline{A}$も単射と成るから$\overline{J}_{\overline{R}}$は右射影的である。□

Theorem 8　Rがsemiprimaryな環とする。N＝radR、nがNのベキ零指標であるとする。$M_R:=\oplus^n(R/N^i)_R$、$A:=\mathrm{End}(M_R)$，
$J_t:=\{\phi\in\mathrm{End}(M_R)\mid\phi$はadd$(\oplus^t R/N^i)_R$を通過する$\}$とおくならば、

$$0=J_0\subsetneq J_1\subsetneq\cdots\subsetneq J_{t-1}\subsetneq J_t\subsetneq\cdots\subsetneq J_n=A$$

はAのheredityなチェーンとなり、従って、Aがquasi-hereditaryであり、gl. dim A＜∞である。

証明　$M':=\oplus^{t-1}(R/N^i)_R$、$M:=(R/N^t)_R$、$M'':=\oplus^n{}_{i=t+1}(R/N^i)_R$とおく。

(a)　e_1、e_2をRの原始ベキ等元とする。$\gamma:e_1R/e_1N^t\to e_2R/e_2N^t$がnon-invertibleであれば、$\gamma$が全射ではない。
よって、$\gamma(e_1R/e_1N^t)\subsetneq e_2N/e_2N^t$。
従って、$\gamma(e_1R/e_1N^t)N^{t-1}=0$。故に、$\gamma$はaddM' を通過する。

(b)　e_1、e_2をRの原始ベキ等元で、$X:=e_1R/e_1N^i$、$Y:=e_2R/e_2N^j$（i、j≧t）とする。任意の射影的なR/N^t－加群Cに対して、$\delta:Y\to C$、$\underline{\gamma:C\to X}$で、$\gamma\delta$がaddM' を通過すれば、$\delta(\overline{e}_2)N^{t-1}=0$であるとき、$e_2N^{t-1}=\ker\delta$、よって、$\delta$がaddM' を通過する、この場合、$C_1=0$、$C_2=C$とおけばよいが、$\delta(\overline{e}_2)N^{t-1}\neq0$のとき、$C_1:=\delta(\overline{e}_2)R$とおく。$C=\oplus U_s$と直既約分解して、$\pi_s:C\to U_s$が射影写像とすると、あるsが存在して、$\pi_s\delta(\overline{e}_2)N^{t-1}\neq0$、よって、$U_sN$は$U_s$の唯一つの極大右$R/N^t$－部分加群である。$\pi_s\delta(\overline{e}_2)$が$U_sN$に含まれないから、$\pi_s\delta:Y\to U_s$が全射と成る。従って、$C_1$は射影的$R/N^t$－加群となり、また、ある$C_2$があって、$C=C_1\oplus C_2$となる。$\gamma=[\gamma_1,\gamma_2]$、$\delta=[\delta_1,\delta_2]^t$とおけば、$\delta_2=0$。
一方、$\gamma\delta$がaddM' を通過するより、$\mathrm{Im}(\gamma\delta)N^{t-1}=0$。ところが、$\gamma\delta(\overline{e}_2)$が$N^{t-1}$にannihilateされるから、$\delta(\overline{e}_2)N^{t-1}\subsetneq\ker\gamma$。
いま$\delta(\overline{e}_2)R\simeq e_2R/e_2N^t$、よって、$\gamma_1$がaddM' を通過する。
従って、Prop. 7より、J_t/J_{t-1}がA/J_{t-1}のheredityなイデアルと成る。□

文　　献

[1] M. Auslander, Representation dimension of Artin algebras, Queen Mary College Mathematics Notes 1987.
[2] E. Cline, B. Parshall and L. Scott, Algebraic stratification in representation categories, J. Algebra No. 117, 504-521(1988).
[3] E. Cline, B. Parshall and L. Scott, Finite dimensional algebras and highest weight categories, Jour. reine angew. Math. No. 391, 85-99(1988).
[4] V. Dlab and C. M. Ringel, Quasi-hereditary algebras, Carleton Mathematical Series No. 224, March 1988.
[5] V. Dlab and C. M. Ringel, Auslander algebras as quasi-hereditary algebras, J. London Math. Soc. (To appear).

[6] V. Dlab and C. M. Ringel, Every semiprimary ring is the endomorphism ring of a projective module over a quasi-hereditary ring, preprint.

[7] V. Dlab and C. M. Ringel, A construction for quasi-hereditary algebra, preprint.

[8] B. Parshall and L. Scott, Derived categories, quasi-hereditary algebras, and algebraic groups, (To appear in Proceedings of Ottawa-Moosonee Workshop in algebra).

[9] 植松盛夫, Quasi-hereditary algebraについて II, 多元環の表現論シンポジウム報告集, 1988.

[10] 山形邦夫, Quasi-hereditary algebraのglobal dimension, 多元環の表現論シンポジウム報告集, 1988.

Quasi-hereditary Algebraについて II

植松盛夫(筑波大 数)

本稿は，[3] V. Dlab and C.M. Ringel, "Quasi-hereditary algebras", Carleton Mathematical Series, 224 March, 1988 の Part 3. "Auslander algebras as quasi-hereditary algebras" の解説を目的とする。Quasi-hereditary algebra の定義及び基本的な性質は，[6] 本報告集の曽強氏の記述を参照されたい。

Global dimension が 2 以下の semiprimary ring は quasi-hereditary となる。([6] Thm 5) したがって特に Auslander algebra は quasi-hereditary であり，heredity chain が存在する。Auslander algebra は次のように定義される。[1]

<u>Definition 1</u> R を finite representation type の artinian ring, ind R を finitely generated indec. R-modules の同型類のなす category とするとき，

$$A := \mathrm{End}_R\left(\bigoplus_{M \in \mathrm{ind} R} M\right)$$ を(R の) <u>Auslander algebra</u> と呼ぶ。 ◻

ここで，次の事実は基本的である。A: Auslander $\Leftrightarrow$ gl.dim $A \leq 2$ かつ dom.dim $A \geq 2$. [1]

ここでは A の heredity chain が，ind R のある filtration から構成されることを述べる。§1 では，ind R に対して，

splitting filtration を定義する。§2 では、ind R の splitting filtration から A の heredity chain が構成できることを言う。§3 では、splitting filtration の例として、A.V. Roiter [5] が、Brauer-Thrall conjecture I を解くために導入し、P. Gabriel [4] が定式化した Roiter measure から得られる filtration と、M. Auslander と S. Smalø [2] が導入した、preprojective partition から得られる filtration を紹介する。

§0. Notations

- R は finite representation type の artinian ring,
  A は R の Auslander algebra とする.
- ind R の部分集合 $\mathfrak{M}$ に対して,

  add $\mathfrak{M}$:= $\mathfrak{M}$ によって生成される mod R の full additive subcategory,

  また M ∈ mod R に対して,

  add M := M によって生成される mod R の full additive subcat.

  とする。
- M ∈ mod R と, non negative integer a に対して,

  aM := M の a 個の直和. とおく.
- mod R の morphism $f: X \longrightarrow Y$ と, mod R の full additive subcat. $\mathcal{C}$ に対して,

  . f が $\mathcal{C}$ を通過する とは ある $M \in \mathcal{C}$ があって, 次の可換図が成立することをいう。

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & \circlearrowleft & Y \\ & M \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

§1. Splitting filtrations

Definition 2　ind R の subset の列：$\phi=\mathcal{M}_0 \subsetneq \mathcal{M}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{M}_m = \mathrm{ind}R$

は次の2条件を満たすとき，splitting filtration という。

(1) for $1 \leq t \leq m$;　$X, Y \in \mathcal{M}_t$ と $f \in \mathrm{Hom}_R(X,Y)$ に対して

f: non invertible $\Rightarrow$ f は add $\mathcal{M}_{t-1}$ を通過する。

(2) for $1 \leq t \leq m$;　$W \in \mathrm{add}\,\mathcal{M}_t$ と exact 列：

$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\phi} W \xrightarrow{\psi} V \longrightarrow 0$　を任意に与えたとき，

${}^{\forall}M \in \mathcal{M}_t \setminus \mathcal{M}_{t-1}$ について，次の(a)または(b)が成立する。

(a) $U \in \mathrm{add}\,\mathcal{M}_t$ であって，$U = aM \oplus U'$　$(a \geq 0)$　ただし，

U' は M を直和因子に持たないように分解すると，$\phi\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$：

$aM \xrightarrow{\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}} aM \oplus U' = U \xrightarrow{\phi} W$　は split mono となる

(b) $V \in \mathrm{add}\,\mathcal{M}_t$ であって　$V = bM \oplus V'$　$(b \geq 0)$　ただし，

V' は M を直和因子に持たないように分解すると，$[1.0]\psi$：

$W \xrightarrow{\psi} V = bM \oplus V' \xrightarrow{[1.0]} bM$　は split epi となる。 ∎

定義から，$\mathcal{M}_1$ は simple module のみから成ることがわかる。次に，ind R の subset の列が splitting filtration になるための簡単な十分条件を与える。

Proposition 3　$\phi = \mathcal{M}_0 \subsetneq \mathcal{M}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{M}_m = \mathrm{ind}R$　$(\mathcal{F})$ は次の

2条件を満足する ind R の subset の列とする．　for $1 \leq t \leq m$;

(1') $\mathcal{M}_t \setminus \mathcal{M}_{t-1}$ に含まれる module は同じ長さ (Loewy length) である．

(2') 任意の mono morphism $X \rightarrow Y$ s.t. $X \in \mathcal{M}_t \setminus \mathcal{M}_{t-1}$, $Y \in \mathrm{add}\,\mathcal{M}_t$

は split する。

このとき $(\mathcal{F})$ は splitting filtration となる。 ∎

この proposition の条件 (2′) と dual な条件：

(2′)* 任意の epimorphism $Y \to Z$ s.t. $Y \in \mathrm{add}\,\mathcal{M}_t$, $Z \in \mathcal{M}_t \setminus \mathcal{M}_{t-1}$ は split する

に換えても同じ結果が成立する。（Proposition 3*）

証明はどちらも省略させていただく。

§2 The main theorem

Theorem 4 $\phi = \mathcal{M}_0 \subsetneq \mathcal{M}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{M}_m = \mathrm{ind}\,R$ を splitting filtration とする。

$J_t := \{a \in A \mid a$ は $\mathrm{add}\,\mathcal{M}_t$ を通過する$\}$ $(0 \leq t \leq m)$ とおくと、

$0 = J_0 \subset J_1 \subset \cdots \subset J_m = A$ は A の heredity chain となる。 ▨

証明には、次の proposition（[6] Prop. 7）を適用する。

Proposition 5 $M'_\Lambda, M_\Lambda, M''_\Lambda$: modules with semiprimary endomorphism rings, は次の条件 (i), (ii) を満たすものとする。

(i) X, Y を M の indec. 直和因子とするとき、

$f : X \to Y$: non invertible $\Longrightarrow$ f は $\mathrm{add}\,M'$ を通過する

(ii) X, Y を $M \oplus M''$ の indec. 直和因子で、$C \in \mathrm{add}\,M$

$Y \xrightarrow{\delta} C \xrightarrow{\gamma} X$ s.t. $\gamma\delta$ は $\mathrm{add}\,M'$ を通過するものとする

$\Longrightarrow$ ある decomposition $C = C_1 \oplus C_2$ が存在して、

$Y \xrightarrow{\delta = \left[\begin{smallmatrix}\delta_1 \\ \delta_2\end{smallmatrix}\right]} C_1 \oplus C_2 \xrightarrow{\gamma = [\gamma_1, \gamma_2]} X$ γ_1, δ_2 が $\mathrm{add}\,M'$ を通過する

このとき、$A := \mathrm{End}_\Lambda(M' \oplus M \oplus M'')$

$J' := \{a \in A \mid a$ は $\mathrm{add}\,M'$ を通過する$\}$

$J := \{a \in A \mid a$ は $\mathrm{add}(M' \oplus M)$ を通過する$\}$

とおくと、J/J' は A/J' の heredity ideal となる。 ▨

(Theorem 4 の証明の概略)

$\mathrm{ind}\, R := \{N_1, \cdots, N_s, M_1, \cdots, M_p, L_1, \cdots, L_r\}$

$\mathcal{M}_{t-1} := \{N_1, \cdots, N_s\}$; $\mathcal{M}_t := \{N_1, \cdots, N_s, M_1, \cdots, M_s\}$

$M' := N_1 \oplus \cdots \oplus N_s$; $M := M_1 \oplus \cdots \oplus M_s$; $M'' := L_1 \oplus \cdots \oplus L_r$

とおくと, $\mathrm{End}_R(M')$, $\mathrm{End}_R(M)$, $\mathrm{End}_R(M'')$ は semiprimary ring となるから, Prop 5 の条件 (i), (ii) を確かめればよい。

(i) は明らかであるので, (ii) について調べる。

X, Y は $M \oplus M''$ の indec. な直和因子で, $C \in \mathrm{add}\, M$ に対し,

$Y \xrightarrow{\delta} C \xrightarrow{\gamma} X$: $\gamma\delta$ は $C' \in \mathrm{add}\, M'$ を通過すると仮定する.

$$\begin{tikzcd}
 & & C \arrow[dr, "\psi"] \arrow[drr, "\gamma"] & & \\
Y \arrow[urr, "\delta"] \arrow[r] \arrow[drr, "\delta'"'] & U \arrow[ur, "\phi"] \arrow[dr, "\phi'"'] & \circlearrowleft & V \arrow[r] & X \\
 & & C' \arrow[ur, "\psi'"'] \arrow[urr, "\gamma'"'] & &
\end{tikzcd}$$

$U : (\gamma, \gamma')$ の pull back

$V : (\phi, \phi')$ の push out

とおくと, 次の exact 列が得られる。

$$0 \longrightarrow U \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}\phi\\ \phi'\end{smallmatrix}\right]} C \oplus C' \xrightarrow{[\psi, -\psi']} V \longrightarrow 0 \quad ; C \oplus C' \in \mathrm{add}\, \mathcal{M}_t$$

Def 2 の (2) より, 各 M_i $(i = 1, \cdots, p)$ に対して (a) または (b) が成立する。対称性から (a) が成立するとしてもよい。すなわち,

$U \in \mathrm{add}\, \mathcal{M}_t = \mathrm{add}(M' \oplus M)$; $U = a_i M_i \oplus U_i'$ $(a_i \geq 0)$, U_i' は, M_i を直和因子に持たない。$[\phi, \phi'] \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$:

$a_i M_i \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]} a_i M_i \oplus U_i' = U \xrightarrow{[\phi, \phi']} C \oplus C'$ は split mono.

となる。ところが $C' \in \mathrm{add}\, \mathcal{M}_{t-1}$ より, $C = c_1 M_1 \oplus \cdots \oplus c_p M_p$ とおくと, $[\phi\ \phi'] \left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]$ から induce される次の morphism : $a_i M_i \xrightarrow{f_i} c_i M_i$ は split mono, よって, $\exists \rho_i : c_i M_i \longrightarrow a_i M_i$ s.t. $\rho_i f_i = 1_{a_i M_i}$.

ここで $\omega_i = f_i \rho_i$ とおくと, ω_i は $\mathrm{End}(c_i M_i)$ の idempotent で,

$$c_iM_i = \underset{\underset{a_iM_i}{\wr\!\wr}}{\omega_i(c_iM_i)} \oplus (1-\omega_i)(c_iM_i).$$

今, $C_1 := \bigoplus_{i=1}^{p} \omega_i(c_iM_i)$, $C_2 := \bigoplus_{i=1}^{p} (1-\omega_i)(c_iM_i)$ とおけば,

$$Y \xrightarrow{\delta=\begin{bmatrix}\delta_1\\ \delta_2\end{bmatrix}} C_1 \oplus C_2 = C \xrightarrow{\gamma=[\gamma_1, \gamma_2]} X$$, [6] の Lemma 6 を用い, [6] の Prop 7 の証明の最後の部分と同様にして, δ_2 と γ_1 が add M' を通過することがわかる.

§3 Splitting filtration の例

1. The Roiter filtration

$\mathcal{N}$ を $\mathbb{N}$ の有限部分集合全体の集合とする. $\mathcal{N}$ に全順序を次のように導入する.

$K, L \in \mathcal{N}$ に対して,

$K \leq L \iff K = L$ または, $K \neq L$ で $(K \cup L)\setminus(K \cap L)$ に含まれる最小の自然数が L に含まれる。

(例) $\{1\} \leq \{1,3\} \leq \{1,2\} \leq \{1,2,4\} \leq \{1,2,3\}$

<u>Definition 6</u> (Roiter measure)

$X \in \mathrm{mod}\,R$ に対し, X の <u>Roiter measure</u> $\rho(X)$ は次で定義される.

$$\rho(X) \overset{\mathrm{def}}{:=} \sup\left\{ \{l(X_1), \cdots, l(X_n)\} \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \subsetneq X_1 \subsetneq X_2 \subsetneq \cdots \subsetneq X_n \subset X : X \text{の} \\ \text{indec. submodules の列} \end{array} \right\}$$

但し, $l(X_i)$ は X_i の長さであり, sup は上で導入した $\mathcal{N}$ の全順序に関してとる。 ▫

$\rho_1 < \rho_2 < \cdots < \rho_m$ を ind$R$ の可能なすべての Roiter measures とする。

$\mathcal{M}_t := \{M \in \mathrm{ind}\,R \mid \rho(M) \leq \rho_t\}$ $(1 \leq t \leq m)$ とおくとき

$\phi \subsetneq \mathcal{M}_1 \subsetneq \mathcal{M}_2 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{M}_m = \mathrm{ind}\,R$ を Roiter filtration と呼ぶ。

Proposition 7 Roiter filtration は splitting filtration である.

∵) [4] の Prop. 5.2 から Prop 3 の (2') が成立することがわかる。

(1') は明らかに成立する.

2. The dual Roiter filtration

Def 6 において, $X \in \mathrm{mod}\, R$ に対し, X を $(\mathrm{mod}\, R)^{op}$ の object として考えたときの X の Roiter measure を $\rho^*(X)$ で表わし, X の dual Roiter measure という。これは Def 6 において "sub-" を "factor-" に置き換えたものに一致する。また $f_1^* < \cdots < f_{m^*}^*$ を可能なすべての ind R の dual Roiter measure とし, $\mathcal{M}_t^* := \{M \in \mathrm{ind}\, R \mid \rho^*(M) \leq f_t^*\}$ とおくと, dual Roiter filtration : $\phi \subset \mathcal{M}_1^* \subset \cdots \subset \mathcal{M}_{m^*}^* = \mathrm{ind}\, R$ は splitting filtration になる. (Prop.7 の dual)

3. The filtrations corresponding to the preprojective partition

Definition 8 (preprojective partition) [2]

ind R の preprojective partition : $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \cdots, \mathcal{P}_p$ を次のように構成する. (partition とは $\bigcup_{i=0}^{p} \mathcal{P}_i = \mathrm{ind}\, R$, $\mathcal{P}_i \cap \mathcal{P}_j = \phi$ if $i \neq j$ を満たすものをいう)

(1) $\mathcal{P}_0$ は finitely generated indec. proj. module 全体から成る.

(2) $k \geq 1$ に対して,

$\mathcal{P}_k$ は $\mathrm{ind}\, R \setminus \bigcup_{j=0}^{k-1} \mathcal{P}_j$ の minimal projective generator

i.e. (i) ${}^\forall A \in \mathcal{P}_k$ に対し,

$$B \in \mathrm{add}\,(\mathrm{ind}\, R \setminus \textstyle\bigcup_{j=0}^{k-1} \mathcal{P}_j)\ ;\ f : B \twoheadrightarrow A \text{ epi} \Rightarrow f \text{ は split}$$

(ii) ${}^\forall B \in \mathrm{ind}\, R \setminus \bigcup_{j=0}^{k-1} \mathcal{P}_j$ に対し,

$${}^\exists A \in \mathrm{add}\, \mathcal{P}_k \text{ s.t. } A \twoheadrightarrow B : \text{epi}$$

(iii) $\mathcal{P}_k$ は (i), (ii) をみたすもののうち minimal

注意.) R が finite representation type ($\#\mathrm{ind}\, R < \infty$) だから有限回(p)で操作が終わる.

$\mathcal{F}^{\mathcal{P}}: \phi = \mathcal{M}_0^{\mathcal{P}} \subsetneq \mathcal{M}_1^{\mathcal{P}} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{M}_m^{\mathcal{P}} = \operatorname{ind} R$ を次のように定義する

$1 \leq t \leq m$ について

(1) $\mathcal{M}_t^{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{M}_t^{\mathcal{P}}$ に属する module の長さは等しい

(2) $M \in \mathcal{M}_s^{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{M}_{s-1}^{\mathcal{P}}$, $N \in \mathcal{M}_t^{\mathcal{P}} \setminus \mathcal{M}_{t-1}^{\mathcal{P}}$ に対して, $s < t$ ならば $\pi(M) \geq \pi(N)$

ここで $\pi(M)$ は $M \in \mathcal{P}_{\pi(M)}$ によって定義する.

(3) $X, Y \in \mathcal{M}_t \setminus \mathcal{M}_{t-1} \Rightarrow \pi(X) = \pi(Y)$

<u>Proposition 9</u> $\mathcal{F}^{\mathcal{P}}$ は splitting filtration である.

∵) Prop 3^* の条件を満たす.

<u>4. The filtrations corresponding to the preinjective partition</u>

<u>Definition 10</u> (preinjective partition) [2]

ind R の <u>preinjective partition</u> : $\mathcal{I}_0, \mathcal{I}_1, \cdots, \mathcal{I}_\ell$ とは,

(1) $\mathcal{I}_0$ は f.g. indec. inj. module 全体.

(2) $k \geq 1$ に対して

$\mathcal{I}_k$ は $\operatorname{ind} R \setminus \bigcup_{j=0}^{k-1} \mathcal{P}_j$ の minimal injective generator

i.e. (i) $^\forall A \in \mathcal{I}_k$ に対し,

$B \in \operatorname{add}(\operatorname{ind} R \setminus \bigcup_{j=0}^{k-1} \mathcal{I}_j)$ から A への monomorphism は split.

(ii) $^\forall B \in \operatorname{ind} R \setminus \bigcup_{j=0}^{k-1} \mathcal{I}_j$ に対し,

$^\exists A \in \operatorname{add} \mathcal{I}_k$ s.t. $B \rightarrowtail A$: mono.

iii) $\mathcal{I}_k$ は (i), (ii) をみたすもののうち minimal ▨

$\mathcal{F}^{\mathcal{I}}: \phi = \mathcal{M}_0^{\mathcal{I}} \subsetneq \mathcal{M}_1^{\mathcal{I}} \subsetneq \cdots \subsetneq \mathcal{M}_{m^*}^{\mathcal{I}} = \operatorname{ind} R$ を $\mathcal{F}^{\mathcal{P}}$ と同様にして構成すると,

<u>Proposition 9^*</u> $\mathcal{F}^{\mathcal{I}}$ は splitting filtration である.

∵) Prop 3 を適用する.

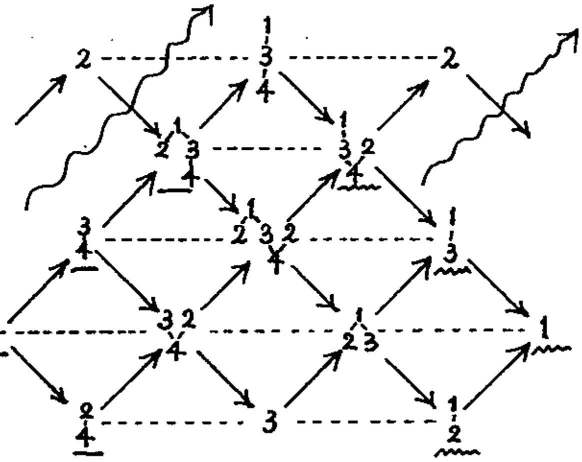
§4 Example

R を次の quiver と relation で定義される path algebra とする

$$\begin{tikzcd} & 2 \arrow[dr, "\beta"] & \\ 1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\gamma"'] & & 4 \\ & 3 \arrow[ur, "\delta"'] & \end{tikzcd} \quad : \beta\alpha = 0$$

$${}_RR = \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ & 4 & \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix} \oplus \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix} \oplus 4$$

R の Auslander-Reiten quiver (A^{φ} を表す quiver) は次のようになる.



注)
⟿ で同一視する
— は projective module
〰 は injective module
を表わす.

$\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \end{smallmatrix}$ は $\begin{tikzcd}[row sep=small] & 2 \\ 1 \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & \\ & 3 \end{tikzcd}$ を表す. etc

1. The Roiter filtration

Roiter measures	対応する indR の objects	Roiter filtration
$f_1 = \{1\}$	$1, 2, 3, 4$	$\mathcal{M}_1$
$f_2 = \{1, 3\}$	$\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \end{smallmatrix}$	$\mathcal{M}_2 \setminus \mathcal{M}_1$
$f_3 = \{1, 2\}$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \end{smallmatrix}$	$\mathcal{M}_3 \setminus \mathcal{M}_2$
$f_4 = \{1, 2, 4\}$	$\begin{smallmatrix} & 1 & \\ 2 & & 3 \\ & 4 & \end{smallmatrix}$	$\mathcal{M}_4 \setminus \mathcal{M}_3$
$f_5 = \{1, 2, 3\}$	$\begin{smallmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 3 & & 2 \\ & 4 & \end{smallmatrix}$	$\mathcal{M}_5 \setminus \mathcal{M}_4$
$f_6 = \{1, 2, 3, 5\}$	$\begin{smallmatrix} & 1 & & \\ 2 & 3 & 2 \\ & 4 & \end{smallmatrix}$	$\mathcal{M}_6 \setminus \mathcal{M}_5$
$f_7 = \{1, 2, 3, 4\}$	$\begin{smallmatrix} 1 & & \\ 3 & & 2 \\ & 4 & \end{smallmatrix}$	$\mathcal{M}_7 \setminus \mathcal{M}_6 = \mathrm{ind}R \setminus \mathcal{M}_6$

2. The dual Roiter filtration

dual Roiter measures	対応する ind R の objects	dual Roiter filtration
$f_1^* = \{1\}$	$1,\ 2,\ 3,\ 4$	$\mathfrak{M}_1^*$
$f_2^* = \{1,3\}$	$\begin{smallmatrix}3&&2\\&4&\end{smallmatrix}$	$\mathfrak{M}_2^* \setminus \mathfrak{M}_1^*$
$f_3^* = \{1,2\}$	$\begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix}$	$\mathfrak{M}_3^* \setminus \mathfrak{M}_2^*$
$f_4^* = \{1,2,4\}$	$\begin{smallmatrix}1&&\\3&&2\\&4&\end{smallmatrix}$	$\mathfrak{M}_4^* \setminus \mathfrak{M}_3^*$
$f_5^* = \{1,2,3\}$	$\begin{smallmatrix}1\\3\\4\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}&1&\\2&&3\end{smallmatrix}$	$\mathfrak{M}_5^* \setminus \mathfrak{M}_4^*$
$f_6^* = \{1,2,3,5\}$	$\begin{smallmatrix}&1&&&\\2&&3&&2\\&&&4&\end{smallmatrix}$	$\mathfrak{M}_6^* \setminus \mathfrak{M}_5^*$
$f_7^* = \{1,2,3,4\}$	$\begin{smallmatrix}&1&\\2&&3\\&&4\end{smallmatrix}$	$\mathfrak{M}_7^* \setminus \mathfrak{M}_6^* = \mathrm{ind}\,R \setminus \mathfrak{M}_6^*$

3. Preprojective partition と filtration

$\mathcal{P}_0 = \{ \begin{smallmatrix}&1&\\2&&3\\&&4\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix},\ 4,\ \begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix} \}$

$\mathcal{P}_1 = \{ \begin{smallmatrix}1\\3\\4\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}&1&&&\\2&&3&&2\\&&&4&\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}3&&2\\&4&\end{smallmatrix} \}$

$\mathcal{P}_2 = \{ \begin{smallmatrix}1&&\\3&&2\\&4&\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}&1&\\2&&3\end{smallmatrix},\ 3 \}$

$\mathcal{P}_3 = \{ 2,\ \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \}$

$\mathcal{P}_4 = \{1\}$

対応する filtration

$\mathfrak{M}_1^p = \{1\}$

$\mathfrak{M}_2^p \setminus \mathfrak{M}_1^p = \{2\}$

$\mathfrak{M}_3^p \setminus \mathfrak{M}_2^p = \{ \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \}$

$\mathfrak{M}_4^p \setminus \mathfrak{M}_3^p = \{3\}$

$\mathfrak{M}_5^p \setminus \mathfrak{M}_4^p = \{ \begin{smallmatrix}&1&\\2&&3\end{smallmatrix} \}$

$\mathfrak{M}_6^p \setminus \mathfrak{M}_5^p = \{ \begin{smallmatrix}1&&\\3&&2\\&4&\end{smallmatrix} \}$

$\mathfrak{M}_7^p \setminus \mathfrak{M}_6^p = \{ \begin{smallmatrix}1\\3\\4\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}3&&2\\&4&\end{smallmatrix} \}$

$\mathfrak{M}_8^p \setminus \mathfrak{M}_7^p = \{ \begin{smallmatrix}&1&&&\\2&&3&&2\\&&&4&\end{smallmatrix} \}$

$\mathfrak{M}_9^p \setminus \mathfrak{M}_8^p = \{4\}$

$\mathfrak{M}_{10}^p \setminus \mathfrak{M}_9^p = \{ \begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix} \}$

$\mathfrak{M}_{11}^p \setminus \mathfrak{M}_{10}^p = \{ \begin{smallmatrix}&1&\\2&&3\\&&4\end{smallmatrix} \}$

$(= \mathrm{ind}\,R \setminus \mathfrak{M}_{10}^p)$

4. Preinjective partition と filtration

$\mathcal{I}_0 = \{ \begin{smallmatrix}1&&\\3&&2\\&4&\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix},\ 1,\ \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \}$

$\mathcal{I}_1 = \{ \begin{smallmatrix}1\\3\\4\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}&1&&&\\2&&3&&2\\&&&4&\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}&1&\\2&&3\end{smallmatrix} \}$

$\mathcal{I}_2 = \{ \begin{smallmatrix}&1&\\2&&3\\&&4\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}3&&2\\&4&\end{smallmatrix},\ 3 \}$

$\mathcal{I}_3 = \{ 2,\ \begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix} \}$

$\mathcal{I}_4 = \{4\}$

対応する filtration

$\mathfrak{M}_1^i = \{4\}$

$\mathfrak{M}_2^i \setminus \mathfrak{M}_1^i = \{2\}$

$\mathfrak{M}_3^i \setminus \mathfrak{M}_2^i = \{ \begin{smallmatrix}3\\4\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}2\\4\end{smallmatrix} \}$

$\mathfrak{M}_4^i \setminus \mathfrak{M}_3^i = \{3\}$

$\mathfrak{M}_5^i \setminus \mathfrak{M}_4^i = \{ \begin{smallmatrix}3&&2\\&4&\end{smallmatrix} \}$

$\mathfrak{M}_6^i \setminus \mathfrak{M}_5^i = \{ \begin{smallmatrix}&1&\\2&&3\\&&4\end{smallmatrix} \}$

$\mathfrak{M}_7^i \setminus \mathfrak{M}_6^i = \{ \begin{smallmatrix}1\\3\\4\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}&1&\\2&&3\end{smallmatrix} \}$

$\mathfrak{M}_8^i \setminus \mathfrak{M}_7^i = \{ \begin{smallmatrix}&1&&&\\2&&3&&2\\&&&4&\end{smallmatrix} \}$

$\mathfrak{M}_9^i \setminus \mathfrak{M}_8^i = \{1\}$

$\mathfrak{M}_{10}^i \setminus \mathfrak{M}_9^i = \{ \begin{smallmatrix}1\\3\end{smallmatrix},\ \begin{smallmatrix}1\\2\end{smallmatrix} \}$

$\mathfrak{M}_{11}^i \setminus \mathfrak{M}_{10}^i = \{ \begin{smallmatrix}1&&\\3&&2\\&4&\end{smallmatrix} \}$

$(= \mathrm{ind}\,R \setminus \mathfrak{M}_{10}^i)$

References

[1] M. Auslander, "Representation theory of artin algebras II",
Comm. Algebra 1 (1974), 269-310.

