第４回

多元環の表現論シンポジュウム

報告集

1993年2月

於　静岡県南伊豆国民休暇村

序

この報告集は，１９９３年2月１５日から１７日までの3日間，静岡県南伊豆国民休暇村に於いて開催された第４回「多元環の表現論シンポジウム」での講演の記録です．

多元環の表現論について，現在は「有限表現型」に関する理論がある程度完成したと考えられ,「無限表現型」の話題を含め次のスッテップに向けて種々の可能性を模索する段階であるように思われます．今回は，このうちで（可換及び非可換）環や有限群の表現論に於けるホモロジー代数的乃至カテゴリー的手法に重点を置いて，今後の発展の方向を探る目的で企画されました．

講演者の旅費，報告集の出版費等の開催に必要な諸経費は，平成４年度，５年度文部省科学研究費（総合研究（Ａ），課題番号０４３０２００１，森田康夫東北大学教授）に依頼しました．

また，講演依頼に関して，東海大学の渡辺敬一先生，長崎大学の西田憲司先生，信州大学の岩永恭雄先生には御助力をお願いしました．

ここで，御講演ならびに報告集の作製等に御協力下さった諸大学の先生方に心より感謝し厚くお礼申し上げます．

１９９３年１０月

埼玉大学教育学部　　若松隆義

目次

講演プログラム

2月15日（月）

9：00－10：00　山形邦夫（筑波大・数学）
多元環の被約カルタン行列と行列式問題

10：15－11：15　岩永恭雄（信州大・教育）
Minimal Injective Resolution and Syzygy Modules over a Non-Commutative Gorenstein Ring

11：30－12：30　飛田明彦（千葉大・自然科学）
On Projective Modules over Group Algebras of Finite p-Solvable Groups of p-Length 2

14：00－15：00　浅沼照雄（富山大・教育）
多項式環とその周辺

15：15－16：15　佐藤真久（山梨大・教育）
完備局所環と次数付き可換多元環

16：30－17：30　太刀川弘幸（筑波大・数学）
Nakayama 予想とホモロジー群の消滅について

2月16日（火）

9：00－10：00　高谷　進（筑波大・数学）
チューブとそのランクについて

10：15－11：15　宮地淳一（東京学芸大・教育）
derived category と表現論

11：30－12：30　奥山哲郎（大阪市立大・理）
Derived Equivalence and Perfect Isometry I

14：00－15：00　土方弘明（京都大・理）
Bass Orders in Non-Semisimple Algebras

15：15－16：15　吉野雄二（京都大・総合人間）
Cohen-Macaurey Approximation について

16：30－17：30　渡辺敬一（東海大・理）
Ten Characterizations of Gorenstein Rings

2月17日（水）

9：00－10：00　高島紳介（大阪市立大・理）
Modules of Finite Length over their Endomorphism Rings

10：15－11：15　宇佐美陽子（お茶の水大・理）
Derived Equivalence and Perfect Isometry II

多元環のカルタン行列式問題について

筑波大学数学系　山形邦夫

1

体上の（有限次元）多元環 A のカルタン行列 $C(A)$ の行列式について、A の大局次元が有限の場合に $\det C(A)$ が ± 1 になるという事実が、1954 年に Eilenberg によって証明された [3]．しかし、実際には「みんな」$+1$ になるものなかりで、-1 になるような大局次元有限な多元環は見つかっていない．1980 年に、第 3 回多元環の表現論国際研究集会がメキシコのプエブラ市で開催された時に、この行列式について誰かと話し合った記憶があるのですでに 80 年には誰かが行列式の問題について研究し、ある多元環について行列式が 1 になることを証明していたのではないかと思う.（雑誌には、83 年に Zacharia が大局次元 2 のものに対して行列式が 1 になることを発表しているので、もしかしたら Zacharia か Auslander のグループ（当時 Zacharia は Auslander のいる Brandeis 大学の大学院生だった）の誰かが雑談の中で行列式問題を話題にしていたのかもしれない.）誰にしても問題にしだしたのはアメリカのグループであることには間違いなさそうである．同じように、いつの間にか未解決問題としてアメリカのグループが話題にし始めたものに「ループ予想」と呼ばれていたものがある．これは、「$\mathrm{Ext}_A^1(S,S) \neq 0$ となる単純加群 S があれば、多元環 A は無限な大局次元をもつ」というものである.（日本でも 1980 年代中頃に丹原大介さんが、アメリカのグループとは独立に、別の研究からこのループ予想を意識していた.）しかし、これはほとんどアメリカのグループの周辺でのみ強く関心をもたれていたらしい．実際、89 年に Igusa (Brandeis) が解決したと言う情報をビーレフェルト大学のセミナーで聞いた Lenzing (Paderborn) は、このような問題があったということをそこで初めて知ったそうである．そしてその場で 1968 年に発表している本人の結果からループ予想は明らかであるということを注意したとのことで、現在「Igusa-Lenzing の定理」と呼ばれている．振り返って、カルタン行列式に関する上述の問題も、あまり多くの人の研究対象とはなっていないようなので（関心の有無ではない）、もしかしたらすでに得られている結果から容易に結論されるのか、あるいは「アイデア一つで決まり」ということになる程度なのかもしれない、と思うこともある．

本稿では準遺伝多元環に対する行列式問題と、[8] で得られた公式のより簡単な証明およびそれに関る問題などを紹介する．

2

A を（有限次元）多元環とし、$K_0(\mathrm{mod}\,A)$ 、 $K_0(\mathcal{P}(A))$ をそれぞれ有限生成 A-加群のなすカテゴリーの Grothendieck 群、有限生成射影 A-加群のなすカテゴリーの Grothendieck 群とする．加群 X を含む $K_0(?)$ の元を $[X]$ で表わし、$S_1,\ldots,S_n$ を 互いに非同型な単純 A-加群とすると、$K_0(\mathrm{mod}\,A)$ は $[S_i]\,(1\le i\le n)$ を基底とする自由アーベル群になり、$K_0(\mathcal{P}(A))$ は $[P(i)]\,(1\le i\le n)$ を基底とする自由アーベル群となる.（ $P(i)$ は射影加群で $P(i)/\mathrm{rad}\,P(i)\simeq S_i$ となるものである.） このとき自然な写像 $K_0(\mathcal{P}(A))\to K_0(\mathrm{mod}\,A):[P]\mapsto[P]$, に対応する行列を A のカルタン行列といい $C(A)$ で表わす．つまり

$$([P(1)],\ldots,[P(n)])=([S_1],\ldots,[S_n])C(A)$$

となる行列のことである.

カルタン行列式問題　大局次元有限な多元環のカルタン行列の行列式は 1 であるか?

Eilenberg から 20 年以上を経てこの問題がアメリカの研究者を中心に話題にされだしたと書いたが、得られている主な結果から、どのような人達、どれほどの人達が研究していたかをみると, Zacharia, Wilson, Fuller, Zimmermann-Huisgen およびその周辺の人達のわずかにすぎない．困難なためか応用のないため興味をひかないのかは分からない．これが肯定的に解決されても、直接の応用というものが知られている訳ではない．残念ながらこの点がもっとも魅力に欠ける理由と思える.

さて、A の大局次元が有限ならば、各 S_i の projective resolusion をとると、$K_0(\mathrm{mod}\,A)$ の中で S_i を $P(j)\,(1\le j\le n)$ の（整数係数の）和として表現できる．また各 $P(j)$ は、組成列を考えればやはり $S_i\,(1\le i\le n)$ の和として表現できる．そこで両者の関係を比較して $\det C(A)=\pm1$ を結論するという方法が Eilenberg の用いた方法であった． Wilson や Fuller, Zimmermann-Huisgen 等はある条件のもとで$+1$ を示しているのだが、Eilenberg の方法と似た議論をそれぞれの場合にくり返し使用し各成分の関係を調べて $+1$ を結論している． 一方 Zacharira は大局次元が 2 の場合について $+1$ を示しているが、これは現在では準遺伝環についての一般論から明らかな結果となっている．つまり準遺伝環は大局次元有限な環で、大局次元が 2 の多元環は準遺伝環となる (Dlab-Ringel)． また準遺伝環の定義（正確には定義の言い換え）の一部が、カルタン行列のある列（行）を整数倍して他の列（行）に加えるという基本変換を繰り返せば、半単純環のカルタン行列になるというものであり、したがって、準遺伝環にたいしてはカルタン行列式の問題は自明なものなのである．しかし、準遺伝環の場合が、カルタン行列式問題に関しては、他の（ Eilenberg のとった方法に基づく）上述したような場合とはまったく異なった方法（定義から明らかなことなので、方法とは言えないが）によって $+1$ が結論されることが興味をひかれる．この場合には、準遺伝環のもつ他の性質によって $+1$ を導けることが

Dlab-Ringel によって注意されている [6]. つまり Bernstein-Gelfand-Gelfand の反転公式と呼ばれるものが準遺伝環に対し成立していて、これを利用できるのである. 以下このことについて紹介しよう. まず、準遺伝環の定義から復習する.

A を多元環とする. 非同型な単純加群の全体を $S(i), i \in I$ とおく. もちろん I は有限集合である. ここで、I は次の性質をみたすような半順序集合と仮定する：

(QH) A-加群 M が $\operatorname{top} M \simeq S(i_1), \operatorname{soc} M \simeq S(i_2)$ をみたすとする. このとき i_1 と i_2 が比較できないなら、$j > i_1$ かつ $j > i_2$ となる $j \in I$ が存在する.

各 i に対し $\operatorname{top} P(i) \simeq S(i) \simeq \operatorname{soc} Q(i)$ となる直既約加群 $P(i)$ と直既約入射加群 $Q(i)$ を考える. 各 i に対し $P(i)$ の部分加群で、そのどんな組成因子 (composition factor) もある $S(j)\,(j \leq i)$ と同型になるような最大なものをとり、その剰余加群を $\Delta_A(i)$ と表わす. $\Delta = \{\Delta_A(i) \mid i \in I\}$ とおく. 各左 A-加群 $\Delta_A(i)$ は **standard module** (あるいは **Verma module, Weyle module**) とよばれる加群である. 双対的に costandard module という加群も定義される. つまり、入射加群 $Q(i)$ の部分加群で、そのどんな組成因子もある $S(j)\,(j \leq i)$ に同型になるような最大なものを $\nabla_A(i)$ と表わし **costandard module** とよぶ. $\nabla_A(i) = \operatorname{Hom}_k(\Delta_{A^{op}}(i), k)$ が成り立つことに注意して欲しい. ただし、A は体 k 上の多元環で A^{op} は A の opposite 多元環である. $\nabla = \{\nabla_A(i) \mid i \in I\}$ とおく. Δ-filtration をもつ加群の類を $\mathcal{F}(\Delta)$ とおく. つまり、$M \in \mathcal{F}(\Delta)$ とは、M の部分加群の列

$$M = M_0 \supset M_1 \supset \ldots \supset M_s \supset M_{s+1} = 0$$

で、各剰余加群 M_i/M_{i+1} が Δ のある元と同型になるという性質をもつ加群のことである. 以上の記号のもとに、次の定理（における仮定と同値条件）をみたすような多元環 A を**準遺伝環** (quasi-hereditary) という (Dlab-Ringel, Soergel).

定理 2.1 多元環 A の単純加群全体を $\{S(i) \mid i \in I\}$ とおき、集合 I が上の条件 **(QH)** をみたし、各 $\Delta(i)$ の準同型環が斜体になると仮定する. このとき次の性質は同値である：

(1) $\mathcal{F}(\Delta)$ は ${}_AA$ を含む.
(2) $\mathcal{F}(\Delta) = \{X \mid \operatorname{Ext}_A^1(X, \Delta) = 0\}$.
(3) $\operatorname{Ext}_A^2(\Delta, \nabla) = 0$.

ここで、性質 (3) は（Δ と ∇ が互いに双対的なので）self-dual であるから、準遺伝環の定義に左右の区別はない. また準遺伝環は大局次元有限である. 半順序集合 I を $\{1, \ldots, n\}$ とおき、$S(i) < S(j)$ なら $i < j$ となるようにしておく. このとき、加群 M を $K_0(\operatorname{mod} A)$ のなかで

$$[M] = ([S_1], \ldots, [S_n])\underline{\dim}\, M$$

と表わし n 次列ベクトル $\underline{\dim}\, M$ を考えることにすると、加群 $\Delta(i)$ に対する列ベクトル $\underline{\dim}\,\Delta(i)$ を i 列成分とする n 次正方行列 $\mathbf{dim}\,\Delta$、および 加群 $\nabla(i)$ に対する列ベクトル$\underline{\dim}\,\nabla(i)$ を i 列成分とする n 次正方行列 $\mathbf{dim}\,\nabla$ が得られる．これらはともに unipotent 下三角行列であることが定義から分かる．したがって、$\{[\Delta_A(1)],\ldots,[\Delta_A(n)]\}$ は $K_0(\mathrm{mod}\,A)$ の自由基底になる．この基底を **standard basis** という．A-加群 M を、$K_0(\mathrm{mod}\,A)$ の中で stadard basis に関して列ベクトル表示したときの i 成分を $[M:\Delta(i)]$ で表わす．同様に、加群 M の (Jordan-Hölder) 組成列 に現れる単純加群 $S(i)$ の数を $[M:S(i)]$ と表わす．このとき準遺伝環 A に対し、どんな i,j にたいしても次の式が成立する．

Bernstein-Gelfand-Gelfand の反転公式

$$[P(i):\Delta_A(j)]\cdot\dim_k \mathrm{End}\,(\Delta_A(j)) = [\nabla_A(j):S(i)]\cdot\dim_k \mathrm{End}\,(\nabla_A(i))\,.$$

今、k は代数的閉体であるとすると各 $\dim_k \mathrm{End}\,(\Delta_A(j))$ および $\dim_k \mathrm{End}\,(\nabla_A(i))$ は値 1 をとる．また カルタン行列 $C(A)$ は$\underline{\dim}\,P(i)$ を i 列成分とする n 次正方行列であるから、上述の反転公式から

$$C(A) = (\mathbf{dim}\,\Delta)^t\cdot(\mathbf{dim}\,\nabla)$$

が得られる．とくに両辺の行列式をとれば カルタン行列式が 1 であることが分かる．

3

以上で述べた方法は Eilenberg の考えに基づくものと準遺伝環の性質とに基づくもので、現在までに得られている「主な」結果はすべてこの方法に基づくものである(参考文献参照)．さらに、これらの「主な」結果も、Eilenberg による方法をもう少していねいに考察すれば、すべて一つの公式を適用して得られることが分かる [8]．したがって、カルタン行列式に関してみる限り、今までの研究は Eilenberg の周辺の結果しか得られていなかったと言えるかもしれない．あるいは、その範囲で解決できるのかもしれない．(ただし、Wilson [7] の研究の主題は別のもので、positively graded algebra をどのように扱うかという考え方にすぐれており、以下で紹介する公式から Wilson の得た結果を導くのにも Wilson の考え方を利用する．行列式問題に関していえば、これまでの研究の中で最も優れた論文であると思う.)

A を basic 多元環とし、$1=\sum_{i=1}^n e_i$ を直交原始ベキ等元の和とする．I を $\mathrm{rad}\,A$ に含まれるイデアルとし Δ を A-加群の有限集合とする．2 節での記号と区別して、i に対応する単純加群を S_i と表わすことにし、次の二つの条件 (C1), (C2) を考える．

(C1)　各 $i\,(\leq n)$ に対して、Ie_i は $\mathcal{F}(\Delta)$ に属する.

(C2)　Δ の各元 X に対し、$[X]\otimes 1 \in K_0(\mathrm{mod}\,A)\otimes_{\mathbb{Z}} Q$ は 自然な写像

$$K_0(\mathcal{P}(A))\otimes_{\mathbb{Z}} Q \to K_0(\mathrm{mod}\,A)\otimes_{\mathbb{Z}} Q$$

の像に属する.

このとき$\Delta=\{I_1,\ldots,I_m\}$ とおくと、条件 (C1) より

$$([Ie_1],\ldots,[Ie_n])=([I_1],\ldots,[I_m])\Lambda,$$

条件 (C2) より

$$([I_1],\ldots,[I_m])=([Ae_1],\ldots,[Ae_n])\Gamma$$

となる正方行列 Λ,Γ が得られる. カルタン行列は

$$([Ae_1],\ldots,[Ae_n])=([S_1],\ldots,[S_n])C(A)$$

をみたす行列 $C(A)$ であるから、したがって、

$$([Ie_1],\ldots,[Ie_n])=([S_1],\ldots,[S_n])C(A)\Gamma\Lambda$$

が得られ、さらに次の関係が得られる（以下 E は適当な大きさの単位行列とする）:

$$\begin{aligned}
C(A/I) &= (\underline{\dim}\,Ae_1-\underline{\dim}\,Ie_1,\ldots,\underline{\dim}\,Ae_m-\underline{\dim}\,Ie_n)\\
&= (\underline{\dim}\,Ae_1,\ldots,\underline{\dim}\,Ae_n)-(\underline{\dim}\,Ie_1,\ldots,\underline{\dim}\,Ie_n)\\
&= C(A)-C(A)\Gamma\Lambda\\
&= C(A)(E-\Gamma\Lambda).
\end{aligned}$$

定義 3.1 $C_A(I,\Delta):=E-\Lambda\Gamma.$

定理 3.2 (C1), (C2) をみたす組 (I,Δ) に対して次の等式が成立する:

$$\det C(A/I)=\det C_A(I,\Delta)\det C(A).$$

証明　行列についての次の二つの式は明らかである、

$$\begin{pmatrix} C(A) & C(A)\Gamma \\ \Lambda & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & -\Gamma \\ 0 & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C(A) & 0 \\ \Lambda & E-\Lambda\Gamma \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} C(A) & C(A)\Gamma \\ \Lambda & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & 0 \\ -\Lambda & E \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C(A)-C(A)\Gamma\Lambda & C(A)\Gamma \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

それぞれ両辺の行列式をとれば、

$$\det(C(A)-C(A)\Gamma\Lambda)=\det C(A)\det(E-\Lambda\Gamma),$$

$$\det C(A/I) = \det C(A) \det C_A(I, \Delta).$$

したがって、この二つの式を比較して求める関係式が得られる．

注意　上の定理は A の大局次元に関し有限性を仮定していない．大局次元が無限なときに、(C2) において有理数が必要となる場合がある．

問題　定理の式から、$\det C(A) \neq 0$ なら $\det C_A(I, \Delta) = (\det C(A))^{-1} \det C(A/I)$ となり、右辺はΔ に依存しない値なので $\det C_A(I, \Delta)$ も filtration Δ に依存しないことが分かる．しかし、$\det C(A) = 0$ の場合に $\det C_A(I, \Delta)$ が Δ に依存しないかどうかはまだ分からない．

この定理から、今まで知られている「主な」結果がどのようにして得られるかについて、Eilenberg の場合と準遺伝環の場合のみについて説明しておく．

3.1 Eilenberg の定理

$\mathrm{rad}\, A$ の直和因子からなる filtrarion を考える．A の大局次元は有限であるとする．$I = \mathrm{rad}\, A$ とし、$I_i = \mathrm{rad}\, Ae_i$, $\Delta = \{I_1, \ldots, I_n\}$ とおく．このとき明らかに (I, Δ) は二つの仮定をみたすので、上の定理が成立する．ところが $A/I (= A/\mathrm{rad}\, A)$ は半単純だから $\det C(A/I) = 1$. また定義より（A の大局次元が有限なので）$\det C_A(I, \Delta)$ は整数である．したがって、定理の等式をみれば、整数 $\det C(A)$ は ± 1 でなければならないことが分かる．

3.2 準遺伝環の場合

standard modules (Verma modules, Weyle modules) による filtration を考える．A を準遺伝環とし、その standard module $\Delta(i)\,(0 \leq i \leq n)$ の minimal projective resolution を

$$0 \to P_s(i) \to P_{s-1}(i) \to \cdots \to P_0(i) \to \Delta(i) \to 0$$

とおく（A は大局次元有限であることに注意、また s は i に依存する）．このとき各 $0 \leq j \leq s$ に対し $IP_j(i) \in \mathcal{F}(\Delta_{i+1}, \ldots, \Delta(n))$ となることがわかる（下の注参照）ので、$C_A(I, \Delta) = (c_{ji})$ の定義より、任意の $j \leq i$ に対し $c_{ji} = 0$ となる．故に、$\det C_A(I, \Delta) = 1$ は明らかである．一方、準遺伝環の定義より A/I は半単純なので $\det C(A/I) = 1$ である．よって、定理より $\det C(A) = 1$ を得る．

注)　**補題**　$0 \to N \to P \to M \to 0$ を nonprojective A-加群 M の minimal projective resolution とする．このとき $M \in \mathcal{F}(\Delta(i) \cup \ldots \cup \Delta(n))$ なら $N \in \mathcal{F}(\Delta(i+1) \cup \ldots \cup \Delta(n))$ である．

参考文献

[1] W.D.Burgess, K.R.Fuller, E.R.Voss and B.Zimmermann-Huisgen, The Cartan matrix as an indicator of finite global dimension for artinian rings, Proc. Amer. Math. Soc. **95** (1985), 157-165.

[2] V.Dlab and C.M.Ringel, Quasi-hereditary rings, Illinois J. Math. **33** (1989), 280-291.

[3] S.Eilenberg, Algebras of cohomologically finite dimension, Comment. Math. Helv.**28** (1954), 310-319.

[4] K.R.Fuller, The Cartan determinant and the global dimension of artinian rings, Contemp. Math. **124** (1992), 51-72.

[5] K.R.Fuller and B.Zimmermann-Huisgen, On the generalized Nakayama conjecture and the Cartan determinant problem, Trans. Amer. Math. Soc. **294** (1986), 679-691.

[6] V.Dlab and C.M.Ringel, The module theoretical approach to quasi-hereditary algebras, preprint

[7] G.V.Wilson, The Cartan map on categories of graded modules, J.Algebra **85** (1983), 390-398.

[8] K. Yamagata, A reduction formula for the Cartan determinant problem for algebras, to appear in Archiv der Math.

[9] D.Zacharia, On the Cartan matrix of an Artin algebra of global dimension two, J. Algebra **82** (1983), 353-357.

筑波大学数学系
茨城県つくば市天王台１－１－１
E-mail: yamagata@sakura.cc.tsukuba.ac.jp

Syzygy Modules and Minimal Injective Resolutions over Gorenstein Rings

岩永恭雄 (信州大学・教育)

この報告集では，commutative Gorenstein ring に関する Bass の仕事 [3] の non-commutative version について，最近得られた幾つかの結果，及び今後に考察するべきであると考えている問題を論じたい．Bass による可換環の場合の Gorenstein ring の定義の非可換版は，Auslander により 20 年以上も前に提出されていたが，その研究が盛んになったのは最近である．本稿の内容としては，非可換の興味ある例，Auslander と Reiten による artin algebra の場合の仕事，それらの noether ring への一般化及び noetherian の場合特有の問題，中山予想と関連した問題である．

Notations and Definitions

環 Rに対して，$0 \to {}_RR \to E_0 \to E_1 \to \cdots \to E_n \to \cdots$ は常に ${}_RR$の minimal injective resolution を表すものとし，module Mに対して，その injective, projective 及び flat(weak) dimension をそれぞれ $id(M)$，$pd(M)$，$fd(M)$ で表す．更に，Mの minimal injective resolution における第 $n+1$ 項を $E^n(M)$ で表し，minimal projective resolution が存在するときは，同様に $P^n(M)$ で表す．

定義: 環 Rについて，$id({}_RR) = id(R_R) = n$ のとき，Rの **self-injective dimension** は n であると言い，noether ring Rは有限な self-injective dimension を持つとき，**Gorenstein** ring と言われる．QF-ring は self-injective dimension 0 の Gorenstein ring である．

noether ring Rが，ある $n \geq 1$ について $fd(E_i) \leq i$ for any i $(0 \leq i \leq n-1)$ を充たしているとき，Rを left n-**Gorenstein** ring と言う．right n-Gorenstein ring も同様に定義される．1-Gorenstein ring はこれまで QF-3 ring と言われてきた．最後に，Rが全ての $n \geq 1$ について n-Gorenstein であるとき，Rを ∞-**Gorenstein** と言う．

n-Gorenstein ring の概念は，Bass [3] において研究された可換な Gorenstein ring の非可換版で，Auslander によって初めて導入された．Bass の結果は大へん魅力的なもので，その非可換版を考えるのは極めて自然なことなので，ここにその結果を述べておく．

Theorem (Bass [3]) Rを可換な noether ring とし，任意の素イデアル Pについて，$id(R_P) < \infty$ と仮定する．このとき，

(1) injective indecomposable module $E = E(R/P)$ with $P \in Spec(R)$ について，Eが E_i の直和因子 $\Leftrightarrow$ $ht(P) = i$.

(2) $fd(E_i) = i$ for any $i \geq 0$.

(3) $id(R) < \infty \Leftrightarrow$ Krull-dim$R < \infty$. このとき $id(R) =$ Krull-dim$R$.

非可換の場合にも，n-Gorenstein property は良い性質で左右対称である．

Theorem (Auslander) noether ring Rについて，次の条件は同値である:

(i) Rは left n-Gorenstein;

(ii) Rは right n-Gorenstein;

(iii) 任意の finitely generated left module ${}_RX$，任意の $k(1 \leq k \leq n)$ 及び $Ext_R^k(X,\ R)$ の任意の submodule Y_Rに対して，$Ext_R^j(Y,\ R) = 0$ if $j < k$;

(iv) (iii) の右側に関する条件.