[2] M. Auslander and S. Smalø, "Preprojective modules over artin algebras",
J. Algebra 66 (1980), 62-122.

[3] V. Dlab and C.M. Ringel, "Quasi-hereditary algebras"
Carleton Mathematical Series No. 224, March, 1988.

[4] P. Gabriel, "Indecomposable representations II"
Symposia Math. Ist. Naz. Alta Mat. 11 (1973), 81-104.

[5] A.V. Rojter, "Unbounded dimentionality of indecomposable representations of an algebra with an infinite number of indecomposable representations",
Math. USSR Izv. 2 (1968), 1223-1230.

[6] 曽 強, "Quasi-hereditary algebra について I"

さらに Quasi-hereditary algebra に関する文献として,次をあげておく.

[7] E. Cline and B. Parshall and L. Scott, "Algebraic stratification in representation categories,"
J. Algebra 117 (1988), 504-521

[8] ——〃——, "Finite dimentional algebras and highest weight categories,"
Jour, reine angew. Math. 391 (1988), 85-99

[9] B. Parshall and L. Scott, "Derived categories, quasi-hereditary algebras, and algebraic groups"
Ottawa - Moosonee Workshop.

Quasi-hereditary rings の大局次元について

筑波大学数学系　山 形 邦 夫

1988年2月に、Dlab (Carleton 大学) は筑波大学において Auslander algebras についての講演を行った。その内容は Ringel (Bielefeld 大学) との共著で Carleton 大学の講究録として発表されたものの一部である。この講演において、quasi-hereditary rings が有限大局次元をもち、特に大局次元が 2 のものは quasi-hereditary に限る、という基本的な結果が紹介された。ここで、大局次元が 2 となる重要な例としてAuslander algebras がある。これは、(i) 大局次元が 2 以下で (ii) dominant dimension (以後、dom dim と略す) が 2 以上、という二つのホモロジー的次元に関する条件で特徴付けられる多元環のことである。逆に、quasi-hereditary algebras は任意の有限大局次元をとり得るのだが、大局次元が 4 以上の多元環で quasi-hereditary にならないものは存在する。しかし、大局次元が 3 のもので quasi-hereditary にならないものはなかなか見つからない。そこで、Dlab は "大局次元が 3 の多元環は quasi-hereditary に限るのではないだろうか?" という問題を提出した。Dlab の帰国後、この反例が好運にも発見できたのだが、それでは、Auslander algebra の場合と比較して、さらに

"大局次元が 3 で dominant dimension が 2 以上の多元環は quasi-hereditary に限るだろうか?"

という疑問が生ずるが、実は、上記の反例は dom dim = 4 となるもので、この疑問も否定される。この反例からいくつかの自然な問題も生ずるのだが、本稿ではこの反例の紹介と、大局次元が 3 の中山環 (generalized uniserial ring, serial

Artinian ring）は必ず quasi-hereditary になる、という事実の紹介をする。さらに、 Dlab-Ringel の講究録には載っていない基本的な事実２点（heredity chain の細分と森田不変性）について注意し、これらから、 heredity chain の細分による遺伝環の特徴付けに関する Dlab-Ringel の定理の、より簡単で概念的な証明が得られるのでそれも併せて紹介する。

なお、heredity ideal（遺伝イデアル）と quasi-hereditary ring（準遺伝環）の定義については、曽、植松両氏の解説を参照して下さい。

1. 森田不変性

以下、環 A は半準素環（semi-primary ring）とする。すなわち、Jacobson 根基 rad A がベキ零で A／rad A が半単純環だとする。

先ず、イデアル及び環がそれぞれ遺伝イデアル，準遺伝環であるという性質が森田不変性（つまり、加群のカテゴリー同型により変わらない性質）をもつことを注意しよう。 e を A のベキ等元で $A = AeA$ が成立すると仮定する。このとき、A のイデアル I が遺伝イデアルであることと、環 eAe のイデアル eIe が遺伝イデアルであることとは同値である。これは、 A の基礎環（basic ring）を A_0 とおくと、ベキ等元 e_0 が存在して $A_0 = e_0Ae_0$、$A = Ae_0A$ が成立し、右加群のカテゴリー Mod A と Mod A_0 とは $-\otimes_A Ae_0$ と $-\otimes_{A_0} e_0A$ により同型であることから容易に確かめられる。このことから、帰納的に、イデアルの遺伝鎖についても森田不変性が証明できる：

Aのイデアルの鎖

$$0 \subset I_1 \subset I_2 \subset \cdots \subset I_m = A$$

が遺伝鎖であることと，eAe のイデアルの鎖

$$0 \subset eI_1e \subset eI_2e \subset \cdots \subset eI_me = eAe$$

が遺伝鎖であることとは同値である。

とくに、二つの森田同値な環 A, B にたいしては、基礎環 A_0, B_0 が同値になることから、これらの結果を使って、A が準遺伝環ならばBもそうである（従って逆も成立する）ことが分かる。つまり準遺伝環という性質は森田不変な性質である。以上のことから、遺伝イデアルや準遺伝環の性質を調べるには、環がそれ自身基礎環であり且つ連結（＝環として直既約）であると仮定してよい。

2. 遺伝鎖の細分

イデアルの遺伝鎖がどのくらい細分できるのか，また二つの遺伝鎖は同じ長さに細分できるのか？ この節ではこの件についての注意を与える。 先ず、準備として遺伝イデアルの分解を考えよう。 I を遺伝イデアルとし、ベキ等元 e は $I=AeA$ なるものとする（このようなベキ等元 e を I の生成ベキ等元と言おう）。さらに、$e_1=e_1e=ee_1$ となるベキ等元 e_1 について、明らかに $I=Ae_1A+A(e-e_1)A$ であり、さらに I が射影右加群で eA により生成されているから、右加群 I は（eA のコピー の）直和 $\oplus eA$ の直和因子に同型である。従って、$\oplus e_1A$ と $\oplus(e-e_1)A$ のある直和因子に同型な（I の）部分加群 P, Q を用いて, $I=P\oplus Q$ とおける。ここで e_1 と $e-e_1$ が同じベキ等元を共有しないと仮定すれば、$(e-e_1)Ae_1=(e-e_1)(\mathrm{rad}\ A)e_1=0$ となるから（$\because$ $e(\mathrm{rad}\ A)e=0$） $Qe_1=0$ が成立し、$Ie_1=Pe_1$ つまり Ae_1A が P に含まれることが分かる。逆も成立して、結局 $P=Ae_1A$ を得る。同様にして $Q=A(e-e_1)A$ を得るから, $I=Ae_1A+A(e-e_1)A$ が直和であるということが分かる。つまり、次の事実を得る：ベキ等元 e は遺伝イデアル I の生成元であるとし、ベキ等元 e_1 は $e_1=e_1e=ee_1$ であり $e-e_1$ と同型なベキ等元を共有しないと仮定する。このとき Ae_1A も遺伝イデアルであり $I=Ae_1A+A(e-e_1)A$ は直和である。これを利用すれば、帰納法を用いて、遺伝鎖の細分について次のことが分かる：

どんな遺伝鎖も（非同型な）単純加群の数と同じ長さに細分される。

この事実は、遺伝イデアルや遺伝鎖の存在などは、原子ベキ等元について調べればよいことを意味している。そこで、AeAが遺伝イデアルとなるベキ等元eを遺伝ベキ等元とよぼう。遺伝イデアルが存在すれば必ず遺伝原子ベキ等元が存在することは本節の初めの部分の主張するところだが、遺伝環（hereditary ring, つまり大局次元１以下の環）においてはどんな原子ベキ等元も遺伝ベキ等元であり、最長のベキ等イデアル鎖（＝ベキ等イデアルの成す鎖）はどれも遺伝鎖であることが容易に分かる。つまりどんなベキ等イデアルも遺伝鎖に細分できる。実は、この逆が成立することが知られている：

（Dlab-Ringel の定理）**すべてのベキ等イデアル鎖が遺伝鎖に細分できるような環は遺伝環に限る。**

今までの注意に基づいて、この定理の簡単な証明を与えよう。

　仮定からすべての原子ベキ等元は遺伝的である。従って、原子ベキ等元の集合$\{e_i\}$の添数を“$e_jAe_i \neq 0$ なら $j \leq i$”となるようにとることが出来る。ただし、$1 = \Sigma e_i$ とする。何故ならば、e を遺伝的な原子ベキ等元とすると、eA から直既約射影加群へのどんな（零ではない）準同型写像も単射に限るからである。さて、$N = \mathrm{rad}\ A$ とおき N の射影被覆を $p : \oplus_{i=0}^{n} P_i \to N$ とし $P_i \in \mathrm{add}\,(e_iA)$ とする。

$$Q_s = P_0 \oplus \cdots \oplus P_{s-1},$$
$$f_s = e_0 + \cdots + e_{s-1}$$

とおく（$1 \leq s \leq n+1$）と、$p(Q_{s+1}) = p(Q_s) + p(P_s)$で $N = p(Q_{n+1})$。s についての帰納法で、各$p(Q_s)$が射影的であることを示す。$\overline{A} = A / Af_sA$, $\overline{N} = (N + Af_sA) / Af_sA$ とおく。定義より $i < j$ なら $e_jAe_i = 0$ だから、すべての e_iA（$i \leq s$）は $\overline{A}$-加群とみなせて、その結果すべての P_i が$\overline{A}$-射影加群であり、$\mathrm{add}\,(\overline{e}_i\overline{A})$ に属する。一方、p から自然に引き起こされ

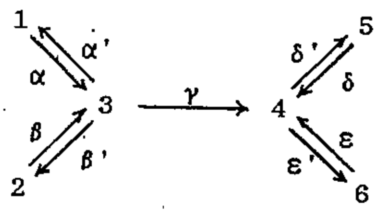
る写像　p：$\oplus_{s\lneq i} P_i \to N$ は射影被覆である。また、ベキ等イデアル鎖 $Af_sA \subset Af_{s+1}A$ が遺伝鎖に細分されることから Ae_sA は A の遺伝イデアルであり、さらに写像の結合

$$P_s \to \oplus_{s\lneq i} P_s \to N \to A$$

は small 核をもつので単射である。従って、$p(P_s)\cap Af_sA=0$ を得る。以上より、$p(Q_s) \subset Af_sA$ だから $p(Q_{s+1})=p(P_s)\oplus p(Q_s)$ となり帰納法により $p(Q_{s+1})$ が射影的であることが分かる。

3.　中山環

次の quiver で定義される（体上の）多元環を考えてみよう。



$$\begin{aligned} 0 &= \beta'\beta = \gamma\alpha = \alpha'\beta \\ &= \varepsilon'\gamma = \delta'\delta = \delta'\varepsilon \\ \alpha\alpha' &= \beta\beta', \quad \delta\delta' = \varepsilon\varepsilon' \end{aligned}$$

これは、大局次元が３で dom dim も３の多元環であり、遺伝イデアルをもたない。何故なら、各原子ベキ等元 e_i（点 i に対応するベキ等元）が遺伝ベキ等元でないことを示せばよい（２節）のだが、実際、$e_i(\mathrm{rad}\ A)e_i \neq 0$　（i＝1、3、4、6）であり、Ae_2A と Ae_5A は右加群として射影的ではない。また、dom dim については　e_4A，e_5A，e_6A　が入射的であることから容易に分かる。

（注：　大局次元が３であるが準遺伝環ではないような例として、もう少し（体上の）次元の小さいものがその後見つかっているが、double arrows をもっており dom dim は０になるものである。）

では、どのような場合に大局次元３の多元環が準遺伝環になるのだろうか？ ここでは、特殊ではあるが環の中でも最も基本的なものである中山環を紹介しよう。

Ａを連結な中山環とすると、次のいずれの条件もＡが準遺伝環になることと同値である、

（ａ）単純射影加群が存在するか、射影次元２の単純加群が存在する、

（ｂ）直既約射影加群ｅＡが存在して、ｅＡ からどんな射影加群への準同型写像（≠０）も単射である。

さらにこのとき、（ａ）において射影次元２の単純加群を ｅＡ／rad ｅＡ とおくと、（ａ）（ｂ）のどちらの場合にも、ｅは遺伝ベキ等元である。

この言い換えを利用して、次の結果を示すことが出来る。

Ａを中山環とし大局次元が３であると仮定する。射影次元が２以上の直既約加群Ｍをとり、

$$\mathbf{P_2 \to P_1 \to P_0 \to M \to 0}$$

を極小射影完全列とする。このとき、P_2 に含まれる最小の射影部分加群と同型な加群ｅＡ（$e^2 = e \varepsilon A$）を考えると、ＡｅＡは遺伝イデアルであり、特にＡは準遺伝環である。

証明の概略を示す。先ず１節の注意より、Ａを連結な基礎環と仮定してよい。P_2と同型な部分加群を含む長さ最大の射影加群をe_1Aとおき、次の二つの場合に分けて考える。

（ｉ） top e_1A （$:= e_1A / e_1 \text{ rad } A$）が入射加群のとき、上述の言い換えの（ｂ）を利用してｅが遺伝ベキ等元であることを示す。

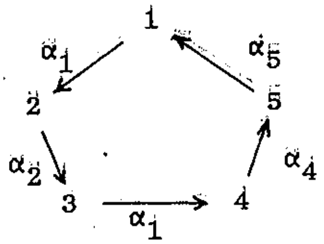
（ｉｉ） top e_1A が入射加群ではないとき、$f(e_1A) = e_2(\text{rad } A)$ と

なる準同型写像 $f: e_1A \to e_2A$ をとる（ただし e_2 はベキ等元）。もし $P_2 \subset \mathrm{Ker}\ f$ なら、$\mathrm{Ker}\ f$ 自身が射影的になることが（上述の言い換え（b）より）分かり、さらに（a）より e が遺伝ベキ等元であることが分かる。従って、$P_2 \not\subset \mathrm{Ker}\ f$ の場合を考えればよい。このときも、やはり次のような自然な完全列が得られる：

$$0 \to \mathrm{Ker}\ f \to P_2 \to e_2A \to P_0 \to \mathrm{Cok}\ v \to 0$$

ただし、$v: e_2A \to P_0$ とおく。従って、仮定から $\mathrm{Cok}\ v$ の射影次元は3以下なので、$\mathrm{Ker}\ f$ は射影的であることが分かり、上の場合と同様に e が遺伝ベキ等元であることが結論される。

最後に、上の結果において、P_2 自身が遺伝イデアルを生々するとは限らないことを、次の例によって注意しておく。



$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_3\alpha_2\alpha_1 \\ &= \alpha_4\alpha_3\alpha_2 \\ &= \alpha_2\alpha_1\alpha_5 \end{aligned}$$

この quiver で定義される（体上の）多元環をAとおくと、次の完全列が得られる

$$0 \to e_4A \to e_3A \to e_1A \to e_5A \to e_5A / e_5(\mathrm{rad}\ A) \to 0$$

ここで、$M = e_5A / e_5(\mathrm{rad}\ A)$ とおくと、e_3, e_5 共、遺伝ベキ等元ではない。ところが $e_5A \subset e_4A \subset e_3A$ であり、e_5 が e_3A （従って e_4A）の最小射影部分加群である。

On minimal spanning sets over semiperfect rings

河田　大（京都工芸繊維大）

semiperfect ring の構造定理は，H. Bass (Trans. A.M.S. 95 (1960)), B. J. Müller (Illinois J. Math. 14 (1970)) によって確立され，とくに有限生成加群に対する projective cover の一意存在定理は有名である．本稿では，まず有限生成加群に対しその極小生成系 minimal spanning set (m. s. s.) を定義すると，体上の有限次元のベクトル空間の基底と類似の性質をもつことを示し (§1)，次に "fit matrix theory" を展開して有限生成加群の２つの m. s. s. の間の関係を述べる (§2)．更に finitely presented かつ non-projective module に対し，その relation matrix を定義し，その加群が Auslander-Reiten の意味で $\mathrm{mod}_P A$ に属するための条件，あるいはその加群が indecomposable であるための条件を，relation matrix を用いて記述する (§3)．最後に「top-simple modules の同型類が有限個」という条件をみたす semiperfect ring の（両側）ideals の個数は有限を示す．この事実は representation-finite artinian ring ではつねに成立していることに注意したい (§4)．

A を semiperfect ring，$\mathrm{rad}A$ を A の Jacobson radical，e, f, g, h（それらに添数を付したもの）を A の原始ベキ等元とする．

§1. minimal spanning sets of finitely generated modules.

Def. f.g. $M_A \neq 0$ の projective cover を $\bigoplus_{i=1}^{m} e_i A \xrightarrow{p} M_A$ とするとき、$p(e_1), \cdots, p(e_m)$ を M_A の m.s.s. と呼ぶ。便宜上 行ベクトル $(p(e_1), \cdots, p(e_m))$ で表す。 $m = \mathrm{rank}\, M_A$ は、M_A により一意に定まる。

より一般に、

Def. M_A の元 $u_i = u_i e_i$ $(i=1,\cdots,m)$ が M_A の生成系 spanning set とは、 $M_A = \sum_{i=1}^{m} u_i A$ が成り立つこと。

Def. M_A の元 $u_i = u_i e_i$ $(i=1,\cdots,m)$ が 右 A-1次独立 とは、

$$(u_1, \cdots, u_m)\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} = 0,\ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \bigoplus_{i=1}^{m} e_i A \implies \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in \bigoplus_{i=1}^{m} e_i (\mathrm{rad} A)$$

が成り立つこと。

このとき、

Lemma 1. f.g. M_A の元 $u_i = u_i e_i$ $(i=1,\cdots,m)$ が M の m.s.s. $\iff$ $u_1, \cdots, u_m$ が M_A の生成系、かつ 右 A-1次独立。

Lemma 2. f.g. M_A の元 $u_i = u_i e_i$ $(i=1,\cdots,n)$ が M の生成系のとき、その適当な部分集合 $u_{i_1}, u_{i_2}, \cdots, u_{i_m}$ をえらんで、M の m.s.s. とすることができる。

注意. f.g. M_A の元 $u_i = u_i e_i$ $(i=1,\cdots,l)$ が 右 A-1次独立 のとき、これに若干個の M の元を補って M の m.s.s. をつくることは、一般にはできない。

例 1. $A = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$: 実数体, $\mathbb{C}$: 複素数体) は commutative local artinian ring である. $(0,1),(0,i)$ (iは虚数単位) は右A-1次独立であるが. $\mathrm{rank}\, A_A=1$.

§2. fit matrix theory

この§2, および§3 では 制限されたA上の行列のみ とりあつかう.

I. 考察する行列を $m\times n$ $P=(p_{ij})_{i,j}$, $p_{ij}\in e_iAf_j$
(ただし, m,n は任意, e_i,f_j も任意の原始べき等元) の形のものに限定する.

II. 加法: 同じ typeのもの同志に制限する.

III. 乗法: $l\times m$ $P=(p_{ij})_{i,j}$, $m\times n$ $Q=(q_{jk})_{j,k}$, $p_{ij}\in e_iAf_j$, $q_{jk}\in f_jAg_k$ の場合のみ 積PQ を定義する. この積を fit product という.

IV. スカラー倍は定義しないが, $m\times n$ $P=(p_{ij})_{i,j}$, $p_{ij}\in e_iAf_j$, に対し. 積

$$P\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\in\bigoplus_{j=1}^{n}f_jA \quad \text{および}\ (a_1,\cdots,a_m)P,\ (a_1,\cdots,a_m)\in\bigoplus_{i=1}^{m}Ae_i$$

を許す.

以上で構成される matrix theory を, fit matrix theory over A と呼ぶことにする.

<u>Def.</u> $n\times n$ $P=(p_{ij})_{i,j}$, $p_{ij}\in e_iAf_j$, が可逆行列とは,

$$\exists_{n\times n}\ Q=(q_{ji})_{j,i},\ q_{ji}\in f_jAe_i,\ \text{s.t.}\ PQ=\begin{pmatrix}e_1&&\\&\ddots&\\&&e_n\end{pmatrix},\ QP=\begin{pmatrix}f_1&&\\&\ddots&\\&&f_n\end{pmatrix}.$$

このとき Q はPにより一意に定まり, $Q=P^{-1}$ と表す.
また,上の右辺に現れる行列を単位行列(または trivial projection matrices) という.

Def. $a \in eAf$ が可逆元とは，行列(a)が可逆のこと．

体上の matrix theory と同様に，3種類の基本行列，行(または列)基本変形が定義できる．その結果，

Lemma 3. 可逆行列 ＝ 有限個の基本行列の積

をうる．一方，f.g. $M_A (\neq 0)$ の2つの projective covers の間には，その一意性より

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^{m} e_i A & \xrightarrow{p} & M_A \\ P \uparrow \wr & & \| \\ \bigoplus_{j=1}^{m} f_j A & \xrightarrow{p'} & M_A \end{array} \qquad (\text{可換})$$

をみたす可逆行列 P が存在する．即ち M_A の2つの m.s.s. $(u_1, \cdots, u_m)$, $(v_1, \cdots, v_m)$ に対し，

$$^{\exists}\text{可逆行列 } P \text{ s.t. } (v_1, \cdots, v_m) = (u_1, \cdots, u_m)P$$

そこで，

Def. M_A の元よりなる行ベクトル $(u_1, \cdots, u_m)$, $u_i = u_i e_i$ $(i=1, \cdots, m)$ に対し，次の3つを基本置換 elementary substitution と呼ぶ．

① u_j と u_k とのとりかえ．$(j \neq k)$

② u_j を a倍 (a: 可逆元) する．$(a \in e_j A g_j \setminus e_j (\mathrm{rad} A) g_j)$

③ u_j に u_k の a倍を加える．$(j \neq k,\ a \in e_k A e_j)$

と定義すれば，Lemma 3 より直ちに次の定理をうる．

Th. 4. f.g. $M_A \neq 0$ の2つの m.s.s. は，一方に有限回の基本置換を施すことにより他方がえられる．

注意 f.g. ${}_A M$ に対しても同様の議論ができる．例えば，

${}_AM$ の projective cover を $\bigoplus_{i=1}^{m} Ae_i \xrightarrow{p} {}_AM$ とするとき，$p(e_1), \cdots, p(e_m)$ を ${}_AM$ の m.s.s. といい，便宜上 列ベクトル $\begin{pmatrix} p(e_1) \\ \vdots \\ p(e_m) \end{pmatrix}$ の形で表す．また，

${}_AM$ の元 $u_i = e_i u_i$ $(i=1, \cdots, m)$ が 左 A-1次独立 とは，

$$(a_1, \cdots, a_m)\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = 0,\ (a_1, \cdots, a_m) \in \bigoplus_{i=1}^{m} Ae_i \Longrightarrow (a_1, \cdots, a_m) \in \bigoplus_{i=1}^{m} (\mathrm{rad}\,A)e_i$$

が成り立つことと定義する．

Def. $m \times n$ 行列 $R = (r_{ij})_{i,j}$，$r_{ij} \in e_i A f_j$，

$$= (r_1, r_2, \cdots, r_n) = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$$ に対し，

$$\text{column rank } R = \text{rank} \sum_{j=1}^{n} r_j A \ \left(\subset \bigoplus_{i=1}^{m} e_i A\right)$$

$$\text{row rank } R = \text{rank} \sum_{i=1}^{m} A s_i \ \left(\subset \bigoplus_{j=1}^{n} A f_j\right)$$

と定義する．

Lemma 2 より次のことが分る．

Lemma 5. $m \times n$ $R = (r_1, \cdots, r_n) = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$ とするとき，

column rank $R = \{r_1, \cdots, r_n$ のうち 右 A-1次独立な生成系の元の個数$\}$

row rank $R = \{s_1, \cdots, s_m$ のうち 左 A-1次独立な生成系の元の個数$\}$．

更に，可逆行列をかけても これらは 不変である．即ち

Lemma 6. $m \times n$ R; P, Q は共に可逆行列のとき，

column rank PRQ = column rank R

row rank PRQ = row rank R

§ 3. relation matrices

<u>Def.</u> M_A を finitely presented, non-projective module, その minimal projective presentation を,

$$(*) \quad \bigoplus_{j=1}^{n} f_j A \xrightarrow{p_1} \bigoplus_{i=1}^{m} e_i A \xrightarrow{p_0} M_A \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

とする. (即ち p_0 は M_A の projective cover, p_1 は $\mathrm{Ker}\, p_0$ の projective cover を induce する.) $p_1(f_j) = \begin{pmatrix} r_{1j} \\ \vdots \\ r_{mj} \end{pmatrix}$ $(j = 1, \cdots, n)$

とおけば, $m \times n$ 行列 $R = (r_{ij})_{i,j}$, $r_{ij} \in e_i(\mathrm{rad} A) f_j$,

は $\mathrm{Ker}\, p_0$ の m. s. s. である. この R を, M_A の ((*)に付随する) relation matrix と呼ぶ.

明らかに $\quad p_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \bigoplus_{j=1}^{n} f_j A$

<u>注意.</u> R の n 個の列ベクトル は, 右 A-1次独立.

また, M_A の 他の minimal projective presentation (*') に対しては, 次の図式:

$$\begin{array}{ccccccc}
\bigoplus_{j=1}^{n} f_j A & \xrightarrow{p_1} & \bigoplus_{i=1}^{m} e_i A & \xrightarrow{p_0} & M_A & \longrightarrow & 0 \\
\alpha' \downarrow \wr & & P \downarrow \wr & & \| & & \\
(*') \ \bigoplus_{j=1}^{n} h_j A & \xrightarrow{p_1'} & \bigoplus_{i=1}^{m} g_i A & \xrightarrow{p_0'} & M_A & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

が可換 だから 次のことが分る.