$n = 1$ の場合には，Morita [23] 及び Sato [28]．一般の場合の証明は，Fossum-Griffith-Reiten [11] に載っている．

§1. Non-Commutative Examples

graded ring を用いて，Gorenstein property を判定する方法が，Roos によって得られているので，それを最初に述べる．

Rを環，$\Sigma = \{\Sigma_n |\ n \geq 0\}$ を Rの additive subgroups の ascending chain $1 \in \Sigma_0 \subseteq \Sigma_1 \subseteq \cdots$ の成す filter とする．$R = \bigcup_{n\geq 0} \Sigma_n$で，filtration $\Sigma_i\Sigma_j \subseteq \Sigma_{i+j}$ for $\forall\ i,\ j$を充たすとき，$(R,\ \Sigma)$ を **filtered ring** という．このとき，Rの graded ring $gr(R) = \Sigma_0 \oplus \Sigma_1/\Sigma_0 \oplus \Sigma_2/\Sigma_1 \oplus \cdots$ が得られる．

Theorem(Roos [27])

filtered noether ring $(R,\ \Sigma)$ について，その graded ring $gr(R)$ が可換な noether ring で，$gl.dim\ gr(R) < \infty$ ならば，$gl.dimR < \infty$ であって，Rは ∞-Gorenstein となる．

(1) Kを体，$A=K[x_1,\cdots,x_n]$ を n 変数の多項式環とするとき，K-linear derivations $\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}$ と $x_1,\cdots,x_n$ による ring multiplication が線型変換として A に作用しており，

$$x_ix_j-x_jx_i=0,\quad \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}=0\ (i\neq j),$$
$$x_i\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}x_i=0\ (i\neq j),\quad \frac{\partial}{\partial x_i}x_i-x_i\frac{\partial}{\partial x_i}=1$$

という関係式を充たす．そこで，これら $2n$ 個の線型作用素で生成される K-algebra を，

$$\mathcal{A}_n(K)=K[x_1,\cdots,x_n]<\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}>$$

で表し，**Weyl algebra** と呼ぶ．

(Rinehart [25] and Roos [26]) 体 K上の Weyl algebra $\mathcal{A}_n(K)$ について，

$$gl.dim\mathcal{A}_n(K)=\begin{cases} n & \text{if } char(K)=0,\\ 2n & \text{if } char(K)>0.\end{cases}$$

特に，$char(K)=0$ ならば，$\mathcal{A}_n(K)$ は simple noether domain .

$\partial_i=\frac{\partial}{\partial x_i}$, $(1\leq i\leq n)$ とおき，$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，各$\alpha_i\in\mathbf{N}$ に対して，$\partial^\alpha=\partial_1{}^{\alpha_1}\cdots\partial_n{}^{\alpha_n}$，$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$と表すと，

$$\Sigma_k=\{\sum_{|\alpha|\leq k}f_\alpha\partial^\alpha|\ f_\alpha\in K[x_1,\cdots,x_n]\}$$

により，filtration $\Sigma=\{\Sigma_k|\ k\geq 0\}$, $\Sigma_0\subseteq\Sigma_1\subseteq\cdots$ が入り，それによる graded ring $gr(\mathcal{A}_n(K))$ は，A 上の n 変数多項式環となる．従って，Roos の定理により，

(Roos [27]) Kが標数零の体なら，$\mathcal{A}_n(K)$ は ∞-Gorenstein .

Weyl algebra では，多項式環の微分作用素を考えたが，今度は形式的巾級数環 $A=K[[x_1,\cdots,x_n]]$ の元を係数とする K-linear differential operators の成す環

$$\mathcal{F}_n(K)=K[[x_1,\cdots,x_n]]<\frac{\partial}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial}{\partial x_n}>$$

が同様に考えられる．filtrationも同じように入り，体 Kの標数が零ならば，graded ring $gr(\mathcal{F}_n(K))$ は A 上の n 変数多項式環となることがわかり，$gl.dim\ gr(\mathcal{F}_n(K)) = 2n$ である．

(Björk [5]) Kを標数零の体とするとき，$gl.dim\mathcal{F}_n(K) = n$ で，$\mathcal{F}_n(K)$ は ∞-Gorenstein .

更に，$A = \mathbb{C}\{z_1, \cdots, z_n\}$ を，複素数係数の収束巾級数環とすると，A 上の K-linear differential operators の成す環

$$\mathcal{D}_n = \mathbb{C}\{z_1, \cdots, z_n\} < \frac{\partial}{\partial z_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial z_n} >$$

についても，graded ring が A 上の n 変数多項式環となり，

(Malgrange [22]) $gl.dim\ \mathcal{D}_n = n$ で，$\mathcal{D}_n$は ∞-Gorenstein .

Roos の定理において，graded ring の finite global dimension は，finite self-injective dimension に一般化される．

<u>**Theorem**</u>(Björk [8])
filtered noehter ring (R, Σ) について，その graded ring $gr(R)$ が finite self-injective dimension の commutative noether ring ならば，Rは finite self-injective dimension で，∞-Gorenstein .

(2) **代数多様体上の微分作用素環．** ここでは，話を標数零の体上の non-singular な代数多様体に限定する．正標数の体の場合は標数零の場合と事情が異なるので，後に再び取り上げることにする．

以下，次の設定の下で話を進める：

K: algebraically closed field of characteristic 0 ,

V: non-singular algebraic variety in an affine space $\mathbb{A}^n(K)$,

$A = \mathcal{O}(V)$: co-ordinate ring of V, i.e. ring of regular functions on V.

A を ring multiplication によって $End_K(A)$ の部分環とみなせる．このとき，A と A 上の K-linear derivations によって生成された $End_K(A)$ の部分多元環を，V上の**微分作用素環 (ring of differential operators)** と言い，$\mathcal{D}_K(V)$ で表す．

<u>e.g.</u> **Weyl algebra** $\mathcal{A}_n(K)$： 今，$V = \mathbb{A}^n(K)$ とすると，$A = \mathcal{O}(V) = K[X_1, \cdots, X_n]$ だから，$\mathcal{D}_K(V)$ の元は環 A 上の K-linear derivations 全体となり，

$$\mathcal{D}_K(V) = A < \frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n} >= \mathcal{A}_n(K)$$

即ち，Weyl algebra が特別の場合として登場する．

$\mathcal{D}_K(V)$ は我々が望む次の良い性質を持っている.

Theorem(Grothendieck [13], Björk [4])

Kを標数零の代数的閉体, Vを K上の non-singular irreducible affine algebraic variety とすると,

(i) $gr(\mathcal{D}_K(V))$ は commutative noether domain ;

(ii) $\mathcal{D}_K(V)$ は simple noether domain で, K-algebra として有限生成 ;

(iii) $gl.dim\ gr(\mathcal{D}_K(V)) < \infty$;

(iv) $gl.dim\mathcal{D}_K(V) = Krull\text{-}dim\mathcal{D}_K(V) = dimV$;

(v) $\mathcal{D}_K(V)$ は ∞-Gorenstein .

ここで, Krull dimension は Gabriel-Rentschler によるもの.

(3) (Levasseur [21]) Kを体とする. $GL_n(K)$ は多項式環 $K[X_1, \cdots, X_n]$ に作用し, $K[X_1, \cdots, X_n]$ 上の作用素環は Weyl algebra $\mathcal{A}_n(K)$ だから, $GL_n(K)$ は

$$\delta^g(f(X_1, \cdots, X_n)) = g \cdot \delta(g^{-1} \cdot f(X_1, \cdots, X_n))$$
$$\text{for } \forall\, g \in GL_n(K) \text{ and } \forall\, \delta \in \mathcal{A}_n(K)$$

によって, $\mathcal{A}_n(K)$ に作用している. そこで, $GL_n(K)$ の部分群 G による $\mathcal{A}_n(K)$ の invariant subring $\mathcal{A}_n(K)^G$を考えることが出来る.

ここで, $K = \mathbb{C}$ とし, G を $GL_n(\mathbb{C})$ の有限部分群とすると, quotient variety $\mathbb{C}^n/G$ 上の regular functions の成す環は $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]^G$となる. このとき, $\mathbb{C}[X_1, \cdots, X_n]^G$上の微分作用素環が $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})^G$ になるための必要十分条件は, G が単位元以外に pseudo-reflection を含まないことである. なお, pseudo-reflection とは affine space のある hypersurface を不変にする線型変換のことである.

これらの設定の下で, 次が成立する :

(i) $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})^G$は simple noether ring with the center $\mathbb{C}$;

(ii) $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})^G$の self-injective dimension は n . しかし, global dimension は無限である ;

(iii) $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})^G$ は ∞-Gorenstein ;

(iv) Krull-dim$\mathcal{A}_n(\mathbb{C})^G = n$.

ここでの Krull dimension は, Gabriel-Rentschler の定義によるもの.

(4) (岩永−若松) Rを n-Gorenstein ring とするとき, R上の任意次数の triangular matrix ring も n-Gorenstein .

2 次の triangular matrix ring の場合は, Fossum-Griffith-Reiten [11] に述べられているが, 一般の次数では証明されていなかった.

ここで, これと類似の問題で, Lecture Notes [11] に掲げられている 1 つの結果が誤りであることを述べておきたい (若松による指摘).

Proposition 3.11 (p. 50) において，

"Mが環 R上の bimodule で，右側から見て flat とする．もし，trivial extension ring $R \ltimes M$が n-Gorenstein なら，Rは n-Gorenstein である．"

と主張しているが，この反例として，$n=1$ の場合を以下に示しておく．

Cを 1-Gorenstein でない artin algebra，$X = C \oplus D(C_C)$，$A = End_C(X)$，$B = End_A(E(A_A))$ として，(B, A)-bimodule $E(A_A)$ による環 $A \times B$の trivial extension $\Lambda = (A \times B) \ltimes E(A_A)$ を考える．Xの取り方から，A は domimant dimension ≥ 2 を持ち，1-Gorenstein だから，$E(A_A)$ は projective-injective．更に，$add(X_A) = add(E(A_A))$ だから，2 つの環 Bと Cは Morita equivalent であり，Bも 1-Gorenstein でなく，従って $A \times B$も 1-Gorenstein でなくなる．ここで，一般に，環 R上の module Mについて，$add(M)$ で，Mを含む $mod(R)$ の smallest additive subcategory を表す．今，$E(A_A)$ が $A \times B$-module として projective であることは明らかだから，Λが 1-Gorenstein であることを示す．そのために，Λを triangular matrix ring

$$\Lambda = \begin{bmatrix} A & 0 \\ {}_BE(A_A)_A & B \end{bmatrix}$$

と考え，right Λ-module を triple

$$(M_A,\ N_B,\ f : N_B \to Hom_A({}_BE(A_A)_A,\ M_A)_B)$$

で与える．このとき，right Λ-module $Q_\Lambda = (E(A_A)_A,\ B_B,\ 1_B)$ は injective で，$P_\Lambda = (A_A,\ 0,\ 0)$ の injective hull は

$$E(P_\Lambda) = (E(A_A),\ Hom_A({}_BE(A_A)_A,\ E(A_A)_A)_B, 1_B) \cong Q_\Lambda$$

となるから，Q_ΛはΛの faithful injective right ideal であることがわかり，Λは 1-Gorenstein であることが示された．

(5) (Ekström) 環 Rに対して，$R[x;\ \rho,\ \delta]$ を ring automorphism $\rho : R \to R$と Rのρ-derivation δによる R上の skew polynomial ring とする．Rが finite self-injective dimension の ∞-Gorenstein ring なら，$R[x;\ \rho,\ \delta]$ も finite self-injective dimension の ∞-Gorensetin ring である．

(注) $\Sigma_n = \sum_{i \leq n} Rx^i$ による $R[x;\ \rho,\ \delta]$ の filtration $\Sigma = \{\Sigma_n \mid n \geq 0\}$ から得られる graded ring は，$gr(R[x;\ \rho,\ \delta]) \cong R[x;\ \rho]$ となる．

§2. **n-Gorenstein Artin Algebra**(Work by Auslander and Reiten)

この§では，Auslander と Reiten の仕事 [2] の一部を紹介するが，環 R は全て artin algebra とし，Dを Rの self-duality とする．まず準備として，

Proposition 1 Rを n-Gorenstein artin algebra とするとき，
(1) Pが projective で $id(P)=k<n$ ならば，$pd(E^k(P))=k$;
(2) Eが injective で $pd(E)=k<n$ ならば，$id(P^k(E))=k$.

Proof: (1) Pの minimal injective resolution

$$0 \to P \xrightarrow{f_0} E^0(P) \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{k-1}} E^{k-1}(P) \xrightarrow{f_k} E^k(P) \to 0,$$

において，

$$0 \neq Ext_R^1(E^k(P),\ \mathrm{Im}(f_{k-1})) \cong Ext_R^k(E^k(P),\ P)$$

だから，$pd(E^k(P)) \geq k$．一方，Rが n-Gorenstein だから，任意の $k<n$ に対して，$pd(E^k(P)) \leq k$で，よって $pd(E^k(P))=k$.

(2) R_Rの minimal injective resolution $0 \to R_R \to E_0{}' \to \cdots \to E_n{}' \to \cdots$ において，任意の $i<n$ に対して，$pd(E_i{}') \leq i$ だから，injective cogenerator ${}_RD(R_R)$ の minimal projective resolution

$$\cdots \to D(E_n{}') \to \cdots \to D(E_0{}') \to D(R_R) \to 0$$

において，$id(D(E_i{}')) \leq i$ for any $i<n$．よって，Eの minimal projective resolution $0 \to P^k(E) \xrightarrow{g_k} \cdots \xrightarrow{g_1} P^0(E) \xrightarrow{g_0} E \to 0$, において，$k<n$ だから $id(P^k(E)) \leq k$．一方，$0 \to P^k(E) \to P^{k-1}(E) \xrightarrow{g_{k-1}} \mathrm{Im}(g_{k-1}) \to 0$ は $\mathrm{Im}(g_{k-1})$ の projective cover だから，

$$Ext_R^k(\mathrm{Im}(g_0),\ P^k(E)) \cong Ext_R^1(\mathrm{Im}(g_{k-1}),\ P^k(E)) \neq 0$$

で，$id(P^k(E)) \geq k$．従って，$id(P^k(E))=k$. ∎

ここで，結果の記述のために幾つか notation を与える．Ωを Heller functor，即ち，module Mに対して，$\Omega^k(M)$，$\Omega^{-k}(M)$ で，それぞれ Mの k-th syzygy 及び cosyzygy modules を表す．又，環 Rに対して，$mod(R)$ は finitely generated left R-modules の category を表し，

$\Omega^n(mod(R)) = \{C \in mod(R)|$
$\exists$ exact sequence $0 \to C \to P_{n-1} \to \cdots \to P_0$ with P_i projective$\}$,

$$\Omega^{-n}(mod(R)) = \{C \in mod(R) \mid \exists \text{ exact sequence } I_{n-1} \to \cdots \to I_0 \to C \to 0 \text{ with } I_i \text{ injective}\}.$$

とする．更に，$mod(R)$ の subcategory $\mathcal{C}$ に対して，$ind(\mathcal{C})$ を $\mathcal{C}$ に属する非同型な indecomposable objects の集合とする．

Theorem 2 (Auslander and Reiten [2])
R を n-Gorenstein artin algebra とする．
(1) 次の 2 つの集合の間に $1-1$ の対応がある：

$$ind(\Omega^n(mod(R)))\backslash\{P \mid P \text{ is projective indecomposable of } id(P) < n\}$$

及び

$$ind(\Omega^{-n}(mod(R)))\backslash\{E \mid E \text{ is injective indecomposable of } pd(E) < n\}$$

この対応の下で，次が成り立つ：

$$\sharp\{P \mid P \text{ is projective indecomposable with } id(P) = n\} = \sharp\{E \mid E \text{ is injective indecomposable with } pd(E) = n\}$$

及び

$$\sharp\{P \mid P \text{ is projective indecomposable with } id(P) = \infty\} = \sharp\{E \mid E \text{ is injective indecomposable with } pd(E) = \infty\}.$$

(2) 任意の $k \le n$ について，

$$\Omega^k(mod(R)) = \{C \mid pd(E^i(C)) \le i,\ 0 \le i \le k\}$$

で，これは extension に関して閉じている．

Theorem 3 (Auslander and Reiten [2])
R を n-Gorenstein artin algebra とするとき，
(1) E が injective indecomposable module で，$pd(E) = k \le n$ ならば，$E \overset{\oplus}{\hookrightarrow} E_k$;
(2) P が projective indecomposable module で，$id(P) = k \le n$ ならば，$P \overset{\oplus}{\hookrightarrow} P^k(D(R_R))$.

§3. Gorenstein Rings — Noetherian Case

この§では，§2 の結果及び§1 で述べた Bass の結果がどの程度まで非可換 noether 環の場合に拡張されるか，そしてどのような問題設定が考えられるかを述べる．

考えている問題

Rを self-injective dimension n の Gorenstein ring とする．

(1) $Soc(E_n) \neq 0$?，あるいはもっと強く $Soc(E_n)$ は E_nにおいて，essential か？

(2) E_nの直和因子を特徴付ける；

特に，E_nの任意の直和因子 Eについて，$pd(E) = n$ か？

更に，もし Rが n-Gorenstein なら，各 $E_i (0 \leq i \leq n)$ の直和因子を特徴付ける方法があるか？

(3) 任意の injective indecomposable module Eについて，Eはある E_i の直和因子となるか？

問題 (1), (2) について

問題 (1) 及び (2) について，次の部分的な結果を得る．

Proposition 4 Rを n-Gorenstein ring かつ self-injective dimension が n と仮定すると，

(1) E_nの任意の直和因子 Eについて，$pd(E) = fd(E) = n$.

従って，$pd(E_n) = fd(E_n) = n$.

(2) $Soc(E_n) \neq 0$.

Proof (1) exact sequence

$$(*) \qquad 0 \to K_{n-1} \to E_{n-1} \to E_n \to 0 \text{ with } \mathrm{E}(K_{n-1}) = E_{n-1}$$

において，$E \subseteq E_n \cong E_{n-1}/K_{n-1}$だから，

$$0 \neq Ext_R^1(E,\ K_{n-1}) \cong Ext_R^n(E,\ R)$$

となり，$pd(E) \geq n$ ．一方，$id(R_R) = n$ から，$pd(E) \leq n$ である ([17, Proposition 1.1]) ．よって，$pd(E) = n$.

次に，$fd(E) = n$ を示す．Eは直既約としても一般性を失わないから，$E = \mathrm{E}(U)$, ${}_RU$は有限生成，と表わしておく．exact sequence $(*)$ を，今度は $U \subseteq E_n \cong E_{n-1}/K_{n-1}$について用いると，

$$0 \neq Ext_R^1(U,\ K_{n-1}) \cong Ext_R^n(U,\ R)$$

を得る．ここで，$0 \to R_R \to E_0' \to \ \cdots \ \to E_n' \to 0$ を R_Rの minimal injective resolution としておくと，$\coprod_{i=0}^n E_i'$は cogenerator で，${}_RU$は

有限生成だから,

$$0 \neq Hom_R(Ext_R^n(U,\ R),\ \prod_{i=0}^{n} E_i{}') \cong Tor_n^R(\prod_{i=0}^{n} E_i{}',\ U)$$
$$\cong Tor_n^R(E_n{}',\ U)$$

を得る. 最後の同型は, Rが n-Gorenstein であることから導かれる. 次に, $0 \to U \to \mathrm{E}(U) \to \mathrm{E}(U)/U \to 0$ (exact) から得られる exact sequence

$$Tor_{n+1}^R(E_n{}',\ \mathrm{E}(U)/U) \to Tor_n^R(E_n{}',\ U) \to Tor_n^R(E_n{}',\ \mathrm{E}(U))$$

において, $fd(E_n{}') \leq n$ ([17, Prop. 1.1]) より, $Tor_{n+1}^R(E_n{}',\ \mathrm{E}(U)/U) = 0$. 一方, $Tor_n^R(E_n{}',\ U) \neq 0$ であるから, $Tor_n^R(E_n{}',\ \mathrm{E}(U)) \neq 0$. よって, $fd(E(U)) \geq n$ となるから, 結局 $fd(E(U)) = n$ を得る.

(2) もし $n = 0$ なら, Rは QF-ring だから, 以下 $n \geq 1$ としてよい. そこで, $Soc(E_n) = 0$ と仮定すると, $E_0 \oplus \cdots \oplus E_{n-1}$が cogenerator になるから, E_nは$\prod(E_0 \oplus \cdots \oplus E_{n-1})$ に直和因子として埋め込まれる. このとき, $fd(E_n) \leq fd(E_0 \oplus \cdots \oplus E_{n-1}) < n$ となり, これは矛盾である.

<u>問題 (1) が肯定的な場合</u>

Proposition 4 の他に, $Soc(E_n) \neq 0$ が肯定的な場合を次に掲げる:

(i) noether rings of finite global dimension ,
(ii) FBN rings ,
(iii) self-injective dimension ≤ 2 (Hoshino [15]) ,
(iv) Gorenstein orders in the sense of Nishida (Nishida [24]) .

<u>更に, 問題 (2) について</u>

Auslander-Reiten の結果 Theorem 2 は noether ring の場合にも次の形で成立する.

<u>**Theorem 5**</u> (星野) Rを ∞-Gorenstein ring とする. Eが $fd(E) = k$ なる injective indecomposable left module ならば, Eは E_kに直和因子として埋め込まれる.

<u>問題 (3) について</u>

この問題については, まだほとんどわかっていないが,

(i) (星野 [15]) self-injective dimension $\leq$ 2 の Gorenstein ring については成立する.

(ii) Rが self-injective dimension n の n-Gorenstein ring ならば, Proposition 4 によって ∞-Gorenstein だから, Theorem 5 を適用出来る. まず, 任意の injective indecomposable ${}_RE$について, [17, Proposition 1.1] により, $fd(E) = k \leq n$ となり, Theorem 5 によって, Eは E_kの直和因子に

同型．次に，任意の finitely generated R-module ${}_RM$について，uniform submodules $U_1, \cdots, U_t$で，$U_1 \oplus \cdots \oplus U_t$が Mの essential submodule となるものが存在する．このとき，各 $\mathrm{E}(U_i)$ は injective indecomoposable だから，$E_0, \cdots, E_n$のどれかの直和因子に同型．よって，

$$M \subseteq \mathrm{E}(M) = \mathrm{E}(U_1) \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}(U_t) \hookrightarrow \coprod(E_0 \oplus \cdots \oplus E_n)$$

これは，我々の言葉で，$E_0 \oplus \cdots \oplus E_n$が finitely embedding cogenerator であることを示す．

§4. Left-right Symmetry of Self-injective Dimension

self-injective dimension の左右対称性について，これまでに得られている結果を幾つか述べてみる．まずは，artin ring に対して考えてみるべきであろうが，次のような問題も考察する意味がある．

<u>**問題**</u>

(1) noether ring Rについて，$id({}_RR) < \infty \Leftrightarrow id(R_R) < \infty$?

(2) n-Gorenstein ring Rについて，$id({}_RR) \leq n \Leftrightarrow id(R_R) \leq n$?

<u>**結果**</u>

(i) (Zaks [33]) noether ring の self-injective dimension が左右どちらも有限ならば，それらは一致する．

Proof: Rを noether ring とし，$id(R_R) = m$，$id({}_RR) = n$ とおいて，どちらも有限と仮定する．[17, Proposition 1.1] より，flat dimension が m の injective left module Eが存在し，このとき Proposition 5 により，$m = fd(E) \leq pd(E) \leq n$. ∎

(ii) (Hoshino [14]) Rを artin ring で，∞-Gorenstein とすると，$id({}_RR) = id(R_R)$.

(iii) (Fuller-Wang [12], 岩永, 星野) Rを noether ring で，$id({}_RR) < \infty$ とするとき，次は同値：

(1) $id(R_R) < \infty$, (2) $rFPD(R) < \infty$, (3) $lFID(R) < \infty$.

ここで，

$$rFPD(R) = \sup\{pd(M) \mid M \text{ is a right } R\text{-module with } pd(M) < \infty\},$$
$$lFID(R) = \sup\{id(M) \mid M \text{ is a left } R\text{-module with } id(M) < \infty\}$$

と定める．従って，Rが finite type の artin ring ならば，$id({}_RR) = id(R_R)$.

Proof: (1) $\Rightarrow$ (2). Mが $pd(M) = d$ の right module なら，$Ext_R^d(M, X) \neq 0$ となる right module Xが存在するので，この Xを，$F \to X \to 0$ (F free) と表しておけば，exact sequence $Ext_R^d(M, F) \to Ext_R^d(M, X) \to 0$ を得る．よって，$Ext_R^d(M, F) \neq 0$ となり，$id(F) \geq d$．ここで，Rが noetherian だから，$id(F) = id(R_R)$ で，結局 $pd(M) = d \leq id(R_R)$．

(2) $\Rightarrow$ (1). $rFPD(R) = m$，$id({}_RR) = n$ とすると，R_Rの minimal injective resolution

$$0 \to R_R \xrightarrow{f_0} I_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_i} I_i \to I_{i+1} \to \cdots$$

において，$fd(I_i) \leq n$ for $\forall\, i \geq 0$ ([17, Proposition 1.1]) より，$fd(\mathrm{Im}(f_i)) < \infty$．よって，Jensen [18, Proposition 6] により，$pd(\mathrm{Im}(f_i)) < \infty$，即ち，仮定より，$pd(\mathrm{Im}(f_i)) \leq m$．従って，

$$Ext_R^1(\mathrm{Im}(f_{m+1}),\ \mathrm{Im}(f_m)) \cong Ext_R^{m+1}(\mathrm{Im}(f_{m+1}),\ R) = 0$$

となり，exact sequence

$$0 \to \mathrm{Im}(f_m) \to I_m \to \mathrm{Im}(f_{m+1}) \to 0 \quad \text{with } E(\mathrm{Im}(f_m)) = I_m$$

が split することになって，$\mathrm{Im}(f_{m+1}) = 0$，即ち，$id(R_R) \leq m$ を得る．

(1) $\Rightarrow$ (3). $id({}_RR) = id(R_R) = n$ とする．Nが $id(N) = d$ の left module ならば，Nの minimal injective resolution $0 \to N \to E^0(N) \to \cdots \to E^d(N) \to 0$ において，$fd(E^i(N)) \leq n$ for $\forall\, i$．よって，dimension shifting により，$fd(N) \leq n$ で，Proposition 5 より，$pd(N) \leq n$ を得る．そこで，Nの projective resolution を考えることにより，$id(N) \leq n$ が導かれる．

(3) $\Rightarrow$ (1). $id({}_RR) = n$，$lFID(R)$ =m とする．任意の injective left module Eに対して，その projective resolution

$$\cdots \to P_{i+1} \xrightarrow{f_i} P_i \to \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} E \to 0$$

を考えると，$id(P_i) \leq n$ for $\forall\, i \geq 0$ だから，$id(\mathrm{Im}(f_i)) < \infty$．よって，仮定により $id(\mathrm{Im}(f_i)) \leq m$．従って，

$$Ext_R^1(\mathrm{Im}(f_m),\ \mathrm{Im}(f_{m+1})) \cong Ext_R^{m+1}(E,\ \mathrm{Im}(f_{m+1})) = 0$$

となり，exact sequence

$$0 \to \mathrm{Im}(f_{m+1}) \to P_{m+1} \to \mathrm{Im}(f_m) \to 0$$

が split することになって，$pd(E) \leq m$．即ち，$id(R_R) \leq m$．▮

(iv) (Hoshino [14]) artin ring Rについて，$id({}_RR) \leq 1 \Leftrightarrow id(R_R) \leq 1$．

(v) 問題 (2) は artin ring に対しては，肯定的である．

Proof: $id(R_R) = n$ より，$E_0 \oplus \cdots \oplus E_n$ は cogenerator であり，$\exists\, C_R$: $Ext_R^n(C,\ R) \neq 0$．よって，

$$0 \neq Hom_R(Ext_R^n(C,\ R),\ E_0 \oplus \cdots \oplus E_n) \cong Tor_n^R(C,\ E_0 \oplus \cdots \oplus E_n) \cong Tor_n^R(C,\ E_n)$$

となるので，$pd(E_n) \geq n$．一方，Rは artinian なので，

$$n = id(R_R) = \sup\{pd(E) \mid {}_RE \text{ is injective.}\} \geq pd(E_n)$$

となって，$pd(E_n) = n$．従って，Rは ∞-Gorenstein となり，$id({}_RR) = id(R_R)$．∎

§5. Nakayama Conjecture and its Surroundings

self-injective dimension に関する問題には，中山予想と密接に関連するものがあるので，この§では中山予想を導く幾つかの予想について述べる．

まず，中山予想とは，

Nakayama Conjecture(NC): Rが artin algebra で，全ての E_i $(i \geq 0)$ が projective ならば，Rは QF-ring か？

次に，Gorenstein ring に関するものとして，

Auslander-Reiten Conjecture(ARC): artin algebra が ∞-Gorenstein なら，その self-injective dimension は有限か？

この予想は，中山予想と次に述べるその一般化された形の中山予想の中間に位置する．

left Generalized Nakayama Conjecture(lGNC): Rが artin algebra のとき，$\coprod_{i \geq 0} E_i$ は cogenerator か？

これは次と同値である：finitely generated left module$M$について，$Ext_R^i(M,\ M \oplus R) = 0$ for $\forall\, i \geq 1$ ならば，Mは projective か？

GNC より更に強い形の予想として，
<u>*left Strong Nakayama Conjecture(lSNC)*</u>: artin algebra R上の任意の finitely generated left module $M \neq 0$ に対して，$\exists\, i \geq 0$: $Ext^i_R(M,\ R) \neq 0$？

古くからある homological problem として，次は有名である．
<u>*left Finitistic Projective Dimension Conjecture(lFPDC)*</u>: artin ring R について，$lFPD(R) < \infty$？

以上の 5 つの予想は次のような位置関係にある：

$$rFPDC \Longrightarrow lSNC \Longrightarrow lGNC \Longrightarrow ARC \Longrightarrow NC$$

以下にこの証明を与えよう．

Proof of $rFPDC \Rightarrow lSNC$:　$rFPD(R) = n < \infty$ とする．Mを finitely generated left module とし，$Ext^i_R(M,\ R) = 0$ for $\forall\, i \geq 0$ と仮定する．このとき，

$$\cdots \to P_i \xrightarrow{f_i} \cdots \xrightarrow{f_2} P_1 \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$$

を，各 P_iが有限生成であるような Mの projective resolution とすれば，これに R-dual $-^* = Hom_R(-,\ R)$ を施すことにより得られる sequence

$$0 = M^* \to {P_0}^* \xrightarrow{{f_1}^*} {P_1}^* \xrightarrow{{f_2}^*} \cdots \xrightarrow{{f_{m+1}}^*} {P_{m+1}}^* \xrightarrow{{f_{m+2}}^*} \mathrm{Im}({f_{m+2}}^*) \to 0$$

は exact で，各 ${P_i}^*{}_R$も finitely generated projective．よって，$\mathrm{Im}({f_{m+2}}^*)$ の projective dimension は有限であるが，仮定によりこれは n 以下であるから，$\mathrm{Im}({f_2}^*)$ は projective となり，${f_2}^* : {P_1}^* \to \mathrm{Im}({f_2}^*)$ は splittable epi．従って，${f_1}^*$は splittable mono であり，commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} {P_1}^{**} & \xrightarrow{{f_1}^{**}} & {P_0}^{**} \\ \cong\downarrow & & \downarrow\cong \\ P_1 & \xrightarrow[f_1]{} & P_0 \end{array}$$

において，${f_1}^{**}$は splittable epi となるから，f_1も splittable epi．これは $M = 0$ を意味する．∎

Proof of $lGNC \Rightarrow ARC$: $\coprod_{i\geq 0} E_i$は cogenerator であるから，任意の injective indecomposable left module Eに対して，$E \overset{\oplus}{\hookrightarrow} E_i$ for some $i \geq 0$ ．ここで，非同型な injective indecomposable module は有限個しかないから，$pd(E) \leq n$ for any injective indecomposable module E となる n が存在する．従って，$id(R_R) \leq n$ ([17, Proposition 1.1]) で，同時に $id({}_RR) \leq n$ も導かれる．∎

Proof of $ARC \Rightarrow NC$: 全ての E_iが projective と仮定すると，Rは ∞-Gorenstein だから，finite self-injective dimension n(say) を持つ．このとき，${}_RR$の minimal injective resolution において，最終項 E_nも projective だから，これは $n = 0$ を意味し，Rは QF-ring．∎

§6. Another Topics

(1) Holonomic modules

Rを global dimension n ($< \infty$) の ∞-Gorenstein ring，Mを finitely generated R-module とすると，$Ext^j_R(M, R) \neq 0$ となる $j (0 \leq j \leq n)$ が存在するから，その最小の数を $j(M)$ で表す．このとき，

$$Krull\text{-}dim({}_RM) \leq n - j(M) \leq gl.dimR$$

が成立する．そこで，$j(M) = n$ となる finitely generated R-module M を **holonomic** module と呼ぶ．このとき，Krull-dim$M = 0$ だから，Mは finite length を持つ．holonomic module は佐藤－柏原－河合による線型偏微分方程式系の理論で極大過剰決定系と対応して重要な役割を果たす．

もし，${}_RS$が simple module なら，$j(S)$ は $S \hookrightarrow E_j$となる最小の番号 jを意味する．Björk は，$R = \mathcal{A}_1(\mathbb{C})$ のとき，全ての simple R-module は holonomic か？，という問題提起をした．然し，Stafford [32] は，反例を与え，一般の $\mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ 上で Krull-dim$M = 0$ だが，$j(M) = 1$ となる finitely generated module Mを構成している．

ここで，特に $R = \mathcal{A}_n(\mathbb{C})$ とする．Mが holonomic left R-module ならば，$M^{\natural} = Ext^n_R(M, R)$ も又 holonomic right R-module であり，$(M^{\natural})^{\natural} \cong M$が成立する．従って，$M \to M^{\natural}$ は holonomic left R-modules の abelian category から，holonomic right R-modules の abelian category への exact，contravariant functor となる．

問題: このような functor は，もっと一般に finite self-injective dimension の ∞-Gorenstein ring においても存在しないか？

(2) dualizing module の非可換版

可換環論では，Gorenstein ring を含む概念として，“Cohen-Macaulay ring” という重要な環の class があり，加群として “dualizing module” という概念がこの環を特徴付けるものとして研究されてきた．Auslander-Reiten [1] では，この非可換版が artin algebra に対して展開されているので，少し紹介しておく．勿論，それらを noether ring 上でも展開出来るようにすることが今後の興味ある問題であると思われる．artin algebra Rが **Cohen-Macaulay** であるとは，R-bimodule ${}_R\omega_R$で，次の条件を充たすものが存在することである：

1) functors $\omega_R \otimes -$, $Hom_R({}_R\omega,\ -)$: $mod(R) \to mod(R)$ が adjoint pair ,

2) これら 2 つの functors は，finite injective dimension の modules 及び finite projective dimension の modules の成す subcategories の間の equivalence を導く．そこで，この条件を充たす bimodule を **dualizing** module と呼ぶ．

この概念は，多元環の表現論で重要な役割を果たした “tilting module” と関連していることが次の結果からわかる．

Proposition 6 artin algebra R上の bimodule ${}_R\omega_R$が dualizing module である必要十分条件は，ωが left 及び right module として，次の条件を充たすことである：

(i) $Ext^i_R(\omega,\ \omega) = 0$ for $\forall\, i > 0$,

(ii) $id(\omega) < \infty$,

(iii) 任意の finite injective dimension の module Mに対して，

$$0 \to X_n \to \cdots \to X_0 \to M \to 0 \quad \text{with each } X_i \in add(\omega)$$

となる exact sequence が存在する，

(iv) $R \xrightarrow{\sim} End_R(\omega)^{\mathrm{op}}$ canonically .

興味ある結果として，

Proposition 7 Rを artin algebra , ${}_R\omega_R$を dualizing module とするとき，

$$id({}_R\omega) = id(\omega_R) = lFPD(R) = rFPD(R)$$

が成り立つ．

dualizing module を用いた Gorenstein ring の特徴付けとして，

Proposition 8 artin algebra Rについて，

Rが Gorenstein $\Leftrightarrow$ ${}_RR_R$が dualizing module .

問題: Propositions 6 ～ 8 を，noether ring に拡張出来ないか？

(3) 再び $\mathcal{D}_K(V)$ について

§1 において，Kが標数零の体で，Vが K上の non-singular variety の場合に，$\mathcal{D}_K(V)$ について述べたが，正標数の体或は singular variety について少し付け加えておく．まず，標数零の体の場合に与えた微分作用素環の定義は，正標数の体に対しては適用出来ないので，一般的な定義を与える必要がある．

Kを可換環，Aを可換な K-algebra，Mを A-module とし，$End_K(M)$ に次のようにして $A\otimes_K A$-module の構造を入れる：

$$((a\otimes b)\cdot\alpha)(m) = a\alpha(bm) \quad \text{for } a,\ b\in A,\ \alpha\in End_K(M),\ m\in M.$$

又，$\mu : A\otimes_K A \to A$を，$\mu(a\otimes b) = ab$ なる multiplication map とすると，これは K-algebra homomorphism で，その kernel Jは $\{1\otimes a - a\otimes 1 |\ a\in A\}$ で生成された $A\otimes_K A$ の ideal である．

定義 (Grothendieck [13])： $n\geq 0$ に対して，

$$\mathcal{D}_A{}^n(M) := \{\alpha\in End_K(M)|\ J^{n+1}\cdot\alpha = 0\},$$
$$\mathcal{D}_A(M) := \bigcup_{n\geq 0}\mathcal{D}_A{}^n(M)$$

と定める．

このとき，次が成り立つ．

(1) $\mathcal{D}_A{}^n(M)$ は $End_K(A)$ の $A\otimes_K A$-submodule .

(2) $\mathcal{D}_A{}^n(M)\subseteq\mathcal{D}_A{}^{n+1}(M)$,

(3) $\alpha\in\mathcal{D}_A{}^0(M) \ \Leftrightarrow\ (1\otimes a - a\otimes 1)\alpha = \alpha a - a\alpha = 0$ for $\forall\, a\in A$.

(3) は，$End_K(M)$ への $A\otimes_K A$-action の定め方から，$\mathcal{D}_A{}^0(M) = End_A(M)$ を意味することは明かである．又，写像の合成が

$$\mathcal{D}_A{}^m(M)\times\mathcal{D}_A{}^n(M)\to\mathcal{D}_A{}^{m+n}(M)$$

を与えるので，

(4) $\mathcal{D}_A(M)$ は $End_K(M)$ の K-subalgebra

であることもわかる．そこで，これを Mの**微分作用素環**と呼ぶ．

更に次が成立する：

(5) $\mathcal{D}_A{}^n(M) = \{\alpha\in End_K(M)|\ \alpha a - a\alpha\in\mathcal{D}_A{}^{n-1}(M)$ for $\forall\, a\in A\}$,

(6) $\Sigma = \{\mathcal{D}_A{}^n(M)|\ n\geq 0\}$ を filter とした filtered ring $(\mathcal{D}_A(M),\ \Sigma)$ から graded ring $gr(\mathcal{D}_A(M))$ が得られる．

そして重要なことは，体 Kの標数が零の代数的閉体で，A が K上の non-singular affine algebraic variety Vの co-ordinate ring の場合には，$\mathcal{D}_A(A)$ が A 及び A の K-linear derivations $Der_K(A)$ で生成されることで，既に定義した $\mathcal{D}_K(V)$ と一致することである．そこで一般に，Kを代数的閉体，Vを algebraic variety in $\mathbb{A}^n(K)$，A を Vの co-ordinate ring とするとき，$\mathcal{D}_K(V) = \mathcal{D}_A(A)$ と表し，これを Vの**微分作用素環**と呼ぶ．

次の例と定理が，基礎体の標数が正又は variety が singular の場合と，標数零で non-singular variety の場合の差異及び類似を示している．

Example(Bernstein-Gelfand-Gelfand [4])

$V = \{(x_1,\ x_2,\ x_3) \in \mathbb{C}^{(3)} \mid {x_1}^3 + {x_2}^3 + {x_3}^3 = 0\}$，

とすると，$\mathcal{D}_{\mathbb{C}}(V)$ は noetherian でなく，algebra としても有限生成ではない．

Theorem(Smith-Stafford [31])

K: algebraically closed field of characteristic 0，

V: irreducible affine algebraic curve on K

とすると，$\mathcal{D}_K(V)$ は finitely generated K-algebra となり，noether ring である．更に，

$$\mathcal{D}_K(V) \text{ が simple ring} \Leftrightarrow \mathcal{D}_K(V) \text{ が hereditary}.$$

従って，このとき $\mathcal{D}_K(V)$ は ∞-Gorenstein．

Theorem(Chase [10], Smith [30])

K: algebraically closed field of characteristic $p > 0$，

V: non-singular irreducible affine algebraic variety over K，

A: Vの co-ordinate ring

とするとき，A_n $(n \geq 0)$ を $\{a^{p^n} \mid a \in A\}$ で生成された A の K-subalgebra とすると，A_n は A に同型で，次が成立する．

(i) progenerator $End_{A_n}(A)$-A_n bimodule A により，$End_{A_n}(A)$ は A_n に森田同値，

(ii) $\mathcal{D}_K(V) = \bigcup_{n=1}^{\infty} End_{A_n}(A)$，

(iii) $\mathcal{D}_K(V)$ は simple ring，

(iv) $gl.dim\mathcal{D}_K(V) = w.gl.dim\mathcal{D}_K(V) = dimV$.

(一般には，$\mathcal{D}_K(V)$ は noetherian にも domain にもならない.)

問題: 上の定理における設定で，$\mathcal{D}_K(V)$ が ∞-Gorenstein となる Vの例を沢山見つけよ．

REFERENCES

1. Auslander, M and Reiten, I. : *Cohen-Macaulay and Gorenstein Artin algebras*, Progress in Math. Vol. 95, 1991, Birkhäser, 221-245.

2. — : *k-Gorenstein algebras and syzygy modules*, preprint.

3. Bass, H.: *On the ubiquity of Gorenstein rings*, Math. Z. **82** (1963), 8-28.

4. Bernstein, J.N., Gelfand, I.M. and Gelfand, S.I. : *Differential operators on the cubic cone*, Russian Math. Surveys **27**(1972), 169-174.

5. Björk, J.-E. : *Rings of differential operators*, North Holland, 1979.

6. — : *Non-commutative noetherian rings and the use of homological algebra*, J. of Pure and Appl. Alg. **38**(1985), 111-119.

7. — : *Filtered noetherian rings*, Noetherian rings and their applications, Math. Surveys and Monographs No. 24, Amer.Math.Soc., 1987, 59-98.

8. — : *The Auslander condition on noetherian rings*, Lect Notes in Math. **1404**, Springer, 1989, 137-173.

9. — : *Analytic $\mathcal{D}$-modules and applications*, Kluwer Academic Publishers, 1993.

10. Chase, S.U. : *On the homological dimension of algebras of differential operators*, Comm. in Alg. **5**(1974), 351-363.

11. Fossum, R., Griffith, P.A. and Reiten, I. : "*Trivial extensions of abelian categories*", Lect. Notes in Math. **456**, Springer, 1975.

12. Fuller, K.R. and Wang, Y. : *Redundancy in resolutions and finitistic dimensions of noetherian rings*, preprint.

13. Grothendieck, A. : "*Elément de Géométrie Algébrique*" IV, I.H.E.S. Publ. Math. No.32(1967).

14. Hoshino, M. : *On self-injective dimensions of artinian rings*, Tsukuba J. Math. **18**(1994).

15. — : *Noetherian rings of self-injective dimension two*, Comm. in Alg. **21**(1993), 1071-1094.

16. Iwanaga, Y.: *On rings with finite self-injective dimension*, Comm. in Alg. **7**(1979), 394-414.

17. — : *On rings with finite self-injective dimension II*, Tsukuba J. Math. **4**(1980), 107-113.

18. Jensen, C.U. : *On the vanishing of* $\varprojlim^{(i)}$, J. of Alg. **15**(1970), 151-166.

19. 小林 滋 : *D*-加群の環論への応用, 第 36 回代数学シンポジウム報告集, 187-202, 1991.

20. Levasseur, T. : *Grade des modules sur certains anneaux filtrés*, Comm. in Alg. **9**(1981), 1519-1532.

21. — : *Anneau d'opérateurs différentiels*, Sém. Dubreil- Malliavin, Lect. Notes in Math. Vol. 867, 157-173, 1980.

22. Malgrange, B. : *Sur les polynomes de Bernstein*, Uspekhi Mat. Nauk. **29**(4)(1974), 81-88.

23. Morita, K.: *Noetherian QF-3 rings and two-sided quasi-Frobenius maximal quotient rings*, Proc. Japan Acad. **46**(1970), 837-840.

24. Nishida, K. : *Characterization of Gorenstein orders*, Tsukuba J. Math. **12**(1986), 459-468.

25. Rinehart, G.S. : *Note on the global dimension of a certain ring*, Proc. Amer. Math. Soc. **13**(1962), 341-346.

26. Roos, J.-E. : *Détermination de la dimension homologique des algèbres de Weyl*, C. R. Acad. Sci. Paris (Ser. A) **274**(1972), 23-26.

27. — : *Compléments à l'étude des quotients primitifs des algèbres enveloppantes des algèbres de Lie semi-simples*, C. R. Acad. Sci. Paris (Ser. A) **276**(1973).

28. Sato, H.: *On localizations of a 1-Gorenstein ring*, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku **13**(1977), 188-193.

29. Smith, S.P. : *Differential operators on commutative algebras*, Lect. Notes in Math. **1197**, Springer, 1986, 165-177.

30. —: *The global homological dimension of the ring of differential operators on a nonsingular variety over a field of positive characteristic*, J. of Alg. **107**(1987), 98-105.

31. Smith, S.P. and Stafford, J.T.: *Differential operators on an affine curve*, Proc. London Math. Soc. (3) **56**(1988), 229-259.

32. Stafford, J.T. : *Non-holonomic modules over Weyl algebras and enveloping algebras*, Invent. Math. **79**(1985), 619-638.

33. Zaks, A. : *Injective dimension of semiprimary rings*, J. of Alg. **13**(1969), 73-86.

34. Fuller, K. R. and Iwanaga, I. : *On n-Gorenstein rings and Auslander rings of low injective dimension*, Proceedings of ICRA 6, 1992, To appear in Canadian Mathematical Society Proceedings Series.

On projective modules over group algebras of

p-solvable groups of p-length 2

Akihiko Hida

飛田明彦（千葉大学大学院自然科学研究科）

1.Introduction

Let kG be the group algebra of a finite group G over an algebraically closed field k of characteristic $p > 0$. All modules are finite generated right modules. Let $J = J(kG)$ be the Jacobson radical of kG, $t(G)$ be the nilpotency index of $J(kG)$ and $I(G)$ be the augumentation ideal of kG. For a kG-module V, $l(V)$ denotes the Loewy length of V i.e. the smallest integer l such that $VJ^l = 0$ and $L_i(V)$ denotes the i-th Loewy layer VJ^{i-1}/VJ^i. Furthermore $P_G(V)$ denotes the projective cover of V as a kG-module. For a subgroup H of G and kH-module W, V_H denotes the restriction of V to H and W^G denotes the induced module $W \otimes_{kH} kG$.

Let N be a normal p-subgroup of G. Then any simple kG-module V is considered as a $k(G/N)$-module. It is known that $P_G(V)$ and $P_{G/N} \otimes_k kN$ have same composition factors where kN is considered as a kG-module by conjugation([1]). If $G = N \rtimes H$ (a semidirect product of N by H) it is easy to see that $P_G(V) \cong (P_H(V))^G \cong P_H(V) \otimes_k (k_H)^G$. Suppose that H is p-nilpotent group with Sylow p-subgroup D and normal p-complement Q. Let $V = k$ (trivial kG-module). Then $P_H(k) = k(H/Q)$. Consider the filtration

$$P_H(k) = W_0 \supset W_1 \supset \cdots \supset W_t = 0 \quad (t = t(D))$$

$$W_i = P_H(k)J(kH)^i$$

The final version of this paper will be submitted for publication elsewhere.

$$W_i/W_{i+1} \cong (dim_k I(D)^i/I(D)^{i+1})k.$$

Then

$$P_G(k) = W_0^G \supset W_1^G \supset \cdots \supset W_t^G = 0$$

$$W_i^G/W_{i+1}^G \cong (dim_k I(D)^i/I(D)^{i+1})(k_H)^G.$$

In[5],M.Lorenz showed that $l(P_G(k)) = t(D) + l((k_H)^G) - 1$. As remarked in [11], it seems that the Loewy structure of $P_G(k)$ looks like

$$\begin{array}{c|c|c|c}
(k_H)^G & & & \\
 & (k_H)^G \ \ldots & & \\
 & & \ldots & \\
 & & & (k_H)^G
\end{array}$$

In fact we have the following formula (Theorem 1),

$$L_i(P_G(k)) = \bigoplus_{j\geq 0}(dim_k(I(D)^j/I(D)^{j+1}))L_{i-j}((k_H)^G).$$

Some examples are found in [3],[6],[8],[9],[10],[11].

2.The Loewy series and the Loewy length of $P_G(V)$

In this section we assume that N is a nomal p-subgroup of G.

THEOREM 1. *Assume that $G = N \rtimes H$ and $H = Q \rtimes D$ where D is a p-group. Let V be an irreducible kG-module such that V_Q is irreducibleand projective. Then*

$$L_i(P_G(V)) = \bigoplus_{0\leq j\leq t(D)-1} (dim_k(I(D)^j/I(D)^{j+1}))L_{i-j}((V_H)^G).$$

PROOF: We shall follow the argument in [5,§2]. Set

$$X = (V_H)^G$$

$$Y = (k_{NQ})^G = k(G/NQ)$$

for $m, n, l \geq 0$. Then $P_G(V) = (V_Q)^G = X \otimes_k Y$. It suffices to show that $(X \otimes_k Y)J^{i+j} \supseteq XJ^i \otimes_k YJ^j$ for $i, j \geq 0$. We proceed by induction on i. Suppose that V belongs to the block ideal B of kH. It is well known that $B \cong Mat_n(kD)$ where $n = dim_k V$ (cf.[7]). Since $V \otimes_k Y = P_H(V)$ we have $V \otimes_k YJ(kH)^j = (V \otimes_k Y)J(kH)^j$. Hence $(X \otimes_k Y)J^j \supseteq X \otimes_k YJ(kH)^j = X \otimes_k YJ^j$ and this proves the case $i = 0$. Suppose $i > 0$. By induction we have

$$
\begin{aligned}
(X \otimes_k Y)J^{i+j} &\supseteq (XJ^{i-1} \otimes_k YJ^j)J + XJ^{i-1} \otimes_k YJ^{j+1} \\
&\supseteq XJ^i \otimes_k YJ^j .
\end{aligned}
$$

Let A be a finite dimensional algebra over k. An A-module V is said to be stable if its Loewy and socle series coincide, i.e. $VJ(A)^n = Soc_{l-n}(V)$ for any $n \geq 0$ where $l = l(V)$.

LEMMA 2([4]). *Let A be a finite dimensional symmetric algebra over k. Let P_i be the projective cover of simple A-module S_i ($i = 1, 2$). If P_1 is stable and S_2 is a composition factor of P_1 , then $l(P_1) \leq l(P_2)$.*

Now we return to group algebras. We set $gr(kN) = \bigoplus_i I(N)^i/I(N)^{i+1}$. Then G acts on $gr(kN)$ by conjugate. We state some results on Loewy lengths of projective modules.