<u>Lemma 7.</u> finitely presented, non-projective module M_A の 1つの relation matrix を R とするとき, M_A の relation matrices の 一般形は,

$$PRQ \quad (P, Q : \text{可逆行列}).$$

さて(*)のA-dualをとると，

$$(**)\quad \bigoplus_{i=1}^{m} Ae_i \xrightarrow{\mathcal{P}_1^*} \bigoplus_{j=1}^{n} Af_j \xrightarrow{g} \operatorname{Coker}\mathcal{P}_1^* \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

をうる．ここに $\mathcal{P}_1^* = \operatorname{Hom}_A(\mathcal{P}_1, A)$，$g$ は canonical epi. とする．

$$\mathcal{P}_1^*(a_1, \cdots, a_m) = (a_1, \cdots, a_m)R, \quad (a_1, \cdots, a_m) \in \bigoplus_{i=1}^{m} Ae_i$$

が成り立ち，$\operatorname{Coker}\mathcal{P}_1^*$ は finitely presented, non-projective module である．

そこで Auslander - Reiten にならい，

<u>Def.</u> $M_A \in \operatorname{mod}_P A$ とは，M_A が finitely presented，かつ non-zero projective module を直和因子にもたぬこと．

このとき，

<u>Prop. 8.</u> M_A を finitely presented, non-projective module，R を(*)に付随する M_A の relation matrix とするとき，次は同値：

(1) $M_A \in \operatorname{mod}_P A$

(2) R の m 個の行ベクトルが左 A-1次独立．

(3) (**)が $\operatorname{Coker}\mathcal{P}_1^*$ の minimal projective presentation.

更にこのとき，R は $\operatorname{Coker}\mathcal{P}_1^*$ の(**)に付随する relation matrix となる．(即ち $\operatorname{Coker}\mathcal{P}_1^* = \operatorname{Tr} M \in \operatorname{mod}_P A^{op}$)

<u>注意.</u> $R = (r_1, \cdots, r_n) = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_m \end{pmatrix}$ とおくとき，$M_A \in \operatorname{mod}_P A$ の場合，

$$M_A = \bigoplus_{i=1}^{m} e_i A \Big/ \sum_{j=1}^{n} r_j A \;, \quad {}_A[\operatorname{Tr} M_A] = \bigoplus_{j=1}^{n} Af_j \Big/ \sum_{i=1}^{m} As_i$$

注意. M_A が finitely presented, non-projective module で, その relation matrix R が $1\times n$ 行列のとき, M_A は明らかに indecomposable, 従ってつねに $M_A \in \mathrm{mod}_P A$.

次は indecomposables の構成に有効である.

Coro. 9. M_A は finitely presented, non-projective module で, その relation matrix R が $m\times 1$ 行列のとき, 次は同値:

(1) M_A は indecomposable module.

(2) $M_A \in \mathrm{mod}_P A$:

(3) m 個の元 $r_{11},\cdots,r_{m1}$ が 左 A-1次独立.

次に M_A の直既約性を特徴づけたい. このため,

Def. $m\times m$ 行列 $T=(t_{ij})_{i,j}$, $t_{ij}\in e_iAe_j$, が idempotent matrix とは, $T^2=T$ をみたすこと.

Lemma 10. $m\times m$ 行列 $T=(t_{ij})_{i,j}$, $t_{ij}\in e_iAe_j$, が idempotent matrix $\Longleftrightarrow$ $^\exists$ 可逆行列 $P=(p_{kj})_{k,j}$, $p_{kj}\in g_kAe_j$, $^\exists$ 対角行列

$$\begin{pmatrix} g_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & g_s & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \quad (0\leq s\leq m) \quad \text{s.t.} \quad T=P^{-1}\begin{pmatrix} g_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & g_s & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}P.$$

これより,

Th. 11. $M_A\in \mathrm{mod}_P A$, M_A の relation matrix を $m\times n$ 行列 R $(m\geq 2,\ n\geq 2)$ とする. このとき M_A が indecomposable であるためには, 条件「$\forall$ non-zero idempotent matrices T, S s.t. $TR=RS \Rightarrow T, S$ の何れか一方は単位行列」をみたすことが必十である.

I を $\mathrm{rad}\,A$ に含まれる(両側) ideal とするとき, M_Aの性質が $[M/MI]_{A/I}$ に遺伝するかどうかを調べたい.

<u>Lemma 12.</u> M_A を finitely presented, non-projective module, M_A の minimal projective presentation を

$$\bigoplus_{j=1}^{n} f_j A \xrightarrow{p_1} \bigoplus_{i=1}^{m} e_i A \xrightarrow{p_0} M_A \longrightarrow 0 \quad (\text{exact}),$$

${}_A I_A \subset \mathrm{rad}\,A$ とする. このとき,

(i) $[M/MI]_{A/I}$ が finitely presented, non-projective

$\iff \mathrm{Ker}\,p_0 \not\subset \bigoplus_{i=1}^{m} e_i I$

(ii) $[M/MI]_{A/I}$ が finitely presented, non-projective, かつその minimal projective presentation が

$$\bigoplus_{j=1}^{n} f_j A/f_j I \xrightarrow{\tilde{p}_1} \bigoplus_{i=1}^{m} e_i A/e_i I \xrightarrow{\tilde{p}_0} [M/MI]_{A/I} \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

($\tilde{p}_k$ $(k=0,1)$ は, p_kより canonical に induce された map.)

$\iff \mathrm{Ker}\,p_0 \cap (\bigoplus_{i=1}^{m} e_i I) \subset (\mathrm{Ker}\,p_0)(\mathrm{rad}\,A).$

これより直ちに次の Prop. をうる.

<u>Prop. 13.</u> $M_A \in \mathrm{mod}_p A$, $R=(r_{ij})_{i,j}$ を M_Aの relation matrix, $\bigoplus_{i=1}^{m} e_i A \xrightarrow{p} M_A$, $\bigoplus_{j=1}^{n} A f_j \xrightarrow{q} \mathrm{Tr}\,M_A$ を projective covers.

${}_A I_A \subset \mathrm{rad}\,A$ とするとき, 次は同値:

(1) $\mathrm{Ker}\,p \cap (\bigoplus_{i=1}^{m} e_i I) \subset (\mathrm{Ker}\,p)(\mathrm{rad}\,A)$, $\mathrm{Ker}\,q \cap (\bigoplus_{j=1}^{n} I f_j) \subset (\mathrm{rad}\,A)(\mathrm{Ker}\,q)$

(2) $[M/MI]_{A/I} \in \mathrm{mod}_p\, A/I$ with a relation matrix $\overline{R}=(\overline{r}_{ij})_{i,j}$

（ここに，$-$ は I を法とする canonical image を示す.）

更に，このとき $\mathrm{Tr}[M/MI]_{A/I} = \mathrm{Tr}M_A/I(\mathrm{Tr}M_A)$ が成り立つ.

注意. Zorn's Lemma より，(1) をみたす ideals ${}_AI_A$ ($\subset \mathrm{rad}A$) の中で極大なものが存在する.

§4. top-simple modules の同型類が有限個の環

representation-finite artinian ring の ideals 全体は分配束をつくるが，(両側加群としての)組成列の長さが有限だから，分配束の表現論によれば その members の個数は有限である.　ここでは，より弱い条件の下で同じ結論がでることを示したい.

Def. $\mathrm{top}M_A$ が simple module のとき，M_A を top-simple right A-module という.

Prop. 14. semiperfect ring A が，「top-simple right A-modules の同型類が有限個」という条件をみたすとき，A の ideals の個数は有限である.

注意. $\mathfrak{m}_A, \mathfrak{n}_A \subset e(\mathrm{rad}A)$, $eA/\mathfrak{m} \approx eA/\mathfrak{n}$ とするとき，projective cover の一意性より，次の可換図式をうる：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathfrak{m} & \longrightarrow & eA & \longrightarrow & eA/\mathfrak{m} & \longrightarrow 0 & \text{(exact)} \\ & & \downarrow\wr & & {\scriptstyle a}\downarrow\wr & & \downarrow\wr & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathfrak{n} & \longrightarrow & eA & \longrightarrow & eA/\mathfrak{n} & \longrightarrow 0 & \text{(exact)} \end{array}$$

即ち，$\exists$ 可逆元 $a \in eAe$ s.t. $\mathfrak{n} = a\mathfrak{m}$　（逆も成り立つ.）

例 1. (既出) $A = \mathbb{R} \ltimes \mathbb{C}$ は commutative, local, artinian ring で, idealsの個数は無限, しかし ideals の同型類の個数は有限.

例 2. $\Delta \supset \Gamma$: division ring extension s.t. $[\Delta_\Gamma : \Gamma] = 2$ のとき,

$$A = \begin{pmatrix} \Delta & \Delta \\ 0 & \Gamma \end{pmatrix}, \quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおく. Aは artinian ring で, e_2A は simple, $e_1A \supset e_1(\mathrm{rad}A) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta_\Gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. そこで $\begin{pmatrix} 0 & a\Gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(0 \neq a \in \Delta)$ の形のもののみが問題となる. 2つの $\begin{pmatrix} 0 & a_1\Gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a_2\Gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ に対し, $e_1Ae_1 = \begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ の可逆元 $\begin{pmatrix} a_2a_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ をとれば, $\begin{pmatrix} a_2a_1^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a_1\Gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_2\Gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. よって A は条件「」をみたす. (勿論 Aの ideals は5個.)

例 3. [A. Rosenberg and D. Zelinsky (Math. Z. 70 (1959))]

Fを可換体, $K = F(x_1, x_2, \cdots)$, ここに不定元 $x_1, x_2, \cdots$ は可算個. Kの ring monomorphism σ を, $\sigma(x_i) = x_{i+1}$ $(i = 1, 2, \cdots)$, $\sigma|F = 1_F$ により定める. そして ${}_KN_K$ を次のようにつくる:

$${}_KN = {}_KK, \quad N_K: \; n * k = n\sigma(k).$$

$A = K \ltimes N$ とおけば, Aは local, left artinian ring となるが, right artinian ではない. Aの ideals は3個, しかし条件「」をみたさぬことが以下に示される:

$[\mathrm{rad}A]_A = (0, N_K)$. そこで $\mathfrak{m}_K, \mathfrak{n}_K \subset N_K$ に対し $A/(0,\mathfrak{m}) \approx A/(0,\mathfrak{n})$

とすれば，$\exists$可逆元 $(k,n)\in A,(k\neq 0)$ s.t. $(k,n)(0,m)=(0,n)$
即ち $n=km$，従って $\dim m_K=\dim n_K$ なるを要す．
しかるに，$[N_K:K]=[K:\sigma(K)]\geqq\aleph_0$ だから，N_K の部分加群として 1次元，2次元，…… のものがとれ，A のそれらによる factor modules は互に非同型となる．よって条件「」をみたさぬ．
更に，この例で $m_A=\bigoplus_{n\geqq 0}(0,x_1^n*K)$ とおくと radA に含まれるが，A の可逆元 $(x_1,0)$ をとると $(x_1,0)m\subsetneqq m$

（実は，semiperfect ring A が，条件「」をみたし，かつ上のような m_A が存在しないならば，A は right artinian ring となることは明らか．）

不変式論的方法

名大理　森川寿

1 数学の対象　生の個々のものは数学の対象になりづらく，何らかの意味で，平均作用を行い，不変量，不変関係，標準型，共変性を抽出して，それらの間の関係を論ずることとなる。　これは認知機能そのものが，そうした構造になって居るためと考えられる。つまり平均作用によって抽出された量とか型とか関係とかだけが，意識に上って来ると思われる。したがっていろいろの理論の最終的表示は不変式論的表示になると出張してもよい。

2 不変式論の方法

1) 不変量の抽出とその間の関係（(関係の関係)^n）をしらべる。

2) 共変関係の型の決定 ―― (表現論)

3) 標準型（さまざまな段階の）の構成 ― parameter の個数の減少

3 話の内容　ここでは，注文のあったいわゆる不論式の部分では，Cayley の考えを巾級数にまで拡張し，変数係数巾級数列

$$f_j(z_j|z)=\sum_{l=0}^{\infty}\binom{w_j}{l}z_j^{(l)}z^l \qquad (1\leq j\leq r) \qquad \left(\binom{w_j}{l}=\frac{w_j(w_j-1)\cdots(w_j-l+1)}{l!}\right)$$

の共変式の環を微分多項式環

$$K[\cdots,\left(\tfrac{d}{dz}\right)^l f_j(z_j|z),\cdots] \qquad (ch(K)=0 \text{ の体} K)$$

の中に具体的に構成する話をし，その保型形式，および線型常微分作用素の不変式への応用について述べる。　後半では，commutative algebra R とそれに作用する無限巡回群 $\langle\sigma\rangle$ を考え，R-値 1-cocycle $\{\mu_{\sigma^l}\,|\,l\in\mathbb{Z}\}$ をもとにした μ-2項係数，非可換 theta 関数の無限積展開，非可換 hypergeometric function 等にふれる。特に

$$R=\mathbb{Z}[q_0,q_0^{-1},q_1,q_1^{-1},q_2,q_2^{-1},\cdots] \qquad (q_0,q_1,q_2,\cdots \text{ 可換変数})$$

$$\sigma^{-1} q_n \sigma = q_n^{\sigma} = \prod_{l=0}^{n} q_l^{(l)} \qquad M_{\sigma l} = q_n^{\sigma l} q_n^{-1} \qquad (n \text{固定})$$

のときは n-power sum $\sum_{i=1}^{n} q_i^n$ と関係がある。いずれにせよ後半は試みである。

3 共変式環　簡単な為 変数係数巾級数が1つの場合について説明する。

$$f(\zeta|z) = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{w}{l} \zeta^{(l)} z^l \qquad w \text{ はある } \mathbb{C}^\times \text{の元で(固定)}$$

$K[\zeta] = K[\zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}, \zeta^{(2)}, \cdots]$ に 3つの grade をいれる

$$\deg \zeta^{(l)} = 1, \quad \text{weight } \zeta^{(l)} = l \quad \text{index } \zeta^{(l)} = w - 2l \qquad (0 \leq l < \infty)$$

GL_2 の $f(\zeta|z)$ への作用を

$$\boxed{f\left(\zeta\begin{pmatrix}\delta & \beta \\ \gamma & \alpha\end{pmatrix} \middle| z\right) = (\delta + \gamma z)^{w} f(\zeta | (\delta + \gamma z)^{-1}(\beta + \alpha z))}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \binom{w}{l} \left(\zeta\begin{pmatrix}\delta & \beta \\ \gamma & \alpha\end{pmatrix}\right)^{(l)} z^l$$

で入れると、

$$\boxed{\left(\zeta\begin{pmatrix}\delta & \beta \\ \gamma & \alpha\end{pmatrix}\right)^{(l)} = \sum_{p=0}^{l} \sum_{q=0}^{\infty} \binom{l}{p}\binom{w-l}{q} \zeta^{(l-p+q)} \alpha^{l-p} \beta^{q} \gamma^{p} \delta^{w-l-q}}$$

となる

<u>u-共変式</u>　$F(\zeta, z) = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{u}{l} \varphi_l(\zeta) z^l \qquad (\varphi_l(\zeta) \in K[\zeta])$

が u-共変式 $\iff$ $\boxed{F\left(\zeta\begin{pmatrix}\delta & \beta \\ \gamma & \alpha\end{pmatrix}, z\right) = (\delta + \gamma z)^{u} F(\zeta, (\delta + \gamma z)^{-1}(\beta + \alpha z))}$ $\left(\begin{pmatrix}\delta & \beta \\ \gamma & \alpha\end{pmatrix} \in SL_2\right)$

<u>Cayley の idea</u> = 微分型 (Lie algebra の意識的適用) を考える

$\mathfrak{sl}_2$ の生成元：　$X = \begin{pmatrix}0 & 0 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix}-1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$

トーパラメータ群　：　$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0 \\ t & 1\end{pmatrix}\right\}$, $\left\{\begin{pmatrix}1 & t \\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$　$\left\{\begin{pmatrix}t^{-1} & 0 \\ 0 & t\end{pmatrix}\right\}$

<u>$\mathfrak{sl}_2$ の realization</u>　$\mathfrak{sl}_2 \longrightarrow \text{Derivation } K[\zeta]$　inj. Lie alg. iso

$$\begin{cases} X \longmapsto \mathcal{D} = \sum_{l=0}^{\infty} l \, \zeta^{(l-1)} \frac{\partial}{\partial \zeta^{(l)}} \\ Y \longmapsto \Delta = \sum_{l=0}^{\infty} (w-l) \zeta^{(l+1)} \frac{\partial}{\partial \zeta^{(l)}} \\ H \longmapsto \mathcal{H} = \sum_{l=0}^{\infty} (w-2l) \zeta^{(l)} \frac{\partial}{\partial \zeta^{(l)}} \end{cases} \qquad (\text{Cayley-Aronhold の作用素})$$

H は $K[\xi]$ に semi-simple に作用し，$\{H$ の固有値$\} = \{$index の値$\}$

$K[\xi] = \bigoplus_n K[\xi]^{[n]}$ （H-固有空間分解）

$\mathfrak{S} = \{$半不変式 (semi-invariant)$\} = \{ \varphi(\xi) \in K[\xi] \mid \mathcal{D}\varphi(\xi) = 0 \}$ (w に無関係)

$\mathfrak{S} = \bigoplus_n \mathfrak{S}^{[n]} \qquad \mathfrak{S}^{[n]} = \{ \varphi(\xi) \in K[\xi] \mid \mathcal{D}\varphi(\xi) = 0 \quad H\varphi(\xi) = n\varphi(\xi) \}$

$\boxed{\text{基本定理}}$ （Robert の定理）

$\mathfrak{C} = \bigoplus_n \mathfrak{C}^{[n]} \qquad \mathfrak{C}^{[n]} = \{ n\text{-共変式} \}$

$\boxed{\mathfrak{S} \xrightarrow{\Phi} \mathfrak{C}}$ は bijective algebra iso

$$\Phi(\varphi)(\xi ; z) = e^{z\Delta}\varphi(\xi) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{z^\ell}{\ell!} \Delta^\ell \varphi(\xi) \quad \text{(Taylor 展開)}$$

$$= \varphi\Big(\cdots , \frac{(\frac{d}{dz})^\ell f(\xi \mid z)}{w(w-1)\cdots(w-\ell+1)} , \cdots \Big) \qquad (\varphi(\cdots, \xi^{(\ell)}, \cdots) \in \mathfrak{S})$$

$$F(\xi, 0) \xleftarrow{\Phi^{-1}} F(\xi, z)$$

例 $\quad \xi^{(0)} \longleftrightarrow f(\xi \mid z) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \binom{w}{\ell} \xi^{(\ell)} z^\ell$

$$\xi^{(2)}\xi^{(0)} - \xi^{(1)2} \longleftrightarrow \begin{vmatrix} f(\xi \mid z) & \frac{\frac{d}{dz} f(\xi\mid z)}{w} \\ \frac{\frac{d}{dz} f(\xi\mid z)}{w} & \frac{(\frac{d}{dz})^2 f(\xi\mid z)}{w(w-1)} \end{vmatrix} \quad \text{(weighted Hessian)}$$

連立の場 $f_j(\xi_j \mid z)$ $(1 \leq j \leq n)$ の場合 $\mathcal{D} = \sum \mathcal{D}_j \quad \Delta = \sum \Delta_j \quad H = \sum H_j$
を用いれば結果は同じである。

・ $K[\xi]$ の sl_2-表現分解は

$$K[\xi] = \bigoplus_{\ell=0}^{\infty} \Delta^\ell \mathfrak{S}$$

各成分への projection = Hilbert operator (Hilbert によって与えられた) は

$$K[\xi]^{[n]} \longrightarrow \Delta^\ell \mathfrak{S}^{[n]} \qquad \Delta^\ell \Big(1 + \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(-1)^\ell \Delta^\ell \mathcal{D}^\ell}{(n+2)(n+3)\cdots(n+\ell+1)} \Big) \quad (\text{ただし } n \neq -2, -3, \cdots)$$

重要な定理としては

Gram の定理 $\quad \sum w_j d_j \neq 0, 1, 2, \cdots \quad (d_j \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \neq (0, \cdots, 0))$ のとき

$K[\xi]$ の $(w_1, \cdots, w_N)$-関して sl_2-admissible ideal $\mathfrak{a}$ の生成元は

$\mathfrak{S}$ の同次同値な $\varphi_1, \cdots, \varphi_N$ があって $\mathfrak{a}$ は $\Delta^\ell \varphi_j$ $(\ell = 0, 1, 2, \cdots ; 1 \leq j \leq N)$

で生成される。

注意　$\mathfrak{S}$ は w に無関係に生成される $\zeta^{(0)}, \zeta^{(0)-1}$ を係数環に入れてしまえば

$$\begin{cases} \mathfrak{S}[\zeta^{(0)-1}] = K[\zeta^{(0)}, \zeta^{(0)-1}, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \cdots \quad] \\ \phi_\ell = \sum_{p=0}^{\ell} (-1)^p \binom{\ell}{p} \zeta^{(0)\ell-p-1} \zeta^{(1)p} \zeta^{(\ell-p)} \end{cases}$$

で与えられる無限変数多項式環 $K[\zeta^{(0)}, \zeta^{(0)-1}][\phi_2, \phi_3, \phi_4, \cdots]$ となる。

これによって具体的に共変式が表示されたことになる。

注意　この Cayley の idea は Lie 環 および highest weight 表現の発生であり、E. Cartan や H. Weyl の表現論までの距離は短い

4 保型形式への応用

保型形式への応用は次の補題が出発点となる。

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{1}{w(w-1)\cdots(w-\ell+1)} \left(\frac{d^\ell}{d\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}\right)^\ell}\right)\left((\gamma z+\delta)^{-w} f(z)\right) \\ &= \sum_{p=0}^{\ell} (-1)^p \binom{\ell}{p} \frac{\left(\frac{d}{dz}\right)^{\ell-p} f(z)}{w(w-1)\cdots(w-\ell+1)} \gamma^p (\gamma z+\delta)^{-w+2\ell-p} \end{aligned}}$$

定理　$f_1(z), \ldots, f_N(z)$ が 指数 $w_1 = -2k_1, \cdots, w_N = -2k_N$ の Γ-保型形式，$\mathfrak{S} = \bigoplus_m \mathfrak{S}^{[-2m]}$ を $(w_1, \cdots, w_N)$-による (index 分解) とすれば $\varphi(\cdots, \zeta_j^{(\ell)}, \cdots) \in \mathfrak{S}^{[-2m]}$ に対して

$$\varphi\left(\cdots, \frac{\left(\frac{d}{dz}\right)^\ell f_j(z)}{w_j(w_j-1)\cdots(w_j-\ell+1)}, \cdots\right)$$ は Γ の 指数 $-2m$ の保型形式

である。

基本定理　もし Γ の Zariski closure が PSL_2 ならば，(上の記号を用いて) $K=\mathbb{C}$，$\mathbb{C}[\cdots, \left(\frac{d}{dz}\right)^\ell f_j(z), \cdots]$ の元で (指数 $-2m$ の) Γ-保型形式となるもののつくるベクトル空間は

$$\left\{ \varphi\left(\cdots, \frac{\left(\frac{d}{dz}\right)^\ell f_j(z)}{w_j(w_j-1)\cdots(w_j-\ell+1)}, \cdots\right) \;\middle|\; \varphi(\cdots, \zeta_j^{(\ell)}, \cdots) \in \mathfrak{S}^{[-2m]} \right\}$$

で与えられる。

次の Schwarzian $\{z,\tau\} = \left(\frac{z''}{z'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{z''}{z'}\right)^2 \quad \left((\ )' = \frac{d}{d\tau}(\ ) \right)$
の不変式論的意味付けは重要である

$h(z)(dz)^k = \phi(\tau)(d\tau)^k$ のとき

$$\boxed{\begin{vmatrix} h(z) & \frac{1}{2k}\frac{dh(z)}{dz} \\ \frac{1}{2k}\frac{dh(z)}{dz} & \frac{1}{2k(2k+1)}\left(\frac{d}{dz}\right)^2 h(z) \end{vmatrix} (dz)^{2k+2} = \left\{ \begin{vmatrix} \phi(\tau) & \frac{1}{2k}\frac{d\phi(\tau)}{d\tau} \\ \frac{1}{2k}\frac{d\phi(\tau)}{d\tau} & \frac{1}{2k(2k+1)}\left(\frac{d}{d\tau}\right)^2 \phi(\tau) \end{vmatrix} - \frac{1}{2k+1}\phi(\tau)^2 \{z,\tau\} \right\} (d\tau)^{2k+2}}$$

(graded Hessian の変換の残余項)

4 線型常微分作用素への応用

$$L_n(p \mid u, y) = \left(\frac{d}{du}\right)^n y + \sum_{l=1}^{n} \binom{n}{l} p_l(u) \left(\frac{d}{du}\right)^{n-l} y$$

に群芽 $R_{v,\lambda} : (u, y) \longmapsto (v(u), \lambda(u) y)$ を作用させる。この変換でまた同じ形た作用素はといのえられる。この変換での不変量を全て求めよ。

Laguerre-Forsyth の標準型

$$\boxed{L_n(Q \mid z, y) = \left(\frac{d}{dz}\right)^n y + \sum_{p=3}^{n} \binom{n}{p} Q_p(z) \left(\frac{d}{dz}\right)^{n-p} y} \quad p_1(u) = 0 \text{ にする}$$

初等的に出来る $p_1(u) = p_2(u) = 0$ は Riccati 方程式を解いて出来る。

2つの Laguerre-Forsyth の標準型の間の変換 (存在すれば) は次のものである

$$(z, y) \longmapsto \left(\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \frac{c y}{(\gamma z + \delta)^{n-1}} \right) \qquad \left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in SL_2, \ c \in \mathbb{C}^\times \right)$$

Laguerre-Forsyth の標準型の不変量を求めれば, 目的を達せられる。それには変数係数 従属変数列 ($Q_3, Q_4, Q_5, \cdots\cdots$) を取り $L_n(Q \mid z, y)$ の不変量, 不変式 を定義する.