PROPOSITION 3. *Let e be an idempotent of kG such that $J(k(G/N)) = \bar{e}J(k(G/N))$. Then*

$$t(G) = l(ekG).$$

LEMMA 4([5,COROLLARY 2.6]). *Assume that $G = N \rtimes H$ and $H = Q \rtimes M$ where Q is a p'-group and M is a p-group. Then*

$$l(P_G(k)) \geq t(M) + t(N) - 1$$

and the equality holds if and only if $gr(kN)$ *is semisimple.*

COROLLARY 5. *Suppose that* $G = N \rtimes H$ *and* H *is a Frobenius group with kernel* Q *a* p'*-group and complement* M *a* p*-group.*
(1)$t(G) = l(P_G(K))$
(2) ([5,Theorem 2.7]) $t(G) = t(M) + t(N) - 1$ *if and only if* $gr(kN)$ *is semisimple.*
(3) Suppose that $P_G(k)$ *is stable. If* V *is a composition factor of* $P_G(k)$*, then* $l(P_G(V)) = t(G)$.

Finally we give some sufficient conditions for $P_G(k)$ to be stable.

PROPOSITION 6. *Assume that* $G = N \rtimes H$ *and* $H = Q \rtimes M$ *where* Q *is a* p'*-group and* M *is a* p*-group.*
(1)([2][4,Proposition 1])If P *is a* p*-group then* kP *is stable.*
(2)$P_G(k)$ *is stable if and only if* $(k_H)^G$ *is stable.*
(3)If $gr(kN)$ *is semisimple then* $P_G(k)$ *is stable.*

REFERENCES

1. J. L. Alperin, M. J. Collins and D. A. Sibley, *Projective modules, filtrations and Cartan invariants*, Bull.London Math. Soc. **16** (1984), 416-420.
2. S. A. Jennings, *The structure of the group ring of a p-group over a modular field*, Trans. Amer. Math. Soc. **50** (1941), 175–185.
3. S. Koshitani, *On the Loewy series of the group algebra of a finite p-solvable group with p-length*> 1, Comm. Algebra **13** (1985), 2175–2198.
4. P. Landrock, *Some remarks on Loewy lengths of projective modules*, in "Representation Theory II," Lecture Notes in Math.vol 832,
Springer-Verlag, Berlin-Hidelberg-New York, 1980, pp. 369–381.

5. M. Lorenz, *On Loewy lengths of projective modules for p-solvable groups*, Comm. Algebra **13** (1985), 1193–1212.
6. O. Manz, U. Stammbach and R. Staszewski, *On the Loewy series of the group algebra of groups of small p-length*, Comm. Algebra **17** (1989), 1249–1274.
7. K. Morita, *On group rings over a modular field which possess radicals expressible as principal ideals*, Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku **A.4** (1951), 177–194.
8. K. Motose, *On Loewy series of group algebras of some solvable groups*, J.Algebra **130** (1990), 261–272.
9. Y. Ninomiya, *On the Loewy structure of the projective indecomposable modules for a 3-solvable group I*, Math.J.Okayama Univ. **29** (1987), 11–51.
10. Y. Ninomiya, *On the Loewy structure of the projective indecomposable modules for a 3-solvable group II*, Math.J.Okayama Univ. **29** (1987), 53–75.
11. Y. Ninomiya, *On the Loewy structure of projective indecomposable modules for the group* $\Gamma(3^3)$, in "Representations of rings and duality," RIMS Kokyuroku 628, Kyoto Univ., Kyoto Japan (in Japanese), 1987, pp. 45–65.

多項式環とその周辺

富山大学教育学部
浅沼照雄

序.

多項式環に関連する話題は様々あるが，ここではアファイン代数群の分野で最近関心を集めているトーラス群の線形化問題をとりあげる。

問題 1.（トーラス群の線形化問題） 体 k 上 m 次元の代数的トーラス群

$$G = k^{\times} \times \cdots \times k^{\times} = (k^{\times})^{m} \quad (k^{\times} = k \setminus (0))$$

がアファイン n 空間 $\mathbb{A}^n$ に代数的に作用しているとき，この作用は線形化可能であるか？ すなわち $\mathbb{A}^n$ の座標を適当に選んで線形作用にできるか？

本来，代数群の線形化問題は簡約可能な代数群の $\mathbb{A}^n$ への代数的作用が上記の意味で線形化可能であるかどうかを問う問題であり，$k = \mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$ に対してはある種の非可換な群についての反例も知られている [S]。

トーラス群は線形化問題のもっとも重要かつ興味を持たれている場合であり，多項式環論と密接に関係

している。

まず始めに問題1を代数的にいいなおす。そのために必要な記号および定義を準備する。

Rを可換環とするとき $R^{[n]}$ で R上 n 変数の多項式環を表わし，$R^{[n]}$ の R-自己同型群 $\mathrm{Aut}_R R^{[n]}$ を簡単のため $GA_n(R)$ と書くことにする。ゆえに $GA_n(R)$ の元 ϕ は

$$R^{[n]} = R[X_1, \cdots, X_n]$$

とすれば X_i の ϕ による像 $\phi(X_i)$ $(i=1, \cdots, n)$ で定まそこで

$$\phi = (\phi(X_1), \cdots, \phi(X_n))$$

又は

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi(X_1) \\ \vdots \\ \phi(X_n) \end{bmatrix}$$

のように ϕ を行ベクトル又は列ベクトルの形で表わすことにする。

$GL_n(R)$ を R上 n 次の一般線形群とするとき，$GL_n(R)$ の任意の行列 M について

$$M \to \phi_M = (X_1, \cdots, X_n) M \quad (\text{右辺は行列の積})$$

で写像

$$GL_n(R) \longrightarrow GA_n(R)$$

を定義すれば，この写像は明らかにΦへの（群）準同型となっている。この準同型を通してMとΦ_Mを同一視すれば$GL_n(R)$は$GA_n(R)$の部分群とみなせる。

kを体としたとき，群Gから$GL_n(k)$への準同型をGの表現というが，この概念を拡張して，群Gから$GA_n(R)$への準同型があって，その準同型によるGの像が$GA_n(R)$の部分群$GL_n(R)$に入るときこの準同型をGの表現ということにする。

以上の準備の下で問題1は次の問題2にいいかえることができる。

問題2．kを体，$G=(k^\times)^m$をm次元トーラス群とする。このとき任意の準同型

$$\rho : G \longrightarrow GA_n(k)$$

は表現と共役になるか？すなわちρによって定まる適当な元$\phi_\rho \in GA_n(R)$が存在して

$$\phi_\rho \rho(G) \phi_\rho^{-1} \subset GL_n(k) \ (\subset GA_n(k))$$

とできるか？

問題1（すなわち問題2）について次の場合に肯定的結果が証明されている。

(1)　kは任意の体で$n \leq 2$

(2)　$k = \mathbb{C}$で$m = n$又は$m = n-1$

文献についてはこの他の肯定的結果も含めて[BH]を参照してください。

否定的結果については

(1) kが標数正の無限体で $n \geq 4$, $m=1,\cdots,n-2$ のとき反例が存在する[A2].

著者の知る限り上の反例が現在知られている唯一の反例であり，標数が零のときはまだ反例は知られていないと思う。

§1.

この節では問題2と関連した多項式環の話題のうち，アファイン空間の埋め込み(embedding)について考えてみる。

次の定理はよく知られている。

定理3.(Abhyankar－Moh) kが標数零の体，$k^{[2]}=k[X,Y]$とする。このとき$k^{[2]}$の元fについて

$$k^{[2]}/(f) \cong k^{[1]}$$

がなりたてばgを$k^{[2]}$より適当に選んで$k^{[2]}=k[f,g]$とできる。

一般的に $\tau(t)=(t,0,\cdots,0)$ によって定まる埋め込み

$$\tau: \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{A}^n$$

を標準的埋め込みという。もしある埋め込み

$$\sigma : \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{A}^n$$

について $\mathbb{A}^n$ の k-自己同型（i.e. 双正則写像）θ が存在して $\theta\sigma = \tau$ となるならば，σ をここでは座標型の埋め込みということにする。すると定理3は次のようにいいかえることができる。

定理4. k が標数零の体のとき任意の埋め込み

$$\sigma : \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{A}^2$$

は座標型である。

定理3，定理4から体の標数が零という仮定は省けない。たとえば k の標数を $\mathrm{ch}\, k = p > 0$ として，e, s を正の整数で $p^e \nmid sp$ かつ $sp \nmid p^e$（$\nmid$ は割り切れないという記号）とすると，$f = Y^{p^e} + X + X^{sp}$ は

$$k[X, Y]/(f) \cong k^{[1]}$$

をみたすが

$$k[X, Y] = k[f, g]$$

なる $g \in k[X, Y]$ は存在しない。

一方次の定理は比較的容易（定理3にくらべて）に証明されている。

定理5. k が代数的閉体（任意標数）のとき任意の埋込み

$$\sigma : \mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{A}^n \quad (n \geq 4)$$

は座標型である。

以上より現在不明なのは $\mathbb{A}^3$ への埋め込みの場合だけである。これに関して Abhyankar 及び他の人によって次が予想されている。

予想 6. k が標数零の体のとき座標型でない $\mathbb{A}^1$ の $\mathbb{A}^3$ への埋め込みが存在する。

以上についての文献は [BR] を参照してください。

予想 6 と問題 1 は深く関係している。実際この予想が正しければ $(k^\times)^2$ の $\mathbb{A}^7$ への線形化不可能な作用を構成することができる。

例 7. k を任意標数の体, P を $k^{[3]} = k[X, Y, Z]$ の素イデアルで

$$k^{[3]}/P \cong k^{[1]}$$

とする。するとよく知られているように P はイデアル論的完全交叉となるから $k^{[3]}$ の 2 つの元, たとえば f, g, で生成されている。

x, Z, T, W を新たな不定元として

$$A = k[x, X, Y, Z, T, W]/(xT - f,\ xW - g)$$

とおく。すると A は自然に $k[x]$-代数と見なせる。さらに次の (i), (ii) がなりたつ。

(i) $A[x^{-1}]$ は $k[x, x^{-1}]^{[3]}$ と $k[x, x^{-1}]$-同型.

(ii) A/xA は $k^{[3]}$ と k-同型.

A は整域であること, 体を係数にもつ多項式環上の有限生成射影加群は自由であることに注意すれば (i), (ii) より $A^{[3]}$ は $k[x]^{[6]}$ と $k[x]$-同型になる [A1]。とくに

$$A \cong_k k^{[7]}$$

となる。そこで $V = \mathrm{Spec}\, A^{[3]}$ とおくと V は上の同型を通して $\mathbb{A}^7$ と思える。一方

$$V \cong V' \times \mathbb{A}^3 \quad (V' = \mathrm{Spec}\, A)$$

に注意して, V' の各点のパラメータ表示を A の元を用いて $(x, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{T}, \bar{W})$ で表わし, $\mathbb{A}^3$ の座標のパラメータ表示を (u_1, u_2, u_3) とすると, $V = \mathbb{A}^7$ の点は

$$(x, \bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{T}, \bar{W}, u_1, u_2, u_3) \quad \cdots \quad (*)$$

でパラメータ表示される。ここで $\bar{X}$, etc は A の元で $\bar{X} \equiv X \ (\mathrm{mod}\,(xT - f,\ xW - g))$, etc なるものである。

以上の準備の下で 2 次元トーラス $G = (k^\times)^2$ の $V = \mathbb{A}^7$ への作用 ρ を,

$$\alpha = (a, b) \in k^\times \times k^\times = G$$

について，(＊)の座標から

$$(ax, \bar{x}, \bar{Y}, \bar{Z}, a^{-1}\bar{T}, a^{-1}\bar{W}, b u_1, b u_2, b u_3)$$

への変換で定義する。

定理8．例7の作用 $\rho : (k^{\times})^2 \to \mathbb{A}^7$ について k が無限体ならば次の(i),(ii)は同値である。

(i) ρ は線形化可能.

(ii) イデアル $\mathfrak{P}$ により自然に引きおこされる埋め込み $\mathbb{A}^1 \hookrightarrow \mathbb{A}^3$ は座標型である。

§2.

この節では R が整域のとき $R^{[n]}$ の R-自己同型群 $GA_n(R)$ と問題2の関係について考えてみる。

$GA_n(R)$ の生成元については

(1) $n=1$ のとき，よく知られており $GA_1(R)$ の元は $k^{[1]} = k[X]$ とおいて

$$X \longrightarrow aX + b \quad (a \in R^{\times} := R\text{の単元群},\ b \in R)$$

で与えられるアファイン変換である。

(2) $n=2$ のときは $R = k =$ 体の場合についてのみ知られており，次の形で与えられる。

$$(X, Y) \to (Y, X)$$

および

$$(X, Y) \to (aX + f(Y), bY) \quad (a, b \in k^{\times},\ f(Y) \in k[Y]).$$

ここで $k^{[2]} = k[X, Y]$.

(3) $n=2$でRが体でないとき，又 $n \geqq 3$ のときは不明である。とくに $n \geqq 3$ のときは $R = k =$ 体であってもまったくわからず，手掛かりさえない状態である。

さて問題2との関係で興味があるのは次の分解に関する問題である。

まず

$$R = k[x, y] \cong k^{[2]}, \quad R^{[3]} = R[X, Y, Z]$$

とおく。$R[x^{-1}, y^{-1}]^{[3]} = R[x^{-1}, y^{-1}, X, Y, Z]$ に注意しておく。

$$\phi = (f, g) \in GA_2(R[x^{-1}, y^{-1}])$$

$$(f, g \in R[x^{-1}, y^{-1}]^{[2]} = R[x^{-1}, y^{-1}, X, Y])$$

について ϕ' を

$$\phi' = (f, g, Z) \in GA_3(R[x^{-1}, y^{-1}])$$

で定義する。すなわち ϕ' は ϕ の自然な拡張で $\phi'(Z) = Z$ できまるものとする。

$R[x^{-1}] \subset R[x^{-1}, y^{-1}]$ であるから，一般的に，任意の $n \geqq 1$ について $GA_n(R[x^{-1}])$ は $GA_n(R[x^{-1}, y^{-1}])$ の部分群と思える。同様に $GA_n(R[y^{-1}])$ も $GA_n(R[x^{-1}, y^{-1}])$

の部分群と考えることができる。それゆえ $GA_n(R[x^{-1}, y^{-1}])$ の中で群の積（i.e., 2つの群の各々の元の積の集合）

$$GA_n(R[x^{-1}])GA_n(R[y^{-1}]) \subset GA_n(R[x^{-1}, y^{-1}])$$

が定義できることに注意しておく。そこで $GA_n(R[x^{-1}, y^{-1}])$ の元のうちでとくに

$$GA_n(R[x^{-1}])GA_n(R[y^{-1}])$$

に入るものを分解可能ということにする。

この定義からただちに

$$\phi \in GA_2(R[x^{-1}, y^{-1}])$$

が分解可能ならば

$$\phi' \in GA_3(R[x^{-1}, y^{-1}])$$

も分解可能なことがわかる。

次の問題はこの逆を問うものである。

問題9. $\phi \in GA_2(R[x^{-1}, y^{-1}])$ は分解可能であるが $\phi' \in GA_3(R[x^{-1}, y^{-1}])$ は分解不可能な例が存在するか？

もし問題9の答えが肯定的であれば問題2の反例を構成することができる。その前に問題9に対する2つの例を考える。

前に述べたように，与えられた

$$\phi,\ \psi \in GA_2(R[x^{-1}, y^{-1}])$$

について ここでは 列ベクトルの形で表わして

$$\phi = \begin{bmatrix} f(X,Y) \\ g(X,Y) \end{bmatrix}, \quad \psi = \begin{bmatrix} F(X,Y) \\ G(X,Y) \end{bmatrix}$$

とする。このとき

$$\phi\psi = \begin{bmatrix} f(X,Y) \\ g(X,Y) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F(X,Y) \\ G(X,Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(f,g) \\ G(f,g) \end{bmatrix} \in GA_2(R[x^{-1}, y^{-1}])$$

となることに注意する。それゆえ

$$\phi'\psi' = \begin{bmatrix} f(X,Y) \\ g(X,Y) \\ Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F(X,Y) \\ G(X,Y) \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(f,g) \\ G(f,g) \\ Z \end{bmatrix} = (\phi\psi)'$$

である。

例 10.

$$\phi = \begin{bmatrix} xX \\ y^nY + X^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ y^nY \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y + X^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} xX \\ Y \end{bmatrix} \in GA_2(R[x^{-1}, y^{-1}])$$

とおくと ϕ' は分解不可能，したがって ϕ も分解不可能である。$(n \geq 1)$

例 11.

$$\phi = \begin{bmatrix} xX \\ y^2Y + X + (x+y)X^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xX \\ y^2Y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y + X + (x+y)X^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} xX \\ Y \end{bmatrix}$$

とすると $\phi \in GA_2(R[x^{-1}, y^{-1}])$ で ϕ' は分解可能である。

実際 ϕ' は次のように分解される。

$\Phi_y =$

$$\begin{bmatrix} yX \\ Y \\ Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X - xY^2 + xZ \\ Y \\ Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z+2XY \end{bmatrix}\begin{bmatrix} yX \\ Y \\ yZ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X + xY \\ Y \\ Z + xY^2 \end{bmatrix}$$ 下の行に続く

$$\begin{bmatrix} X \\ Y+Z \\ Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ yZ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z - xY + X + X^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ y^{-2}Z \end{bmatrix}$$

とおけば

Φ_y^{-1} は

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ y^2Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z + xY - X - X^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ y^{-1}Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y-Z \\ Z \end{bmatrix}$$ 下の行に続く

$$\begin{bmatrix} X - xY \\ Y \\ Z - xY^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y^{-1}X \\ Y \\ y^{-1}Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z - 2XY \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X + xY^2 - xZ \\ Y \\ Z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y^{-1}X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

である。ゆえに

$$\Phi_y^{-1} \in GA_3(R[y^{-1}])$$

がなりたち，更に計算により $\phi'\Phi_y^{-1}$ および $\Phi_y\phi'^{-1}$ の列ベクトルの各要素は $R[x^{-1}][X, Y, Z]$ の元であることが確かめられる。それゆえ $\phi'\Phi_y^{-1} = \Phi_x$ とおけば

$$\Phi_x \in GA_3(R[x^{-1}])$$

であり，ϕ' は

$$\phi' = \Phi_x\Phi_y \in GA_3(R[x^{-1}])\, GA_3(R[y^{-1}])$$

と分解される。

kの標数 $\mathrm{ch}\, k$ が 2 のときこの ϕ は分解可能である。

予想 12. kの標数が 2 以外のとき，とくに 0 のとき，例 11 の ϕ は分解不可能である。

予想 12 が否定的，すなわち ϕ が

$$\phi = \phi_x \phi_y \in GA_2(R[x^{-1}])GA_2(R[y^{-1}])$$

と表わせるならば $\phi_x(X)$, $\phi_y(Y)$ の X, Y についての全次数 (total degree) はきわめて高くなることがわかっている。

さて問題 2 と問題 9 の関係について述べる。
まず ϕ' が分解可能なる任意の元

$$\phi \in GA_2(R[x^{-1}, y^{-1}])$$

を考えて

$$A = R[x^{-1}][X, Y] \cap R[y^{-1}][\phi(X), \phi(Y)] \quad (\subset R[x^{-1}, y^{-1}, X, Y]) \quad (*)$$

とおく。A は $R[x^{-1}, y^{-1}, X, Y]$ の部分 R-代数になっている。

$$\begin{aligned} A[Z] &= R[x^{-1}][X, Y, Z] \cap R[y^{-1}][\phi(X), \phi(Y), Z] \\ &= R[x^{-1}][X, Y, Z] \cap R[y^{-1}][\phi'(X), \phi'(Y), \phi'(Z)] \end{aligned}$$

であり，仮定から ϕ' は

$$\phi' = \Phi_x \Phi_y \in GA_3(R[x^{-1}])GA_3(R[y^{-1}])$$

と分解されるから，

$$R[x^{-1}][X,Y,Z] = R[x^{-1}][\Phi_x(X), \Phi_x(Y), \Phi_x(Z)]$$

かつ

$$R[y^{-1}][\phi'(X), \phi'(Y), \phi'(Z)] = R[y^{-1}][\Phi_x(X), \Phi_x(Y), \Phi_x(Z)]$$

に注意すれば

$$A[Z] = R[\Phi_x(X), \Phi_x(Y), \Phi_x(Z)] \cong R^{[3]} \quad (**)$$

がなりたつ。

そこで

$$S = k[x_1, x_2, y_1, y_2] \cong k^{[4]}$$

を考えて，$x = x_1 x_2$，$y = y_1 y_2$ とおくことにより R を S の部分環とみなす。ゆえに $S[x^{-1}, y^{-1}, X, Y]$ の部分環として A の拡大環 $B = S[A]$ は welldefined であって(*)より

$$B = S[x^{-1}][X,Y] \cap S[y^{-1}][\phi(X), \phi(Y)]$$

なることが示せる。又(**)より

$$B[Z] = S[\Phi_x(X), \Phi_x(Y), \Phi_x(Z)] \cong S^{[3]}$$

であるから，とくに $B[Z]$ は k 上の7変数の多項式環であることに注意する。ゆえに $\mathrm{Spec}\, B[Z]$ を V とおけば V はこの意味で $\mathbb{A}^7$ である。わかりやすくするために $\Phi_x(X)$，$\Phi_x(Y)$，$\Phi_x(Z)$ をそれぞれ A 上1変数 Z の多項式として $f(Z)$，$g(Z)$，$h(Z)$ で表わすことにする。すると V の点のパラメータ表示は

$$(x_1, x_2, y_1, y_2, f(Z), g(Z), h(Z))$$

であるから，$G=(k^{\times})^3$ として G の元 $\alpha=(a,b,c)$ について，上記のパラメータ表示から

$$(a^{-1}x_1,\ ax_2,\ b^{-1}y_1,\ by_2,\ f(cZ),\ g(cZ),\ h(cZ))$$

への変換によって定義される G の $V\ (=\mathbb{A}^7)$ への作用を ρ とする。

定理13. k が無限体のとき，上で定義された作用 ρ について次の(i),(ii)は同値である。

(i) ρ は線形化可能.

(ii) ϕ は分解可能.

証明について，(ii)⇒(i)は簡単である。(i)⇒(ii)については(i)を仮定すると，前に(*)で定義した R-代数 A について $A\cong R^{[2]}$ がなりたつことがわかる。ところで $A\cong R^{[2]}$ なることと ϕ が分解可能であることは同値であることが比較的簡単に証明することができる。

定理13により，予想12が正しければ具体的に線形化不可能な ρ が構成できることがわかる。

参考文献

[A1] T. Asanuma, *Polynomial fibre rings of algebras over noetherian rings*, Invent. math. 87 (1987) 101-127.

[A2] T. Asanuma, Non-linearizable algebraic group actions on $\mathbb{A}^n$, to appear in J. Algebra.

[BH] H. Bass and W. Haboush, Linearizing certain reductive group actions, Transactions of A.M.S., 297 (1985) 463-482.

[BR] S. Bhatwadekar and A. Roy, Some results on embedding of a line in 3-space, J. Algebra 142 (1991) 101-109.

[S] G. Schwarz, Exotic algebraic group actions, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 309, Série I (1989) 89-94.