$\mathbb{C}[\cdots, \left(\frac{d}{dz}\right)^l Q_j, \cdots]$ (0を含む) の元 $\varphi(\cdots, \left(\frac{d}{dz}\right)^l Q_j, \cdots)$ と自然数 p があって

$$\varphi(\cdots, \left(\frac{d}{dz}\right)^l Q_j, \cdots)(dz)^j$$

が上の変換 $(z, y) \longrightarrow \left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}, \frac{cy}{(\gamma z+\delta)^{n-1}}\right)$ で不変なとき, φ を

重さ p の $L_n(Q|z,y)$ の不変式と呼ぶ。

$$\theta_p(z)=\frac{1}{2}\sum_{s=0}^{p-3}(-1)^s\frac{(p-2)!\,p!\,(2p-s-2)!}{(p-s-1)!\,(p-s)!\,(2p-3)!\,s!}\left(\frac{d}{dz}\right)^s Q_{p-s}$$

とおけば $\theta_p(z)$ は $L_n(Q|z,y)$ の重さ p の不変式である $(3\leq p\leq n)$

<u>注意</u>　2項係数 $\binom{\ }{\ell}$ をつけたおかげで，独立変数 z を1つ指定したとき，次の2つの無限列は互に微分係数の線型和として書ける．

$$(\theta_3(z),\theta_4(z),\theta_5(z),\cdots)\longleftrightarrow(Q_3(z),Q_4(z),Q_5(z),\cdots).$$

$\boxed{\text{基本定理}}$　標準型(一般) $L_n(Q|z,y)$ に関する不変式環

$I=\bigoplus_{p\geq 0}I_p$　($I_p=\{$重さ p の不変式$\}$) は次で与えられる.

$$\theta_p(\mathfrak{z}_p|z)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\binom{-2p}{\ell}\mathfrak{z}_p^{(\ell)}z^\ell\qquad(3\leq p\leq n)$$

$$\mathfrak{S}=\bigoplus_m\mathfrak{S}^{(-2m)}\qquad(w_3=-6,\ w_4=-8,\cdots,w_n=-2n)\text{-分解}$$

$$I_m=\left\{\varphi\left(\cdots,\frac{\left(\frac{d}{dz}\right)^\ell\theta_p(\mathfrak{z}_p|z)}{(-2p)(-2p-1)\cdots(-2p-\ell+1)},\cdots\right)\ \middle|\ \varphi(\cdots,\mathfrak{z}_p^{(\ell)},\cdots)\in\mathfrak{S}^{[-2m]}\right\}$$

$$=\{-2m\text{-共変式}(\theta_3,\cdots,\theta_n\text{の})\}$$

<u>解析曲線の不変量</u>

$$z\overset{\varphi}{\longmapsto}(\varphi_1(z),\cdots,\varphi_n(z))\in\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{C})$$

$$L_\varphi(z,y)=\begin{vmatrix}\varphi_1^{(n-1)}(z)&\cdots&\varphi_n^{(n-1)}(z)\\ \vdots&&\\ \varphi_1(z)&\cdots&\varphi_n(z)\end{vmatrix}^{-1}\begin{vmatrix}y^{(n)}&\varphi_1^{(n)}(z)&\cdots&\varphi_n^{(n)}(z)\\ y^{(n-1)}&\varphi_1^{(n-1)}(z)&\cdots&\varphi_n^{(n-1)}(z)\\ \vdots&\vdots&&\vdots\\ y&\varphi_1(z)&\cdots&\varphi_n(z)\end{vmatrix}$$

の不変量　$\theta_p(z)(dz)^p$　$(p=3,4,\cdots,n)$ は解析曲線 φ の不変量であり，曲線上 Wronskian の零点（変曲点）でのみ pole をもつ有理形 differential form である。

5（後半） cyclic 1-cocycle に関係した或る Calculus

2項係数　R を1つの commutative algebra $\ni 1$

$$\{0,1,2,\cdots\} \xrightarrow{\varphi} R$$

に対して

$$\begin{bmatrix} m \\ l \end{bmatrix}_\varphi = \sum_{0\le h_1\le\cdots\le h_{m-l}\le l} \varphi(h_1)\varphi(h_2)\cdots\varphi(h_{m-l}) \qquad (0\le l\le m<\infty)$$

$$\begin{bmatrix} m \\ m \end{bmatrix}_\varphi = 1$$

もし $\varphi(l)$ $(0\le l<\infty)$ が全て invertible のとき

$$\begin{bmatrix} -m \\ l \end{bmatrix}_\varphi = (-1)^l \begin{bmatrix} m+l-1 \\ l \end{bmatrix}_{\varphi^{-1}} \varphi(1)^{-1}\varphi(2)^{-1}\cdots\varphi(l)^{-1} \qquad (1\le m<\infty\,;\ 0\le l<\infty)$$

漸化式　$\begin{bmatrix} m+1 \\ l \end{bmatrix}_\varphi = \begin{bmatrix} m \\ l-1 \end{bmatrix}_\varphi + \begin{bmatrix} m \\ l \end{bmatrix}_\varphi \varphi(l) \qquad (-\infty<m<\infty\,;\ 0\le l<\infty)$

1-cocycle μ に関する2項係数

無限巡回群 $\langle\sigma\rangle$ が R に作用しているとき，1-cocycle valued in R　$\{\mu_{\sigma^l}\}_{l\in\mathbb{Z}}$　$\left(\mu_{\sigma^l}^{\sigma^h}\mu_{\sigma^h} = \mu_{\sigma^{l+h}}\right)$

に対して　$\begin{bmatrix} m \\ l \end{bmatrix}_\mu = \begin{bmatrix} m \\ l \end{bmatrix}_\varphi \qquad \varphi(l) = \mu_{\sigma^l}$ で定義する．

$\sigma\alpha\sigma^{-1} = \alpha^\sigma$ で積を $R\langle\sigma\rangle$ にいれる。また可換変数 c を R に添加し R[c] への $\langle\sigma\rangle$ の作用を

$$c^{\sigma^l} = \mu_{\sigma^l} c \qquad (-\infty<l<\infty)$$

で定義すれば μ は R[c] で split する。

容易に得られるものは次のような公式である

$$(\sigma\mu_\sigma)^m = \sigma^m\mu_{\sigma^m},$$

$$(\sigma+c)^m = \sum_{l=0}^{m} \sigma^l \begin{bmatrix} m \\ l \end{bmatrix}_\mu c^{m-l},$$

$$(\sigma+c)^{-m} = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma^l \begin{bmatrix} -m \\ l \end{bmatrix} c^{-m-l},$$

$$(1-\sigma)(1-\sigma\mu_\sigma)(1-\sigma\mu_\sigma^2)\cdots(1-\sigma\mu_\sigma^{m-1}) = \sum_{l=0}^{m} (-1)^l \sigma^l \begin{bmatrix} m \\ l \end{bmatrix}_\mu \mu_\sigma\mu_{\sigma^2}\cdots\mu_{\sigma^{l-1}}$$

$$(1-\sigma)^{-1}(1-\sigma\mu_\sigma)^{-1}(1-\sigma\mu_\sigma^2)^{-1}\cdots(1-\sigma\mu_\sigma^{m-1})^{-1} = \sum_{l=0}^{\infty}\sigma^l\begin{bmatrix} m+l-1 \\ l \end{bmatrix}_\mu ,$$

$$(1-\sigma)(1-\sigma\mu_\sigma)(1-\sigma\mu_\sigma^2)(1-\sigma\mu_\sigma^3)\cdots = \sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\sigma^l(1-\mu_\sigma)^{-1}\cdots(1-\mu_{\sigma^l})^{-1}\mu_\sigma\mu_{\sigma^2}\cdots\mu_{\sigma^{l-1}}$$

$$(1-\sigma)^{-1}(1-\sigma\mu_\sigma)^{-1}(1-\sigma\mu_\sigma^2)^{-1}(1-\sigma\mu_\sigma^3)^{-1}\cdots = \sum_{l=0}^{\infty}\sigma^l(1-\mu_\sigma)^{-1}(1-\mu_{\sigma^2})^{-1}\cdots(1-\mu_{\sigma^l})^{-1}$$

$$\binom{m+n}{l}_\mu = \sum_{k=0}^{n}\binom{m}{l-k}_\mu^{\sigma^k}\mu_{\sigma^k}^{m-(l-k)}\binom{n}{k}_\mu$$

<u>theta 級数の3-product formula (Jacobiの公式)</u> に対応する少し高級なものは

$$\boxed{\begin{aligned}&\left\{\sum_{m=1}^{\infty}\sigma^{-m}\mu_{\sigma^{-1}}^{-1}\mu_{\sigma^{-2}}^{-1}\cdots\mu_{\sigma^{-(m-1)}}^{-1}+\sum_{m=0}^{\infty}\sigma^m\mu_\sigma\mu_{\sigma^2}\cdots\mu_{\sigma^m}\right\}\prod_{l=1}^{\infty}(1-\mu_{\sigma^l})^{-1}\\ &=\left\{\cdots(1+\sigma^{-1}\mu_{\sigma^{-3}})(1+\sigma^{-1}\mu_{\sigma^{-2}})(1+\sigma^{-1}\mu_{\sigma^{-1}})(1+\sigma)\right\}\left\{(1+\sigma\mu_\sigma)(1+\sigma\mu_\sigma^2)(1+\sigma\mu_\sigma^3)\cdots\right\}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\theta(\mu_\sigma\mid\sigma)=\sum_{m=1}^{\infty}\sigma^{-m}\mu_{\sigma^{-1}}^{-1}\mu_{\sigma^{-2}}^{-1}\cdots\mu_{\sigma^{-(m-1)}}^{-1}+\sum_{m=0}^{\infty}\sigma^m\mu_\sigma\mu_{\sigma^2}\cdots\mu_{\sigma^m}}$$

とおけば変換式

$$\boxed{\begin{aligned}\theta(\mu_\sigma\mid\sigma\mu_\sigma) &= \sigma^{-1}\mu_{\sigma^{-1}}\,\theta(\mu_\sigma\mid\sigma) \qquad c^k\theta(\mu_\sigma\mid\sigma)c^{-k}=\sigma^{-k}\mu_{\sigma^{-k}}\theta(\mu_\sigma\mid\sigma)\\ \| \\ c\,\theta(\mu_\sigma\mid\sigma)c^{-1}\end{aligned}}$$

これは $\theta(\mu_\sigma|\sigma)$ が非可換な theta 関数で上記の無限積をもつものとみとめてよいことを示す。

非可換の hypergeometric function として α,β,γ を $R\langle\sigma\rangle$ の center の invertible elements として、次が考えられる。

$$\boxed{\Phi(\alpha,\beta,\gamma;\mu_\sigma\mid\sigma)=\sum_{m=0}^{\infty}\sigma^m\frac{(1-\alpha)(1-\alpha\mu_\sigma)\cdots(1-\alpha\mu_{\sigma^{m-1}})(1-\beta)(1-\beta\mu_\sigma)\cdots(1-\beta\mu_{\sigma^{m-1}})}{(1-\gamma)(1-\gamma\mu_\sigma)\cdots(1-\gamma\mu_{\sigma^{m-1}})(1-\mu_\sigma)(1-\mu_{\sigma^2})\cdots(1-\mu_{\sigma^m})}}$$

6 q-algebra $W_{\infty,q}$

$R=\mathbb{Z}[q_0,q_0^{-1},q_1,q_1^{-1},q_2,q_2^{-1},\cdots]$ （$q_0,q_1,q_2,\cdots$ は可換変数） $\langle\sigma\rangle$ の作用を

$$\boxed{q_\ell^\sigma=\prod_{k=0}^{\ell} q_k^{\binom{\ell}{k}}} \qquad (0\le \ell<\infty)$$

で定義すると、

$$\boxed{q_\ell^{\sigma^m}=\prod_{k=0}^{\ell} q_k^{\binom{\ell}{k} m^{\ell-k}}} \qquad (m\in\mathbb{Z})$$

$\sigma^{-1}q_\ell\sigma=q_\ell^\sigma$ として $W_{\infty,q}=R\langle\sigma\rangle$ を q-algebra と呼ぶ。

行列表現

e_{ij} $(-\infty<i,j<\infty)$ を行列単位

$$\rho(q_\ell)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} q_0^{i^\ell} e_{ii},\quad \rho(\sigma)=\sum_{i=-\infty}^{\infty} e_{i+1,i}\quad \rho(\sigma^{-1})=\sum_{i=-\infty}^{\infty} e_{i,i+1}$$

とすれば行列表現が得られる（$W_{\infty,q}$ の faithful な）

ただし無限級数にまで延したときは、注意が必要である。例 $|q_0|<1$ n even のとき

$\vartheta(q_0,q_1,\cdots,q_{n-1})=\sum_{m=-\infty}^{\infty} q_n^{\sigma^m}$ は絶対収束する。$\rho\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} q_n^{\sigma^m}\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} q_0^{m^n}=\vartheta(q_0,1,\cdots,1)$

となり、specialization $(q_0,q_1,\cdots,q_{n-1})\mapsto(q_0,1,\cdots,1)$ した値になる。

また上記の非可換theta関数は n odd $|q_0|<1$ のとき $\mu_{\sigma^m}=q_n^{\sigma^m}q_n^{-1}$ とおいて、考慮に値する関数と思われる。

そのほか $W_{\infty,q}$ の Automorphism の群がしりたいが。次のような $W_{\infty,q}$ の σ-endomorphism の系列がすぐつくれる

b : operator $q_\ell^b=q_{\ell-1}$ $(0\le\ell<\infty$ ただし $q_{-1}=q_{-2}=q_{-3}=\cdots)$ とおく

$$\left\{\sum_{\ell=0}^{\infty}\beta_\ell\frac{b^\ell}{\ell!}\ \middle|\ \beta_\ell\in\mathbb{Z}\right\}\qquad \left(q_n^{\sum\beta_\ell\frac{b^\ell}{\ell!}}=\prod_{\ell=0}^{n} q_{n-\ell}^{\binom{n}{\ell}\beta_\ell}\ \text{の形で作用}\right)$$

この記号法で $\sigma=\sum_\ell\frac{b^\ell}{\ell!}$, $\sigma^m=\sum_\ell\frac{m^\ell}{\ell!}b^\ell=\exp(mb)$ よって $b^t=\sum_\ell\frac{t^\ell}{\ell!}b^\ell$ も定義可能。

注意 和 $\sum_{\ell=0}^{\infty}\beta_\ell\frac{b^\ell}{\ell!}$ は operator としての和ではない。

<u>注意</u>　$\mathbb{Z}[q_0, q_0^{-1}, q_1, q_1^{-1}]$ で止めたものが，いわゆる q-Analog
q-analog までは普通の数学と同じで，非可換にならない。
基本的違いは $\begin{bmatrix} m \\ \ell \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} m \\ m-\ell \end{bmatrix}_q$ は q analog で成立することである。

<u>文献</u>

(1) E.B. Elliott　An introduction to the algebra of quantics (1895)

(2)　森川寿　不変式論　紀伊国屋　(1977)

(3)　I. Schur　Vorlesungen über Invariantentheorie　Springer (1968)

(4)　Hilbert全集第2巻

群環のAuslander-Reiten列と部分群

奥 山 哲 郎

（大阪市立大学理学部）

有限群のモジュラー表現の研究にAuslander-Reitenの理論が使われはじめてから約10年を経る。Gabriel-Riedmann [1] のcyclic defect groupをもつblocksの理論（Brauer-Dadeの定理）の多元環論的考察が、その最初のひとつであると思うが、我々に大きな刺激を与えたのは、Webb [1], Benson-Parker [1] の2つの論文である。

Webb [1] は、この論文の中で群環のAuslander-Reiten quiverのtree classの必要条件を与え、驚くべきほど制約されたものしかないことを示している。その定理自身、非常に興味深いものであるが、注目すべきはそこでの議論にもある。Webbのとったこの論文での道具は、greenのvertexの理論、Alperin-Carlsonらの加群のvarietéesの理論である。群環におけるAuslander-Reitenの理論は、すでにあったそれらの理論と非常にうまく結びついたといえる。

Benson-Parker [1] の最大の貢献は、green環における彼らの内積（それは指標の内積のある意味での拡張）が正則であることを証明したことである。彼らはある種の直交関係を証明することによってこれを導びいたが、このことのためにこそ、Auslander-Reiten列があったといってよいほど、"あたりまえ"のことである。この内積は逆にAuslander-Reiten列の考察にとって基本的なものとなっている。

この2つの論文、及びBenson [1] の本の後、群環におけるAuslander-Reitenの理論に関する論文がいくつか発表されていくが、green [1] の論文はいろいろな考察の際の大事な視点を与えるものである。greenはこの中でいわばAuslander-Reiten列のvertexの理論を展開している。

上の3論文を中心に1986年の奈良の集会で、その当時の現状を報告した。ここでは、「部分群」と「Auslander-Reiten列」との関わりに注目して、現在までの流れを概括したい。奈良の集会での報告集にも書いているが、群環におけるAuslander-Reitenの理論が今後どのような方向に進んでいくべきなのか、講演者にとってよくわからない。が、少なくとも、「部分群」に注目するのが自然な考えであると思う。表題のように話題を選んだのも、このためである。多くの人に興味をもってもらいたいと願っている。
参考文献の中には、ここで報告したものの他に、群環でのAuslander-Reiten理論をあつかっているものは、できるだけあげるようにした。

§1で、群環上の加群についてのいくつかの定義とAuslander-Reiten列の基本的な性質を述べる。§2で、Webb [1] の主定理を述べ、本報告での2つの目標をはっきりさせる。§3で目的のひとつ、Auslander-Reiten quiver上の"楽しそう"な自己同型を構成し、簡単な応用を図る。§4で本報告での主目標、「部分群とAuslander-Reiten列」をあつかう。

§1 群環上の加群とAuslander-Reiten列

以下，kを標数$p>0$の体，Gを有限群とする。kG-加群は右kG-加群のこととする。

(1.1). $G \supset H$を部分群とする。kG-加群Mに対し，kH-加群とみたものをMのHへの制限と呼び，M_Hと書く。kH-加群Nに対し，$N \otimes_{kH} kG$はkG-加群となるが，これをNのGへの誘導と呼び，N^Gと書く。

(1.2). $G \supset H$を部分群とする。kG-加群の完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$は，$kH$-加群の列として分解しているとき$H$-split 列と呼ばれる。完全列は，いつでも 1-split 列である。

kG-加群Mについて次の条件は同値である。

(1) あるkH-加群Nがあって MはN^Gの直和因子に同型（これを$M | N^G$と書く。

(2) $M \mid (M_H)^G$

(3) $0 \to A \to B \to M \to 0$ がH-split なら，split 列。

(4) $0 \to M \to A \to B \to 0$ がH-split なら，split列。

(5) H-split 列 $0 \to A \to B \xrightarrow{f} C \to 0$ と，$M \xrightarrow{g} C$ に対し，$\exists\, h ; M \to B$ s.t. $f \circ h = g$

(6) H-split 列 $0 \to A \xrightarrow{f} B \to C \to 0$ と，$A \xrightarrow{g} M$ に対し，$\exists\, h ; B \to A$ s.t. $h \circ f = g$

上の条件をみたす加群MはH-projective（あるいはH-injective）と呼ぶ。1-projective は projective と同じことである。（群環は対称多元環であることに注意）

(1.3). $\mathfrak{X}$ をGの部分群からなる空でないある集合とする。kG-加群の完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$は，$\forall H \in \mathfrak{X}$ に対し H-split であるとき，$\mathfrak{X}$-split 列と呼ばれる。(1.2)と同じように，kG-加群Mについて，次の条件は同値となる。

(1) 各$H_i \in \mathfrak{X}$ に対し ある kH-加群 N_i があって $M \mid \oplus \sum_i N_i^G$

(2) $M \mid \oplus \sum_{H_i \in \mathfrak{X}} (M_{H_i})^G$

(3)，(4)，(5)，(6)，は，(1.2)の「H-split」を「$\mathfrak{X}$-split」でおきかえる。

(1.4). 直既約kG-加群Mに対し，次の条件をもつ部分群Dが存在する。

(1) MはD-projective

(2) $G \supset H$ に対し MがH-projective なら $H \underset{G}{\supseteq} D$ （$\exists g \in G$, s.t. $H \supset D^g$）

Dは，G-共役を除いて一意的に定まり，いつもp-部分群である。これを，Mの vertex と呼び $vx(M)$ と書く。

Mが projective と $vx(M)=1$ とは同じことである。

自明な加群 $k=k_G$ の vertex は Sylow p-部分群となる。

Mの vertexをDとするとき，ある直既約kD-加群 Sで，$M \mid S^G$，$vx(S)=D$ なるものが存在するが，このようなS は $N_G(D)$-共役を除いて一意的に決まる。これを，Mの source と呼ぶ。自明な加群の source はやはり，自明な加群である。

(1.5) $G \supset D$ を G の p-部分群, $H = N_G(D)$ とおく。
$Ind(kG, D) = \{ M$; 直既約 kG-加群, $vx(M) = D \}$,
$Ind(kH, D) = \{ N$; 直既約 kH-加群, $vx(N) = D \}$ とすると, $Ind(kG, D)$ と $Ind(kH, D)$ との間に次の性質をもつ 1対1 の対応がある。
$Ind(kH, D) \ni N$, $Ind(kG, D) \ni M$ について $M \leftrightarrow N$ (M と N が対応している) とは
(1) M は N^G の直既約直和因子で唯ひとつのもの
(2) N は M_H の直既約直和因子で唯ひとつのもの
が成立しているときをいう。
この対応を Green 対応と呼ぶ (正確には. (G, H, D) に関する Green 対応).

自明な加群の (p-Sylow 群に関する) Green 対応は, やはり 自明な加群である。

(1.6) $\mathscr{X}$ を G の部分群からなる空でないある集合とする。
kG-加群 M に対し, 次の条件をもつ完全列が, 同型を除いて唯ひとつ存在する。 $0 \to Y \to X \to M \to 0$
(1) この列は $\mathscr{X}$-split
(2) X は $\mathscr{X}$-projective
(3) Y は nonzero な $\mathscr{X}$-projective な直和因子をもたない。
この列を M の $\mathscr{X}$-projective cover と呼ぶ. また Y のことを $\Omega_{\mathscr{X}}(M)$ と書く。

$\mathscr{X} = \{1\}$ のとき, これは projective cover のことである。このときは. $\Omega_{\mathscr{X}}$ のかわりに Ω と書く。 $\Omega_{\mathscr{X}}(M) = 0 \Leftrightarrow M$; $\mathscr{X}$-projective である。
M が直既約で $\mathscr{X}$-projective でないとき $\Omega_{\mathscr{X}}(M)$ も直既約で vertex は一致する。
G を p-群, $\mathscr{X} = \{H\}$ のとき 自明な加群 k_G の $\mathscr{X}$-projective cover は $k_H \otimes_{kH} kG \longrightarrow k_G \to 0$ で与えられる。

次にいくつか Auslander-Reiten 列と部分群に関わる基本的事実をあげておく.

(1.7) M ; 直既約, non-proj kG-加群とし, $0 \to \Omega^2(M) \to X \to M \to 0$ を, Auslander-Reiten 列とする。 $\mathscr{X}$ を G の部分群からなるある集合とする。このとき
この列が $\mathscr{X}$-split $\Leftrightarrow$ M は $\mathscr{X}$-projective ではない。 Webb
(Roggenkamp, [1])

(1.8) X, Y を直既約 kG-加群とし, $X \longrightarrow Y$ に既約写像が存在するとする。このとき $vx(X) \underset{G}{\supseteq} vx(Y)$ または. $vx(Y) \underset{G}{\subseteq} vx(X)$ が成立する。
(Erdmann [2])

(1.9) $G \supset D$ を G の p-部分群とし, $H = N_G(D)$, $Ind(kG, D) \ni M$ $Ind(kH, D) \ni N$ が Green 対応で対応しているものとする。($D \neq 1$)
$\mathscr{E}'$; $0 \to \Omega^2(N) \to Y \to N \to 0$
$\mathscr{E}$; $0 \to \Omega^2(M) \to X \to M \to 0$ をそれぞれの Auslander-Reiten 列とすると次が成立する。

(1) $(\mathcal{E}')^G$ は列として，$\mathcal{E}$ と ある完全列との直和に同型
(2) $(\mathcal{E})_H$ は列として $\mathcal{E}'$ とある D-split 列との直和に同型
(Benson-Parker [1], Green [1])

(1.10) $\mathfrak{X}$ を G の部分群からなるある集合とする。M を $\mathfrak{X}$-projective でない直既約 kG-加群；$0 \to \Omega^2(M) \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} M \to 0$ を Auslander-Reiten 列とする。

$$0 \to \Omega_{\mathfrak{X}}(M) \xrightarrow{\tau} P \xrightarrow{\sigma} M \to 0, \quad 0 \to \Omega_{\mathfrak{X}}(\Omega^2(M)) \xrightarrow{\nu} Q \xrightarrow{\mu} \Omega^2_{\mathfrak{X}}(M) \to 0$$

を M, $\Omega^2(M)$ の $\mathfrak{X}$-projective cover とする。(1.3), (1.7) より $\sigma ; P \to M$ は $\exists \alpha ; P \to X$ が存在して $\sigma = g \circ \alpha$ と書ける。$\beta ; Q \oplus P \to X$ を次の様に定義する。$\beta((s, t)) = f \circ \mu(s) + \alpha(t)$ $s \in Q$, $t \in P$
定義より，次の可換な図形を得る。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \Omega_{\mathfrak{X}}(\Omega^2(M)) & \to & Y & \to & \Omega_{\mathfrak{X}}(M) & \to & 0 \\
 & & \downarrow \nu & & \downarrow & & \downarrow \tau & & \\
0 & \to & Q & \to & Q \oplus P & \to & P & \to & 0 \\
 & & \downarrow \mu & & \downarrow \beta & & \downarrow \sigma & & \\
0 & \to & \Omega^2(M) & \to & X & \to & M & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

ただし 横の真中の列は split 列，$Y = \ker \beta$
このとき，縦の真中の列は $\mathfrak{X}$-split 列となり，(1.6) より Y と $\Omega_{\mathfrak{X}}(X)$ は $\mathfrak{X}$-projective summands を除いて同型となる。
さらに 横の上の列は Auslander-Reiten 列となる（$\Omega_{\mathfrak{X}}(\Omega^2(M)) = \Omega^2(\Omega_{\mathfrak{X}}(M))$ となっている）
(Thévenaz [1])

§2. 群環の Auslander-Reiten Quivers

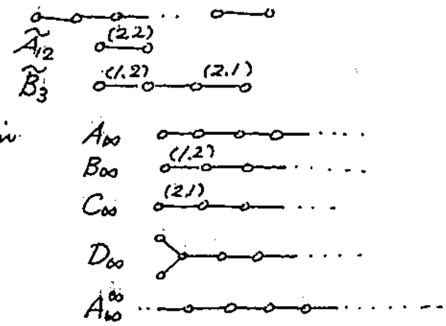
この節では、Webb [1] の主定理を述べ、次節以降の目的をはっきりさせる。$A(kG)$ で kG の Auslander-Reiten quiver、$A_s(kG)$ で stable な Auslander-Reiten quiver をあらわすものとする。

(2.1) $A_s(kG) \supset \Delta$ を connected component とする。Δ の tree class (Cartan class) は次のいずれかである。

(1) Dynkin A_n

(2) Euclidean $\tilde{A}_{12}$, $\tilde{B}_3$

(3) Infinite Dynkin A_∞, B_∞, C_∞, D_∞, A_∞^∞



Dynkin は cyclic defect group をもつ block についてのみあらわれる。
Euclidean があらわれるのは、defect group が four group のときのみである。
A_∞ は"ひんぱん"にあらわれる。A_∞^∞ は dihedral 2-群，D_∞ は semidihedral 2-群で後でみるようにあらわれる。B_∞ の例を §3 で構成する。C_∞ の例は講演者は知らない。

(Webb [1], Okuyama [1],[3])

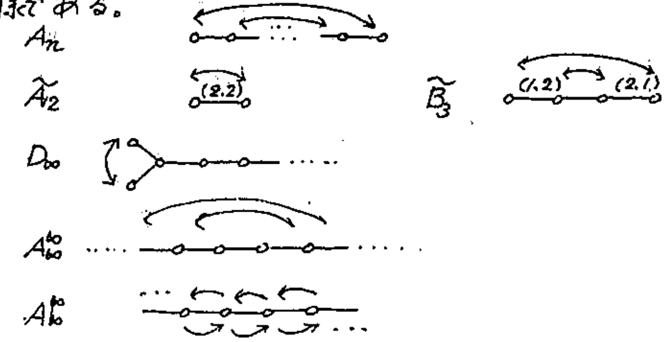
(2.2) 上の定理の証明を Webb は cohomology の理論を用いて，Okuyama は、ある種の periodic module の存在を示して、subadditive function を構成することで行なっている。どちらの場合も，位数 p の部分群が決定的役割を果たしている。

(2.3). 上の (2.1) であらわれる図形のうち、自明でない自己同型をもつものは、次の様である。

(1) A_n

(2) $\tilde{A}_2$, $\tilde{B}_3$

(3) D_∞, A_∞^∞, A_∞^∞



§3 で、実際にこれらの自己同型を誘導するある Δ 上の自己同型を構成する。

(2.4). 自明な加群 k を含む component Δ について次が成立する。Sylow p-部分群 P が

(1) cyclic のとき　　$\Delta \simeq \mathbb{Z}A_n/(\ast)$　　$^\exists n$.

(2) $p=2$, four group のとき　　$\Delta \simeq \mathbb{Z}\tilde{A}_{12}$　　$N_G(P)=C_G(P)$ のとき

$\simeq \mathbb{Z}\tilde{B}_3/\ast$　　$|N_G(P)/C_G(P)|=3$ で k は周期 3 の加群を含まず.