完備局所環と次数付き可換多元環

佐藤真久

1. 発端

次数付き多元環に関係する話題が多元環の表現論で散発的に登場する事がある。例えば中山予想や Cartan 問題が肯定的に解ける事を Wilson [10] が示して話題になった。ここで次数付き多元環と呼ぶものは正確には正次数付き多元環 (Positively Graded Algebra) である。即ち

定義 1.1. 多元環 A が正次数付き多元環であるとはベクトル空間としての分解

$$A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots$$

を持ち A の Jacobson 根基を $\mathrm{Rad}\, A$ として

$$\mathrm{Rad}\, A = A_1 \oplus A_2 \oplus \dots$$

となり次の条件を満たすものをいう。

$$A_i \cdot A_j \subseteq A_{i+j} \quad (i = 1, 2, \dots)$$

次数付き多元環について調べるきっかけになったのは、多元環のガロワ被覆を調べるうちに、この被覆と正次数付けが可能である事の間に何か関係があるように思えて来た事による。（ガロワ被覆、ガロワ群の定義は次章を参照されたい）

これに関して Bongartz-Gabriel [2] が、次の事を証明している。

「Aを有限表現型多元環、Γ_A をAのA－R (Auslander-Reiten) 有向グラフ、Ind$A$ を直既約A－加群のカテゴリー、$k(\Gamma_A)$ をΓ_A のメッシュカテゴリーとする。また、Ind$A$ の根基により正次数付きカテゴリー $Gr(A)$ を次のように決める。

$$Gr(\mathrm{Ind}A) = \mathrm{Ind}A/\mathrm{Rad}(\mathrm{Ind}A) \oplus \mathrm{Rad}(\mathrm{Ind}A)/\mathrm{Rad}^2(\mathrm{Ind}A) \oplus \dots$$

この時 $Gr(\mathrm{Ind}A)$ と $k(\Gamma_A)$ はカテゴリー同値である。」

ここでメッシュカテゴリーとは、有向グラフΓ_AにA－R列に対応するパスの和を零とする関係式で定義される多元環（従ってカテゴリー）である。

更にガロワ群について次の事が示されている。

「A のガロワ被覆に現れるガロワ群は有限生成自由群である」

この事実から、当初ガロワ被覆を持つものは標準多元環（$Gr(\mathrm{Ind}A) = \mathrm{Ind}A$ となる多元環）で、そのガロワ群は自由群になるものと考えられていた。所が太刀川弘幸氏が次のような問題をポーランド滞在中（１９８７年）に提起した。

太刀川問題（その１）

(1) 次の多元環２つのは自明でないガロワ被覆を持つか？

$$\Lambda_1 = k[x, y]/(x^2 - y^3) + (x, y)^4, \quad \Lambda_2 = k[x, y, z]/(xy - z^3) + (yz - x^3) + (zx - y^3)$$

(2) 可換アルティン局所環は自明でないガロワ被覆を持つか？

(1) について Skowronski 氏がΛ_2 のガロワ群は $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ である事を示し、ガロワ群が自由群でない最初の例であると指摘した。当時は非有限表現型のガロワ被覆が有限型の類推から考えられ正確に定義はされておらず混沌とした状況にあり、普遍ガロワ被覆は唯一に決まるであろうと信じられていたので多少の驚きがあったものと思われる。

(2) は、この報告集の前半の話題である。

太刀川問題（その２）

(3) 次の環Λ_3は正次数付き多元環か？

$$\Lambda_3 = k[x,y]/(xy - y^2 - x^3) + (x,y)^3$$

(4) (2) で定義した次の環Λ_2は正次数付き多元環か？

$$\Lambda_2 = k[x,y,z]/(xy - z^3) + (yz - x^3) + (zx - y^3)$$

(3) は奥野氏が

$$\alpha = x + y + x^2 \quad \beta = y - x^2$$

と置く事で

$$\Lambda_3 \cong k[\alpha,\beta]/(\alpha\beta) + (\alpha,\beta)^4$$

が示された。

(4) は曽氏と著者が別々に非正次数付き多元環である事を示した。

これらを総合して次のような基本的な問題設定をしてみたい。

問題

1: ガロワ被覆と正次数付き多元環との間にはどの様な関係があるか？

2: 可換アルティン環の場合、正次数付き多元環か否かどの様に判定できるか？

3: 正次数付き多元環及び非正次数付き多元環の組織的構成法はあるか？

注意 1.1. 上記のようないきさつから可換局所アルティン環を対象とするのであるが、これを簡単な場合と見るのは早計である。表現論の立場で見ると局所環は環の有向グラフの矢がループのみからなっている場合で複雑な部類に入ると言えよう。実際[3, 4, 5] 等で扱われた被覆と正次数付き多元環の考察は有向グラフが一方向にしか進まない（oriented cycle がない）という仮定のもとで全てなされている。この仮定を外した考察は著者の論文[8, 9] が最初であろう。しかし非可換の場合はもっと複雑でまだ手が付けられない状況である。これに関しては[1] が唯一の論文であろう。

2. 正次数付き多元環とガロワ被覆

ここではAを代数閉体K上の可換局所アルティン多元環とする。また常に $K = A/\mathrm{Rad}A$ を仮定する。

定義 2.1. $\overline{A}$ が局所有界K－カテゴリーであるとは

$$\overline{A} = \sum \oplus \overline{A}e_\lambda = \sum \oplus e_\lambda \overline{A}$$

と非同型な直既約分解ができ、

$$\dim_K \overline{A}e_\lambda < \infty, \quad \dim_K e_\lambda\overline{A} < \infty$$

で $e_\lambda\overline{A}e_\lambda$ が局所環でとなっている（必ずしも単位元を仮定しない）多元環をいう。

定義 2.2. Gを$\overline{A}$の自己同型群Aut $\overline{A}$の部分群とする。関手 $F : \overline{A} \to A$ がGをガロワ群に持つガロワ被覆であるとは次の条件を満たすものをいう。

(i) $Fg = F$ が各 $g \in G$ について成立する.
(ii) Gは$\overline{A}$ に自由に作用する。
即ち $0 \neq a \in \overline{A}$, $1 \neq g \in G$ に対し $a^g \neq a$ となる。
(iii) $\overline{A}$ のG－軌跡を$\overline{A}/G$ とおくと$\overline{A}/G = A$ となる。
(iv) Fは被覆関手である。即ち任意の $a \in A$ と $y \in \overline{A}$ に対し次の条件を満たす。

$$\sum_{F(x)=a} x\overline{A}y = aAF(y) \quad \text{かつ} \quad \sum_{F(x)=a} y\overline{A}x = F(y)Aa$$

特にGが可換群の時、可換ガロワ被覆と呼ぶ。

次に可換局所多元環の普遍可換ガロワ被覆の構成法を紹介する。
$K = A/\mathrm{Rad}A$, $\dim \mathrm{Rad}A/\mathrm{Rad}^2 A = n$, t を A の巾零指数とする。
$\Lambda = K[x_1, \ldots, x_n]/(x_1, \ldots, x_n)^t$ と置く。この時多項式環 $K[x_1, \ldots, x_n]$ の普遍可換ガロワ被覆の有向グラフは、点として $\mathbb{Z}^n$ の点、矢として一つの座標の成分が1増加している点へ向かうものをとったものである。始点と終点が等しい経路 (Path) は等しいと関係式を入れて作られる有界K－カテゴリーが普遍可換ガロワ被覆である。これを $K\mathbb{Z}^n$と書く事にする。ガロワ群は自由アーベル群 $\mathbb{Z}^n$ である。被覆関手は、$K\mathbb{Z}^n$ の点 $\{z_1, \ldots, z_n\}$ に対し $x_1^{z_1} \ldots x_n^{z_n}$ を対応させ、第 i 成分を1増やす矢に対しては x_iを対応させる事で得られる。ガロワ群の作用は、群の元 $g = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{Z}^n$ と普遍可換ガロワ被覆の点 $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K\mathbb{Z}^n$ に対し $x^g = (x_1, \ldots, x_n) + (z_1, \ldots, z_n)$ で与えられる。

長さ t よりなる経路全体のなすイデアルを $t(K\mathbb{Z}^n)$ と表したとき、このイデアルによる商カテゴリー $K\mathbb{Z}^n/t(K\mathbb{Z}^n)$ を$\overline{\Lambda}$ とおくと自然に$\overline{\Lambda} \to \Lambda$ なるガロワ群 $\mathbb{Z}^n$ を持つ可換普遍ガロワ被覆が得られる。

$$\overline{A} = \Lambda/(\ker(\Lambda \to A) + t(K\mathbb{Z}^n))$$

と置く事で自然にAの可換普遍ガロワ被覆が得られる。従ってガロワ群は $\mathbb{Z}^n$ の商群である。これを可換図式に表すと以下の様になる。

$$\begin{array}{ccccc}
K\mathbb{Z}^n & \longrightarrow & \overline{\Lambda} = K\mathbb{Z}^n/t(\mathbb{Z}^n) & \longrightarrow & \overline{A} \\
{\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
K[x_1, \ldots, x_n] & \longrightarrow & \Lambda = K[x_1, \ldots, x_n]/(x_1, \ldots, x_n)^t & \longrightarrow & A
\end{array}$$

これに関して次の結果が得られる。

定理 2.1. A が正次数付き多元環である必要十分条件は$\overline{A}$ が正次数付き有界K－カテゴリーである。また A の普遍ガロワ被覆と A の正則パラメータ系とは1対1に対応する。

上記の定理は「正次数付き」という概念は被覆に関して不変量である事を示している。次の定理は正次数とガロワ群の間の関係を述べたものである。

定理 2.2. A が正次数付き多元環である必要十分条件は可換普遍ガロワ被覆のガロワ群が階数1以上である。即ち $\mathbb{Z}$ に同型な商群を有する。

3.1. 基本的なアイデア. 次の例を考える。但しKは標数が2でない体とする。

$$S = K[\![x,y]\!]/(x^2+y^2-x^3), \tag{3.1}$$

$$T = K[x,y]/(x^2+y^2-x^3), \tag{3.2}$$

$$R = K[x,y]/(x^2+y^2-x^3)+(x,y)^5. \tag{3.3}$$

(3.4)

これらの環の関係は $R = S/(x,y)^5 = T/(x,y)^5$ となっている。更にRが正次数付き多元環である事は

$$u = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3, \quad v = y$$

と置き換える事によって次の環同型を得る。

$$R \cong K[u,v]/(u^2+v^2)+(u,v)^5. \tag{3.5}$$

一方Sで考えると

$$x^2+y^2-x^3 = x^2(1-x)+y^2$$

から

$$\sqrt{1-x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{5}{64}x^4 + \dots, \quad \text{（マクローリン展開）}$$

を考えて

$$\begin{cases} u = x(1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{8}x^3 - \frac{5}{64}x^4 + \dots) = x\sqrt{1-x}, \\ v = y \end{cases}$$

と置く事により次のような環同型が得られる。

$$S \cong K[\![u,v]\!]/(u^2+v^2). \tag{3.6}$$

ところで

$$u^2 \equiv (x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^3) \mod x^2+y^2$$

より先に求めた式(3.5) を得る。

一方多項式環では(3.5) や(3.6) の様な同型が成立しない。即ち；

$$T \not\cong K[u,v]_{(u,v)}/(u^2+v^2). \tag{3.7}$$

式(3.5) 及び(3.6) は多項式環で正次数付けを考える事は扱いが難しい事を示している。同時に式(3.6) は可換局所アルティン環の正次数付けについて考える場合、可換局所アルティン環を巾級数環の商環として捉える方が自然で扱い易い事を示唆している。そこで一般に完備局所ネータ環へ考察の対象を移す事にする。

3.2. 完備局所ネータ環に直接「正次数付き」という概念が適用できれば問題ないが、次の定理によってこの多元環にそのままこの概念を持ち込むのは、無意味な事がわかる。

定理 3.1. Rを完備局所ネータ環とする。この時Rが正次数付き多元環ならRはアルティン環である。

$(R,\mathfrak{M})$を$\mathfrak{M}$を極大イデアルに持つ完備局所ネータ環とする。Rの商体$K=R/\mathfrak{M}$はRに含まれると仮定する。また$\dim_K \mathfrak{M}/\mathfrak{M}^2=n$とする。この設定から自然な環準同型

$$f:\, K[\![x_1,\ldots,x_n]\!]\to R$$

が得られる。$\ker f$は有限生成より適当な有限個の巾級数から生成されるので$\ker f=\langle f_1,\ldots,f_m\rangle$とおける。
そこで$X=\{x_1,\ldots,x_n\}$として、Rは一般に巾級数の有限集合Fを取り

$$R=K[\![X]\!]/(F)$$

の形をしているとしてよい。

補題 3.2. tを自然数として、$R_t=K[\![X]\!]/(F)+\langle X\rangle^t$が正次数付き多元環ならある多項式の有限集合$G_t$があり、次の同型が成立する。

$$R_t\cong K[\![Z]\!]/(G_t)+(z_1,\ldots,z_n)^t.$$

しかも$z_1,\ldots,z_n$に適当な“重み”を与えてG_tの各多項式は同次式になる。

上の補題で$K[\![Z]\!]/(G_t)+(z_1,\ldots,z_n)^t$が$K[\![Z]\!]/(G_t)$の商環であることに注目して次の定義を与える。

定義 3.1. $(R,\mathfrak{M})$を完備局所ネータ環として$K=R/\mathfrak{M}\subset R$と仮定する。$R$が「拡張された正次数付き多元環」とは、ある多項式の有限集合があり$R\cong K[\![x_1,\ldots,x_n]\!]/(G)$且つ$x_1,\ldots,x_n$に適当な重みを与えて$G$の各単項式は同次式になるものをいう。

拡張された正次数付き多元環か否かの問題は、適当に変数変換を行い有限個の巾級数を、各々が同次式である多項式に変換できるかという問題に帰着できる。これに関する基本結果は次の定理である。

定理 3.3. Fを多項式の有限集合とする。次の事が成立する。

(1) $K[\![x_1,\ldots,x_n]\!]/(F)$が拡張された正次数付き多元環である必要十分条件はある充分大きな自然数tで$K[x_1,\ldots,x_n]/(x_1,\ldots,x_n)^t+(F)$が正次数付き多元環になることである。
(2) $K[\![x_1,\ldots,x_n]\!]/(F)$が拡張された正次数付き多元環である必要十分条件は任意の自然数tに対し$K[x_1,\ldots,x_n]/(x_1,\ldots,x_n)^t+\langle F\rangle$が正次数付き多元環になることである。
(3) $K[x_1,\ldots,x_n]_{(x_1,\ldots,x_n)}/\langle x_1,\ldots,x_n\rangle^t+(F)$が正次数付き多元環なら、$K[\![x_1,\ldots,x_n]\!]/(F)$は拡張された正次数付き多元環である。
(4) $K[x_1,\ldots,x_n]_{(x_1,\ldots,x_n)}/(x_1,\ldots,x_n)^t+(F)$が正次数付き多元環で、環同型

$$K[\![x_1,\ldots,x_n]\!]/(F)\cong K[\![x_1,\ldots,x_n]\!]/(G)$$

が成立していれば、$K[x_1,\ldots,x_n]/(x_1,\ldots,x_n)^t+(G)$も正次数付き多元環である。

注意 3.1. 一般に定理 3.3(4) のGは多項式の集合とは限らない。従って多項式環の同型は導かない。

拡張された正次数付き多元環については未知の事も数多くある。以下の問題もその一つである。(成立していると思っていたが、吉野雄二氏より証明のギャップを指摘されたが、現在までそのギャップは埋められていない。)

［問題］

各自然数 t に対し多元環 $R_t = K[x_1, \ldots, x_n]/(G_t) + (x_1, \ldots, x_n)^t$ があるとする。但し、G_t は多項式の有限集合であり、更にイデアルとして

$$(G_t) + (x_1, \ldots, x_n)^{t-1} = (G_{t-1}) + (x_1, \ldots, x_n)^{t-1}$$

が成立しているものとする。即ち、多元環としての全準同型の列

$$\cdots \twoheadrightarrow R_t \twoheadrightarrow R_{t-1} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow R_1$$

がある事と同値である。もし、全ての R_t が正次数付き多元環なら、$\varprojlim R_t$ は拡張された正次数付き多元環か？

3.3. (非) 正次数付き多元環の組織的構成法. この節ではある巾零指 t を持つ正次数付き多元環 R_tがあれば、多元環としての全準同型の列

$$\cdots \twoheadrightarrow R_t \twoheadrightarrow R_{t-1} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow R_1$$

で$\varprojlim R_t$ が拡張された正次数付き多元環となるようなものが存在する事を見ていく。また、ある巾零指 t を持つ非正次数付き多元環 R_tがあれば、多元環としての全準同型の列

$$\cdots \twoheadrightarrow R_t \twoheadrightarrow R_{t-1} \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow R_1$$

で$\varprojlim R_t$ が拡張された正次数付き多元環でないようなものが存在する事も示す。以下の定理はこれをイデアルの形式で述べたものである。

定理 3.4. F を多項式の有限集合、t を自然数、$R = K[x_1, \ldots, x_n]/(F) + (x_1, \ldots, x_n)^t$とする。

(1) Rが正次数付き多元環なら、$s > t$ なる各自然数 s について適当な多項式の有限集合 F_sがあり、$R_s = K[x_1, \ldots, x_n]/(F_s) + (x_1, \ldots, x_n)^s$ が巾零指数 s を持つ正次数付き多元環で多項式環のイデアルとして $(F) + (x_1, \ldots, x_n)^t = (F_s) + (x_1, \ldots, x_n)^t$ を満たすものが存在する。
(2) Rが非正次数付き多元環なら、$s > t$ なる各自然数sについて適当な多項式の有限集合 F_sがあり、$R_s = K[x_1, \ldots, x_n]/(F_s) + (x_1, \ldots, x_n)^s$ が巾零指数 s を持つ非正次数付き多元環で多項式環のイデアルとして $(F) + (x_1, \ldots, x_n)^t = (F_s) + (x_1, \ldots, x_n)^t$ を満たすものが存在する。

この考察の中にで R_t (非) 正次数付き多元環の組織的構成法も具体的に示されている。証明と構成法は以下の例から見て取れると思う。

例 1. $u = x - \frac{1}{2}x^2, \quad v = y$と置く事により、

$$K[x,y]/(x^2 - x^3 - y^2) + (x,y)^4 \cong K[u,v]/(u^2 - v^2) + (u,v)^4$$

の環同型が得られ、前者は正次数付き多元環である事がわかる。
そこで $u = x - \frac{1}{2}x^2 + x^4, \quad v = y + y^4$を $u^2 - v^2$に代入して環同型

$$S = K[x,y]/(x^2 - y^2 - x^3 + \frac{1}{4}x^4 - 2x^5 + 2y^5) + (x,y)^6 \cong K[u,v]/(u^2 - v^2) + (u,v)^6$$

が得られ、Sも正次数付き多元環である事がわかる。

例 **2**. 多元環 $K[x,y]/(x^2-y^5, xy^7-y^9)+(x,y)^{10}$ は非正次数付き多元環である事が知られている[12]。従って

$$K[x,y]/(x^2-y^5, xy^7-y^9+y^{10})+(x,y)^{11}$$

も定理 3.3より非正次数付き多元環である。

4. 2変数の場合

4.1. $K[\![x,y]\!]/(xy\cdot f(x,y))$ の形の多元環が拡張された正次数付き多元環になるような“多項式” $f(x,y)$ を全て求められる[9]。

定理 **4.1**. $f(x,y)$ を2変数の多項式とする。多元環 $R=K[\![x,y]\!]/(xy\cdot f(x,y))$ が拡張された正次数付き多元環になるための必要十分条件は $f(x,y)$ が次のいずれかの形になることである。

(1) 自然数 s,t と Kの元 a_iおよび 巾級数の単元 a,b,c があり

$$f(x,y)=\sum_{i=0}^{[\frac{t}{s}]} a_i(ax+by^s)^i y^{t-si}$$

または

$$f(x,y)=\sum_{i=0}^{[\frac{t}{s}]} a_i(ay+bx^s)^i x^{t-si}.$$

(2) 自然数 n と Kの元 a_iと 巾級数の単元 a,b,c,d で $ad-bc\neq 0$ を満たすものについて

$$f(x,y)=\sum_{i=0}^{n} a_i(ax+by^s)^i(cx+dy)^{n-i}.$$

または

$$f(x,y)=\sum_{i=0}^{n} a_i(ay+bx^s)^i(cx+dy)^{n-i}.$$

但し [] はガウス記号。
特に $m>\deg f(x,y)+2$ とすると $f(x,y)$ の形が (1) でも (2) でもなければ多元環 $K[x,y]/((x,y)^m, xy\cdot f(x,y))$ は非正次数付き多元環である。

例 **3**. 定理 4.1から

$$K[\![x,y]\!]/(xy\cdot(x^2y^3+x^3+y^4))$$

が簡単な計算で拡張された正次数付き多元環でない事がわかる。
特に $t>7$、$g(x,y)\in(x,y)^8$、Fを (x,y) の有限部分集合とすると

$$K[x,y]/(xy\cdot(x^2y^3+x^3+y^4+g(x,y)))+(F)+(x,y)^t$$

は非正次数付き多元環であることがわかる。

4.2. 2変数の場合は、2次の項があれば必ず正次数付き多元環であることが巾級数を調べる事で容易に証明できる。計算は基本的には平方完成の手法である。

定理 **4.2.** $f(x,y)$ を2次の項を持つ巾級数、即ち $f(x,y) \in (x,y)^2$で $f(x,y) \notin (x,y)^2$ とする。この時 $R = K[\![x,y]\!]/(f(x,y))$ は拡張された正次数付き多元環である。

系 **4.3** (**Zeng** [11]). $f(x,y)$ を2次の項を持つ多項式、即ち $f(x,y) \in (x,y)^2$で $f(x,y) \notin (x,y)^2$とする。この時 $R = K[x,y]/(f(x,y)) + (x,y)^n$ は任意の自然数 n について正次数付き多元環である。

5. 他の結果

5.1. TH. Belzner and W. D. Burgess and K. R. Fuller and R. Schulz [1] によって次のような非可換の非正次数付き局所多元環の例が出されている。

$$k[x,y]/(x^3, xy, yx^2, x^2 - y^3, yx - y^3)$$

5.2. 吉野雄二氏から斉藤恭司氏[7] が rational singularity のもと次のような綺麗な結果を出していると教えて頂いた。

$K[\![x_1,\ldots,x_n]\!]/(f(x_1,\ldots,x_n))$ が拡張された正次数付き多元環である必要十分条件は

$$f \in \left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) K[\![x_1,\ldots,x_n]\!]$$

を満たす事である。但し、[7] では拡張された正次数付き多元環に相当する概念を QH (Quasi-homogeneous) と定義している。

5.3. 加藤希理子氏(数理研)[6] がこれらについて深く考察している。

References

1. TH. Belzner, W. D. Burgess, K. R. Fuller, and R. Schulz, *Examples of ungradable algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **114** (1992), 1–4.
2. K. Bongartz and P. Gabriel, *Covering space in representation theory*, Invent. Math. **65** (1982), 331–378.
3. J. A. De La Peña, *On the abelian galois coverings of an algebra*, J. Algebra **102** (1986), 129–134.
4. Edward L. Green, *Group-graded algebras and the zero relation problem*, Represenations of algebras, Lecture Notes in Mathematics, vol. 903, Springer-Verlag, 1981, pp. 106–115.
5. ______, *Graphs with relations, coverings and group-graded algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **279** (1983), no. 1, 297–310.
6. K. Kato, *Auslander modules and quasi-homogenity of local rings*, preprint.
7. K. Saito, *Quasihomogene isolierte singulaitaten von hyperflachen*, Invention math. **14** (1971), 123–142.
8. M. Sato, *On relation between gradability and Galois groups of local commutative artinian rings*, preprint.
9. ______, *The structure of positively graded local artinian rings and extended graded complete local notherian rings*, Comm. in Algebra. **20** (1992), 3769–3780.
10. G. W. Wilson, *The cartan map on categories of graded modules*, J. Algebra **85** (1983), 390–398.
11. Q. Zeng, *Vanishing of Hochschild's cohomologies $H^i(A \otimes A)$ and gradability of a local commutative algebra*, Tsukuba J. Math. **14** (1990), no. 2, 263–273.
12. ______, *Vanishing of Hochschild's cohomologies and directed graphs with polynomial weights*, 1993.

山梨大学教育学部数学教室
山梨県甲府市武田4－4－37

Nakayama 予想 と ホモロヂー群 の 消滅 について

足利工業大学　　　太刀川　弘幸

§1. Finitistic dimension 予想 と 一般化された Nakayama 予想

この報告では §4 を除いて Λ は 体 K 上の 有限次元多元環 と仮定する． ホモロヂー代数 には誰が予想したのか明確にできない 次の Finitistic dimension 予想 が古くから知られている． 即ち

$$『\quad \sup_{X \in \text{mod-}\Lambda \,|\, \text{proj.dim}\, X_\Lambda < \infty} \{\text{proj. dim}\, X_\Lambda\} < \infty \quad』$$

が成立すると言うのである． ここで mod-Λ は有限生成 Λ-右加群 全体のつくる圏を意味し，不等号の左辺が Λ の Finitistic dimension の定義である．

一方 M. Auslander と I. Reiten は 1975年 [3] に Nakayama 予想 [10] の次のような一般化 を行っている．

『 S を任意の単純な 左 Λ-加群とし

$$0 \to {}_\Lambda\Lambda \to I_0 \to I_1 \to I_2 \to \cdots \to I_j \to \cdots \tag{1}$$

を ${}_\Lambda\Lambda$ の極小入射分解とする． この時 適当な整数 j が存在して $S \subset I_j$ が成立する．』

先ず我々は この 一般化されたNakayama 予想 が Finitistic dimension 予想 から導かれることを示そう．

証明：或る単純 左 Λ-加群 S に対して $S \not\subset I_j$, $\forall j=0,1,2,\ldots,$ と仮定する． 即ち これは $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(S,\Lambda)=0$, $\forall i = 0,1,2,\ldots,$ が成立していると仮定することであるが，特に S は非射影的であり，$\mathrm{Ext}^0_\Lambda(S,\Lambda) = \mathrm{Hom}_\Lambda(S,\Lambda) = 0$ である． いま 完全列

$$\to \cdots \to P_j \xrightarrow{d_j} \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} {}_\Lambda S \to 0 \tag{2}$$

を S の 極小射影分解 とする． 仮定 と (2) の完全性より

$$0 \to [S,\Lambda] \xrightarrow{[d_0,\Lambda]} [P_0,\Lambda] \xrightarrow{[d_1,\Lambda]} [P_1,\Lambda] \to \cdots \to [P_j,\Lambda] \to \cdots \tag{3}$$

は完全列である． 但し $[{}_\Lambda P_j, {}_\Lambda\Lambda]$ は $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_j,\Lambda)$ を意味するものとする．

更に $[S,\Lambda]=0$ より

$$0 \to [P_0,\Lambda]_\Lambda \xrightarrow{[d_1,\Lambda]} [P_1,\Lambda]_\Lambda \to \cdots \to [P_j,\Lambda]_\Lambda \to \cdots$$

は完全列． 従って proj. dim Cok $[d_j,\Lambda]_\Lambda \leq j$ であるが，Finitistic dimension 予想 が真であると仮定すれば，或る 整数 m に対して Finitistic dim $\Lambda_\Lambda = m$ と置ける． 故に Cok $[d_{m+1},\Lambda]_\Lambda$ の極小射影分解を考えれば $[d_1,\Lambda]$ は split する． ${}_\Lambda P_j$ は射影的であるから，再び $[-_\Lambda,\Lambda_\Lambda]$ を (3) に施せば (2) に 於ける d_1 が split していることになる． これは (2) の極小性に反し矛盾である．

彼らは同時に次の同値な予想をおこなつた．

『Λ-mod の 生成加群 (generator) ${}_\Lambda M$ に対して $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M,M)=0$，$\forall i=1,2,\ldots$，が成立すれば ${}_\Lambda M$ は射影的である．』

この同値性の証明は次のようになされる．

証明： Λ_Λ の双対加群 ${}_\Lambda D(\Lambda)=\mathrm{Hom}_K(\Lambda,K)$ は Λ-mod の 入射余生成加群 (injective cogenerator) である． 従って ${}_\Lambda M$ の 一つ の入射分解として

$0 \to {}_\Lambda M \to \prod^{n_1} {}_\Lambda D(\Lambda) \to \prod^{n_2} {}_\Lambda D(\Lambda) \to \cdots$ を とることが出来る． $\mathrm{End}_\Lambda(M)=A$ と置けば M_A は ${}_\Lambda M$ が生成加群であるという仮定から射影的になり 且つ $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M,M)=0$，$\forall i=1,2,\ldots$，が成立するという仮定から

$$0 \to {}_A A = {}_A[{}_\Lambda M,{}_\Lambda M] \to \prod^{n_1} {}_A[{}_\Lambda M,{}_\Lambda D(\Lambda)] \to \prod^{n_2} {}_A[{}_\Lambda M,{}_\Lambda D(\Lambda)] \to \cdots$$

は完全である． 更に ${}_A[{}_\Lambda M,{}_\Lambda D(\Lambda)] \simeq {}_A D(M)$． M_A は射影的であるから ${}_A D(M)$は入射的． 故に

$$0 \to {}_A A \to \prod^{n_1} {}_A D(M) \to \prod^{n_2} {}_A D(M) \to \cdots \qquad (4)$$

は ${}_A A$ の入射分解，そして ${}_A D(M)$ に現れる単純加群の同型類の族が 全ての単純 A-加群の同型類の族に一致するか否かが A に対して一般化された Nakayama 予想 の成立の可否を決める． それは 又 ${}_A D(M)$ が A-mod の余生成加群になるか否か，即ち M_A が mod-A の生成加群になるか否かと同値である． 更にそれは森田理論により，${}_\Lambda M$ が射影的であるが否かと同値である． 即ち $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M,M)=0$，$\forall i=1,2,\ldots$，を満たす生成加群 ${}_\Lambda M$ が射影的になることと $A=\mathrm{End}_\Lambda(M)$ に対して一般化された Nakayama予想 が 成立することとが同値である．

ここで注意して置きたいのは完全列 (4) から

$$\mathrm{End}_{\mathrm{End}_\Lambda(D(M)_\Lambda)}(D(M)) \simeq \Lambda$$

が成立する． この同型は ${}_\Lambda M$ が 生成加群 (<=> $D(M)_\Lambda$ が余生成加群 (cogenerator)) でなくとも ${}_\Lambda M$ (resp. $D(M)_\Lambda$) が射影的 (resp. 入射的) であれば成立する． Cf. Lambek [8], Tachikawa [16].

さて上述の Auslander-Reiten の予想において $M = {}_\Lambda\Lambda \oplus {}_\Lambda D(\Lambda)$ とおけば筆者 [17] の 次の予想 I が 得られる．

『Hochschild cohomology group $H^i(\Lambda)$ が 整数 $\forall i = 1,2,\ldots,$ に対し零になれば Λ は準フロベニウス多元環，即ち 自己入射多元環 (selfinjective algebra)，即ち ${}_\Lambda\Lambda$ は Λ- 加群 として入射的である．』

証明：$\mathrm{Ext}^i_\Lambda(\Lambda \oplus D(\Lambda)) \simeq \mathrm{Ext}^i_\Lambda(D(\Lambda),\Lambda) \simeq \mathrm{Ext}^i_{\Lambda^e}(\Lambda,\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda D(\Lambda),{}_\Lambda\Lambda)) \simeq$

$\mathrm{Ext}^i_{\Lambda^e}(\Lambda,\Lambda\otimes\Lambda)$ が成立するからである． ここで $\Lambda^e = \Lambda\otimes\Lambda^o$, Λ^o は Λ の opposite algebra である． なお最後の同型は $\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda D(\Lambda),{}_\Lambda\Lambda)) \simeq$

$\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda D(\Lambda),D(D({}_\Lambda\Lambda))) \simeq D({}_\Lambda D(\Lambda) \otimes D(\Lambda)_\Lambda) \simeq {}_\Lambda\Lambda \otimes \Lambda_\Lambda$ から導かれる．

ついでに Λ を準フロベニウス多元環 に限れば 筆者 [17] の予想 II

『Λ を準フロベニウス多元環とし，X を有限生成 Λ-加群 とするとき $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(X,X) = 0$, $\forall i = 1,2,\ldots,$ なれば X は射影加群となる．』

を得る． $M = \Lambda \oplus X$ と置けば良いからである．

既に多数の人々 [9],[15],[17],[21] によって指摘されているように予想 I, II が全ての多元環 Λ，全ての準フロベニュウス多元環上の加群 X に対し共に真で在ることと もともと の Nakayamaの予想

『 $$0 \to {}_\Lambda\Lambda_\Lambda \to Q_0 \to Q_1 \to Q_2 \to \cdots \to Q_j \to \cdots \tag{5}$$

を 両側 Λ-加群 ${}_\Lambda\Lambda_\Lambda$ の極小入射分解とすし，すべての Q_j が 同時に Λ-Λ-射影的であれば Λ は準フロベニウス多元環になる．』

が真であることとが同値である． 即ち より正確に言うと

『Λ-mod の全ての 生成-余成加群 (generator-cogenerator) ${}_\Lambda M$ に対して $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M,M) = 0$, $\forall i = 1,2,\ldots,$ が成立すれば ${}_\Lambda M$ は射影的である』 と

『Λ-mod の全ての生成-余生正加群 M の 順同型環 $\mathrm{End}_\Lambda M$ に対し Nakayama 予想 が成立する．』

とは同値である．

強調したいのは非常に基本的な上述したどの予想も一般には解決されずに今日残っているということである．

勿論，Λ が 群環 の場合 Alperin and Evens [1]，Carlson [4]，Schulz [12] 等によって予想 II が解かれたことは 唯一の朗報 であると言ってよい．

この 予想II は自明拡大多元環 Λ = A ∝ D(A)（但し A は 遺伝多元環 (hereditary algebra)）の場合にも，星野君 [6] によって解かれている．そして A をより一般的な環に置き換えようと言う試みが遺伝多元環 の tilting module による deformation B（即ち tilted algebra）を考えることを 筆者 及び 若松君 に促し，更に 自明拡大環 間 の Stable equivalence [18]，しいては derived categories の Morita equivalence の研究へつながって行っていると見ることもできる． 最近の若松君の仕事 [19] はこの方向の更なる発展を目指している．

§2. Nakayama 予想 と 正次数付多元環

一般化された Nakayama 予想に関する肯定的な興味ある結果としては次の Wilson [20] の定理を挙げることが出来る：

『正次数付多元環 (positively graded algebra) Λ に対し 一般化された Nakayama 予想は正しい．』

ここで正数次付という条件が重要である． 勿論 定義としては Λ が K-加群としての直和分解 $\Lambda = A_0 \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$ を持ち，更に 等式 $\mathrm{rad}\ \Lambda = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$，包含関係 $A_iA_j \subset A_{i+j}$ を満たしていることである．一方，前 § で説明 したように 生成-余生成加群 M に対して $\mathrm{End}_\Lambda M$ を考えるとき，$\mathrm{End}_\Lambda M$ に対して 一般化された Nakayama 予想が成立すれば $\mathrm{End}_\Lambda M$ に対して Nakayama 予想 も成立する．

従って Wilson の 定理 の Λ として適当な生成-余生成加群 ${}_\Lambda M$ の $\mathrm{End}_\Lambda M$ をとり 『若し $\mathrm{End}_\Lambda M$ が 正次数付多元環になれば $\mathrm{End}_\Lambda M$ に対して Nakayama 予想 が成立している』 ことになる． 即ち $\mathrm{End}_\Lambda (\Lambda \oplus D(\Lambda))$ が 正次数付多元環 になれば，このような Λ に対して 私の 予想 I が正しく，また 準フロベニュウス多元環 Λ 上の加群 ${}_\Lambda X$ に対して $\mathrm{End}_\Lambda (\Lambda \oplus X)$ が 正次数付多元環になれば 私の予想 II が X に対して成立していることを示す．

これが星野君のアイディア であり，[7] において

『$(\mathrm{rad}\ \Lambda)^3 = 0$ という条件のもとでは 任意の 生成-余生成加群 ${}_\Lambda M$ の $\mathrm{End}_\Lambda M$ に対し Nakayama 予想は正しい．』 ことを証明した．

さて ${}_\Lambda M$ が 生成 Λ-加群 であるとき Λ は $\mathrm{End}_\Lambda M$ の 冪等元 を 両側から $\mathrm{End}_\Lambda M$ に掛けてえられる． K が 代数的閉体であれば 冪等元 は 正次数付多元環 $\mathrm{End}_\Lambda M$ の 零次 の 斉次部分加群 に属すると仮定してよい．従って $\mathrm{End}_\Lambda M$ を正次数付多元環にするためには Λ を 正次数付多元環と仮定する必要がある．

そこで此処では 同じアイディアのもと

『代数的閉体上の正次数付可換局所多元環 Λ が条件 $(\mathrm{rad}\,\Lambda)^4 = 0$ を満たすとき 任意の生成-余生成加群 ${}_\Lambda M$ の $\mathrm{End}_\Lambda M$ に対し Nakayama 予想は正しい．』

を証明して見せよう．

証明：Step 1） 条件 $(\mathrm{rad}\,\Lambda)^4 = 0$ の下で

『Λ が正次数付局所多元環 <=> $\mathrm{End}_\Lambda(\Lambda \oplus D(\Lambda))$ が正次数付多元環』

を証明する，これは 上述したように Wilson の定理 により 同じ条件の下で 『予想 I が正次数付局所多元環 Λ に対し成立している』 ことを示し，結局 Λ が selfinjective であることをを証明することである．

また Step 2）で は 予想 II の正しいことを証明する．

Step 1）の証明：Λ に関する仮定から Λ の K-加群としての直和分解を

$$\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1 \oplus \Lambda_2 \oplus \Lambda_3 \tag{6}$$

と置くことが出来る． ここで $J = \mathrm{rad}\,\Lambda = \Lambda_1 \oplus \Lambda_2 \oplus \Lambda_3$ であり， $\Lambda_i\Lambda_j \subset \Lambda_{i+j}$, $0 \le i,j \le 3$, が成立している．

先ず Λ の $\mathrm{Soc}\,\Lambda_\Lambda$ の生成元は斉次であると仮定してよい．
何故なら $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $\alpha_i \in \Lambda_i$ を $\mathrm{Soc}\,\Lambda_\Lambda$ の一つの生成元とするとき $^\forall\gamma_1 \in \Lambda_1$ に対して $\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_1 = 0$, $\alpha_1\gamma_1 \in \Lambda_2$, $\alpha_2\gamma_1 \in \Lambda_3$ より $\alpha_1\gamma_1 = 0$, $\alpha_2\gamma_1 = 0$, また $^\forall\gamma_2 \in \Lambda_2$ に対して $\alpha_1\gamma_2 = 0$. よつて $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathrm{Soc}\,\Lambda_\Lambda$． 結局 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathrm{Soc}\,\Lambda_\Lambda$ が言える． 従って α は $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathrm{Soc}\,\Lambda_\Lambda$ で置き換えられる． 更に $\mathrm{Soc}\,\Lambda_\Lambda$ の 生成元 α が一次の斉次元，即ち Λ_1 に属して居るとする． このとき Λ は可換環であるから $\alpha \in \mathrm{Soc}\,{}_\Lambda\Lambda$ でもあり，α の次数 1 を 3 に変更して Λ の新しい 次数付（grading）を Λ に導入することが出来る． そこで 以後 Λ の 直和分解（6）に関して $\mathrm{Soc}\,\Lambda_\Lambda$ の 生成元 は Λ_2 か Λ_3 に属すると仮定する． さて（6）から導かれる K-加群としての $D(\Lambda)$ の直和分解

$$D(\Lambda) = D(\Lambda_3) \oplus D(\Lambda_2) \oplus D(\Lambda_1) \oplus D(\Lambda_0) \tag{7}$$

は ${}_\Lambda D(\Lambda)$ を 正次数付 Λ-加群とする． 実際 $D(\Lambda)_i = D(\Lambda_{(3-i)})$, $i = 0,1,2,3$ として良い．

同型

$$\mathrm{End}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda \oplus D(\Lambda)) \simeq \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda, {}_\Lambda\Lambda) & \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda, {}_\Lambda D(\Lambda)) \\ & \\ \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda D(\Lambda), {}_\Lambda\Lambda) & \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda D(\Lambda), {}_\Lambda D(\Lambda)) \end{pmatrix}$$

が成立するが，次数付き加群の間の射像に自然に次数（負の次数を許して）を導入することにより $\mathrm{End}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda \oplus D(\Lambda))$ を 又 次数付多元環とすることが出来る．従って Wilson の定理を適用するには我々はこの次数付が正に出来るかどうかを確かめる必要がある．

一方 ${}_\Lambda\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda, {}_\Lambda\Lambda) \simeq {}_\Lambda\Lambda$, $\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda D(\Lambda), {}_\Lambda D(\Lambda)) \simeq \Lambda$, $\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda, {}_\Lambda D(\Lambda)) \simeq {}_\Lambda D(\Lambda)$ であるが，これ等の同型に対し夫々の左辺の加群と右辺の加群の次数付きは一致していることが分かる．即ち上の 左辺 の 準同型加群 に現れる 次数 は全て正(正確には non negative) であると言える．従って残るところは $\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda D(\Lambda), {}_\Lambda\Lambda)$ の次数付けが 正になっているかどうかを確かめることである．

ここで $\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda D(\Lambda), {}_\Lambda\Lambda) \subset \bigoplus_{i,j} \mathrm{Hom}_K(D(\Lambda)_i, \Lambda_j)$ の考慮の下に $\bigoplus_i \mathrm{Hom}_K(D(\Lambda)_i, \Lambda_{i+k})$ に属する射像を k 次の射像と定義している事に注意しよう．

さて $0 \neq \phi \in \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda D(\Lambda), {}_\Lambda\Lambda)$ の次数が -1 であると仮定しよう．

この時 ϕ は $\phi = \phi^{(0)} + \phi^{(1)} + \phi^{(2)} + \phi^{(3)}$, $\phi^{(0)} \in \mathrm{Hom}_K(D(\Lambda_3), \Lambda_{-1})$,

$\phi^{(1)} \in \mathrm{Hom}_K(D(\Lambda_2), \Lambda_0)$, $\phi^{(2)} \in \mathrm{Hom}_K(D(\Lambda_1), \Lambda_1)$, $\phi^{(3)} \in \mathrm{Hom}_K(D(\Lambda_0), \Lambda_2)$

と分解されるが $\Lambda_{-1} = (0)$ であるから $\phi^{(0)}$ は零射像である．
一方この証明の初めに注意したように Soc Λ_Λ の生成元 は Λ_2, Λ_3 に 属すものとしているから Top ${}_\Lambda D(\Lambda)$ の 生成元 は $D(\Lambda_3)$, $D(\Lambda_2)$ に属している．

従って 若し $\phi^{(1)} = 0$ であれば $\phi = 0$ となり仮定に反する．また $\phi^{(1)} = 0$ とすれば ${}_K\Lambda_0 \simeq {}_K K$ であるから $\phi(D(\Lambda)) \supset \phi(\Lambda D(\Lambda_2)) = \Lambda\phi(D(\Lambda_2)) =$

$\Lambda\phi^{(1)}(D(\Lambda_2)) = \Lambda\Lambda_0 = \Lambda$，然し $\dim_K D(\Lambda) = \dim_K \Lambda$ より ϕ は 同型射像となり $\phi(D(\Lambda_3)) = 0$ に反する．

更に $0 = \phi \in \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda D(\Lambda), {}_\Lambda\Lambda)$ の次数が -2 以下 と 言う事もない．何故なら $\phi(D(\Lambda_3) + D(\Lambda_2)) = 0$ となり ϕ は 零射像 になってしまい矛盾するからである． 結局 $\mathrm{End}_\Lambda(\Lambda \oplus D(\Lambda))$ は 正次数付多元環であることが証明された． 即ち $H^i(\Lambda \otimes \Lambda) = 0$, $i=1,2,...,$ から Λ のフロベニュウスであることが証明された．

step 2) の 証明: Λ は selfinjective, $(\mathrm{rad}\ \Lambda)^4 = 0$ と仮定する．
この時 (6) において $J^3 = \Lambda_3 = \mathrm{Soc}\ {}_\Lambda\Lambda$ は 単純 Λ-加群である．
従って ${}_\Lambda M$ を非射影的直規約 Λ-加群と仮定すれば $\Lambda_3 M = 0$, ${}_\Lambda M$ は Λ/J^3- 加群である． そこで組成列 $M \supset (\Lambda_1 + \Lambda_2)M \supset \Lambda_2 M \supset 0$ に対して M における $(\Lambda_1 + \Lambda_2)M$ の K-加群としての補加群を M_0, $(\Lambda_1 + \Lambda_2)M$ における $\Lambda_2 M$ の K-加群としての 補加群を M_1, $\Lambda_2 M$ を M_2 と置けば M は 次数付加群となる．ここで注意したいのは，M の 生成元 を M_0 に属する元から取ることが出来ると言うことである． $J^3 M \neq 0$ ならば上のような次数付きを M に定義することは一般に出来ない．

同型

$$\mathrm{End}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda\oplus D(\Lambda)) \simeq \begin{pmatrix} \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda, {}_\Lambda\Lambda) & \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda, {}_\Lambda M) \\ & \\ \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda M, {}_\Lambda\Lambda) & \mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda M, {}_\Lambda M) \end{pmatrix}$$

において Step 1) に於ける如く $\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda, {}_\Lambda\Lambda)$, $\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda\Lambda, {}_\Lambda M)$ が 正次数付加群になることは明らかである.　一方 $\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda M, {}_\Lambda\Lambda)$, $\mathrm{Hom}_\Lambda({}_\Lambda M, {}_\Lambda M)$の次数付については如何であろうか?　いずれの Λ-射像も M の生成元達の像によって決定される. しかし ${}_\Lambda M$ の生成元 は M_0 に属していた.　従って射像の次数は何れも正（正確には非負であり），結局 $\mathrm{End}_\Lambda(\Lambda \oplus M)$ は 正次数付多元環と言える. 結局 予想 II は 成立する.

さて 曽君は [22] において $K[x,y]/(x,y)^4$の準同型像となっている局所環は正次数付多元環であることを示している.　従ってこの様な局所環に関しては予想 I, II は成立するのである.

然し 曽君 [20](同時に佐藤真久君も独立に) は 次の局所多元環 B には如何なる 正次数付も導入することは不可能であることを証明している.

$$B = K[x_1,x_2,x_3]/((x_1,x_2,x_3)^4,\ x_1x_2 - x_3^3,\ x_2x_3 - x_1^3,\ x_3x_1 - x_2^3)$$

従って 残念ながら B は $(\mathrm{rad}\ B)^4 = 0$ なる局所多元環ではあるが 今 証明して見せた結果から $H^i(B \otimes B) \neq 0$ なる整数 i の存在（B は non-selfinjective であるからこの様な整数 i は存在するはず）を導くことは出来ないのである.

最近，星野君 は $K[x,y]$ の 準同型像となる局所多元環 に対して 予想 I の成立すること（正確には 冪級数環 $K[[x,y]]$ の イデアル I を (x,y)-primary とするとき $\Lambda = K[[x,y]]/I$ は $H^i(\Lambda\otimes\Lambda)=0$, $i = 1,2$, であれば selfinjective であること）を報告してきている.　大変興味ある結果であるが，更に 上 の 様な 局所多元環 B に対し $H^i(B\otimes B) \neq 0$ なる 整数 i の 存在を導く事が出来るようになることを希望している.

最後に可換アルチン環は局所環の直和であるから

『代数的閉体上の正次数付可換多元環 Λ が条件 $(\mathrm{rad}\ \Lambda)^4 = 0$ を満たすとき 任意の生成-余生成加群 ${}_\Lambda M$ の $\mathrm{End}_\Lambda M$ に対し Nakayama 予想 は正しい.』

も証明されていることを注意したい.　また 正数次数付多元環に関しては佐藤君の興味ある論文 [11] のあることを付言しておく.

§3 Hochschild group $H^n(\Lambda\otimes\Lambda)$ の或る部分群の消滅について

$H^n(\Lambda,\Lambda\otimes\Lambda)$ ($\simeq \mathrm{Ext}^n_{\Lambda^e}(\Lambda,\Lambda\otimes\Lambda)$) は Λ^e -加群 Λ の 一つの射影分解

$$\to\cdots\to P_n \xrightarrow{d_n} \cdots \to P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{d_0} {}_{\Lambda^e}\Lambda \to 0 \qquad (8)$$

に対し

$H^n(\Lambda,\Lambda\otimes\Lambda) = \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\mathrm{Im}\, d_n,\Lambda\otimes\Lambda)/\{\Psi\iota \mid \Psi \in \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(P_{n-1},\Lambda\otimes\Lambda)\}$ として計算される．

但し ι は $\mathrm{Im}\, d_n$ の P_{n-1} への 埋蔵射像である．

ここで 射影分解 (8) として特に standard 分解を利用してはどうかと考える． Nakayama の予想に関する困難さは $\mathrm{Ker}\, d_{n-1}$ を具体的に求める困難さとも言えるからである． 射影分解 (8) が standard であれば P_n, d_n は次のように具体的に与えられる：

$$P_n = \overbrace{\Lambda\otimes\Lambda\otimes\cdots\otimes\Lambda\otimes\Lambda}^{n+2} \xrightarrow{d_n} \overbrace{\Lambda\otimes\Lambda\otimes\cdots\otimes\Lambda}^{n+1} = P_{n-1}$$

$$d_n(\lambda_0\otimes\lambda_1\otimes\cdots\otimes\lambda_n\otimes\lambda_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(\lambda_0\otimes\lambda_1\otimes\cdots\otimes\lambda_{i-1}\otimes\lambda_i\lambda_{i+1}\otimes\lambda_{i+2}\otimes\cdots\otimes\lambda_n\otimes\lambda_{n+1}).$$

特に $n = 1$ であれば $\mathrm{Im}\, d_1 = \{\lambda\otimes\mu - \mu\otimes\lambda \mid \lambda,\mu \in \Lambda\}$, $\Psi \in \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(P_0, \Lambda\otimes\Lambda) = \mathrm{End}_{\Lambda^e}(\Lambda\otimes\Lambda)$, Ψ は $(1\otimes1)$ の Ψ による image に依って一意的に決定される．

又 別の困難さは $\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\mathrm{Ker}\, d_{n-1},\Lambda\otimes\Lambda)$ の 元，即ち $\mathrm{Im}\, d_n$ から $\Lambda\otimes\Lambda$ への 射像のうち両側 $\Lambda\otimes\Lambda$ - 準同型を選ぶ困難さを挙げることが出来る．この困難さを避ける 一つの便法として $H^n(\Lambda\otimes\Lambda)$ の部分群

$$\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\mathrm{Top}\ \mathrm{Im}\, d_n,\Lambda\otimes\Lambda) + \{\Psi\iota \mid \Psi \in \mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(P_{n-1},\Lambda\otimes\Lambda)\}$$

に注目するのは如何なものであろうか？ Λ を代数的閉体 K 上の 局所環とするとき $\mathrm{Top}\ \mathrm{Im}\, d_n$ は K 上 の ベクトル空間 と考えられ K- 射像は自然に 両側 Λ- 射像に成っているからである． 上の部分群を $S\ H^n(\Lambda\otimes\Lambda)$ と表すことにする． この時 "$S\ H^n(\Lambda\otimes\Lambda) = 0$, $n = 1,2,\ldots,$ なる Λ の構造を決定せよ" という問題は興味がある．

ここで一っの例として浅芝君の結果 [2] を導く $S\ H^1(\Lambda\otimes\Lambda)$ の計算をおこなって見よう． Λ を 局所多元環，$(\mathrm{rad}\ \Lambda)^{\rho+1} = J^{\rho+1} = 0$ とする．J/J^2 の K-基底 を $\{x_i + J^2 \mid i=1,2,\ldots,n\}$, J^2/J^ρ の K-基底 を

$\{y_j + J^{\rho} | j=1,2,\dots,\ell\}$, J^{ρ} の K-基底 を $\{w_k | k=1,2,\dots,m\}$ とする.