$\simeq \mathbb{Z}A_\infty^\infty/\ast$　　それ以外のとき

(3) $p=2$, dihedral order ≥ 8 のとき

$\Delta \simeq \mathbb{Z}A_\infty^\infty$

(4) $p=2$, semidihedral のとき

$\Delta \simeq \mathbb{Z}D_\infty$

(5) $p=2$, (generalized) quaternion のとき

$\Delta \simeq \mathbb{Z}A_\infty/\ast$

(6) それら以外のとき．　$\Delta \simeq \mathbb{Z}A_\infty$

(Webb [1], Linnel [1])

(2.5) Webb [1] は上の証明を，Green 対応 (1.9) の性質と，次の事実を示すこととから行なっている。

$\Delta \ni k$ なる component について，$^\forall M \in \Delta$ の vertex は Sylow p-subgroup である。

(2.6) 群環の Auslander-Reiten 列，Auslander-Reiten quiver をより詳しく調べようとするとき，(1.8) の Erdmann の定理，(1.9) の Green の定理，(2.5) の Webb の定理などを いろいろな意味で拡張，精密化する作業が重要となる。これらの話題について，Erdmann, Kawata, Uno らの最近の仕事について §4で述べる。

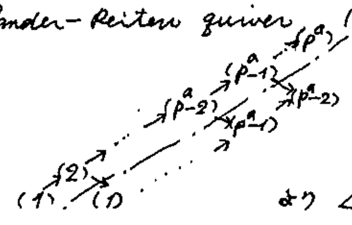
以下に，いくつかの群について $\Omega(k)$ を含む component の様子を述べておく。

(2.7). $G=\langle x\rangle$ cyclic $|x|=p^a$

直既約 kG-加群は．$kG/(x-1)^n kG$　$(1\leq n\leq p^a)$ で書きあげられる。記号で $(n)=kG/(x-1)^n kG$ とおく。(p^a) が projective $(=kG)$ にあたる。Auslander-Reiten 列は．

$0\to(n)\to(n-1)\oplus(n+1)\to(n)\to 0$　なる形をしている。

したがって Auslander-Reiten quiver は



より $\Delta = \mathbb{Z}A_{p^a-1}/\langle 2\rangle$

tree class は A_{p^a-1}　$\underset{(1)}{\circ}-\underset{(2)}{\circ}-\circ\cdots\underset{(p^a-2)}{\circ}-\underset{(p^a-1)}{\circ}$

(2.8) $p=2$, $G=\langle x\rangle\times\langle y\rangle$ $|x|=|y|=2$

$J(kG)/S(kG)=k\oplus k$ となり

$0\to\Omega(k)\to k\oplus k\oplus kG\to\Omega^{-1}(k)\to 0$ なる Auslander-Reiten列がある。

$\Omega(k)=J(kG)$, $\Omega^{-1}(k)=kG/S(kG)$ である。

(1.10)により、Ωを何回か作用させることによって $\Omega(k)$の含まれる component は次のようになる。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & kG \arrow[dr, dashed] & & & \\
\cdots \arrow[r] & \Omega^{2}(k) \arrow[r, "{(2,2)}"] & \Omega(k) \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "{(2,2)}"] & k \arrow[r, "{(2,2)}"] & \Omega^{-1}(k) \arrow[r, "{(2,2)}"] & \Omega^{-2}(k) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

tree class は

$$\Omega(k) \overset{(2,2)}{\text{———}} k \quad \text{で} \ \widetilde{A}_{12} \ \text{となる。}$$

(2.9) $p=2$, $G=\mathfrak{A}_4$ (4次の交代群) X^2+X+1 は既約 $\in k[X]$ とする。

G の simple modules は 2つあり、kと次元が2の S とである。

P, Q を k, S のそれぞれの projective cover とすると

$\mathrm{Rad}\,P/\mathrm{Soc}\,P=S$, $\mathrm{Rad}\,Q/\mathrm{Soc}\,Q=k\oplus k\oplus S$ となる。$\Omega(k)=\mathrm{Rad}\,P$, $\Omega^{-1}(k)=P/\mathrm{Soc}\,P$, $\Omega(S)=\mathrm{Rad}\,Q$, $\Omega^{-1}(S)=Q/\mathrm{Soc}\,Q$ に注意して、

$0\to\Omega(k)\to S\oplus P\to\Omega^{-1}(k)\to 0$, $0\to\Omega(S)\to k\oplus k\oplus S\oplus Q\to\Omega^{-1}(S)\to 0$

なる Auslander-Reiten 列が存在する。再び(1.10)により、Ωを作用させることによって、$\Omega(k)$を含む component は次のようになる。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & P \arrow[dr, dashed] & & \\
 & & \Omega(k) \arrow[ur, dashed] \arrow[dr] & & \Omega^{-1}(k) \arrow[dr] & \\
\cdots \arrow[r] & \Omega^{2}(S) \arrow[ur] \arrow[dr] & & S \arrow[ur, "{(2,1)}"] \arrow[dr] & & \cdots \\
\cdots \arrow[ur] \arrow[dr] & & \Omega(S) \arrow[r, dashed] \arrow[ur] \arrow[dr] & Q \arrow[r, dashed] & \Omega^{-1}(S) \arrow[ur] \arrow[dr] & \cdots \\
 & \Omega^{2}(k) \arrow[ur, "{(1,2)}"] & & k \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

tree class は、 $\underset{\Omega(k)}{\circ}\overset{(1,2)}{\text{——}}\underset{\Omega(S)}{\circ}\text{——}\underset{S}{\circ}\overset{(2,1)}{\text{——}}\underset{\Omega^{-1}(k)}{\circ}$ で $\widetilde{B}_3$ となる。

(2.10) $p=2$, $G=\langle x,y\,;\,x^2=y^2=(xy)^{2^{n-1}}=1\rangle$, $n\geqq 3$
dihedral group of order 2^n

$X=(x-1)kG/S(kG)$, $Y=(y-1)kG/S(kG)$ とおくと、
$\mathrm{Rad}\,kG/S(kG)=X\oplus Y$ となる。 これから

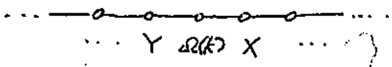
$0\to\Omega(k)\to X\oplus Y\oplus kG\to\Omega^{-1}(k)$ なる Auslander-Reiten 列が存在する。

X, Y の性質を用いることによって、$\Omega(k)$を含む component は、次のようになる

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & \cdot \arrow[dr] & & \cdot & & \\
\cdots \arrow[dr] & & X \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots & \\
 & \Omega(k) \arrow[ur] \arrow[dr] \arrow[r, dashed] & kG \arrow[r, dashed] & \Omega^{-1}(k) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
\cdots \arrow[ur] & & Y \arrow[ur] \arrow[dr] & & \cdots & \\
 & \cdot \arrow[ur] & & \cdot & &
\end{tikzcd}$$

(上下左右に続く)

tree class は



で A_∞^∞ である。

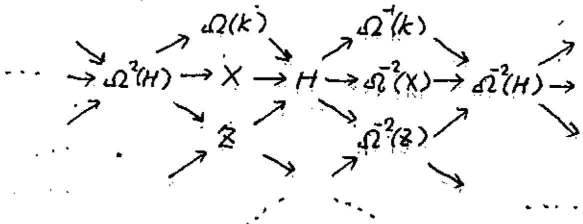
(2.11), $p=2$, $G=\langle x, y \,;\, x^2=y^{2^{n-1}}=1,\ y^x=y^{-1+2^{n-2}}\rangle$ $n \geq 4$
semidihedral 2-group of order 2^n.

$\mathrm{Rad}\,kG/\mathrm{Soc}\,kG = H$, $X=(x-1)kG/\mathrm{Soc}\,kG$ とおくと，次の様な Auslander-Reiten 列が存在する。

$0 \to \Omega(k) \to H \oplus kG \to \Omega^{-1}(k) \to 0$,

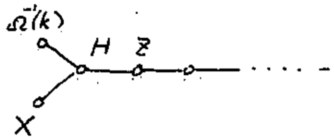
$0 \to \Omega^2(H) \to Z \oplus X \oplus \Omega(k) \to H \to 0$ 　　Z はある直既約加群.

$\Omega(k)$を含む component は次の様になる。



(左右下に続く)

tree class は



で D_∞ である。

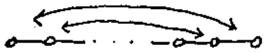
((2.11)は Erdmann に教わった.)

§3 $A_S(kG)$ のある component の自己同型

この節で (2.3)に述べたような，いくつかの graph の自己同型を，§2の後半の例を使って構成する。記号もそこでのものを用いる，Δをそこでの component とする。

(3.1)．(2.7)の例をとる。

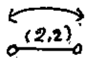
定義から $0 \to (p^q-n) \to (p^q) \to (n) \to 0$ が (n) の projective cover である。
したがって $\Omega((n)) = (p^q-n)$
(1.10)より Ωは Δに quiver の自己同型として作用する。tree class 上では



を誘導する。

(3.2)． (2.8) の例をとる。 $\tilde{A}_{12}$

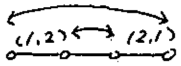
そこでの議論より，Ω は Δ 上に作用し，tree class 上で



を誘導する。

(3.3) (2.9)の例をとる。 $\tilde{B}_3$

上と同じように Ωは．tree class 上



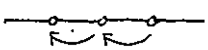
を誘導する。

(3.4) (2.10) の例をとる。 A_∞^∞

$\mathscr{X} = \{\langle x \rangle\}$ とし $\Omega_{\mathscr{X}}$ を考える。(1.6)の議論で
$0 \to Rad((x-1)kG) \to (x-1)kG \to k \to 0$ が k の $\mathscr{X}$-projective cover となる。

$$\therefore \quad \Omega_{\mathscr{X}}(k) = Rad((x-1)kG) = (x-1)(y-1)kG \simeq (y-1)kG/Soc(kG)$$
$$\cong Y$$

同じく $0 \to k \to (x-1)kG \to X \to 0$ が X の $\mathscr{X}$-projective cover となる。
とくに $\Omega_{\mathscr{X}}(X) = k$．
$\sigma = \Omega \cdot \Omega_{\mathscr{X}}$ とおくと $\sigma(X) = \Omega(k)$ (1.10)，(2.5)によって σはΔ上に作用し，tree class 上で



を誘導する。

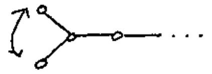
同様に $\mathscr{Y} = \{\langle y \rangle\}$ とし，$\Omega \cdot \Omega_{\mathscr{Y}}$ について $\Omega \cdot \Omega_{\mathscr{Y}}(Y) = \Omega(k)$ となり，Δ上に作用する。

(3.5) (2.11) の例をとる。 D_∞

$\mathscr{X} = \{\langle x \rangle\}$ とし $\Omega_{\mathscr{X}}$ を考える。

$0 \to k \to (x-1)kG \to X \to 0$ が X の $\mathscr{X}$-projective cover となる。

したがって $\Omega_{\mathscr{X}}(X) = k$ となる。
$\sigma = \Omega\cdot\Omega_{\mathscr{X}}$ とおけば $\sigma(X) = \Omega(k)$ となり σはΔ上に作用することが (1.10), (2.5) よりわかる。
計算より $\sigma(\Omega(k)) = X$ がわかる。したがって $\sigma(H) = H$である。
σは tree class 上



を誘導する。
(Okuyama [4])

(3.6) kG-加群Mに対し $\mathrm{Hom}_k(M,k)$ は $\mathrm{Hom}_k(M,k) \ni \alpha$, $G \ni g$ について $(\alpha g)(m) = \alpha(mg^{-1})$ と定義することによって，再び kG-加群となる。これを Mの双対加群と呼ぶ。$\mathrm{Hom}_k(M,k) \simeq M$ (kG-加群として) なるとき，Mは自己双対的であるという。

$p=2$で Gが dihedral 2-group のとき 自己双対的直既約加群で，次元が奇数のものは kに限る。
(Auslander-Carlson [1])

(3.5) の議論を通して Gが semidihedral のときに次が成立する。
自己双対的直既約加群で次元が奇数のものは，kと$\sigma(k) = \Omega\Omega_{\mathscr{X}}(k)$に限る。
(Okuyama [4])

(3.7) Gが (generalized) quaternion のとき，自己双対的直既約加群を決定できるか調べてみたい。無限に沢山ある

(3.8) (2.10) の例をとる。

このとき G は $t: G \to G$ $t(x)=y$, $t(y)=x$ なる群の自己同型をもつ。kG-加群 Mに対し M^t を次の様に定義する。
集合として $M^t = M$ で $M^t = M \ni m$, $G \ni g$ に対し
$m g = m\, t(g)$ と定義する。

M^t は再び kG-加群となる。この定義から t は Auslander-Reiten 列，quiver に(自己同型として)作用することがわかる。

$k^t = k$, $X^t = Y$, $Y^t = X$ も容易に示され，t は tree class 上

を誘導する。

(3.9) (3.8)の事実を用いて B_∞を tree class にもつ component を構成してみる。

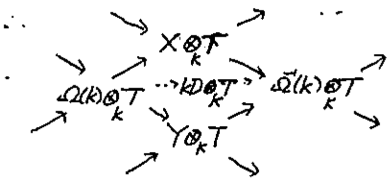
Dを位数8以上の dihedral 2-group, $\mathbb{Z}_3$ を位数3の巡回群とする
$D = \langle x, y \,;\, x^2 = y^2 = (xy)^{2^{n-1}} = 1\rangle$, $\mathbb{Z}_3 = \langle z \rangle$ とおき $H = D \times \mathbb{Z}_3$ とする。
Hの位数2の自己同型，tを $t: x \mapsto y$, $y \mapsto x$, $z \to z^{-1}$ で定義し，Gを Hの$\langle t\rangle$による半直積とする。

kを標数2の体で，原始3乗根を含まないものとする。

Gは2つのsimple moduleをもつ。自明でないものをSとすると，$\dim S$は2である。 $S_H = T$とおくとTもsimpleとなっており $T^G = S \oplus S$，Sを含むblockのdefect groupはD 特に，このblockに属する加群は，すべてH-projectiveとなっている。

Sを含むcomponentをΔ

Tを含むcomponentを$\tilde{\Delta}$とする。$\tilde{\Delta}$は(2.10)でのGをDとしてX, Yなどをそこでの意味のものとするとき



……で与えられ，tree class は

$$\cdots\cdots \overset{Y\otimes T}{\circ}\!-\!\overset{\Omega(k)\otimes T}{\circ}\!-\!\overset{X\otimes T}{\circ}\!-\!\circ \cdots \qquad \text{となり } A_\infty^\infty \text{ である。}$$

（ $kH = kD\times\mathbb{Z}_3 \simeq kD\otimes_k k\mathbb{Z}_3$ ，Tはsimpleより $k\mathbb{Z}_3$-加群とみれる
上の$\otimes$はこの意味で考える）

$\Omega(k)\otimes T = \Omega(T)$, $\Omega^{-1}(k)\otimes T = \Omega^{-1}(T)$ に注意して

$$0\to\Omega(T)\to(X\otimes T)\oplus(Y\otimes T)\oplus(kD\otimes T)\to\Omega^{-1}(T)\to 0$$

なるAuslander-Reiten列がある。

上に注意したように $\Omega(T)^\sigma \simeq \Omega(T)$, $(X\otimes T)^\sigma = (Y\otimes T)$.
これから $\Omega^{-1}(S)$のAuslander-Reiten列は

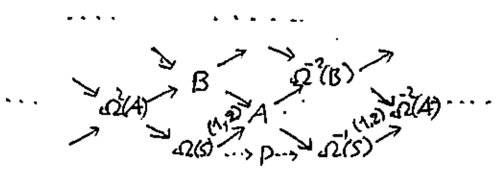
$$0\to\Omega(S)\to A\oplus P\to\Omega^{-1}(S)\to 0$$

PはSのprojective cover $A = (X\otimes T)^G = (Y\otimes T)^G$ で直既約.

さらに，AのAuslander-Reiten列は

$$0\to\Omega^2(A)\to B\oplus\Omega(S)\oplus\Omega(S)\to A\to 0$$ ，Bはある直既約.

これをつづけて Δは次のようになる.



（左右上に続く）

tree class は $\overset{(1,2)}{\circ\!-\!\circ}\!-\!\circ\!-\!\circ\cdots\cdots$ で B_∞ となる。

(3.10) tree class C_∞ をもつcomponentの例を知らない。D_∞での自己同型を，群の自己同型から作ることができれば，(3.9)のようにC_∞を構成することが可能になると思う。しかし，この方法は無理のようである。
（Erdmann [7] ）

§4 Vertex, Green対応とAuslander-Reiten列

この節では、部分群とAuslander-Reiten列との関わりに関する最近の結果を紹介する。特に(1.8)のErdmann, (1.9)のGreenら, (2.5)のWebbの定理の拡張の方向の結果を集めた。

(4.1). $G \supset D$をGのp-部分群, $H = N_G(D)$, $M \in \mathrm{Ind}(kG, D)$, $N \in \mathrm{Ind}(kH, D)$がGreen対応しているとする。

$$0 \to \Omega^2(N) \to Y \to N \to 0$$
$$0 \to \Omega^2(M) \to X \to M \to 0$$
をAuslander-Reiten列とし

$Y = \oplus \sum_{i \in I} Y_i \oplus Y'$, $X = \oplus \sum_{j \in J} X_j \oplus X'$ をそれぞれの直和分解で

Y_i; 直既約, $vx(Y_i) \supseteq D$,

X_j; 直既約, $vx(X_j) \supseteq D$

Y', X'の直既約直和因子のvertexはDに真に含まれるものとする。

((1.8)に注意)

このとき, $|I| = |J|$で, 適当に番号をつけると

$X_i \mid Y_j{}^G \iff i = j \iff Y_j \mid X_{i\,H}$

この関係はGreen対応の拡張となっている。実際, $X_i \leftrightarrow Y_i$は, $vx(X_i) = D$のときGreen対応のことである。

(Kawata [1])

(4.2) Δを$A_s(kG)$のconnected componentとする。このとき次の性質をもつGのp-部分群Dが存在する。

(1) Δは$vx(M) = D$となるMを含む。

(2) $\Delta \ni N$とすると $vx\,N \underset{G}{\supseteq} D$.

これをΔのvertexと呼ぶことにする

(Kawata [2])

(4.3) Δ, Dを上のようにとる。

$M \in \Delta$を$vx(M) = D$なるもの, $H = N_G(D)$, NをkH-moduleでMとGreen対応しているものとする。

ΓをNを含む$A_s(kH)$のconnected componentとすると

σ; $\Delta \to \Gamma$ quiverの単射写像がある。

(1) $\sigma(M) = N$

(2) $\sigma(X) \mid X_H$, $X \mid \sigma(X)^G$ となっている。

σの像は$\Omega^n(N)$ ($n \in \mathbb{Z}$)とvertexとしてDを含む直既約加群のいくつかと既約写像とでつながる加群の全体である。

これもGreen対応の拡張となっている。

上のσは、一般には全射とはならない。Webbの定理(2.1)により、全射とならないときのΔのtree classはA_∞となる。

(Kawata [2])

(4.4) $G \supset H$, Γ を $A_s(kH)$ の connected component, D を Γ の vertex とする。
$N \in \Gamma$ を $vx(N)=D$ なるものとし、$H \supset N_G(D)$ であると仮定する。
M を kG-加群で、N の Green 対応とし、Δ を M を含む $A_s(kG)$ の connected component とすると Kawata [2] の (4.3) の証明は、
τ ; $\Gamma \to \Delta$ quiver の単射 の存在もいっている。

(4.3)と同じように、τ も一般には全射ではない。

(4.5) 上で全射とならない例をあげておく
$p=2$, $G = SL(2,5)$ P を G の 2-Sylow群とし, $H=N_G(P)$ とおく。

(1) G の simple は k, S_i, $(\dim S_i = 2)$, St (Steinberg module) $(i=1,2)$
の4個ある。S を次元2のものとする(S_1, S_2 どちらでもよい)。
$|Z(G)|=2$ に注意して S の $kG/Z(G)$-加群としての projective cover を U とする。U は kG-加群として $vx(U)=Z(G)$ である。
U の Auslander-Reiten 列 は

$$0\to U\to X\to U\to 0 \qquad X;\ \text{indecomposable},\ vx\,X = P$$

なる形をしている。

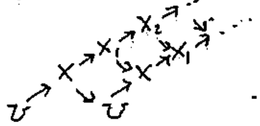
$$0\to X\to X_1\oplus U \to X\to 0$$

.....

$$0\to X_i\to X_{i-1}\oplus X_{i+1}\to X_i\to 0 \qquad (i=1,2,\cdots) \qquad X_0=X$$

.....

と Auslander-Reiten 列が計算で導びかれる。$vx\,X_i = P$ となっている。X を含む component Δ は



..... である。

一方 X の Green 対応を Y とすると、Auslander-Reiten列は次の形となる。

$$0\to Y\to Y_1\to Y\to 0 \qquad Y_1:\text{直既約},\ vx\,Y_1 = P$$

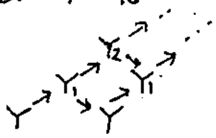
計算を続けると

....

$$0\to Y_i\to Y_{i-1}\oplus Y_{i+1}\to Y_i\to 0 \qquad (i=1,2,\cdots) \qquad Y_0 = Y$$

....

$vx\,Y_i = P$ なる Auslander-Reiten列が得られる。
Yを含む component Γ は



これは、(4.4) で全射とならない例である。実際の計算は、U, X, Y の Auslander-Reiten 列をできれば、X_i, Y_i 達の Auslander-Reiten 列は一般論からわかる。Kawata の定理自身、後で述べる Erdmann ((4.12)) などを用いる。

(2) $N_G(P)$ の simple はすべて1次元で，3個ある。T を simple で，自明ではないもの，V を T の $kH/Z(G)$-加群としての projective cover とする。V は kH-加群として $vx\,V = Z(G)$ である。
V の Auslander-Reiten 列は

$0 \to V \to N \to V \to 0$, N ; 直既約, $vx\,N = P$ なる形である。

N の Auslander-Reiten 列は.

$0 \to N \to N_1 \oplus V \to N \to 0$, N_1 ; 直既約, $vx\,N_1 = P$ で，
つづけて

$0 \to N_i \to N_{i-1} \oplus N_{i+1} \to N_i \to 0$ $(i = 1, 2, \cdots)$ $vx\,N_i = P$

$N_0 = N$ なる Auslander-Reiten 列が存在する。

N を含む component を Γ とすると，Γ は

$$\begin{tikzcd}
 & & & N_2 \arrow[dr] \arrow[ur, dotted] & & \\
 & & N_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & N_1 \arrow[ur, dotted] & \\
 & N \arrow[ur] \arrow[dr] & & N \arrow[ur] & & \\
V \arrow[ur] & & V \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

である。

M を N の Green 対応し，Auslander-Reiten 列を計算すると，

$0 \to M \to M_1 \to M \to 0$ M_1 ; 直既約, $vx\,M_1 = P$ となっている。
つづけて

$0 \to M_i \to M_{i-1} \oplus M_{i+1} \to M_i \to 0$ $(i = 1, 2, \cdots)$

M_i ; 直既約 , $vx\,M_i = P$, $M_0 = M$ となる Auslander-Reiten 列がある。

M を含む component を Δ とすると，Δ は

$$\begin{tikzcd}
 & & M_2 \arrow[dr] \arrow[ur, dotted] & & \\
 & M_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & M_1 \arrow[ur, dotted] & \\
M \arrow[ur] & & M \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

である。

これは (4.3) で全射とならない例である。

(4.6) (4.3) で全射とならないときは Δ の tree class は A_∞ であることを上に注意したが，対応する Γ のほうも tree class は A_∞ ではないかと思うのは虫が良すぎるであろうか。考えてみてもよい問題と思う。

(4.7). $0 \to A \to B \to C \to 0$;(e) を kG-加群の完全列とする。
$G \supset H$ とする。(e) が H-projective であるとは，ある kH-加群の短完全列 (f) が存在し，$(f)^G$ が (e) と ある kG-加群の短完全列 $\mathcal{E}$ の直和に書けるときをいう。ある種の完全列については，H-projective となるような最小の H の存在がわかる。これを，この完全列の vertex と呼ぶ。Auslander-Reiten 列については、vertex が定まる。列の vertex と，列中にあらわれる加群の vertex との関係は 興味深い問題である。

(Green [1])

(4.8) (4.9)の言いかえを(4.7)の言葉でのべる。記号を(4.9)のものとする
(ε) と (ε') の vertex は一致する。

つまり Auslander-Reiten列の vertexは，考える加群の vertex が G の正規部分群である場合に帰着される。
さらに 次のことがわかる。
S を N の source（つまり kD-加群で $N \mid S^H$ なるもの）とし
$I = \{ h \in H ;\ S^h \simeq S \} \subset H$ とおく，I は H の部分群で，ある直既約 kI-加群 L があって $N = L^H$ となる。

(ε'') を $0 \to \Omega^2(L) \to \Xi \to L \to 0$ Auslander-Reiten 列とする
このとき
(ε') の vertex と (ε'') の vertex は一致する。実際，$(\varepsilon'')^H = (\varepsilon')$ である。

(Green [1])

(4.9) M を直既約 kG-加群で $vx(M) = D\ (\neq 1)$ とする。D は G で正規で M の source S は G-不変とする。((4.8)を参考) M の Auslander-Reiten列の vertex は 次の様に述べられる。
$E = \mathrm{End}_{kG}(S^G)$ $\quad E_1 = \mathrm{End}_{kD}(S)$ は

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \longrightarrow & E \\ \sigma & \longmapsto & \tilde{\sigma} \end{array} \qquad \tilde{\sigma} = \sigma \otimes_{kD} kG$$
で自然に E にうめこまれる。

このとき $J(E_1)E = EJ(E_1)$ は E の両側イデアルとなり $EJ(E_1) \subseteq J(E)$
$E/J(E_1)E$ は $E_1/J(E_1)$ 上の"twisted"な群環となる。

$e \in E$ を S^G の直和因子 M に対応する原始巾等元，X を e に対応する simple $E/J(E_1)E$-加群とすると，
求める vertex は X の"vertex"に一致する。

(Uno [2], Puig [1])

(4.10) M を直既約 kG-加群，$vx(M) = D\ (\neq 1)$，
(ε) $0 \to \Omega^2(M) \to \oplus\sum X_i \to M \to 0$ を Auslander-Reiten 列とする。
(X_i は直既約)
このとき
(1) (ε)の vertex を P とすると，X_i, M は P-projective である。
(2) X_i, M の中に (ε)の vertex と一致するものがある。つまり，(ε)の vertex は X_i, M の vertex のうち最大のものである。

(Green [1], Uno-Okuyama [1])

(4.11) (2.5)の内容を精密化するのに2つの方向がある。ひとつは，異なる vertex があらわれる component はどのようなとき，どのようにあらわれるかを考察することである。Erdmann [7] は 群 G が p-群のときに詳しい結果を得ている。そこでの議論には沢山、一般の G で可能となるものがある。Erdmann の結果を一般の G へ拡張することは，問題としておもしろいと思う。
もうひとつは，自明な source をもつ直既約加群を含む component の

形を決定することである。Gがp-群のとき、やはり Erdmann [7] で調べられている。これも、一般のGで考察されるべきである。

(4.12) どのような直既約加群について、その Auslander-Reiten 列の真中の項が直既約(projective を除いて)となるかという問題も、いろいろな問題と関わって興味深い。

直既約 kG-加群Mの vertex が cyclic のとき、

(1) Mの Auslander-Reiten 列の真中の項は直既約である

かまたは、

(2) Mは cyclic defect group をもつ block に属す。

(Erdmann [2])

(4.11)のように trivial source をもつ加群の Auslander-Reiten quiver 内での位置を調べるのも大事である。

(4.13) kGの block B, すなわち $B=kGe$ ($e\in Z(kG)$ は中心の原始巾等元)は、kG を $kG\times G$-加群とみたときの直既約直和因子である。DをBの defect group とすると、Bの $kG\times G$-加群としての vertex は $D^{\Delta}=\{(d,d);d\in D\}\leq G\times G$ である。$D\neq 1$ のとき、Bの $kG\times G$-加群としての Auslander-Reiten 列を

$$0\to\Omega^2(B)\to X\to B\to 0 \quad とすると$$

X は直既約で、$vx\,X = D^{\Delta}\cdot 1\times Z(D)$ である。

主張に $Z(D)$ があらわれてくることをみて、Dが abelian となるための条件を Auslander-Reiten 列との関わりで調べられないかと期待したくなる。例えば $J(Z(B))\leq Soc\,B$ なら D は abelian か。

参考文献

Auslander- Carlson

1. Almost split sequences and group rings, J. Alg. 103 (1986)

Benson

1. Modular Representation Theory, New Trends and Methods, Springer L. N. in Math. 1081
2. Some recent trends in modular representation theory, Proc. of the Rutgers group theory year ('83-'84) Cambridge Univ. Press
3. Modules for finite groups; representation rings, quivers and varieties, Representation Theory II (Ottawa, '84) Springer. L. N. in Math 1178
4. Representation ring of finite groups, Representations of Algebras, London Math. Soc. L. N. 116, Cambridge. Univ. Press

Benson- Carlson

1. Nilpotent elements in the Green ring, J. Alg. 104 (1986)

Benson- Parker

1. The Green ring of a finite group, J. Alg 87 (1984)

Broué

1. Blocs, isométries parfaites, catégories dérivées, C. R. Acad. Sci Paris, Sér. I Math. 307 (1988)

Erdmann

1. Blocks whose defect groups are Klein four groups, J. Alg. 76 (1982)
2. On modules with cyclic vertices in the Auslander- Reiten quiver, J. Alg. 104 (1986)
3. Algebras and dihedral defect groups, Proc. London. Math Soc. 54 (1987)
4. Algebras and semidihedral defect groups I, II, Proc. London Math. Soc. 57 (1988), to appear,
5. Algebras and quaternion defect groups I, II, Math. Ann. 281 (1988)
6. On the number of simple modules of certain tame blocks and algebras, Arch. Math. (Basel) 51 (1988)
7. On the vertices of modules in the Auslander- Reiten quiver of p-groups, preprint

Gabriel- Riedtmann

1. Group representations without groups, Comm. Math. Helvetici 54 (1979)

Green.

1. Functors on categories of finite group representations, J. Pure & Appl. Alg. 37 (1985)

Kawata.

1. The Green correspondence and Auslander-Reiten sequences, to appear in J. Alg.
2. Module correspondence in Auslander-Reiten quivers for finite groups, to appear in Osaka J. Math.

Linnel.