更に $x_i x_{i_1} = \dots + \sum a^{(k)}_{i,i_1} w_k$, $x_i y_j = \dots + \sum b^{(k)}_{i,j} w_k$,
$y_j x_i = \dots + \sum b^{(k)}_{j,i} w_k$, $a^{(k)}_{i,i_1}$, $b^{(k)}_{i,j}$, $b^{(k)}_{j,i} \in K$ とおく.
この時 $H^1(\Lambda\otimes\Lambda)$ の 部分群 $\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\mathrm{Top\ Im}\, d_1, J^{\rho}\otimes J^{\rho}) + \{\Psi\iota | \Psi \in \mathrm{End}_{\Lambda^e}(\Lambda\otimes\Lambda)\}$

を考えてみよう. 先ず $\mathrm{End}_{\Lambda^e}(\Lambda\otimes\Lambda)$ の 元 Ψ を

$$\Psi(1\otimes 1) = 1\otimes h_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i\otimes h_i + \sum_{i=1}^{\ell} y_j\otimes f_j + \sum_{k=1}^{m} w_k\otimes g_k \quad \text{とおく.}$$

但し
$$h_i = \alpha_{i_0} 1 + \sum_{i_1=1}^{n} \alpha_{i,i_1} x_{i_1} + \sum_{j_1=1}^{\ell} \beta_{i,j_1} y_{j_1} + \sum_{k_1=1}^{m} \gamma_{i,k_1} w_{k_1},$$
$$f_j = \tau_{j_0} 1 + \sum_{i_1=1}^{n} \tau_{j,i_1} x_{i_1} + \sum_{j_1=1}^{\ell} \upsilon_{j,j_1} y_{j_1} + \sum_{k_1=1}^{m} \delta_{j,k_1} w_{k_1},$$
$$g_k = \mu_{k_0} 1 + \sum_{i_1=1}^{n} \mu_{k,i_1} x_{i_1} + \sum_{j_1=1}^{\ell} \lambda_{k,j_1} y_{j_1} + \sum_{k_1=1}^{m} \varepsilon_{k,k_1} w_{k_1}$$

と表せる.
さて $\Psi(x_i\otimes 1 - 1\otimes x_i) = x_i\Psi(1\otimes 1) - \Psi(1\otimes 1)x_i \in J^{\rho}\otimes J^{\rho}$ と仮定する.

$$\begin{aligned}
\Psi(x_i\otimes 1 - 1\otimes x_i) &= x_i\otimes h_0 + \sum_{i_1=1}^{n} x_i x_{i_1}\otimes h_{i_1} + \sum_{j=1}^{\ell} x_i y_j\otimes f_j - 1\otimes h_0 x_i \\
&\quad - \sum_{i_1=1}^{n} x_{i_1}\otimes h_{i_1} x_i - \sum_{j=1}^{n} y_j\otimes f_j x_i - \sum_{i=1}^{n} w_k\otimes g_k x_i \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a^{(k)}_{i,i_1} w_k\otimes h_{i_1} + \sum_{j=1}^{\ell} \sum_{k=1}^{m} b^{(k)}_{i,j} w_k\otimes f_j - \sum_{k=1}^{m} w_k\otimes g_k x_i \\
&= \sum_{k,k_1} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a^{(k)}_{i,i_1} \gamma_{i_1,k_1} + \sum_{j=1}^{n} b^{(k)}_{i,j} \delta_{j,k_1} \Big\} w_k\otimes w_{k_1} \\
&\quad - w_k\otimes\Big\{ \sum_{i_1=1}^{n} \mu_{k,i_1} x_{i_1} x_i + \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_{k,j} y_j x_i \Big\} \\
&= \sum_{k,k_1} \Big\{ \sum_{i_1=1}^{n} a^{(k)}_{i,i_1} \gamma_{i_1 k_1} + \sum_{j=1}^{\ell} b^{(k)}_{i,j} \delta_{j,k_1} - \\
&\qquad \sum_{i_1=1}^{n} \mu_{k,i_1} a^{(k_1)}_{i_1,i} - \sum_{j=1}^{\ell} \lambda_{k,j} b^{(k_1)}_{j,i} \Big\} w_k\otimes w_{k_1} .
\end{aligned}$$

ところで $\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\mathrm{Top\ Im}\ d_1, J^{\rho}\otimes J^{\rho}) \simeq \mathrm{Hom}_K(\mathrm{Top\ Im}\ d_1, J^{\rho}\otimes J^{\rho})$ 且つ

$\dim_K(\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\mathrm{Top\ Im}\ d_1, J^{\rho}\otimes J^{\rho})) = n\ m^2$ であるから，

$\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\mathrm{Top\ Im}\ d_1, J^{\rho}\otimes J^{\rho}) + \{\Psi\iota \mid \Psi \in \mathrm{End}_{\Lambda^e}(\Lambda\otimes\Lambda)\} = 0$ ，即ち

$\mathrm{Hom}_{\Lambda^e}(\mathrm{Top\ Im}\ d_1, J^{\rho}\otimes J^{\rho}) \subset \{\Psi\iota \mid \Psi \in \mathrm{End}_{\Lambda^e}(\Lambda\otimes\Lambda)\}$ である為には

$nm^2 \leq 2(n+\ell)m$ が成立していなければならない． 即ち 不等式 $m \leq 2 + 2\ \ell/n$ を得る． 特に $(\mathrm{rad}\ \Lambda)^3 = 0$ なれば $\ell=0$ であり $m \leq 2$ を得る．
要約すれば

『Λ を $(\mathrm{rad}\ \Lambda)^{\rho+1} = 0$ なる局所多元環とする． また $\dim_K J/J^2 = n$, $\dim_K J^2/J^{\rho} = \ell$, $\dim_K J^{\rho} = m$ とする． この時 $S\ H^1(\Lambda\otimes\Lambda) = 0$ なれば $m \leq 2 + 2\ell/n$ が成立する．』

明らかに上の不等式は $\ell = 0$ 以外では殆ど役立たない． こんなことから $S\ H^i(\Lambda\otimes\Lambda) = 0$, $i \geq 2$, の場合を更に考慮したらどうなるかと言うのが上述の問題提起 の 一つ の 理由 でもある．

§4. Schulzの反例

Λ が 有限群 G 上の 群環 KG の場合，予想 II は解決されている．
これは Nakayama 予想 に関する唯一の目覚ざましい成果 といえる．
$\mathrm{Ext}^{*}_{KG}(M,M)$ が 歪可換ネーター環 になっていることで旨く行く． 然しその証明には transfer map が 群環 に定義されている事実を利用している為 証明 を 一般の 準フロベニュウス多元環 に拡張することは不可能であるようである（越谷君 談）． 一方 §2, §3 で扱っている環は根基の冪零指数に強い制限があつて面白くなかった． 然し制限の強い環の間で Nakayama の予想を考えることが必ずしも無駄ではないことを示す Schulz の 例 を 紹介しよう． Schulz は この例 からヒントを得て Λ が 一般のフロベニゥウス環 では 予想 II が成立しないことを 最近 証明した．
フロベニュウス環 は アルチン環ではあるが 多元環 とは限らないので，私の予想 II の反例が見つかった訳ではない． 然し アルチン環 と 多元環 との差の大きさを見せつける結果である．

『或る準フロベニュース多元環 Λ 上の加群 M で $\mathrm{Ext}^1_{\Lambda}(M,M) \neq 0$ ではあるが，$^{\forall}n \geq 2$ に対して $\mathrm{Ext}^n_{\Lambda}(M,M) = 0$ となっているものが存在する．』

構成：可換体 K は $\rho^i \neq 1$, $i=1,2,\ldots,$ なる 元 ρ を含むとする（例えば K を有理関数体，ρ としてその 変数 とすればよい）．
そして Λ は K 上 非可換多項式環 $K\langle X,Y\rangle$ の 剰余環 $K\langle X,Y\rangle/(X^2,Y^2,YX-\rho XY)$ とする．　この時 Λ は 局所フロベニュウス多元環 になり，$\{1,\ x,\ y,\ xy\}$ を 基底 に持ち，$\mathrm{rad}\ \Lambda = x\Lambda + y\Lambda$, $(\mathrm{rad}\ \Lambda)^2 = \mathrm{Soc}\ \Lambda = xy\Lambda$ である．　但し x，y は X，Y を含む剰余類とする．

さて $M = (x+y)\Lambda$ とする．　M の 極小分解 は

$$\to \cdots \to \Lambda \xrightarrow{d_i} \cdots \to \Lambda \xrightarrow{d_1} \Lambda \xrightarrow{d_0} M \to 0 \qquad (9)$$

となり，d_i は左から $x + (-\rho)^i y$ を乗ずる事により得られる．
実際，d_i が 今述たような射像 であるとすれば $(x + (-\rho)^i y)(x + (-\rho)^{i+1} y) = 0$ から $\mathrm{Ker}\ d_i \supset (x + (-\rho)^i y)\Lambda = \mathrm{Im}\ d_{i+1}$ である．　一方 Λ の構造より $(x + (-\rho)^{i+1} y)\Lambda$ および $(x + (-\rho)^i y)\Lambda$ は 長さ 2 の 単列 Λ-加群，よって 組成列 の長さを比較することにより $\Lambda/(x + (-\rho)^{i+1} y)\Lambda \simeq (x + (-\rho)^i y)\Lambda$．即ち $\mathrm{Ker}\ d_i = (x + (-\rho)^{i+1} y)\Lambda$ である．
又 $j \neq i+1$ ならば $(x + (-\rho)^i y)(x + (-\rho)^j y) =$
$x^2 + (-\rho)^j xy + (-\rho)^i yx + (-\rho)^{i+j} y^2 = \{1 - (-\rho)^{j-(i+1)}\}(-\rho)^i yx \neq 0$．
故に $\mathrm{Im}\ d_i$, $i \geq 0$, は それぞれ の annihilator が 異なるゆえ 互いに非同型である．

さて $\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M,M) = \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Im}\ d_i, M)/\{f'\iota \mid f' \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\Lambda,M)\}$
但し ι, f' は 下の可換図式に於ける射像である．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Im}\ d_i \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "f"'] & \Lambda \arrow[d, "f'"] \\
 & M
\end{tikzcd}$$

$f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Im}\ d_i, M)$ は $\mathrm{Im}\ d_i$ の top を M の socle に写すから $f(x + (-\rho)^i y) = xys$, $s\ (\neq 0) \in K$ と置ける．　従って f が f' に lift される為の必十条件は K の 元 $t\ (\neq 0)$ が 存在して $f'(1) = (x+y)t$ 及び $(x+y)t(x + (-\rho)^i y) = xys$，即ち $t(\rho + (-\rho)^i) = s$ が成立することである．
然し $i \geq 2$ の時 ρ の取り方から上式を満たす t は 必ず 存在する．
従って $i \geq 2$ ならば $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,M) = 0$．　しかし $i = 1$ の場合は この様な t は如何なる s に対しても存在しない．　即ち $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(M,M) \simeq K \neq 0$ が言えた．

次に Schulz の 予想 II の 反例 を 紹介 しよう．

『或る準フロベニュース環 Λ 上 の加群 M で $\forall n \geq 1$に対して $\mathrm{Ext}^n_\Lambda(M,M) = 0$ は 満足するが 射影的 ではないものが存在する．』

構成：K は 非可換体とする． そして ρ は K の center の 元 であり，$^\forall i > 0$ に対し $\rho^i \neq 1$ が成立していると仮定する． X，Y を 不定元 とし Λ は 前例の如く K と X，Y によって生成される 自由環 に relation X^2, Y^2, $YX - \rho XY$, $cX - Xc$, $cY - Yc$, $^\forall c \in K$ を導入して得られる環とする．
このとき前例 と 同様に Λ は 準フロベニュス局所環で x，y を X,Y を含む類とすれば $\mathrm{rad}\,\Lambda = x\Lambda + y\Lambda$, $\mathrm{rad}\,\Lambda^2 = xy\Lambda$ である．

さて $a \in K\text{-}\{0\}$ を適当に取り（取り方は K と同様後で説明するとして），$M = (x+ay)\Lambda$ とする． M の 極小分解 は (9) と同じになるが，d_i は左から $(x + a(-\rho)^i y)$ を乗ずる事に依って与えられる． (9) の完全性については前例と殆ど同じに証明される． そして又次の同値も容易に導かれる：
$\mathrm{Ext}^i_\Lambda(M,M) = 0$, $^\forall i \geq 1 \iff$ 1) M は $\mathrm{Im}\,d_i$, $i \geq 1$ に非同型である，
且つ 2) $^\forall s \in K$ に対し $\exists\, t \in K$ s.t. $(x + ay)t(x + a(-\rho)^i y) = xys$,
即ち $at - ta(-\rho)^{i-1} = a/\rho$.

ここで $(x + ay)\Lambda$ と $(x + by)\Lambda$ が 射像 f で同型であると仮定すれば $\exists\, c \in K\text{-}\{0\}$, $\exists\, d \in K$ s.t. $f(x+ay) = (x+by)c + xyd$. f は Λ-準同型であるから $0 = f((x+ay)(x+a(-\rho)y)) = f(x+ay)(x+a(-\rho)y) = (x+by)c(x+a(-\rho)y) = (ca(-\rho)+bc\rho)xy$. 故に $b = cac^{-1}$, 即ち a と b は共軛である． そして この逆 も容易に証明される．

従って 反例を作るためには 次 の 条件を満足する $a \in K$ を見いだすことが出来れば充分である．

1) a と $a(-\rho)^i$, $i \geq 1$ は $K\text{-}\{0\}$ において共軛でない．

2)すべての $i \geq 0$ に対し $K \ni t \longrightarrow at - ta(-\rho)^i \in K$ は全射である．

一方 [5] において 既に $\partial_a : L \ni t \longrightarrow at - ta \in L$ を 全射にする元 a を持つ非可換体 L の 存在が保証されている． そこで K として変数 T に関する Laurent 級数 のつくる 体 $L((T))$ をとる． この時 次の事実より条件 1) 及び 2) を満たす $a \in K$ の存在が確実となる．

先ず a および aT^i は $K - \{0\}$ で共軛には成り得ない． 何故なら $d = \sum d_i T^i \in K - \{0\}$ に対して $V(d) = \min\{j : d_j \neq 0\}$ とおけば，a および aT^i が 共軛 であれば $V(a) = V(aT^i)$ が成立していなければならないが，そのような事は起こり得ないからである．

また $i = 0$ のとき $^\forall d = \sum d_i T^i$ に対し $\partial_a(t_i) = d_i$ と 置けば $at - ta = d$ である． 更に $i \geq 1$ の時 $^\forall d \in K$ に対し $t = a^{-1}d + a^{-2}daT^i + a^{-3}da^2T^{2i} + \dots$ とれば $at = d + a^{-1}daT^i + a^{-2}da^2T^{2i} + \dots$, $taT^i = a^{-1}daT^i + a^{-2}da^2T^{2i} + \dots$ となり，$at - ta = d$ が成立する．
註：このような反例が多元環の中に存在しないことは §2 から明らかである．

References

[1] J. L. Alperin and L. Evens, Representations, Resolutions and Quilen's dimension theorem, J. pure and Applied Algebra 22 (1981), 1-9.

[2] H. Asashiba, The selfinjectivity of a local algebra A and the condition $\mathrm{Ext}_A^1(DA,A) = 0$, Proc. of ICRA V held at Tsukuba 1990 in CMS Conf. Proc. No.11 (1991), 9-23.

[3] M. Auslander and I. Reiten, On a generalized version of the Nakayama conjecture, Proc. Amer. Math. Soc. 52 (1975), 69-74.

[4] J. F. Carlson, Module varieties and cohomology rings of finite groups, Vorlesungen aus Fachber. Math. der Univ. Essen, Heft 13 (1985).

[5] P. M. Cohn, The range of derivations on a skew field and the equation $ax - xb = c$, J. Indian Math. Soc. 37 (1973) 61-69.

[6] M. Hoshino, Modules without self-extensions and Nakayama's conjecture, Arch. Math., 43 (1984), 493-500.

[7] M. Hoshino, On algebras with radical cube zero, Arch. Math., 52 (1989), 226-232.

[8] J. Lambek, On Utumi's ring of quotients, Canad. J. Math. 15 (1963), 363-370.

[9] B. Mueller, The classification of algebras by dominant dimension, Canad. J. Math. 20, 398-409 (1968).

[10] T. Nakayama, On algebras with complete homology, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 22(1958), 300-307.

[11] M. Sato, The structure of positively graded local artinian rings and extended graded complete local noetherian rings, Communication in Algebra 20 (12), 3769-3780 (1992).

[12] R. Schulz, Boundedness and Periodicity of modules over QF-rings, J. Algebra 101 (1986), 450-469.

[13] R. Schulz, A non-projective module without self-extensions, Peprint.

[14] R. Schulz, Modules without self-extensions over radical cube zero rings, to appear in J. Algebra.

[15] H. Tachikawa, A characterization of QF-3 algebras, Proc. of Amer. Math. Soc. 13 (1962), 701-703. Correction, 14 (1963), 995.

[16] H. Tachikawa, Double centralizers and dominant dimensions, Math. Z.116 (1970), 79-88.

[17] H. Tachikawa, "Quasi-Frobenius rings and generalizations", Lecture Notes in Math., No. 351, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1973.
[18] H. Tachikawa and T. Wakamatsu, Tilting functors and stable equivalences for selfinjective algebras, J. Algebra 109 (1987), 138-165.
[19] T. Wakamatsu, Tilting theory and selfinjective algebras, to appear in Proc. of the NATO ARW, on Representation of Algebras and Related Topics, edited by V. Dlab, Kluwer Acad. Publishers.
[20] G. Wilson, The Cartan map on categories of graded modules, J. Algebra 85(1983), 390-398.
[21] K. Yamagata, Frobenius algebras, Tsukuba Math. Res. Note Preprint No. 93-005 (1993, Jan.).
[22] Q. Zeng, Vanishing of Hochshild's cohomologies $H^i(A \otimes A)$ and gradability of a local commutative algebra A, Tsukuba J. Math. 14 (1990), 263-273.

On the ranks of stable tubes

Susumu Koya

(Tukuba univercity, graduated school)

1. Introduction.

Thoughout this report, we assume that k a fixed algebracally closed field and A is a finite dimentional basic connected algebra over k. Then $A \cong kQ/I$, where Q is an ordinary quiver and I is an addmisseble ideal. [4] The set (Q, I) is called the bounden quiver of A, and it determines the algebra. So we study (Q, I) mainly. Q_0 is the set the vertecies of Q and Q_1 is the set of the arrows of Q.

For $a \in Q_1$ we denote S(a) the simple module corresponding a vertex a, P(a) the projective cover of S(a), and I(a) the injective hull of S(a). We denote <u>mod-A</u> the category of finitely generated right A modules, and <u>Γ_A</u> the Auslander-Reiten quiver (AR-quiver) in the category mod-A. Let <u>Γ</u> be a connected component and <u>τ</u> the Auslander-Reiten transformation.

The radical of mod-A is doneted rad(mod-A) and $\mathrm{rad}^{\infty}(\mathrm{modA}) = \bigcap_{i \geq 0} \mathrm{rad}^{i}(\mathrm{mod}\text{-}A)$.

In the components of AR-quiver, A connected component formed of $ZA/(r)$ is called <u>a stable tube</u>. This <u>r</u> is called rank. In particular a stable tube is <u>homogenious</u> when its rank is one. One way to study the rank of stable tubes in mod-A is to compare it with the rank of Grouthendick group of A, which is denoted <u>n</u>. In general, $r \leq n$ for almost stable tubes. Stable tubes of $r > n$ in mod-A was known only when A is local, say n=1. [3] In case $r = n > 1$, they have shown some examples, which were all selfinjective.

A. Skowrónski has proved that $r < n$ if a stable tube T of Γ_A consists entirely of modules which do not lie on short infinite cycles; that is, for any module M from T, there is no $M \in$ mod-A such that $M \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{\beta} M$ in mod-A, where $\alpha, \beta \in \mathrm{rad}^{\infty}$ (mod-A). [7] For example, tame concealed algebras and tubler algebras satisfy this condition.

2. Some selfinjective algebras having stable tubes with large ranks in Γ_A.

Now we want to show non local algebras having stable tubes of rank 2n in its AR-quiver.

We will consider an algebra $A \cong kQ/I$ which satisfies the next condition.

(a) An algebra A is a selfinjective algebra, and $\mathrm{soc}A = N^u \cong \bigoplus_{i=1}^{n} S(i)$ for some $u \geq 2$ and $n=st, s \geq t \geq 1$, where N is the Jacobson radical of A.
(b) For each vertex of Qo, exactly two arrows start from it and exactly two arrows come to it.
(c) For any path of length two of Q, there exists a unique path of length two having the same source and target but a common arrow. In addition, let the two path be θ and η, then $\theta - \eta \in I$.

We consider a two dimemensional complex from an ordinary quiver Q of an algebra A. That 0-simplices are vertices of Q_0, 1-simplices are arrows of Q_1, and 2-simplices are faces which are made by inserting them among some arrows in a certain way. It is called the topological realisation of Q, and denote $|Q|$.

Lemma 1: An algebra $A \cong kQ/I$ satisfies (a) (b) (c), then $|Q|$ is a torus or a Klein bottle of the next form. Here $n=st$. $Q_0 = \{a_{ij}\}_{1 \leq i \leq s,\ 1 \leq j \leq t}$

(1) When $|Q|$ is a torus, $b_k = a_{k1}, c_l = a_{1,\ l+x}$

where $0 \leq x \leq t-1$, $a+t$ looks as a.

(2) When $|Q|$ is a Klein bottle. Let $s \geq t$. $b_k = a_{1k} (1 \leq k \leq t), b_k = a_{1,\ k-t} (t < k \leq s)$, $c_l = a_{s-l+1,\ 1}$.

where we identify the vertices of the same symbol and the arrows between them, and 2-simplices are the squares having, as edges, the two paths of length two which form commutative relations of (c).

$a_{11}\rightarrow a_{12}\rightarrow \qquad \rightarrow a_{1t} \quad \rightarrow b_1$

$\downarrow \quad \downarrow \qquad \downarrow \quad \downarrow$

$a_{21}\rightarrow a_{22}\rightarrow \qquad \rightarrow a_{2t} \quad \rightarrow b_2$

$\downarrow \quad \downarrow \qquad \downarrow \quad \downarrow$

$\vdots \quad \vdots$

$\downarrow \quad \downarrow$

$\cdots\rightarrow a_{ij} \rightarrow a_{i,j+1} \rightarrow\cdots$

$\downarrow$ [redacted] $\downarrow$

$\cdots\rightarrow a_{i+1,j}\rightarrow a_{i+1,j+1}\rightarrow\cdots$

$\downarrow \quad \downarrow$

$\vdots \quad \vdots$

$\downarrow \quad \downarrow \qquad \downarrow \quad \downarrow$

$a_{s1}\rightarrow a_{s2}\rightarrow\cdots \qquad \rightarrow a_{st} \quad \rightarrow b_t$

$\downarrow \quad \downarrow \qquad \downarrow$

$c_1\rightarrow c_2\rightarrow\cdots \qquad \rightarrow c_t$

[figure I]

We call A <u>a torus algebra</u> when (1), and <u>a Klein algebra</u> when (2), respectly.

When A is a Klein algebra, the number u of condition (a) is even.

For any $i \in Q_0$, $P(i)$ is the form of figure-2, which consists of v^2 small square.

There is a commutative relation on the diagonal of each square from the left upper vertex to the right down vertex.

$\bullet\rightarrow\bullet\rightarrow\cdots \qquad \rightarrow\bullet\rightarrow\bullet$

$\downarrow\searrow\downarrow\searrow \qquad \searrow\downarrow\searrow\downarrow$

$\bullet\rightarrow\bullet\rightarrow\cdots \qquad \rightarrow\bullet\rightarrow\bullet$

$\downarrow\searrow\downarrow \qquad \downarrow\searrow\downarrow$

$\vdots \quad \vdots$

$\downarrow\searrow\downarrow \qquad \downarrow\searrow\downarrow$

$\bullet\rightarrow\bullet\rightarrow \qquad \rightarrow\bullet\rightarrow\bullet$

$\downarrow\searrow\downarrow\searrow \qquad \searrow\downarrow\searrow\downarrow$

$\bullet\rightarrow\bullet\rightarrow \qquad \rightarrow\bullet\rightarrow\bullet$

[figure II]

$\bullet$:a vertex

$\downarrow\rightarrow$:an arrow

$\searrow$:a commutative relation

The bounden quiver (Q, I) of A is the following type.

$Q_0=\{a_{ij}\}_{1\leqq i\leqq s,\ 1\leqq j\leqq t}$ $Q_1=\{\alpha_{ij},\ \beta_{ij}\}_{1\leqq i\leqq s,\ 1\leqq j\leqq t}$

The ordinary quiver Q:

$$
\begin{array}{ccccc}
a_{11} & \to a_{12}\to\cdots & & \to a_{1t} & \to a_{11} \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
a_{21} & \to a_{22}\to\cdots & & \to a_{2t} & \to a_{12} \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
 & & & \downarrow & \downarrow \\
 & & & \to a_{tt} & \to a_{1t} \\
 & & & \downarrow & \downarrow \\
 & & & \to a_{t+1,t} & \to a_{11} \\
 & & & \downarrow & \downarrow \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
a_{s1} & \to a_{s2} & \to\cdots & \to a_{st} & \to a_{s-t,1} \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
a_{s-t+1,1} & \to a_{s-t+2,1} & \to\cdots & \to a_{s1} & \to a_{s-t+1,1}
\end{array}
$$

$\alpha_{ij}: a_{ij}\to a_{i,j+1}\ (1\leqq i\leqq s, 1\leqq j\leqq t-1)$

$a_{it}\to a_{i1}\quad (1\leqq i\leqq t)$

$a_{it}\to a_{i-t,1}\ (t<i\leqq s)$

$\beta_{ij}: a_{ij}\to a_{i+1,j}\ (1\leqq i\leqq s-1, 1\leqq j\leqq t)$

$a_{sj}\to a_{s-t+j,1}\ (1\leqq j\leqq t)$

[figure Ⅲ]

where we identify the vertices of the same symbol and the arrows between them.

I is generated by $\alpha_{ij}\beta_{i,j+1}-\beta_{ij}\alpha_{i+1,j}\ (1\leqq i\leqq s-1, 1\leqq j\leqq t-i)$, $\alpha_{it}\beta_{i1}-\beta_{it}\alpha_{i+1,t}$ $(1\leqq i\leqq t)$, $\alpha_{it}\beta_{i,i-t}-\beta_{it}\alpha_{i+1,t}\ (t<i<s)$, $\alpha_{sj}\beta_{s,j+1}-\beta_{sj}\alpha_{s-t+j,1}\ (1\leqq j\leqq t-1)$, $\alpha_{s1}\beta_{s-t,1}-\beta_{st}\alpha_{s1}$, and all paths of length v+1 except that it has a subpath of the element of Δ.

Let $\Delta=\{\alpha_{ij}\beta_{i,j+1}, \beta_{ij}\alpha_{i+1,j}\ (1\leqq i\leqq s-1, 1\leqq j\leqq t-i);\ \alpha_{it}\beta_{i1}, \beta_{it}\alpha_{i+1,t}\ (1\leqq i\leqq t);$
$\alpha_{it}\beta_{i,i-t}, \beta_{it}\alpha_{i+t,t}\ (t<i<s);\ \alpha_{sj}\beta_{s,j+1}, \beta_{sj}\alpha_{s-t+j,1}\ (1\leqq j\leqq t-1);$
$\alpha_{st}\beta_{s-t,t}\beta_{st}\alpha_{st}\}$

Lemma 2: There are some cycles of form (※) such that $\gamma_i\gamma_{i+1}$ does not belong to Λ. and the number of them is (s, t).