1. The Auslander-Reiten quiver of a finite group, Arch. Math 45 (1985)

Okuyama

1. On the Auslander-Reiten quiver of a finite group, J. Alg. 110 (1987)
2. Subgroups and almost split sequences of a finite group, J. Alg. 110 (1987)
3. A remark on the Auslander-Reiten quiver of a finite group, preprint
4. Some use of relative projective covers of modules for group algebras, preprint.

Okuyama-Uno

1. On vertices of Auslander-Reiten sequences, preprint

Puig

1. Vortex et sources des foncteurs simples, C. R. Acad. Sci, Paris Sér. I, Math 306 (1988)

Reiten

1. Generalized stable equivalence and group algebras, J. Alg. 79 (1982)

Thévenaz

1. Relative projective covers and almost split sequences, Comm. in Alg. 13 (1985)

Uno

1. On the sequences induced from Auslander-Reiten sequences, Osaka J. Math. 24 (1987)
2. Relative projectivity and extendibility of Auslander-Reiten sequences, Osaka J. Math. 25 (1988)
3. Auslander-Reiten sequences for certain group modules, to appear in J. Alg.

Webb

1. The Auslander-Reiten quiver of a finite group, Math. Z. 179 (1982)

奥山哲郎

1、新傾向；有限群のモジュラー表現論　「多元環の表現論」シンポジウム報告集（1986. 奈良）

惰性指数2または3の可換不足群を持つ
p-ブロックについて

宇佐美 陽子（お茶の水女子大・理）

§1. 可換不足群を持つp-ブロックについて

1) 問題と結果

Gを有限群、pを素数とする。Bは、不足群Dを持つGのp-ブロック（以下、ブロックと略記）とする。一般にBの性質を調べる時には、まず、以下のような諸定数を求めることが要求される。すなわち、

$k(B)$ = Bに属す既約通常指標の個数

$\ell(B)$ = Bに属す既約Brauer指標の個数

などである。モジュラー表現の基本問題の一つに、「Dの構造が与えられた時、Bの性質を調べよ。」というものがあるが、この問題は、まだごく特殊な場合（Dが巡回群や、特殊な2-群の時など）しか解かれていない。ここでは、特に以下の問題を考える。

<u>問題</u>　D可換の時のBの構造を調べよ。

ここで、（Dを可換と限らず）状況を説明すると、一般に、$DC_G(D)$のブロックbは、$b^G = B$となる時、Bの<u>root</u>と呼ばれるが、bの惰性群$N_G(D, b) = \{x \in N_G(D) \mid b^x = b\}$に対し、$E = N_G(D, b)/DC_G(D)$とおくと、$e = |E|$が$B$の<u>惰性指数</u>と呼ばれる。この$e$は$p$と互いに素であることが知られている。今、群$H$に対して、$\mathrm{Irr}(H)$は、$H$の全ての既約通常指標からなる集合とし、$\#\{\mathrm{Irr}(H)\}$は、その個数を表わすとしておく。同じく$\mathrm{IBr}(H)$は$H$の全ての既約Brauer指標からなる集合とする。

さて、D可換の時に、既に得られている結果を挙げると、

定理1(Brauer 1971 [2], Broué, Puig 1980 [3])

D可換かつ $e=1$ ならば、$\ell(B)=1$, $k(B)=|D|=\#\{\mathrm{Irr}(D)\}$ である。更に、この時、Dの一般指標全体のなす環 $\Gamma(D)$ から、Bに属すGの一般指標全体のなす加群 $\Gamma(G,B)$ へ onto isometry が存在する。

これに対し、以下の結果を得た。

定理2(Usami 1987 [7])

D可換かつ $e=2$ または3ならば、(ただし $e=3$ の時 $p\neq 2$ と仮定) $\ell(B)=e$, $k(B)=\#\{\mathrm{Irr}(D\rtimes E)\}$ である。ただし $D\rtimes E$ は、EのDへの自然な作用による半直積を表わす。更にこの時、$D\rtimes E$ の一般指標全体のなす環 $\Gamma(D\rtimes E)$ から、$\Gamma(G,B)$ へ onto isometry が存在する。

2) B-Brauer pair

Alperin, Broué は1979年[1]において、従来のBrauerのsubsectionの概念を拡張したBrauer pairを導入した。これを使って、Broué, PuigはBに入る既約指標とDの特別な一般指標の合成積がBに属す一般指標となるという強い定理を発表し([4] 3)で詳述)さらに、この定理を応用して、先のD可換, $e=1$ の時のisometryの存在を示した。D可換, $e=2$ または3の時も、この手法に依っている。

そこで、まず幾つか言葉の定義と準備をやっておこう。今、Kはp進数体の代数的閉包、$\mathcal{O}$ はKの付値環、$\mathfrak{p}$ は $\mathcal{O}$ の極大イデアル、k は $\mathcal{O}/\mathfrak{p}$ なる剰余体とする。PをGのp-部分群、b_P を $kC_G(P)$ の中心原始巾等元、すなわちブロック巾等元(略してブロック)とする時、(P,b_P) はGのBrauer pairと呼ばれる。2つのBrauer pair (P,b_P) と (Q,b_Q) について $(Q,b_Q)\triangleleft(P,b_P)$ とは、次の3条件

(i) $Q\triangleleft P$　(ii) b_Q が P不変　(iii) $(b_Q)^{PC_G(Q)}=(b_P)^{PC_G(Q)}$

をみたすものとし、$(Q, b_Q) \subset (P, b_P)$ であるとは

$$(Q, b_Q) = (R_0, b_0) \triangleleft (R_1, b_1) \triangleleft \cdots\cdots \triangleleft (R_n, b_n) = (P, b_P)$$

をみたす Brauer pair の列があるものと定義する。また Brauer pair (P, b_P) が B-Brauer pair であるとは、$B = b_P^G$ の時に言う。B-Brauer pair (D, b_D) は、D が B の不足群の時に極大となり、これら極大 B-Brauer pair 全部の集合に G は可移に作用する。従って、(Q, f) が B-Brauer pair ならば、(D, b_D) を一つの極大B-Brauer pair とした時、適当な G の元 x によって、$(Q, f)^x \subset (D, b_D)$ とできる。(Sylow の定理との類似性に注意。) なお、D 可換の時には、b_D として B の root b が取れる。また、u が p元の時 Brauer pair $(\langle u \rangle, f)$ は (u, f) と書いて、Brauer element と呼ばれる。

3) Broué-Puig の新指標構成定理

ここでは Broué-Puig の新指標構成定理を詳しく述べる。(D 可換と仮定しない。) 今、$\mathcal{O}$ に値を取る類関数 χ は p元 u と $C_G(u)$ の p'元 s に対して、

$$\chi(us) = \sum_{\phi \in IBr(C_G(u))} d(\chi, u, \phi)\, \phi(s) \qquad \text{①}$$

と書ける。ここで $d(\chi, u, \phi)$ は、χ が既約指標の時は、一般分解定数と呼ばれるものである。(u, e) を B-Brauer element とした時、類関数 $\chi^{(u,e)}$ とは、u の p-セクション以外では 0 となるもので、

$$\chi^{(u,e)}(us) = \sum_{\phi \in IBr(e)} d(\chi, u, \phi)\, \phi(s)$$

をみたすものとする。今 (D, b_D) は極大B-Brauer pair とする。ν が $\mathcal{O}$ に値を取る Dの類関数で (G, b_D) 不変 (すなわち (u, e), (v, f) が互いに G 共役な B-Brauer element でいずれも (D, b_D) に含まれるならば、いつでも $\nu(u) = \nu(v)$ が成り立つ) の時、

$$\chi * \nu = \sum_{(u,e) \in \mathcal{R}} \nu(u)\, \chi^{(u,e)}$$

なる Gの類関数が定義できる。ただし、$\mathcal{R}$ とは、(D, b_D) に含まれるように取った B-Brauer element の G 共役代表である。Broué-Puig の定理とは次のものである。すなわち

ν が D の (G, b_D)-不変な一般指標で、かつ χ が B に属す一般指標ならば、$\chi * \nu$ も B に属す一般指標となるというものである。

4) 定理 2 の isometry の構成

$k(B)$ と $\ell(B)$ の間には、関係式があるので、ここでは isometry の構成のみを示すことにする。D は可換 p-群，E は p'-群なので $D_1 = C_D(E)$, $D_2 = [D, E]$ とおいて $D \rtimes E = D_1 \times (D_2 \rtimes E)$ と書けることに注意する。更に e が素数なら $D_2 \rtimes E$ は Frobenius 群と仮定して良い。(つまり、E は D_1 の各元を固定し、E の単位元以外の各元は $D - D_1$ に固定点なしに作用している。) 以下 $p \neq 2$, $D_2 \rtimes E$ は Frobenius 群を仮定する。

B-Brauer pair (Q, f) は、G のある元 x に対し、$(Q, f)^x \subset (D, b)$ となる時、$Q^x \not\subset D_1$ なら第1種、$Q^x \subset D_1$ なら第2種と呼ぶ。(x の選び方に依らぬ事が示せる。) 第1種では、f は惰性指数 1 の可換不足群を持つブロックであり、定理 1 によってその唯一つの既約 Brauer 指標を $\phi_{(Q,f)}$ とおく。第2種では、f は惰性指数 e の可換不足群を持つ。isometry の構成の鍵は、第1種の (Q, f) に対して決まるある符号 $\varepsilon(Q, f) = \pm 1$ であり、それは、次の合同式をみたしているものである。

$$\frac{|C_G(Q) : D^{x^{-1}}|}{\phi_{(Q,f)}(1)} \equiv \varepsilon(Q,f) \frac{|C_G(D) : D|}{\phi_{(D,b)}(1)} \not\equiv 0 \pmod{\mathfrak{P}}$$

さて、今 $D \rtimes E$ の一般指標で $D - D_1$ の外で 0 となるもの全体の集合を $\Gamma(D \rtimes E, D_1)$ とおいて、ここの元 η に対して G の類関数 $\Delta(\eta)$ を次のように定義する。u は G の p 元，s は $C_G(u)$ の p' 元とする。

$$\Delta(\eta)(us) = \sum_{(u,g)} \varepsilon(u,g)\,\eta_{(u,g)}(u)\,\phi_{(u,g)}(s)$$

ただし (u, g) は B-Brauer element で第1種のもの全体を動くとする。また $\eta_{(u,g)}(u)$ は、ある $x \in G$ について $(u, g)^x \subset (D, b)$ の時、$\eta(u^x)$ で定義したものである。すると、3) の Broué-Puig の定理を利用して、$\Delta(\eta)$

は、Bに属すGの一般指標であることが示せて、$\Delta:\Gamma(D\rtimes E, D_1)\to\Gamma(G,B)$ が isometry であることも示せる。更に $|E|=e=2$ または 3 の時は、Δを拡張して、$\Gamma(D\rtimes E)$ から $\Gamma(G,B)$ への onto isometry Δ' にできることが示せる。これには、Brauer－Suzuki の例外指標の構成法を使う。

残念ながら e が大きいと、Δをうまく拡張できないが、$p\neq 2$ と $D_2\rtimes E$ が Frobenius 群の仮定のみで $\ell(B)\leqq e$ までは示せる。従って、特に $p\neq 2$ かつ e が素数ならば $\ell(B)\leqq e$ である。

§2. 関連する Puig の仕事紹介（以下 D 可換と限らぬ。）

1) point

A を $\mathcal{O}$ 上の有限生成 algebra とし、A^* を A の可逆元の全体とする。$\mathcal{P}(A)$ を A の原始巾等元の A^*-共役類（<u>point</u>）全体の集合と定義すると、次の基本的な命題が成り立つ。

<u>命題</u>　I を A の両側 ideal とすると、$\mathcal{P}(A)$ のうち I に含まれぬものと、$\mathcal{P}(A/I)$ の間には、1：1 対応がある。

証明には、まず $I\subset J(A)$ の場合をやって、これといわゆる Rosenberg の補題を使って一般の場合をやると良い。

<u>注意</u>　この命題によって以下のことがわかる。

$$\mathcal{P}(A) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathcal{P}(A/J(A)) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\text{simple } A \text{ modules (同型類)}\}.$$

2) pointed group

以下、$A=\mathcal{O}G$, H: G の部分群とし、$A^H=\{a\in A \mid a^h=a\ \ \forall h\in H\}$ と定義する。そして、H と $\mathcal{P}(A^H)$ の元 β の組を H_β と書いて、A 上の <u>pointed group</u> と呼ぶ。ここで、pointed group 間の包含関係を次のように定義する。

H_β, K_δ が A 上の pointed group の時

$H_\beta\subset K_\delta \overset{}{\underset{定義}{\iff}} H\subset K$ かつ 任意の $i\in\delta$ について $ij=j=ji$ をみたす $j\in\beta$ が存在。

3) *local pointed group*

Gの部分群 Q に対して，Brauer 準同型 Br_Q とは，$(\mathcal{O}G)^Q$ から，$(\mathcal{O}G)^Q \Big/ \sum_{\substack{R \subsetneq Q \\ 部分群}} Tr_R^Q(\mathcal{O}G)^R + J(\mathcal{O})(\mathcal{O}G)^Q$ への自然な準同型である。ここで Tr_R^Q は，いわゆる $\mathcal{O}G^R$ から $\mathcal{O}G^Q$ への relative trace map である。この Br_Q は，$(\mathcal{O}G)^Q$ の元 $\sum_{g\in G}\alpha_g g$ を $\sum_{g\in C_G(Q)} \bar{\alpha}_g g$ に写像する（ただし各 g について $\alpha_g \in \mathcal{O}$，$\bar{\alpha}_g \in k$）ので，$(\mathcal{O}G)^Q \Big/ \sum_{\substack{R \subsetneq Q \\ 部分群}} Tr_R^Q(\mathcal{O}G)^R + J(\mathcal{O})(\mathcal{O}G)^Q$ は，$kC_G(Q)$ と同型となる。pointed group Q_β が $Br_Q(\beta)\neq 0$ の時，local pointed group と呼ぶ。定義から local pointed group Q_β では，Qは p群となる。$\mathcal{LP}((\mathcal{O}G)^Q)$ で $(\mathcal{O}G)^Q$ の local point 全ての集合を表わすと，$\mathcal{LP}((\mathcal{O}G)^Q)$ と $\mathcal{P}(kC_G(Q))$ の間には，β に対し，$Br_Q(\beta)$ という 1:1 対応がつき，((1)の命題による。)これらは，いずれも simple $kC_G(Q)$ modules の同型類と1:1対応がつくことに注意して欲しい。

4) *source algebra*

pointed group G_α とは $(\mathcal{O}G)^G = Z(\mathcal{O}G)$ のあるブロック B に対応するものである。すると，§1 の B-Brauer pair を言わば細分化したものが G_α に含まれる local pointed group になることがわかる。実際，local pointed group Q_β が $Q_\beta \subset G_\alpha$ をみたすとは，$\alpha = \{B\}$ の時，原始巾等元 $j\in\beta$ で $jB=j$ をみたすものがあるというのが定義なので，$Br_Q(j)Br_Q(B) = Br_Q(j)\neq 0$ であって，これは，$Br_Q(\beta)$ の入る $kC_G(Q)$ のブロックは，持ち上げて B になることを示しているからである。従って，B-Brauer pair と類似した次のような性質がある。つまり，G_α に含まれる極大 local pointed group 達に G は可移に働き，その1つを D_γ とすると，D は B の不足群になるというのである。そのような D_γ は local pointed group 故，$j\in\gamma$ とすると，D と $Br_D(j)$ に対応する simple $kC_G(D)$ module の組と考えられるが，

同時に、G_α に含まれていることから、その simple module の入るブロックは、持ち上げてBにもなっている。ここで $C_G(D)$ と $DC_G(D)$ のブロック間の持ち上げによる 1:1 対応を思い出すと、$DC_G(D)$ に持ち上げれば、Bの root b となり、先の γ に対応する simple $k C_G(D)$ module はその入っている $kC_G(D)$ のブロックにおける唯一の物である。ここで、Bの source algebra とは $j\mathcal{O}Gj = j\mathcal{O}GBj$ のことである。source algebra と名付けられたのは、Bの性質をよく反映していればこそで、実際次の

定理（Puig 1981 [5] 系 3.5 ）

$\mathcal{O}GB$ とその source algebra とは森田同値である

によって、各々の module のカテゴリー間に 1:1 対応がある。$\mathcal{O}GB$ より簡単な、その source algebra を研究しようというのが Puig や Külshammer の考えである。

5) 不足群が正規部分群の時の source algebra

一般に群 G について $\mathcal{O}$-algebra A が interior G-algebra とは、$G \to A^*$ なる群の準同型が付与されている時に言う。$\hat{G}$ が k^* を核とする G のある中心拡大とした時、interior $\hat{G}$-algebra

$$\mathcal{O}_*\hat{G} = \mathcal{O}\hat{G} \Big/ \sum_{\lambda \in k^*,\, \hat{x} \in \hat{G}} (\check{\lambda}\hat{x} - \lambda\hat{x})$$

は、twisted group algebra と呼ばれる。ただし、$\lambda\hat{x}$ の λ は $\hat{G}$ の中心に入る k^* の元を指し、$\check{\lambda}$ は、$\mathcal{O}^* \cong k^* \times (1 + J(\mathcal{O}))$ による k^* の元 λ の $\mathcal{O}^*$ での像を表わしたものである。

4) での説明と表記法からもわかるように $N_G(D_\gamma) = \{ h \in N_G(D) \mid \gamma^h = \gamma \}$ として、$E = N_G(D_\gamma) / DC_G(D)$ とおくと、これは、§1, 1) における E と同じになる。実際 $N_G(D_\gamma) = N_G(D, b)$ となるためである。今、不足群が正規部分群の時の source algebra について、Puig の定理を挙

げておこう。

<u>定理</u>（Puig 1988 [6] 命題14.6）

$G \triangleright D$ ならば、上記の表記法で $E = N_G(D_\gamma)/DC_G(D)$ とおいた時、

Bの~~source~~ algebra は interior D algebra として $\mathcal{O}_*(\widehat{D \rtimes E}^\gamma)$ と同型である。ここでは、k^* を核とする $D \rtimes E$ の中心拡大 $\widehat{D \rtimes E}^\gamma$ については、詳しい説明を略すが、γ には、4）によって、対応する $kC_G(D)$ の simple module があり、$kC_G(D)/J(kC_G(D))$ のある単純 factor（simple algebra）とも対応することになり、$N_G(D_\gamma)$ からこの simple algebra の自己同型群への準同型がある為、k^* を核とする中心拡大が作れることと関連している。この定理によれば、$G \triangleright D$ かつ E が巡回群の時は、Bの source algebra は $\mathcal{O}(D \rtimes E)$ と同型となり、§1 の定理 1, 2 との関連が認められる。

6) pointed group と指標, module の構成

最後に、「pointed group と指標（module）の構成」という題の Puig の論文 [5], [6] は、非常に長いので、ごく大雑把に、内容の見通し程度を紹介しておく。

今 local pointed group $\langle u \rangle_\beta$ を u_β と書いて、<u>local pointed element</u> と呼ぶ。これは、3) を参照すると、u と $kC_G(u)$ の既約 Brauer 指標の組とも思えることに注意する。

[5] では、Brauer の第2主定理を一般化して、指標を構成している。Brauer の第2主定理とは、$\chi \in \Gamma(G, B)$ については、§1, 3) の ① 式の ϕ は、持ち上げて B となる $kC_G(u)$ のブロックに入る既約 Brauer 指標を動かせば良いというものであった。つまり、① 式の和は、B に G_α が対応する時は、上の注意により、u, ϕ の組としては、G_α に含まれる local pointed element だけ考えておけばいいことになる。従って、この式の $d(\chi, u_\beta)$ は、固定した χ に対して、G_α に含まれる local pointed element 上の function

と思えることになる。[5]では、Bに入る一般指標と、G_αに含まれる local pointed element 上の G-stable $\mathcal{O}$-valued function のうちである条件をみたすものとの間に 1:1 対応をつけたわけである。§1, 3) で紹介した Broué-Puig の新指標構成定理も、この結果の系として導いてある。

一方、[6] は [5] の module 版と言えるものである。まず A が $\mathcal{O}$-algebra の時、

$$M(A) = \{\mathcal{O}\text{-free かつ }\mathcal{O}\text{-module として有限 rank のもの全体}\}$$

と定義する。また

$$(P_\gamma, K)\text{ は decomposition pair} \underset{\text{定義}}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l} P_\gamma \text{ は } \mathcal{O}G \text{ の local pointed group} \\ \text{かつ } K \text{ は } N_G(P_\gamma)/PC_G(P) \text{ の基本 } p'\text{-部分群} \end{array}\right\}$$

と定義する。そして、[6] では、$M(\mathcal{O}G)$ と、

$$\left\{ \prod_{\substack{(P_\gamma, K) \\ \text{decomposition pair}}} M(\mathcal{O}_*(\widehat{P \times K^{\gamma}})) \text{ の中で } G\text{-stable かつある条件をみたすもの} \right\}$$

との間の 1:1 対応を導いている。

文　献

[1] J. Alperin and M. Broué, Local method in block theory, Annals of Math. 110 (1979) 143−157

[2] R. Brauer, Some applications of the theory of blocks of characters of finite groups IV, J. Algebra 17 (1971) 489−521

[3] M. Broué and L. Puig, A Frobenius theorem for blocks, Inventions Math. 56 (1980) 117−128

[4] M. Broué and L. Puig, Characters and local structures in G-algebras, J. Algebra 63 (1980) 306−317

[5] L. Puig, Pointed groups and construction of characters, Math. Z. 176 (1981) 265−292

[6] L. Puig, Pointed groups and construction of modules, J. Algebra 116 (1988) 7–129

[7] Y. Usami, On p-blocks with abelian defect groups and inertial index 2 or 3, I, J. Algebra 119 (1988) 123–146

加群のコホモロジー環に関するCarlsonの予想について

北大理　庭崎隆

§1　はじめに

Gを有限群、Kを標数$p>0$の代数的閉体、Mを有限生成な左KG-加群とする。コホモロジー環

$$\mathcal{E}_G(M) = \mathrm{Ext}^*_{KG}(M,M) \simeq \mathrm{Ext}^*_{KG}(K,\mathrm{End}_K(M))$$

の極大イデアルに関してCarlsonは1987年の論文[3]で次のことを予想し、また特殊なMについてこれを証明した（言葉の定義については次章）。

定理 A.　$\mathcal{E}_G(M)$の極大イデアルは或る*cyclic shifted*部分群への制限写像の核を含む。

ここで「核（0の逆像）」の替わりに「或る極大イデアルの逆像」としても一般に定理が成り立つことを示すのが本稿の目的である。よく知られているように、Mが自明な加群Kのとき、これは*cyclic shifted*部分群の言葉でQuillenの*stratification*定理を述べたときの一部である。この場合$\mathcal{E}_G(K)$は本質的に可換で、部分群、或るいは*shifted*部分群への制限写像は可換環の整拡大を引き起こすから、極大スペクトルの間に同伴な写像が定義できた。しかし$\mathcal{E}_G(M)$の場合、本質的に非可換であるからこのような議論は難かしい。今、次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{E}_G(K) & \xrightarrow{\text{res}} & \mathcal{E}_E(K) & \xrightarrow{\text{res}} & \mathcal{E}_U(K) \\
\downarrow{\scriptstyle \text{cup}} & \Omega & \downarrow{\scriptstyle \text{cup}} & & \downarrow{\scriptstyle \text{cup}} \\
\mathcal{E}_G(M) & \xrightarrow{\text{res}} & \mathcal{E}_E(M) & \xrightarrow{\text{res}} & \mathcal{E}_U(M)
\end{array}$$

ここでEはGの基本可換p-部分群、UはEのcyclic shifted部分群、resは制限写像、cupは自然な環準同型($\mathcal{E}(M)$の単位元とのcup積)である。cupにより$\mathcal{E}_G(M)$は有限生成な$\mathcal{E}_G(K)$-加群であることが知られている。さて、この図の左側は可換である。更に右側も或る意味で可換であることが計算により示される。そこで可換ネーター環上の加群に関するArtin-Reesの補題を使って、図の下側($\mathcal{E}(M)$の方)に現われるイデアルを、上側($\mathcal{E}(K)$の方)のイデアルで評価するというのが本稿の証明法である。

§3では全く別の方法で、Mの直和分解に応じてJacobson根基 rad $\mathcal{E}_G(M)$も分解されることについて述べた。これは$\mathrm{End}_{KG}(M)$についてはよく知られている結果で、関手 rad $\mathrm{Hom}_{KG}(\cdot, M)$についてのGreenの証明([5])の類似を試みたものである。

§2 極大イデアルとcup, res

定義. $H=\langle u_1,\cdots,u_m\rangle$がGのshifted(以下SF-)部分群であるとは、Gの或る基本可換p-部分群$E=\langle x_1,\cdots,x_n\rangle$と$K^n$の1次独立な元$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$が存在して

$$u_i = 1+\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}(x_j-1) \quad , \quad i=1,\cdots,m$$

$$(\text{但し } \alpha_i=(\alpha_{i1},\cdots,\alpha_{in}))$$

となるときにいう。これは $(KG)^{\times}$ の階数 m の基本可換 p-部分群である。特に $m=1$ のとき $H=\langle u\rangle$ を cyclic shifted（以下 CSF-）部分群という。

今，$\mathcal{E}_G(K)$ の中心に含まれる部分環 $\mathcal{E}_G^{ev}$ を

$$\mathcal{E}_G^{ev} = \bigoplus_{i\geq 0} \mathrm{Ext}_{KG}^{2i}(K, K)$$

で定義し，その極大スペクトル $\mathrm{Max}(\mathcal{E}_G^{ev})$ を V_G とかく。
$\langle u\rangle$ が位数 p の巡回群のとき $\mathcal{E}_{\langle u\rangle}^{ev} = K[\zeta_u]$（次数2の元 ζ_u で生成される多項式環）となることが知られている。従って $(\zeta_u - 1)$ は極大イデアルである。次の定理は Quillen の stratification 定理を CSF-部分群の言葉で述べたものである（[2]）。

定理1（Quillen，Carlson）

$$\frac{\{u \in KG \mid \langle u\rangle \text{は CSF-部分群}\}}{G\text{-共役}} \xleftrightarrow{1:1} V_G - \{0\}$$

対応は u を含む共役類に $\mathrm{res}^{-1}(\zeta_u - 1)$ を対応させる。

以下，§2 の終わりまで H は G の部分群，または SF-部分群とする。$\rho \in \mathcal{E}_G^{ev}$ に対し $\mathrm{cup}: \mathcal{E}_G^{ev} \longrightarrow \mathcal{E}_G(M)$ の像 $\mathrm{cup}(\rho)$ を ρ_M とかくことにする。$\mathcal{E}_G^{ev}$ の部分集合 S に対しても $\mathrm{cup}(S)$ を S_M とかく。同様に $\mathrm{res}_{G,H}(\rho)$ を ρ_H，$\mathrm{res}_{G,H}(S)$ を S_H とかくことにする。H が SF-部分群のとき $KH \subset KG$ はホップ代数としての埋め込みではないので cup と res は一般には可換でないが，直接的な計算で次が示される（[8]）。

定理２．$((\rho^P)_M)_H = ((\rho^P)_H)_M \quad ({}^\forall \rho \in \mathcal{E}_G(K))$

$J_G(M)$ を $\mathrm{Ker}(\mathrm{cup} : \mathcal{E}_G^{ev} \longrightarrow \mathcal{E}_G(M))$，$V_G(M)$ をその台 $\{P \in V_G \mid P \supset J_G(M)\}$ とする。また $\mathrm{Ker}(\mathrm{res} : \mathcal{E}_G(M) \longrightarrow \mathcal{E}_H(M))$ を $\mathrm{Ker}_{G,H}(M)$ とかく。さて一般に

R を可換環、I を R の真のイデアル、L を有限生成な忠実 R-加群とすると、$IL \subsetneq L$

である。そこで $\mathcal{E}_G(M)$ の極大イデアル全体のなす集合を $\mathrm{Max}(\mathcal{E}_G(M))$ とかくと、次の写像が定義できる。

$$\mathrm{res}^* : V_H \longrightarrow V_G \quad ; \quad Q \longmapsto \mathrm{res}^{-1}(Q)$$

$$\mathrm{cup}^* : \mathrm{Max}(\mathcal{E}_G(M)) \longrightarrow V_G(M) \; ; \; \mathfrak{m} \longmapsto \mathrm{cup}^{-1}(\mathfrak{m})$$

再び上のことから res^* の像は $\{P \in V_G \mid P \supset \mathcal{E}_G^{ev} \cap \mathrm{Ker}_{G,H}(K)\}$ で、cup^* は全射である。cup^* が定義できることから、特に $\mathcal{E}_G(M)/\mathfrak{m}$ は K 上有限次元であることもわかる。

今、環 A のイデアル I に対し $\sqrt{I} = \{a \in A \mid a^c \in I \ ({}^\exists c > 0)\}$ とおく。A が非可換のとき $\sqrt{I}$ はイデアルになるとは限らない。

補題３．$P \in \mathrm{res}^*(V_H)$ とする。$Q_1, \cdots, Q_n \in V_H$ を $\mathrm{res}^*(Q_i) = P$ となるもの全体とすると

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{res}^{-1}(Q_i \mathcal{E}_H(M)) \subset \sqrt{P\mathcal{E}_G(M) + \mathrm{Ker}_{G,H}(M)} \quad .$$

証明．Artin-Rees の補題より或る $c > 0$ があって

$$\bigcap (Q_i^c \mathcal{E}_H(M)) \subset (\bigcap Q_i)\mathcal{E}_H(M)$$
$$= \sqrt{P\mathcal{E}_H^{ev}}\,\mathcal{E}_H(M) \subset \sqrt{P\mathcal{E}_H(M)} \quad .$$

ここで定理2より、Pの作用は $(P_H)_M$, $(P_M)_H$ のどちらと解釈してもよい。再び Artin-Rees の補題より、或る $d>0$ があって $P^d\mathcal{E}_H(M)\cap(\mathcal{E}_G(M))_H \subset (P\mathcal{E}_G(M))_H$ であるから補題が示される。□

補題4. $P\in \mathrm{res}^*(V_H)$ とすると、$\mathrm{Ker}_{G,H}(M)\subset\sqrt{P\mathcal{E}_G(M)}$。特に補題3の右辺は $\sqrt{P\mathcal{E}_G(M)}$ としてよい。

証明の概略. Gは p-群としてよい。|G| に関する帰納法を使う。Gの極大部分群Sで、HがSの(SF-)部分群となるものがとれると仮定してよい(そうでなければ $\mathrm{res}_{G,H}$ は同型)。$R_1,\cdots,R_m\in V_S$ を $\mathrm{res}^*_{G,S}(R_i)=P$ となるもの全体とすれば帰納法の仮定と補題3より

$$\mathrm{Ker}_{G,H}(M)\subset \mathrm{res}^{-1}\left(\cap\sqrt{R_i\mathcal{E}_S(M)}\right)\subset\sqrt{P\mathcal{E}_G(M)+\mathrm{Ker}_{G,S}(M)}$$

だから、H=S について補題を示せばよい。

ところがこのようなHに対して、「或る $\beta\in\mathcal{E}_G^{ev}\cap\mathrm{Ker}_{G,H}(K)$ が存在して、$\mathrm{Ker}_{G,H}(M)$ の斉次元は $\sqrt{\beta\,\mathcal{E}_G(M)}$ に含まれる」ことが知られている([1])。よって $\mathrm{Ker}_{G,H}(M)$ の斉次元は $\mathcal{E}_G(M)/P\mathcal{E}_G(M)$ で巾零である。更に「ネーター的半群において、巾零元からなる有限生成部分半群は巾零である」という Levitzki の定理([6])を使えば、$\mathrm{Ker}_{G,H}(M)$ 自体 $\mathcal{E}_G(M)/P\mathcal{E}_G(M)$ で巾零であることが示される(この論法は [2] Th.6.4 の真似である)。□

$\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(\mathcal{E}_G(M))$ が与えられたとする。$\mathfrak{P} = \mathrm{cup}^*(\mathfrak{m})$ とおくと $\mathfrak{P}\mathcal{E}_G(M) \subset \mathfrak{m}$ である。定理1より、$\mathfrak{P} \in \mathrm{res}^*(V_H)$ となるCSF-部分群 H はいつでもとれるので、補題4から Carlson の予想（定理A）が示される。また「$V_G(M)$ と M の rank variety は一致する」という Avrunin, Scott の定理もこれらから示される（[8]）。

§1で述べたように、もっと強いことがいえる。

定理B. $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(\mathcal{E}_G(M))$ とし、H を G の部分群、または SF-部分群とする。$\mathfrak{P} = \mathrm{cup}^*(\mathfrak{m})$ が $\mathfrak{P} \in \mathrm{res}^*(V_H)$ を満たせば、或る $\hat{\mathfrak{n}} \in \mathrm{Max}(\mathcal{E}_H(M))$ が存在して $\mathrm{res}^{-1}(\hat{\mathfrak{n}}) \subset \mathfrak{m}$ となる。

証明. $Q_1, \cdots, Q_n \in V_H$ を $\mathrm{res}^*(Q_i) = \mathfrak{P}$ となるもの全体とし、各 Q_i について $\hat{\mathfrak{n}}_{i1}, \cdots, \hat{\mathfrak{n}}_{ir_i} \in \mathrm{Max}(\mathcal{E}_H(M))$ を $\mathrm{cup}^*(\hat{\mathfrak{n}}_{ij}) = Q_i$ となるもの全体とする。すべての i, j について $(\mathfrak{P}_M)_H \subset \sqrt{(Q_i)_M} \subset \sqrt{\hat{\mathfrak{n}}_{ij}}$ であるが、$\hat{\mathfrak{n}}_{ij}$ の極大性より $(\mathfrak{P}_M)_H \subset \hat{\mathfrak{n}}_{ij}$. よって $\mathfrak{n}_{ij} = \mathrm{res}^{-1}(\hat{\mathfrak{n}}_{ij})$ とおくと

$$\mathfrak{P}\mathcal{E}_G(M) \subset \bigcap_{i,j} \mathfrak{n}_{ij} .$$

一方、各 i に対して $\bigcap_j \hat{\mathfrak{n}}_{ij} / Q_i\mathcal{E}_H(M) = \mathrm{rad}\ \mathcal{E}_H(M) / Q_i\mathcal{E}_H(M)$ であるから、補題3, 4より

$$\bigcap_{i,j} \mathfrak{n}_{ij} \subset \sqrt{\bigcap_i \mathrm{res}^{-1}(Q_i\mathcal{E}_H(M))} \subset \sqrt{\mathfrak{P}\mathcal{E}_G(M)} .$$

よって $\bigcap_{i,j} \mathfrak{n}_{ij} / \mathfrak{P}\mathcal{E}_G(M) \subset \mathrm{rad}\ \mathcal{E}_G(M) / \mathfrak{P}\mathcal{E}_G(M) \subset \mathfrak{m} / \mathfrak{P}\mathcal{E}_G(M)$ だから、Rosenberg の補題より或る $\mathfrak{n}_{ij}$ は $\mathfrak{m}$ に含まれる。□

§3. 関手 $\mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, M)$

mod KG を有限生成左 KG-加群のなす圏、Mod K を K-加群のなす圏とする。Mmod KG とかいて、mod KG から Mod K への K-線型反変関手のなす圏を表わす。即ち、Mmod KG の対象は反変関手 F : mod KG $\longrightarrow$ Mod K のうち $\mathrm{Hom}_{KG}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_K(FY, FX)$ が K-線型となるもので、射は自然変換である。例えば $\mathrm{Hom}_{KG}(\cdot, M)$, $\mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, M)$ は Mmod KG の対象である。Mmod KG は K-線型アーベル圏である。F' が F の部分関手であることを $F' \leqq F$ とかく。

以下、$M, N, X, Y \in$ mod KG とする。また Ω を Heller 作用素とする。$i, n \geqq 0$ に対して、自然な準同型

$$r^i_n(X) : \mathrm{Ext}^i_{KG}(\Omega^n(X), M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^{i+n}_{KG}(X, M)$$

を考える。X の最小射影分解を

$$\cdots \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

とするとき、$r^i_n(X)$ $(i>0)$ は同型で、

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_0 \longrightarrow \Omega^n(X) \longrightarrow 0$$

を

$$0 \longrightarrow M \longrightarrow B_{i-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow B_0 \longrightarrow P_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_0 \longrightarrow X \longrightarrow 0$$

に写す。$i=0$ のとき Ext^0_{KG} は Hom_{KG} だから $r^i_n(X)$ は同型にはならないが、自然な全射または分裂的単射である。$r_n(X) = \prod_i r^i_n(X)$ として

$$r_n(X) : \mathrm{Ext}^*_{KG}(\Omega^n(X), M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^*_{KG}(X, M)$$

を得る。$r_n(X)$ は $\mathcal{E}_G(M)$-準同型で、

$$r_n : \mathrm{Ext}^*_{KG}(\Omega^n(\cdot), M) \longrightarrow \mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, M)$$

は自然変換である。

定義．$F \leq \mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, M)$ が右イデアル部分関手とはすべての $n \geq 0$ について $\mathrm{Im}(r_n|_{F\circ\Omega^n}) \leq F$ となるとき、即ち すべての $n \geq 0$，$X \in \mathrm{mod}\,KG$ に対し

$$\begin{array}{ccccc} r_n(X) : & \mathrm{Ext}^*_{KG}(\Omega^n(X), M) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^*_{KG}(X, M) \\ & \cup & & \cup \\ & F(\Omega^n(X)) & & F(X) \end{array}$$

$r_n(X)(F(\Omega^n(X))) \subset F(X)$ となるときにいう。このとき $F \underset{r.i}{\leq} \mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, M)$ とかくことにする。

定義．$F \underset{r.i}{\leq} \mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, M)$，$F' \underset{r.i}{\leq} \mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, N)$ のとき、自然変換 $\alpha : F \longrightarrow F'$ が右イデアル自然変換とはすべての $n \geq 0$ に対して $\alpha \cdot r_n = r_n \circ \alpha \cdot \Omega^n$，即ち

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\alpha(X)} & F'(X) \\ {\scriptstyle r_n(X)}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle r_n(X)} \\ F(\Omega^n(X)) & \xrightarrow{\alpha(\Omega^n X)} & F'(\Omega^n(X)) \end{array}$$

がすべての n，X について可換なときにいう。

F から F' への右イデアル自然変換全体の集合を $(F, F')_{r.i}$ とかく。

同様に $\ell_n : \mathrm{Ext}^*_{KG}(M,\cdot) \longrightarrow \mathrm{Ext}^*_{KG}(M, \Omega^n(\cdot))$ を使って左イデアル関手（自然変換）を双対的に定義できる（但し共変である）。以下に述べることは左イデアル関手についても同様である。

(i) $F, F' \underset{r.i}{\leqq} \mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, M)$ ならば $F+F', F\cap F' \underset{r.i}{\leqq} \mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, M)$.

(ii)（準同型定理） $F \underset{r.i}{\leqq} \mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, M)$, $F' \underset{r.i}{\leqq} \mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, N)$, $\alpha \in (F, F')_{r.i}$ ならば $\mathrm{Ker}\,\alpha$, $\mathrm{Im}\,\alpha$ も右イデアルで、$\{S \underset{r.i}{\leqq} \mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, M) \mid \mathrm{Ker}\,\alpha \leqq S \leqq F\}$ と $\{S' \underset{r.i}{\leqq} \mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, N) \mid S' \leqq \mathrm{Im}\,\alpha\}$ は1対1に対応する。

(iii)（米田の補題） $F \underset{r.i}{\leqq} \mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, M)$ ならば K-加群として

$$(\mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, N), F)_{r.i} \simeq F(N) \quad .$$

補題5. $F \underset{r.i}{\leqq} \mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, M)$ とすると $F(X)\cdot\mathrm{Ext}^*_{KG}(Y, X) \subset F(Y)$.

即ち、

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ext}^*_{KG}(X, M) & \times & \mathrm{Ext}^*_{KG}(Y, X) & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^*_{KG}(Y, M) \\
\cup & & & & \cup \\
F(X) & \times & \mathrm{Ext}^*_{KG}(Y, X) & \longrightarrow & F(Y)
\end{array} \quad .$$

証明. $\rho \in \mathrm{Ext}^n_{KG}(Y, X)$, $\rho = cl(g)$, $g : \Omega^n(Y) \longrightarrow X$ とすると可換図

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ext}^*_{KG}(X, M) \arrow[r, "g^*"] & \mathrm{Ext}^*_{KG}(\Omega^n(Y), M) \arrow[r, "r_n(Y)"] & \mathrm{Ext}^*_{KG}(Y, M) \\
F(X) \arrow[u, hook] \arrow[r, "F(g)"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & F(\Omega^n(Y)) \arrow[u, hook] \arrow[r, "r_n(Y)"] \arrow[ur, phantom, "\circlearrowleft"] & F(Y) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

において $r_n(Y)\cdot g^*$ は ρ の右作用と一致するからよい。□

$F \underset{r.i.}{\leq} \mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, M)$ とすると 補題5より $F(X)$ は右 $\mathcal{E}_G(X)$-加群である．特に $F(M)$ は $\mathcal{E}_G(M)$ の右イデアルである。そこで次の対応 α, β について考える（1対1ではない）．

$$\{\mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, M)\text{の右イデアル部分関手}\} \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightleftarrows}} \{\mathcal{E}_G(M)\text{の右イデアル}\}$$

$$F \longmapsto F(M)$$

$$\beta(I) \longleftarrow I$$

ここで $\beta(I)$ は，

$$\beta(I)(X) = \{\zeta \in \mathrm{Ext}^*_{KG}(X, M) \mid \zeta \cdot \mathrm{Ext}^*_{KG}(M, X) \subset I\}$$

により定める（これが右イデアル部分関手になることは $(r_n(X)(\zeta)) \cdot \rho = \zeta \cdot (\ell_n(X)(\rho))$ （$\zeta \in \mathrm{Ext}^*_{KG}(\Omega^n X, M)$，$\rho \in \mathrm{Ext}^*_{KG}(M, X)$）が成り立つことによる）。

さて，このとき次が成り立つ。

(i) $F \leq \beta(\alpha(F))$

(ii) $\alpha(F) = \mathcal{E}_G(M) \Rightarrow F = \mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, M)$

(iii) F：極大右イデアル部分関手 $\Rightarrow \beta(\alpha(F)) = F$

(iv) I：極大右イデアル $\Rightarrow \beta(I)$：極大右イデアル部分関手

(v) β は共通部分をとる操作と可換．

(i)〜(iv) により α, β は極大なものについては1対1対応を与える．そこで

$$\mathrm{rad}\,\mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, M) = \bigcap F$$

とおく．ここで F は極大右イデアル部分関手全体を動く．(v) によりこれは $\beta(\mathrm{rad}\,\mathcal{E}_G(M))$ に一致し，

$$(\mathrm{rad}\,\mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, M))(M) = \bigcap F(M) = \mathrm{rad}\,\mathcal{E}_G(M)$$

である.

左イデアル関手についても同様である。特に

$$(\mathrm{rad}\,\mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, M))(N) = (\mathrm{rad}\,\mathrm{Ext}^*_{KG}(N, \cdot))(M)$$

が成り立つので，これを $\mathrm{rad}\,\mathrm{Ext}^*_{KG}(N, M)$ とかく。

$M = M_1 \oplus M_2$ のとき

$$\mathrm{rad}\,\mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, M) = \mathrm{rad}\,\mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, M_1) \oplus \mathrm{rad}\,\mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, M_2)$$

が、加群の場合とまったく同様に示せる（[4, Ex 5.11]）.
よって次が証明された。

定理 6. $M = M_1 \oplus \cdots \oplus M_n$ のとき.

(i) $\mathrm{rad}\,\mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, M) = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{rad}\,\mathrm{Ext}^*_{KG}(\cdot, M_i)$

(ii) $\mathcal{E}_G(M)$ は $n \times n$ 型の行列環 $\{(\zeta_{ij}) \mid \zeta_{ij} \in \mathrm{Ext}^*_{KG}(M_j, M_i)\}$ と同型で，$\mathrm{rad}\,\mathcal{E}_G(M) = \{(\zeta_{ij}) \mid \zeta_{ij}\,\mathrm{Ext}^*_{KG}(M_i, M_j) \subset \mathrm{rad}\,\mathcal{E}_G(M_i)\}$ である。

行列環の根基が成分の言葉になるというのは $\mathrm{End}_{KG}(M)$ についてはよく知られていることで、例えば Clifford 理論では中心的な命題であると思われる。しかし、M が直既約のとき $\mathrm{End}_{KG}(M)$ は局所環である，ということの Ext 版がまだわからない。最も簡単な場合を次に示す。

$\mho$ を位数 p の巡回群とする．$V_1, \cdots, V_{p-1}$ を非射影的な直既約 $K\mho$-加群全体で，$\dim V_i = i$ とする．

$$R = \mathcal{E}_{\mho}^{ev}, \quad A = \mathrm{Ext}^{*}_{K\mho}(V_j, V_i) / \mathrm{rad}\,\mathrm{Ext}^{*}_{K\mho}(V_j, V_i)$$

とおくと，次が計算できる．

(i) $i = j$ のとき，cup は単射で，$A \simeq R$．

(ii) $i = p-j$（即ち $\Omega(V_i) = V_j$）のとき，$A = R\bar{\sigma} \simeq R$．
ここで σ は $\mathrm{Ext}^{1}_{K\mho}(V_j, V_i)$ を $\mathrm{End}_{K\mho}(V_i)$ の剰余とみたときの単位元．

(iii) その他のときは $A = 0$。

そこで $V = \bigoplus_{i=1}^{p-1} V_i^{m_i}$（$m_i$ は重複度）とおけば $\mathcal{E}_{\mho}(V) / \mathrm{rad}\,\mathcal{E}_{\mho}(V) \simeq \bigoplus_i M_{m_i + m_{p-i}}(R)$ である。
定理 B と合わせて，次を得る。

系7. $\mathfrak{m} \in \mathrm{Max}(\mathcal{E}_G(M))$，$\mathcal{E}_G(M)/\mathfrak{m} \simeq M_d(K)$ とする。
このとき或る CSF-部分群 $\mho$ が存在して次を満たす。

$$M_{\mho} = \bigoplus_{i=1}^{p-1} V_i^{m_i} \oplus \text{自由 } K\mho\text{-加群}$$

とかいたとき，$d \leqq \max_i (m_i + m_{p-i})$。

参考文献

[1] J.L. Alperin and L. Evens, Representations, resolutions, and Quillen's dimension theorem, J. Pure Appl. Algebra 22 (1981) 1-9.

[2] J.F. Carlson, Module varieties and cohomology rings of finite groups (Univ. Essen, Essen, 1985).

[3] J.F. Carlson, Cohomology rings of induced modules, J. Pure Appl. Algebra 44 (1987) 85-97.

[4] C.W. Curtis and I. Reiner, Methods of representation theory vol I (J. Wiley and Sons, 1981).

[5] J.A. Green, Functors on categories of finite group representations, J. Pure Appl. Algebra 37 (1985) 265-298.

[6] N. Jacobson, Structure of rings (Amer. Math. Soc., Providence, 1956).

[7] 松村 英之, 可換環論 (共立出版, 共立講座·現代の数学4, 1980).

[8] T. Niwasaki, On Carlson's conjecture for cohomology rings of modules, preprint.

CM rings of countable representation type

可算表現型の CM 環

川本琢二（名古屋大学理学部）

§1 一般論及び事実

(R, m) を単位元を持つ可換 d 次元ネーター局所環とする。

(1.1) 定義　有限生成 R-加群 M について depth $M = d$ が成り立つ時、M を極大 Cohen-Macaulay 加群（略して MCM 加群）という。特に R 自身 MCM R-加群となる時、R を Cohen-Macaulay 環（略して CM 環）という。

R の MCM 加群全体から成る圏を $C(R)$ と書く。

(1.2) 定義　$C(R)$ の直既約な対象の同型類全体が有限（可算、非可算）な時 R は有限（可算、非可算）表現型であると言う。

有限表現型に関しては、近年非常な進歩を遂げ、ほとんど調べ尽くされたと言って良い。以下、更に R をヘンゼル CM 局所環とする。

(1.3) 定理（[2] M. Auslander）　次の二条件は同値である。

(1.3.1) $C(R)$ は Auslander-Reiten 列を持つ。
(1.3.2) R は孤立特異点である。

(1.4) 定理（[2] M. Auslander）　R が有限表現型なら、孤立特異点である。従って特に $d \geqq 2$ なら整閉整域である。

これとは逆に、$C(R)$ に関する次の Brauer-Thrall 1型定理が成り立つ。

(1.5) 定理（[4] Y. Yoshino）　k を付値体でかつ完全体とし、R を k 上の CM 局所解析代数とする。もし R が孤立特異点であり、$C(R)$ の直既約な対象の重複度に上限があれば、R は有限表現型である。

$d=2$ の場合は有限群の不変式環として完全に決定できる。

(1.6) 定理 ([1] M. Auslander)　R は2次元完備整閉整域で、R の剰余体 $k=R/m$ は標数0の代数閉体とする。この時次の二条件は同値である。

(1.6.1)　R は有限表現型である。

(1.6.2)　$S=k[[x,y]]$ 及び有限群 G があって、G の2次元 k-ベクトル空間 $kx\oplus ky$ への線形作用が存在し、その自然な S への拡張によって $R=S^G$ となる。

次に R が C 上の解析超平面の場合に、有限表現型及び可算表現型の条件を述べる。

(1.7) 定義　$P:=\mathbb{C}\{x,y,z_2,\dots,z_d\}$ を $\mathbb{C}$ 上の収束巾級数環とする。超平面 $R:=P/(f)$ $(f\in P)$ が(Arnold の意味で)単純特異点であるとは、環同型の違いを除いて f が以下に列挙する A_k, D_k, E_6, E_7, E_8 のどれかに一致する時を言う。

$$A_k:\ f=x^{k+1}+y^2+z_2^2+\dots+z_d^2 \qquad k\geq 1$$
$$D_k:\ f=x^{k-1}+xy^2+z_2^2+\dots+z_d^2 \qquad k\geq 4$$
$$E_6:\ f=x^3+y^4+z_2^2+\dots+z_d^2$$
$$E_7:\ f=x^3+xy^3+z_2^2+\dots+z_d^2$$
$$E_8:\ f=x^3+y^5+z_2^2+\dots+z_d^2$$

次に A_k 及び D_k の k を無限大へ持っていったものとして A_∞ 及び D_∞ を以下の式で定義する。

$$A_\infty:\ f=y^2+z_2^2+\dots+z_d^2$$
$$D_\infty:\ f=xy^2+z_2^2+\dots+z_d^2$$

(1.8) 定理 ([3] R. Buchweitz, G. M. Greuel and F.-O. Schreyer)

(1.8.1)　C 上の解析超平面 R について、次の二条件は同値である。

(1.8.1.1)　R は有限表現型である。

(1.8.1.2)　R は単純特異点である。

(1.8.2)　　$\mathbb{C}$ 上の解析超平面 R について、次の二条件は同値である。

(1.8.2.1)　　R は可算表現型である。
(1.8.2.2)　　R は A_∞ 又は D_∞ である。

§2　定理

R がやや一般の場合について、可算表現型であるための条件を考えよう。

(R, m) を単位元を持つ可換な2次元ネーター CM 局所整域で整閉でないとし、標数が0で濃度非可算無限の剰余体 R/m を含むとする。$X^1(R)$ で R の高さ1の素イデアル全体を表わす。ねじれの無い有限生成 R-加群 M が、MCM R-加群である為の必要十分条件は、(2.1) 等式が $M \otimes_R Q(R)$ の中で成り立つ事である。

(2.1)
$$M = \bigcap_{p \in X^1(R)} M_p$$

ここで $Q(R)$ は R の商体である。

S を R の $Q(R)$ の中での整閉包とする。$S \in C(R)$ となることに注意する。さて、ここで R が $\mathbb{C}$ 上の解析超平面であるとする。(1.8.2) より、それは D_∞ しかない。そこで (2.2) 問題が考え得る。

(2.2) 問題　　(R, m) を単位元を持つ可換な2次元ネーター CM 局所整域で整閉でないとし、標数が0で濃度非可算無限の剰余体 R/m を含むとする。可算表現型となる R は、D_∞ 以外に存在するか？

ここではその部分的な結果として、R が可算表現型であるためのある必要条件を与えよう。

(2.3) 定理　　R が可算表現型なら、すべての $p \in X^1(R)$ について、

$$\dim_{\kappa(p)} S_p / p S_p \leq 3$$

が成り立つ。

まず、任意の $P \in X^1(S)$ について、$p := P \cap R \in X^1(R)$ と置き、$e(P)$ 及び $f(P)$ を以下のように定義する。

$$(2.4) \qquad \begin{gathered} pS_P = P^{e(P)}S_P \\ f(P) = [\kappa(P) : \kappa(p)] \end{gathered}$$

ここで、$\kappa(P) = S_P/PS_P$、$\kappa(p) = R_p/pR_p$ である。

次に補題を準備する。

(2.5) 補題　$P \in X^1(S)$ を取り $p := P \cap R$ と置く。もし $e(P) = f(P) = 1$ が成り立てば、$S_P = R_p$ である。

証明　(2.4) 定義及び、中山の補題より直ちに出る。▫

(2.6) 補題　一般に、A を整域、K をその商体とし、B, C を K の中の A-代数とする。この時、$B \cong C$ と $B = C$ は同値である。

証明　$B \cong C$ とする。$x \in K$ が存在して $B = xC$ となる。$1 \in C$ より $x \in B$。よって $xB \subset B = xC$ だから $B \subset C$。同じく $C \subset B$ だから $B = C$ である。▫

(2.7) 補題　$p \in X^1(R)$ とする。N をねじれの無い有限生成 R_p-加群とすると、MCM R-加群 M が存在して、$N = M_p$ が成り立つ。

証明　自由 R-加群 F $(\subset N \otimes_R Q(R))$ で、$N \otimes_R Q(R) = F \otimes_R Q(R)$ 及び、$N \subset F_p$ が成り立つものが存在する。実際、$N \otimes_R Q(R)$ の $Q(R)$ 上の基底を取り、それで生成された自由 R-加群を G と置くと、N が R_p 上有限生成だから、共通分母 $d \in R$ が存在して $N \subset \frac{1}{d}G_p$ となるので、$F := \frac{1}{d}G$ とすれば良い。
この時、$M := N \cap F$ と置くと、

$$M_q = \begin{cases} N_p \cap F_p = N & q = p \\ N_q \cap F_q = F_q & q \neq p \end{cases}$$

より、(2.1) 等式は成り立つ。更に、M は有限生成 R-加群 F の部分加群だから M も有限生成よって、MCM 加群である。▫

(2.5) 補題により、定理を証明する為には以下の４つの場合（(2.8.1)〜(2.8.4)）に R が非可算表現型となる事を言えば良い。

(2.8.1)　　$P \in X^1(S)$ があって、

$$e(P) \geqq 4 \text{ 或いは、}$$
$$e(P) \geqq 2 \text{ かつ } f(P) \geqq 2$$

が成り立つ。

(2.8.2)　　$P \in X^1(S)$ で $f(P) \geqq 4$ となるものが存在する。

(2.8.3)　　$P \cap R = Q \cap R$ であるような $P, Q \in X^1(S)$ が存在して、

$$e(P) = 2, 3,\ f(P) = 1,\ e(Q) = 2, 3, \text{ 及び } f(Q) = 1$$

が成り立つ。

(2.8.4)　　$P \cap R = Q \cap R$ であるような $P, Q \in X^1(S)$ が存在して、

$$e(P) = 1,\ f(P) = 2, 3. \text{ 及び } e(Q)f(Q) = 2, 3$$

が成り立つ。

定理の証明

(i) (2.8.1) 及び、(2.8.3) の場合。

(2.9.1) 命題　　ある $p \in \mathrm{Spec}(R)$ 及び、R_p-代数 $R_p \subset T \subset S_p$ が存在して、

$$\dim_{\kappa(p)} \mathrm{Soc}(T/(pS_p \cap T)) \geqq 2$$

なら、R は非可算表現型である。

証明　　まず、$T/(pS_p \cap T)$ は T の S_p/pS_p に於ける像であることに注意する。$x, y \in \mathrm{Soc}(T/(pS_p \cap T))$ を $\kappa(p)$ 上一次独立になるように取る。任意の点

$(\lambda:\mu)\in \mathrm{P}^1_{\kappa(p)}$ に対し、$\lambda x+\mu y$ の S_p の中での逆像を $\phi(\lambda:\mu)$と置き、$A(\lambda:\mu):=R_p[\phi(\lambda:\mu)]$ を S_p の中の R_p-代数とする。S_p は R_p-加群として有限生成だから $A(\lambda:\mu)$ もそうである。従って (2.7) 補題により MCM R-加群 $M(\lambda:\mu)$ が存在して、$M(\lambda:\mu)_p=A(\lambda:\mu)$ が成り立つ。

さて、$M(\lambda:\mu)\cong M(\lambda':\mu')$ と仮定しよう。(2.6) 補題により、$A(\lambda:\mu)$ と $A(\lambda':\mu')$ は等しい。しかし、その作り方から $(\lambda:\mu)=(\lambda':\mu')$ でない限りこれらの S_p/pS_p に於ける像は等しくなり得ない。

$\mathrm{P}^1_{\kappa(p)}$ は非可算無限集合だから、R は非可算表現型である。▫

(2.9.1) 命題から直ぐに (2.9.2) 系、(2.9.3) 系が得られる。

(2.9.2) 系　　$P\in X^1(S)$ があって、

$$e(P)\geqq 4 \text{ 或いは、}$$
$$e(P)\geqq 2 \text{ かつ } f(P)\geqq 2$$

が成り立てば R は非可算表現型である。

証明　(2.9.1) の p として $P\cap R$ を取り、$X^1(S_p)=\{P_1(=P),\dots,P_k\}$ とし、P_i に於ける離散付値をそれぞれ v_i とする時 $\pi\in S_p$ を、

$$v_i(\pi)=\begin{cases}1 & i=1\\ e(P_i) & 2\leqq i\leqq k\end{cases}$$

が成り立つ様に取る。(2.9.1) の T として、

$$T:=\begin{cases}R_p[\pi^{e(P)-2},\pi^{e(P)-1}] & e(P)\geqq 4 \text{ の場合}\\ R_p[S_p\pi^{e(P)-1}] & e(P)\geqq 2 \text{ かつ } f(P)\geqq 2 \text{ の場合}\end{cases}$$

とすれば良い。▫

(2.9.3) 系　　$P\cap R=Q\cap R$ であるような $P, Q\in X^1(S)$ が存在して、

$$e(P)>1 \text{ 及び } e(Q)>1$$

が成り立てば R は非可算表現型である。

証明　p として $P\cap R=Q\cap R$ を取り、$X^1(S_p)=\{P_1(=P), P_2(=Q), \ldots, P_k\}$ とし、P_i に於ける離散付値をそれぞれ v_i とする時 $\pi_1, \pi_2\in S_p$ を、

$$v_i(\pi_j)=\begin{cases} 1 & i=j \\ e(P_i) & 1\leqq i\leqq k,\ i\neq j \end{cases}$$

が成り立つ様に取り、T として $R_p[\pi_1^{e(P)-1}, \pi_2^{e(Q)-1}]$ とすれば良い。▫

(ii) (2.8.2) の場合。

(2.10) 命題　$P\in X^1(S)$ で $f(P)\geqq 4$ となるものが存在すれば R は非可算表現型である。

証明　$K:=k(p)$, $L:=k(P)$ と置く。$\kappa(p)$ は標数0だから、L/K は単純拡大である。$x\in L$ を $L=K(x)$ となるように取る。ここで $[L:K]=4$ の時は x を取り替えて、最小多項式が X^4+aX^2+bX+c の形であるとして良い。

任意の $\lambda\in K^*$ に対し S_p に於ける $x^2+\lambda x$ の逆像を $\phi(\lambda)$ と置き、1と $\phi(\lambda)$ で生成された R_p-加群を $A(\lambda)$ と書く。(2.7) 補題により、MCM R-加群 $M(\lambda)$ があって $M(\lambda)_p=A(\lambda)$ が成り立つ。さて、$M(\lambda)\cong M(\mu)$ としよう。$A(\lambda)\cong A(\mu)$ だから以下の等式を得る。

$$x^2+\mu x=y\{\alpha(x^2+\lambda x)+\beta\}\ ,\quad 1=y\{\gamma(x^2+\lambda x)+\delta\}$$
$$^\exists y\in L,\ ^\exists\alpha,\beta,\gamma,\delta\in K\quad(\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0)$$

これから $\mu=\pm\lambda$ が導かれる。K^* は非可算無限だから、R は非可算表現型である。▫

(iii) (2.8.4) の場合。

(2.11) 命題　$P\cap R=Q\cap R$ であるような $P, Q\in X^1(S)$ が存在して、

$$e(P)=1,\ f(P)=2, 3,\ \text{及び}\ e(Q)f(Q)=2, 3$$

が成り立てば R は非可算表現型である。

証明

$$K:=\kappa(p)$$
$$L:=\kappa(P)$$
$$M:=\begin{cases} S_Q/Q^2S_Q & f(Q)=1 \text{ の場合} \\ \kappa(Q) & e(Q)=1 \text{ の場合}\end{cases}$$
$$V:=L\times M$$

と置く。仮定より V は K-ベクトル空間であり、自然な全射 $S_P\to V$ が存在する。

$x\in L$ を、$L=K(x)$ となるように取る。更に $f(P)=2$ の時は x の最小多項式が X^2+a という形であるとして良い。次に $y\in M$ を以下のように取る。

i) $f(Q)=1$ の場合

$$S_Q/Q^2S_Q=K\oplus Ky \quad (y^2=0)$$

ii) $e(Q)=1$ の場合

$$\kappa(Q)=K(y)$$

($f(Q)=2$ の場合は、y の最小多項式が Y^2+b の形であるとして良い。)

任意の $\lambda\in K^*$ に対し、S_P に於ける $(x,\lambda y)$ の逆像を $\phi(\lambda)$ と置き、1と $\phi(\lambda)$ で生成された R_P-加群を $A(\lambda)$ と書く。(2.7) 補題により、MCM R-加群 $M(\lambda)$ があって $M(\lambda)_P=A(\lambda)$ が成り立つ。さて、$M(\lambda)\cong M(\mu)$ としよう。(2.10) 命題と同様、等式

$$x=z(\alpha x+\beta)\quad,\quad 1=z(\gamma x+\delta)$$
$$\mu y=w(\alpha\lambda y+\beta)\quad,\quad 1=w(\gamma\lambda y+\delta)$$
$$^{\exists}z\in L,\ ^{\exists}w\in M,\ ^{\exists}\alpha,\beta,\gamma,\delta\in K\quad(\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0)$$

を得るが、これより $\mu=\lambda$ 又は $\lambda\mu=\dfrac{a}{b}$ が導かれる。K^* は非可算無限だから、R は非可算表現型である。□

§3 例

(3.1) 例　　$\mathbf{C}$ 上の2次元 D_∞ 型解析超平面 $R:=\mathbf{C}\{a,b,c\}/(a^2c-b^2)=\mathbf{C}\{x,xy,y^2\}$ $(x:=a,\ y:=\dfrac{b}{a})$ を考える。(1.8.2) により、R は可算表現

型である。さて、R の整閉包は $S:=\mathbb{C}\{x,y\}$ で、$P:=xS\in X^1(S)$ と置くと $e(P)=1$, $f(P)=2$ であり、他の $X^1(S)$ の点 Q に関しては $e(Q)=f(Q)=1$ となる。従って $p:=P\cap R$ とすると、

$$\dim_{\kappa(q)} S_q/qS_q=\begin{cases}2 & q=p \\ 1 & q\neq p\end{cases}\qquad q\in X^1(R)$$

である。

(3.2) 例　k を標数 0 で濃度が非可算無限である体とし、$R:=k[[x^2,y^2,x^3,x^2y,x^3y]]$ と置く。すると、R は超平面でない CM-環であり、その整閉包は $S:=k[[x,y]]$ となる。$P:=xS\in X^1(S)$ と置くと $e(P)=f(P)=2$ であり、他の $X^1(S)$ の点 Q に関しては $e(Q)=f(Q)=1$ となる。よって $p:=P\cap R$ に対して、

$$\dim_{\kappa(p)} S_p/pS_p=4$$

だから、(2.3) 定理により R は非可算表現型である。

(3.3) 例　k を標数 0 の非可算無限体とし、$R:=k[[x,xy,xy^2,y^3]]$ と置くと、やはり R は超平面でない CM-環で、$S:=k[[x,y]]$ が R の整閉包である。$P:=xS\in X^1(S)$ とすると、$e(P)=1$, $f(P)=3$ であり、他の $X^1(S)$ の点 Q に関しては $e(Q)=f(Q)=1$ となる。従って $p:=P\cap R$ とすると、

$$\dim_{\kappa(q)} S_q/qS_q=\begin{cases}3 & q=p \\ 1 & q\neq p\end{cases}\qquad q\in X^1(R)$$

である。(1.4) 定理により、R は無限表現型にはなるが、はたしてこれが可算表現型になるかどうかはまだ分からない。(3.1) 例以外にもし可算表現型があるとしたら、この例が一番簡単なものであると思われる。

参考文献

[1] M. Auslander: Rational singularities and almost split sequences, Trans. AMS 293, no.2 (1986), 511-531.

[2] M. Auslander: Isolated singularities and existence of almost split sequences, Proc. ICRA IV, Springer Lecture Notes in Math. 1178 (1986), 194-241.

[3] R. Buchweitz, G. M. Greuel and F.-O. Schreyer: Cohen-Macaulay modules over hypersurface singularities II, preprint, Universitat Kaiserslautern (1986).

[4] Y. Yoshino: Brauer-Thrall type theorem for maximal Cohen-Macaulay modules, J. Math. Soc. Japan, vol. 39, No. 4 (1987), 719-739.

Level complex について

京大・理　　宮崎 充弘

1. Stanley-Reisner環

Kを体とし、K上の多項式環$A=K[x_1,\dots,x_n]$をmonomialで生成されたイデアルIで割った環を考えたいとする。

$$I=(m_1,m_2,\dots,m_t),\quad m_i=x_1^{i_1},\dots,x_n^{i_n}$$

とするとき、新しい変数$x_{11},x_{12},\dots,x_{21},x_{22},\dots,x_{n1},x_{n2},\dots$を用意して、

$$m_i'=x_{11}x_{12}\cdots x_{1i_1}x_{21}x_{22}\cdots x_{ni_n}$$

とおき、

$$I'=(m_1',\dots,m_t')$$

を$A'=K[x_{ij}\mid x_{ij}$は$m_1',m_2',\dots,m_t'$の中に現れる$]$ のイデアルとすれば、A/IはA'/I'をregular sequence $x_{11}-x_{12},x_{11}-x_{13},\dots,x_{21}-x_{22},\dots,x_{n1}-x_{n2},\dots$で生成されるイデアルで割った環になる。従って多くの問題を考えるにあたって、Iはsquare freeなmonomialで生成されていると考えて良いことになる。そこで以下では、Iがsquare freeなmonomialで生成されているとする。

$V=\{x_1,\dots,x_n\}$を変数全体の集合とし、$\Delta=\{\sigma\subset V\mid(\prod_{x\in\sigma}x)\notin I\}$とおけば$\Delta$は、

（ｉ）$\sigma\in\Delta$、$\tau\subset\sigma$ ⇒ $\tau\in\Delta$

をみたす。さらに、余分な変数を取り除いて、すべての$x\in V$に対して、$x\notin I$であるとすれば、

（ｉｉ）すべての$x\in V$に対し、$\{x\}\in\Delta$

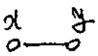
となり、ΔはVを頂点集合とする有限単体複体であることがわかる。

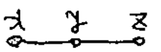
逆に、Vを頂点集合とする有限単体複体Δが与えられたとき、Vの元をそのまま変数だと思って多項式環$K[x\mid x\in V]$をつくり、

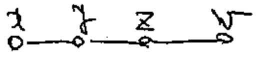
$$I_\Delta=(x_{i_1}\cdots x_{i_t}\mid\{x_{i_1},\dots,x_{i_t}\}\notin\Delta)$$

とすれば、I_Δはsquare free なmonomialで生成されたイデアルになり、この対応により、Vを頂点集合とする有限単体複体と、$K[x\mid x\in V]$の、変数を含まない、square freeなmonimialで生成されたイデアルとは１対１に対応する。従って、多項式環をmonomialで生成されたイデアルで割った環の研究は、有限単体複体の研究に置き換えられることになる。そこで$K[x\mid x\in V]/I_\Delta$を$K[\Delta]$と書き表し、Stanley-Reisner環と呼ぶ。

Example

$\Delta=$  $K[\Delta]=K[x,y]$

$\Delta=$  $K[\Delta]=K[x,y,z]/(xz)$

$\Delta=$ 

$K[\Delta]=K[x,y,z,w]/(xz,xw,yw)$

Δが有限単体複体であるとき、Δの元のことをΔのfaceと呼び、極大なfaceのことをfacetと呼ぶ。このとき、

$$I_\Delta = \cap_{\sigma:\text{facet}} P_\sigma$$

（但し、$P_\sigma = (x \in V \mid x \notin \sigma)$）は$I_\Delta$のprimary decompositionなので、$K[\Delta]$はreduced ringである。また、

$$\dim K[\Delta] = \max \operatorname{coht} P_\sigma = \dim \Delta + 1$$

であることもわかる。

$K[\Delta]$がCohen-Macaulayであるときに、ΔはK上Cohen-Macaulayであるという。以下、体Kを固定して話を進めるので、「K上」という言葉は省略する。また以下では、多項式環$k[x \mid x \in V]$をAで表し、その変数で生成された極大イデアル$(x \mid x \in V)$を$\mathfrak{m}$で表す。

2. Level graded rings

$$R = R_0 \oplus R_1 \oplus \ldots$$

を体K上のstandard G-algebra すなわち $R_0 = K, R = K[R_1]$ を満たすものとする。また、 $\dim R = d, \dim_K R_1 = n$であるとし、以下ことわらずにこの記号を使う。このとき、Rは体K上のn変数多項式環Aの準同型像と考えられる。従ってRのgraded A-moduleとしてのminimal free resolution

$$\ldots \to F_i \to \ldots \to F_1 \to F_0 \to R \to 0$$

が作れる。このとき

Ｆａｃｔ２・１

$$\operatorname{depth} R = n - \max\{i \mid F_i \neq 0\}$$

いま、RはCohen-Macaulay（すなわち$\operatorname{depth} R = \dim R$）であるとすると、$F_{n-d} \neq 0$, $F_{n-d+1} = 0$であることがわかる。そこで、free module F_{n-d}のrankを$\operatorname{type}(R)$で表すことにする。

一般に、stndard G-algebra Rに対し、RのPoincare series $F(R, \lambda)$を

$$F(R, \lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} (\dim_K R_m) \lambda^m$$

によって定義する。このとき

Ｆａｃｔ２・２

$$F(R, \lambda)(1-\lambda)^d \in \mathbb{Z}[\lambda]$$

そこで

$$F(R, \lambda)(1-\lambda)^d = h_0 + h_1 \lambda + \ldots + h_s \lambda^s \quad (h_s \neq 0)$$

と表し、$(h_0, h_1, \ldots, h_s)$をRのh-vectorと呼ぶ。

以後RはCohen-Macaulayであるとする。このときRのhomogeneous system of parameters $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d$（$\mathfrak{m}$に含まれるhomogeneous elementsで、$\dim R/(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d) = 0$となるもの）をとれば、$\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d$はR-regular sequence なので、$R_{(i)} = R/(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i)$ とおけば、次のよう

な（graded A-moduleの）exact sequence が得られる。

$$0\to R_{(i)}(-a_i)\xrightarrow{\theta_{i+1}}R_{(i)}\to R_{(i+1)}\to 0 \qquad (*)$$

但し $a_i=\deg\theta_i$。また一般に、graded module M に対し、$(M(t))_s=M_{t+s}$。
よって、

$$F(R_{(i+1)},\lambda)=F(R_{(i)},\lambda)(1-\lambda^{a_i})$$

これを繰り返すことにより、次の式が得られる。

$$F(R_{(d)},\lambda)=F(R,\lambda)\Pi_{i=1}^{d}(1-\lambda^{a_i})$$

$R_{(d)}$（=Sとおく）はArtin環なので、

$$F(S,\lambda)=h'_0+h'_1\lambda+\ldots+h'_{s'}\lambda^{s'}$$

とおけば、

$$h_s=h'_{s'}$$

一方、（＊）から導かれる long exact sequence を考えれば、

$$\mathrm{Tor}^A_{n-d}(R,K)\cong\mathrm{Tor}^A_n(S,K)(a_1+a_2+\ldots+a_d)$$

となることがわかる。ここで、

$$\mathrm{Tor}^A_{n-d}(R,K)=F_{n-d}\otimes K$$

$$\mathrm{Tor}^A_n(S,K)=0\underset{S}{:}m$$

（Koszul complexを考えよ）であり、

$$(0\underset{S}{:}m)\supseteq S_{s'}$$

なので、

$$\mathrm{type}(R)=\dim_K(F_{n-d}\otimes K)=\dim_K(0\underset{S}{:}m)\geq h'_{s'}=h_s$$

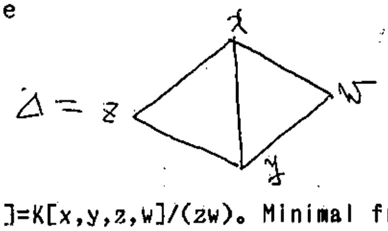
となる。

定義２・３（［６］参照）
Rが Cohen-Macaulayで、$h_s=\mathrm{type}(R)$であるとき、Rはlevelであるという。
また、Stanley-Reisner環$K[\Delta]$は standard G-algebra の構造を持つので、
$K[\Delta]$が level のときに、Δは（K上） level であるという。

容易にわかるように

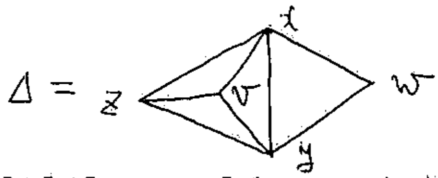
命題２・４
Rが level ⇔ $F_{n-d}=R^l(t)$ を満たす整数 l,t が存在する。

Example



$K[\Delta]=K[x,y,z,w]/(zw)$。Minimal free resolutionは

$0 \to A(0,0,-1,-1) \to A \to K[\Delta] \to 0$



$K[\Delta]=K[x,y,z,w,v]/(xyz,zw,vw)$。Minimal free resolutionは

$0 \to A(-1,-1,-1,-1,0) \oplus A(0,0,-1,-1,-1)$

$\to A(-1,-1,-1,0,0) \oplus A(0,0,-1,-1,0) \oplus A(0,0,0,-1,-1) \to K[\Delta] \to 0$

3．2-Cohen-Macaulay complexes

次に、Baclawski［１］によって定義された2-Cohen-Macaulay（doubly Cohen-Macaulay）complexの概念について述べる。

定義３・１　Δが（K上）Cohen-Macaulayで、かつ、任意の$x \in V$に対してΔからxを取り除いて得られる複体（xを含むfaceはすべて除かれる）$\Delta \setminus x$もCohen-Macaulayで、$\dim\Delta=\dim(\Delta \setminus x)$であるときに、Δは（K上）2-Cohen-Macaulayであるという。

次に、Baclawskiによる2-Cohen-Macaulay complexの特徴付けについて述べる。以下では$\dim\Delta=d-1$($\dim K[\Delta]=d$)であるとし、Δの頂点集合をVで表し、$\#V=n$であるとする。

$$\cdots \to F_i \to \cdots \to F_1 \to F_0 \to K[\Delta] \to 0 \qquad (**)$$

を$K[\Delta]$のZ^n graded A-moduleとしてのminimal free resolutionとする。このとき、

定理３・２（Hochster［３］）　任意の$\alpha \in Z^n$に対し、

$$\mathrm{Tor}_i^A(K[\Delta],K)_\alpha = \begin{cases} \tilde{H}_{\#\mathrm{supp}\,\alpha-i-1}(\Delta_{\mathrm{supp}\,\alpha}) & \text{if } \alpha \in \{0,1\}^n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ただし、$\mathrm{supp}\,\alpha=\{x_j \mid \alpha_j \neq 0\}$。また、Vの部分集合Wに対し、$\Delta_W=\{\sigma \in \Delta \mid \sigma \subset W\}$。

任意の$x \in V$に対し、$K[\Delta]$のxに関するdegreeが0の部分は$K[\Delta \setminus x]$なので、（＊＊）のxに関するdegreeが0の部分を

$$\cdots \to G_i \to \cdots \to G_1 \to G_0 \to K[\Delta \setminus x] \to 0$$

とすれば、Ｆａｃｔ２・１により、

$\Delta \setminus x$がCohen-Macaulayで、$\dim(\Delta \setminus x)=d-1 \Leftrightarrow G_{n-d}=0$

xをV全体にわたって走らせることにより、次の定理を得る（Hochsterの定理に注意）。

定理３・３（Baclawski）　ΔがCohen-Macaulayのとき、次は同値。

（１）Δは2-Cohen-Macaulay。

（２）$F_{n-d}=A^l(-1,-1,\ldots,-1)$を満たす正整数$l$が存在する。

系３・４　2-Cohen-Macaulay complexはlevel。

ところで、ΔがCohen-Macaulayであるとき

$\tilde{H}_i(\Delta;K)=0$　(if $i<\dim\Delta$)

なので、

$|\tilde{\chi}(\Delta)|=\dim_K(\tilde{H}_{d-1}(\Delta;K))=\dim_K(F_{n-d}\otimes K)_{(1,\ldots,1)}$

（Hochsterの定理に注意）。従って、

命題３・５　ΔがCohen-Macaulayのとき、次は同値。

（１）Δは2-Cohen-Macaulay。

（２）Δはlevelで$\tilde{\chi}(\Delta)\neq 0$。

いくつかの例でみたように、二つの複体Δ_1とΔ_2の幾何学的実現が同相であったとしても、それらのStanley-Reisner環の間にはほとんどなんの関係もない。ところが、Cohen-Macaulay、2-Cohen-Macaulayという性質は同相なもので置き換えても保たれることが知られている。

定理３・６（Reisner［７］,Munkres［６］）　次は同値。

（１）ΔはCohen-Macaulay。

（２）$|\Delta|=X$とするとき、

$\forall p\in X, \forall i<\dim X; \tilde{H}_i(X;K)=H_i(X,X-p;K)=0$

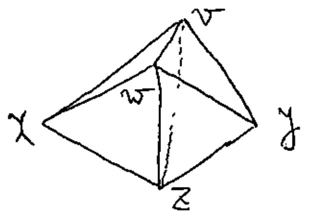
定理３・７（Walker［１０］。［４］に別証明あり。）　ΔがCohen-Macaulayであるとき、次は同値。

（１）Δは2-Cohen-Macaulay。

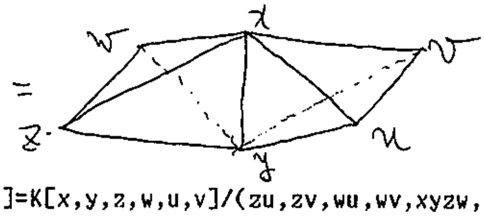
（２）$|\Delta|=X$とするとき、

$\forall p\in X; \tilde{H}_{\dim X-1}(X-p;K)=0$

Example

Δ =


$K[\Delta]=K[x,y,z,w,v]/(xy,xzwv,yzwv)$　2-Cohen-Macaulay

Δ =


$K[\Delta]=K[x,y,z,w,u,v]/(zu,zv,wu,wv,xyzw,xyuv)$

Cohen-Macaulayであるがlevelでない

4．重心細分

前にあげた例でみたように、levelという性質は三角形分割の仕方に依存する。ところが、$\tilde{\chi}(\Delta)\neq 0$（これは同相な複体で置き換えても保たれる）であるときは、levelという性質は同相の複体で置き換えても保たれることが前節でわかった。そこで、$\tilde{\chi}(\Delta)=0$の場合について考えてみたところ、次のような結果が得られた（詳細については［5］参照）。

定理4・1　ΔがCohen-Macaulayで、$\tilde{\chi}(\Delta)=0$であるとき、Δの重心細分はlevel。

証明　$\Gamma=sd(\Delta)$をΔの重心細分、$V=\Delta-\{\phi\}$をΓの頂点集合とする。また、$\dim\Delta=\dim\Gamma=d-1, \#V=n$とする。

$$\ldots\to F_i\to\ldots\to F_1\to F_0\to K[\Gamma]\to 0$$

を$K[\Gamma]$の$A=K[x|x\in V]$-moduleとしてのminimal free resolution とすると、

主張　$F_{n-d}\otimes K=(F_{n-d}\otimes K)_{n-1}$

証明　Hochsterの定理により、

$$(F_{n-d}\otimes K)_{n-k}=\oplus_{W\subset V,\#W=k}\tilde{H}_{d-\#W-1}(\Gamma_{V-W};K)$$

なので、$\#W\neq 1$のときに

$$\tilde{H}_{d-\#W-1}(\Gamma_{V-W};K)=0$$

であることを示せばよい。$W=\phi$のときは仮定から、

$$\dim_K\tilde{H}_{d-\#W-1}(\Gamma_{V-W};K)=|\tilde{\chi}(\Gamma)|=0。$$

次に$\#W\geqq 2$とする。

Case 1　$\{x,y\}\not\in\Gamma$であるような$x,y\in W$が存在する場合。

Short exact sequence

$$0\to K[star_\Gamma(x)]\oplus K[star_\Gamma(y)]\to K[\Gamma]\to K[\Gamma_{V-\{x,y\}}]\to 0$$

（［2］参照。ただし$star_\Gamma(x)=\{\sigma\in\Gamma\mid\sigma\cup\{x\}\in\Gamma\}$）から次のexact sequenceが得られる。

$$Tor_i^A(K[\Gamma],K)\to Tor_i^A(K[\Gamma_{V-\{x,y\}}],K)$$
$$\to Tor_{i+1}^A(K[star_\Gamma(x)],K)\oplus Tor_{i+1}^A(K[star_\Gamma(y)],K)$$

ここで$K[star_\Gamma(x)]$は$K[link_\Gamma(x)]$上の一変数多項式環で、

$$K[\Gamma]_x=K[link_\Gamma(x)][x,x^{-1}]$$

なので、$star_\Gamma(x)$はCohen-Macaulay（ただし$link_\Gamma(x)=\{\sigma\in\Gamma\mid\sigma\cup\{x\}\in\Gamma, x\not\in\sigma\}$）。従って、

$$Tor_i^A(K[\Gamma_{V-\{x,y\}}],K)=0\quad \text{if}\quad i>n-d+1$$

よってHochsterの定理から、

$$\tilde{H}_{d-\#W-1}(\Gamma_{V-W};K)$$

$=\tilde{H}_{(d-2)-\#(W-\{x,y\})-1}(\Gamma_{V-\{x,y\}-(W-\{x,y\})};K)$

$<\oplus \mathrm{Tor}^A_{n-(d-2)}(K[\Gamma_{V-\{x,y\}}],K)=0$

Case 2　$W\in\Gamma$のとき。

$W=\{\tau_1,\tau_2,\ldots,\tau_t\}$, $\tau_1\subset\tau_2\subset\ldots\subset\tau_t$とする。

$\Delta_1=\Delta\setminus\tau_1=\{\tau\in\Delta \mid \tau\supsetneq\tau_1\}$とおけば、幾何学的考察により$\Delta_1$と$\Gamma_{V-W}$の幾何学的実現が同じホモトピータイプを持つことがわかる。同じ理由により、Δ_1と$\Gamma_{V-\{\tau_1\}}$の実現も、同じホモトピータイプを持つ。よってHochsterの定理により、

$\tilde{H}_{d-\#W-1}(\Gamma_{V-W};K)=\tilde{H}_{(d-(\#W-1))-\#\{\tau_1\}-1}(\Gamma_{V-\{\tau_1\}};K)$

$<\oplus \mathrm{Tor}^A_{n-(d-(\#W-1))}(K[\Gamma],K)=0$　証明終

この結果と2-Cohen-Macaulay complexに関する結果を合わせて、

系4・2　Δと同相な複体Δ_1でlevelであるものが存在すれば、(特にΔがlevelであれば) Δの重心細分はlevel。

証明　$\tilde{\chi}(\Delta)\neq 0$のときは$\Delta_1$は2-Cohen-Macaulayなので、Reisner,Munkres,Walkerの定理によりΔ、sd(Δ)もlevel。一方、Reisner,Munkresの定理によりΔはCohen-Macaulayなので、$\tilde{\chi}(\Delta)=0$のときは、前定理によりsd(Δ)はlevel。
証明終

文献表

1. K.Baclawski, Cohen-Macaulay connectivity and geometric lattices, European J. Combinatorics 3 (1982), 293-305.

2. T.Hibi, Union and Glueing of a Family of Cohen-Macaulay Partially Ordered Sets, Nagoya Math. J. 107 (1987),91-119.

3. M.Hochster, Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes, Ring Theory II, Proc. of the second Oklahoma Conf. (B.R.McDonald and R.Morris, ed.), Lect. Notes in Pure and Appl. Math., No.26, Dekker, New York, 1977, 171-223.

4. M.Miyazaki, On 2-Buchsbaum complexes, preprint.

5. M.Miyazaki, Level complexes and barycentric subdivisions, preprint.

6. J.Munkres, Topological results in combinatorics, Michigan Math. J. 31 (1984), 113-128.

7. G.Reisner, Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings, Advances in Math. 21 (1976), 30-49.

8. R.Stanley, Cohen-Macaulay Complexes, in Higher Combinatorics (M.Aigner, ed.), Reidel, Dordrecht and Boston, 1977, pp. 51-62.

9. R.Stanley, "Combinatorics and Commutative Algebra", Progress in Math., Vol.41, Birkhauser, Boston/ Basel/ Stuttgart, 1983

10. J.W.Walker, Topology and combinatorics of ordered sets, Thesis M.I.T., (1981)