(※) $a_1 \xrightarrow{\gamma_1} a_2 \xrightarrow{\gamma_2} \cdots\cdots \to a_i \xrightarrow{\gamma_i} a_{i+1} \to \cdots\cdots \to a_m \xrightarrow{\gamma_m} a_1 \quad a_i \in \Gamma_0, \gamma_i \in \Gamma_1.$

∵) If γ_1 is fixed, γ_2 will be determined uniquely by the condition (b). Since Q_0 is a finite set, $\gamma_k=\gamma_1$ for some k≧2. Let m be the minimal one. The latter can be shown by simple calculation. □

Thorem 3: Suppose 2v=u≧4 and (s, t)=1, Γ_A contains stable tubes of rank 2n.

[proof] Because (s, t)=1, the sequence (※) is unique except order. So we put $\gamma_1=\alpha_{11}$ in Ⅲ. let $M(a_1)$ be a uniserial module of length v+1 that the top is $S(a_1)$ and the socle is $S(a_{v+1})$.

The projective resolution of $M(a_1)$ in modA is

$\cdots\cdots \to P(a_{21}) \to P(a_{11}) \to M(a_1) \to 0$ in modA

and this A dual is

$\cdots\cdots \to P(a_{11})^* \to P(a_{21})^* \to TrM(a_1) \to 0$ in $modA^{OP}$

$\quad\quad \downarrow\wr \quad\quad\quad \downarrow\wr \quad\quad\quad \|$

$\cdots\cdots \to I(a_{11})^{OP} \to I(a_{21})^{OP} \to TrM(a_1) \to 0$ in $modA^{OP}$,

where $(\ )^*$ is A dual and $(\ )^{OP}$ is a left A module.

Therefore τM is also $M(a_{\ell+1})$ for some ℓ and its socle is $S(a_{21})$, since $TrM(a_1)$ is a uniserial left module of length v+1. Therefore $\tau^p M$ is isomorphic to $M(a_{p\ell+1})$. That means $M \cong \tau^p M$ for some p≧1. We can put p be the minimal one. When p=2n, M lies on the mouth of a sable tube of rank 2n, by HPR Theory[5]. In fact, suppose M lies in Γ which contains a projective module P, then the form of Γ_S (the stable part of Γ) is a stable tube since it contains periodic modules and A is of an infinite type. The almost split sequence having P in its middle term is the next exact sequence.

$0 \to radP \to P \oplus radP/socP \to P/socP \to 0$

This radP/socP is indecomposable, so radP and P/socP lie on the mouth of Γ_S So $M(a_1)$ is not on the mouth, for radP and P/socP are not on the τ-orbit of $M(a_1)$.

$\sum_{p=1}^{2n} l(\tau^p M(a_1)) = 2n(v+1)$, so $\sum_{p=1}^{2n} l(\tau^p \mathrm{rad}P) < 2n(v+1)$ because the sum of the length of the mouth modules is the least among the sums of the length of same τ-orbit modules in Γ. but, By calculation, the sum of the length of the modules of τ-orbit containing radP is larger than $2n(v+1)$.

3. An example.

We consider $A = k\langle x, y\rangle/(xyx, yxy, x^2-y^2)$. This A is a Klein algebra. Let $M = xyA \in \mathrm{mod}A$. Then $M \cong A/xA$. [$\because$ $r.\mathrm{ann}_A M = xA$] The projective resolution of M is

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & A \arrow[rr] \arrow[dr] & & A \arrow[r] & M \arrow[r] & 0 \\
yxA \arrow[ur] & & xA \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd}$$

Therefore $\tau M = yxA$, since A is symmetric. And $\tau^2 M = M$, M belongs to a stable tube of rank two. [$n=1$, $r=2$]

References

[1]M.Auslander, I.Reiten, Representation theory of artin algebra III, Comm. Algebra 3(1975), 239-294.

[2]M.Auslander, I.Reiten, Representation theory of artin algebra IV, Comm. Algebra 5(1977), 443-518.

[3]J.F.Carlson, Periodic module with large periods, Proc.Amer.Math Soc. 76 (1979), 209-215.

[4]P.Gabriel, Auslander-Reiten sequence and representation-finite algebras, Lecture Notes in Math. 831 (Springer, Berlin)(1981), 1-71.

[5]D.Happel, U.Preiser, C.M.Ringel, Vinberg's characterization of Dynkin diagrams using subadditive functions with applications to DTr-periodic modules, Lecture Notes in Math. 832 (Springer, Berlin)(1981), 280-294.

[6]C.M.Ringel, Tame algebras and integral quadratic forms, Lecture Notes in Math. 1099 (Springer, Berlin)(1984).

[7]A.Skowrônski, Generalized standard Auslander-Reiten components, preprint (1991).

[8]A.Skowrônski, Cycle in module categories, preprint (1992).

[9]H.Tachikawa, T.Wakamatsu, Tilting functors and stable equivalences for selfinjective algebras, J.Algebra 109(1987), 138-165.

Derived Categories と表現論

東京学芸大学　宮地淳一

ある多元環の表現を調べる上で他の多元環の表現と対応させて考える手法の一つに、Happel-Ringel の tilting theory というものがある。これは、二つの多元環のそれぞれの加群のカテゴリーの中に torsion theory を満たす二つの部分カテゴリーをそれぞれ考え、部分カテゴリーどうしの category equivalence を tilting module を介して考えるものである。その後、これに関係してさまざまなカテゴリーの上での equivalence が研究された。ここではその一端を紹介する。

k を体、$\mathrm{D} = \mathrm{Hom}_k(-, k)$, A , B , Λ, Γ , を有限次元 k-algebras とする。mod A を有限生成右 A-加群のカテゴリー, $T_A \in \mathrm{mod}\, A$ に対して、add T_A を T_A の有限直和の直和因子で生成されるカテゴリー, $\mathcal{P}_A$ で有限生成右射影A-加群のカテゴリーを表わす。$\underline{\mathrm{mod}}\ A$ は、objects を A-加群、morphisms を $X, Y \in \mathrm{mod}\, A$ に対して $\mathrm{Hom}_A(X,Y)$/(射影加群を通過する morphisms) としたカテゴリーとおく(stable module category と呼ぶ)。多元環 A, 両側A-加群 M に対して、$A \ltimes M$ で A の M による trivial extension を表わす。

§1. Classical Tilting Modules

T_A が次の条件を満たすとき、classical tilting module という(Happel-Ringel)。

(0) pdim $T_A \leq 1$

(1) $\mathrm{Ext}^i_A(T,T) = 0$ for all $i > 0$,

(2) there exists an exact sequence $0 \to A \to T_0 \to T_1 \to 0$ with $T_0, T_1 \in \mathrm{add}\, T$.

この classical tilting module と $A \ltimes \mathrm{D}A$ という self-injective algebra の stable module category の間に関係があることを太刀川、若松両氏が次のように示した。

Theorem (太刀川ー若松 [4])

T_A を classical tilting module, $\mathrm{B} = \mathrm{End}(T_A)$ としたとき、次が成り立つ。

$$\underline{\mathrm{mod}}\, A \ltimes \mathrm{D}A \cong \underline{\mathrm{mod}}\, B \ltimes \mathrm{D}B$$

§2. Tilting Modules

A を additive category, $K^{\infty}(A)$ (resp., $K^{+}(A)$, $K^{-}(A)$, $K^{b}(A)$) を A の complexes (resp., bounded below complexes, bounded above complexes, bounded complexes) からなるカテゴリーをホモトピーリレーションで割ったカテゴリーとする。さらに、A が abelian category のとき、$K^{\infty,0}(A)$ (resp., $K^{+,0}(A)$, $K^{-,0}(A)$, $K^{b,0}(A)$)を homology が全て0の complexes からなる full subcategory とおいたとき、derived category $D^{\infty}(A)$ (resp., $D^{+}(A)$, $D^{-}(A)$, $D^{b}(A)$) は、$K^{\infty}(A)$ (resp., $K^{+}(A)$, $K^{-}(A)$, $K^{b}(A)$) の $K^{\infty,0}(A)$ (resp., $K^{+,0}(A)$, $K^{-,0}(A)$, $K^{b,0}(A)$) による quotient category である[7]。

T_A が次の条件を満たすとき、tilting module という(宮下 [3], Happel [2])。

(0) pdim $T_A < \infty$

(1) $\mathrm{Ext}^i_A(T,T) = 0$ for all $i > 0$,

(2) there exists an exact sequence $0 \to A \to T_0 \to \dots \to T_n \to 0$ with $T_0, \dots, T_n \in \mathrm{add}\, T$.

Happel は tilting module と derived category との関係を指摘し、finite global dimension の algebras に対して、その後、Cline, Parshall and Scott によって一般の algebras に対して、次のような結果を出した。

Theorem (Happel [2], Cline-Parshall-Scott [1])

T_A を tilting module, $B = \mathrm{End}(T_A)$ としたとき、次が成り立つ。

$$D^b(\mathrm{mod}\, A) \overset{t}{\cong} D^b(\mathrm{mod}\, B)$$

さらに Happel は、Grothendieck and Verdier が提出した derived category の一般化した triangulated category という概念で、Frobenius category という考えを使って、self-injective algebra の stable module category が扱えることを示した。以下にこれらの定義を紹介する[7], [2]。

additive category $\mathcal{T}$ が triangulated category であるとは、autofunctor $T: \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ (T^iX を $X[i]$ と書く) と $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ (通常、これを triangle と呼ぶ)の集まり $\mathcal{S}$ (通常、$\mathcal{S}$ に属している triangle を distinguished triangle と呼ぶ)が存在して、次の条件を満たす。

(TR1) distinguished triangle と同型な triangle は、distingushed triangle である。
$X \xrightarrow{1} X \to 0 \to X[1]$ は、distinguished triangle である。任意の $X \xrightarrow{u} Y$ に対して、$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ という distinguished triangle が存在する。

(TR2) $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ が distinguished triangle ならば、$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-Tu} Y[1]$ も distinguished triangle である。

(TR3) distinguished triangles の間に次のような可換な morphisms が与えられているとき、$h: Z \to Z'$ なる morphism が存在して、$hv = v'g, f[1]w = w'h$ を満たす。

$$
\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\
\downarrow f & & \downarrow g & & & & \downarrow f[1] \\
X' & \xrightarrow{u'} & Y' & \xrightarrow{v'} & Z' & \xrightarrow{w'} & X'[1]
\end{array}
$$

(TR4) $X \to Y \to Z = X \to Z$ なる morphisms に対して、$X \to Y \to Z' \to X[1]$, $X \to Z \to Y' \to X[1], Y \to Z \to X' \to Y[1], Z' \to Y' \to X' \to Z'[1]$ なる distinguished triangles に拡張でき、下図の可換図式を満たす。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
Y[-1] & \to & X & = & X & & & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
X'[-1] & \to & Y & \to & Z & \to & X' & \to & Y[1] \\
& & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \downarrow \\
& & Z' & \to & Y' & \to & X' & \to & Z'[1] \\
& & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
& & X[1] & = & X[1] & & & &
\end{array}
$$

additive functor $F: \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ が、∂-functor であるとは、

(1) $FT_{\mathcal{T}} \cong T_{\mathcal{T}'}F$

(2) $F(\mathcal{S}_{\mathcal{T}}) \subset \mathcal{S}_{\mathcal{T}'}$

を満たすときいい、このfunctor で equivalent の時、triangle equivalent といって、$\mathcal{T} \overset{t}{\cong} \mathcal{T}'$と書く。

$\mathcal{A}$ を abelian category, $\mathcal{E}$ をその exact subcategory (in the sense of Quillen) とする。このとき、$\mathcal{E}$ が Frobenius category であるとは、

(1) $\mathcal{E}$ has enough projectives, and enough injectives,

(2) projectives coincide with injectives.

を満たすときいう。

$\mathcal{P}$:= the category consisting of all projective objects とおくと、$\mathcal{E}/\mathcal{P}$ は次のように autofunctor と distinguished triangle を定めると triangulated category になっている。

(1) TX has an exact sequence $0 \to X \to I \to \mathrm{T}X \to 0$, where I is an injective object.

(2) $X \to Y \to Z' \to \mathrm{T}X$ is a distinguished triangle, provided we have the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & X & \to & Y & \to & Z & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\
0 & \to & I & \to & Y' & \to & Z & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & \mathrm{T}X & = & \mathrm{T}X & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

, where all rows and colomuns are exact.

これにより、A を self-injective algebra とすると、$\underline{\text{mod}}\, A$, $D^b(\text{mod}\, A)$ は triangulated categories として考えられる。ここで Happel は $A \ltimes DA$ の Galois covering である $\hat{A} = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & 0 \\ & A & DA & \\ & & A & DA \\ 0 & & & \ddots \end{pmatrix}$ という self-injective algebra の stable module category と $D^b(\text{mod}\, A)$ の関係を以下のように示した。

<u>Theorem（Happel [2]）</u>

fully faithful な functor$D^b(\text{mod}\, A) \to \underline{\text{mod}}\, \hat{A}$ が存在して、gldim $A < \infty$ であることと $D^b(\text{mod}\, A) \overset{t}{\cong} \underline{\text{mod}}\, \hat{A}$ は同値である。

§3. Tilting Complexes

Rickard は、Happpel が示した tilting module で引き起こされる derived categories の triangle equivalent を一般の場合に拡張し、tilting complex という概念を提出した。

$T^{\bullet}$が次の条件を満たすとき、tilting complex という(Rickard [5])。

(0) $T^\bullet \in K^b(\mathcal{P}_A)$,

(1) $\mathrm{Hom}_{D(\mathrm{mod}\,A)}(T^\bullet, T^\bullet[i]) = 0$ for all $i \neq 0$,

(2) add $T^\bullet$ generates $K^b(\mathcal{P}_A)$ (there is no-proper full triangulated subcategories of $K^b(\mathcal{P}_A)$, closed under isomorphisms, that contains add $T^\bullet$).

Theorem (Rickard [5]) 次は同値である。

(1) $D^b(\mathrm{mod}\,A) \overset{t}{\cong} D^b(\mathrm{mod}\,B)$,

(2) $D^b(\mathrm{mod}\,A) \overset{t}{\cong} D^b(\mathrm{mod}\,B)$,

(3) $K^b(\mathcal{P}_A) \overset{t}{\cong} K^b(\mathcal{P}_B)$,

(4) there exists a tilting complex $T^\bullet$ in $K^b(\mathcal{P}_A)$ such that $\mathrm{End}(T^\bullet) \cong B$.

また、Rickard は tilting complex で考えることによって triangle equivalent が trivial extension に対しても保たれることを示した。

Theorem (Rickard [6])

$D^b(\mathrm{mod}\,A) \overset{t}{\cong} D^b(\mathrm{mod}\,B)$ ならば、$D^b(\mathrm{mod}\,A \ltimes DA) \overset{t}{\cong} D^b(\mathrm{mod}\,B \ltimes DB)$

さらに、Rickard は self-injective algebra の stable module category が derived category の quotient になっていることを示し、algebras の derived equivalent から stably equivalent が引き起こされることを示した。

Theorem (Rickard [6])

Λ を self-injective algebra したとき、次の exact sequence が得られる。

$$0 \to K^b(\mathcal{P}_\Lambda) \to D^b(\mathrm{mod}\,\Lambda) \to \underline{\mathrm{mod}}\,\Lambda \to 0$$

Corollary 1 (Rickard [6])

A, B を self-injective algebras したとき、$D^b(\mathrm{mod}\,A) \overset{t}{\cong} D^b(\mathrm{mod}\,B)$ ならば、

$\underline{\mathrm{mod}}\,A \overset{t}{\cong} \underline{\mathrm{mod}}\,B$.

Corollary 2 (Rickard [6])

$D^b(\mathrm{mod}\,A) \overset{t}{\cong} D^b(\mathrm{mod}\,B)$ ならば、$\underline{\mathrm{mod}}\,A \ltimes DA \overset{t}{\cong} \underline{\mathrm{mod}}\,B \ltimes DB$.

Corollary 3 (Rickard [6], 若松 [8])

T_A を tilting module 、$B = \mathrm{End}(T_A)$ とすると、$\underline{\mathrm{mod}}\,A \ltimes DA \overset{t}{\cong} \underline{\mathrm{mod}}\,B \ltimes DB$.

Corollary 3 に関しては若松氏も独自に示した。tilting module, tilting complex は projective dimension から見ると有限という制限がついているが、若松氏はその条件をはずしてもある種の有限条件があれば、trivial extensions of algebras の stable module categories が equivalent になることを示した。その中で典型的な場合を次に上げる(詳しくは[8]参照)。

T_A が次の条件を満たすとき、generalized tilting module という(若松 [8])。

(1) $\mathrm{Ext}^i_A(T,T) = 0$ for all $i > 0$,

(2) there exists an exact sequence $0 \to A \to T_0 \xrightarrow{f_0} T_1 \xrightarrow{f_1} T_2 \xrightarrow{f_2} \cdots$ such that $T_i \in \mathrm{add}\,T$ and $\mathrm{Ext}^1_A(\mathrm{Im}\,f_i, T) = 0$ for all $i \geq 0$.

Theorem (若松 [8])

A を finite representation type の algebra, T_A を generalized tilting module, $B = \mathrm{End}(T_A)$ とおくと、$\underline{\mathrm{mod}}\,A \ltimes DA \cong \underline{\mathrm{mod}}\,B \ltimes DB$.

References

[1] E. Cline, B. Parshall and L. Scott, Derived categories and Morita theory, J. Algebra 104 (1986) 397-409.

[2] D. Happel, Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras, London Math. Soc. Lecture Note 119 (1987).

[3] Y. Miyashita, Tilting modules of finite projective dimension, Math. Z. 193 (1986) 138-165.

[4] H. Tachikawa and T. Wakamatsu, Tilting functors and stable equivalences for self-injective

algebras, J. Algebra 109 (1) (1987) 138-165.

[5] J. Rickard, Morita theory for derived categories, J. London Math. Soc. (2) 39 (1989) 436-456.

[6] J. Rickard, Derived categories and stable equivalence, J. Pure and Applied Algebra 16 (1989) 303-317.

[7] J. L. Verdier, Catégories dérivées, état 0, SGA 4 1/2 Springer LNM 569 (1977) 262-311.

[8] T. Wakamatsu, Stable equivalence of self-injective algebras and a generalization of tilting modules, J. Algebra 134 (2) (1990) 298-325.

Derived Equivalence and Perfect Isometry I

奥山哲郎（大阪市大・理）

有限群のモジュラー表現の研究は'80年代以降他分野、特に多元環の表現論からの強い刺激をうけて、様々の新しい道具を"仕入れ"てすすめられている。Auslander-Reitenの理論, Benson, Carlson, Alperinらの加群のvarietyの理論などがその中心的なものといえるが、古くからのBrauer, Greenらの理論との関わり, Brauerの問題にまつわる様々の予想への応用など"整備"しなければならない数多くのことがある。Erdmannを中心として多くの興味深い成果もあらわれて、僕らの目的に効果的な道具になるだろう強い期待もある。表題にかかげた道具は、'90年直前から、Richard, Brouéらによって有限群の表現論への適用が研究されはじめた。多くの研究者が注目しているが、僕自身は勉強をはじめたばかりのところで、今回の報告も皆さんに教えていただきたいと思いながら書いている。十数年、いろいろな道具を見せてもらった。正直な感想は、"道具は揃ったよ", "誰か早く使って見せてくれ" というところです。

1° 準備

ここでは以下の議論に必要な記号と知られている事実を準備する。正確な記述は本研究会報告の宮地氏の稿，若松氏の報告（[10]），Richard（[6]，[8]）を見られたい。

Λを環，$_\Lambda\mathcal{P}$ を fin. gen. proj. left Λ-mod.s のなす cat. とし，$K^b(_\Lambda\mathcal{P})$ で，$_\Lambda\mathcal{P}$ 上の bounded な complexes のなす homotopy cat. とする。これは、"shift functor" と mapping cones を作る操作で triangulated cat. となる。Λが、体、あるいは環上の algebra であるときは、それ上 "additive" として考えることにする。

以下の一連の事実は主に Richard による。

定理1.（Richard [6]） Λ, Γ を2つの環とする。次は同値である。

(1) $K^b(_\Lambda\mathcal{P}) \sim K^b(_\Gamma\mathcal{P})$ as triangulated cat.s

(2) $\exists T^\cdot \in K^b(_\Lambda\mathcal{P})$ s.t.

(i) $\mathrm{Hom}_{K^b(_\Lambda\mathcal{P})}(T^\cdot, T^\cdot[n]) = 0$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ $n \neq 0$, [ ] は "shift"

(ii) add $T^\cdot$ generates $K^b(_\Lambda\mathcal{P})$ as triangulated cat.

(iii) $\mathrm{End}_{K^b(_\Lambda\mathcal{P})}(T^\cdot) \simeq \Gamma$

上の同値な条件がみたされるとき，ΛとΓは derived equiv. であるといい，(2)にある complex $T^\cdot$ を tilting complex という。

Derived equivs. で保存される環の性質に次がある。

定理2（Richard [6],[8]），ΛとΓが derived equiv. であるとする。次が成立する。

(1) $Z(\Lambda) \simeq Z(\Gamma)$

(2) $K_0({}_\Lambda\mathcal{P}) \simeq K_0({}_\Gamma\mathcal{P})$

(3) Λ, Γ. 閉体上の alg.s のとき，$C(\Lambda)$，$C(\Gamma)$をそれぞれの Cartan 行列とするとき（sizeをℓ，(2)より共通），$\exists A \in GL(\ell, \mathbb{Z})$ s.t.
$${}^tA\, C(\Lambda) A = C(\Gamma)$$

(4) Λ, Γ. 体上の self. inj. な alg.s のとき，ΛとΓは stable equiv となる。（実際には，$\exists\, {}_\Gamma M_\Lambda$，$\exists\, {}_\Lambda N_\Gamma$ s.t.

$M_\Lambda \otimes -$; mod-$\Lambda \to$ mod-Γ，$N_\Gamma \otimes -$; mod-$\Gamma \to$ mod-Λ が互いの逆の stable equiv. を与える）。

次の事実も注意しておく。
$\mathcal{O}$を完備離散付値環，$\overline{\mathcal{O}} = k$ をその剰余体とする。$\mathcal{O}$-alg. Λに対し，$\overline{\Lambda} = k \otimes_{\mathcal{O}} \Lambda$とおく。

定理3（Richard [8]） Λ, Γ を $\mathcal{O}$-free $\mathcal{O}$-alg.s of. fin. $\mathcal{O}$-rank とする。

このとき，$K^b({}_\Lambda\mathcal{P}) \sim K^b({}_\Gamma\mathcal{P}) \Rightarrow K^b({}_{\overline{\Lambda}}\mathcal{P}) \sim K^b({}_{\overline{\Gamma}}\mathcal{P})$

注意；定理2の(3)は（みなそう言っているが）証明がのっている文献はしらない。宇佐美氏の稿を見られたい。

2°. 群環の Blocks

$\mathcal{O}$を完備離散付値環，Kをその商体，$k = \overline{\mathcal{O}}$ を剰余体とする。char. $K = 0$, char $k = p > 0$ とし，K, kは"十分大きい"としておく。

Gを有限群，$\mathcal{O}G$をその$\mathcal{O}$上の群環とする。$\mathcal{O}G$の block B は $\mathcal{O}G$の環として直既約な因子のことで，$B = \mathcal{O}Ge$，eは原始的な中心巾等元，とかける。$\overline{\mathcal{O}G} = kG$ への reduction を $\bar{\ }$ であらわすことにする。$\overline{B} = kG\bar{e}$ で，$\bar{e}$は原始的なままで，$\overline{B}$はkGの block となる。このとき

$\mathrm{rank}_{\mathcal{O}} Z(B) = \dim_k Z(\overline{B}) = \dim_K Z(K \otimes_{\mathcal{O}} B) = \#$ irred. KG-mod.s in B

$\mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} K_0({}_B\mathcal{P}) = \mathrm{rank}_{\mathbb{Z}} K_0({}_{\overline{B}}\mathcal{P}) = \#$ simple kG-modules in $\overline{B}$

KG-mod. を $\mathcal{O}G$-lattice で実現して kG へ reduce（$k \otimes_{\mathcal{O}} -$）することで decomposition map ; d ; $K_0(\text{mod-}K \otimes_{\mathcal{O}} B) \longrightarrow K_0(\text{mod-}\overline{B})$ が得られる。

また kG-mod. の組成因子をとることで Cartan map
$$c ; K_0({}_{\overline{B}}\mathcal{P}) \longrightarrow K_0(\text{mod-}\overline{B})$$ が得られる。

一方$K\otimes_{\mathcal{O}}-$によって $K_0({}_B\mathcal{P}) \longrightarrow K_0(\text{mod-}K\otimes_{\mathcal{O}}B)$ が得られるが、${}_B\mathcal{P}$ と ${}_{\overline{B}}\mathcal{P}$ は同一視できて、この mapは $^t d$ に一致する。さらに、次の可換な図形を生じる。

$$\begin{tikzcd}
K_0(\text{mod-}K\otimes_{\mathcal{O}}B) \arrow[rr, "d"] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & K_0(\text{mod-}\overline{B}) \\
& K_0({}_B\mathcal{P}) = K_0({}_{\overline{B}}\mathcal{P}) \arrow[ul, "^t d"] \arrow[ur, "c"'] &
\end{tikzcd} \qquad c = {}^t d \circ d$$

Hをもうひとつの有限群とし、bを$\mathcal{O}H$のblockとする。Brouéによる次の定理がある。

定理4.（Broué [1]）

$$K^b({}_B\mathcal{P}) \sim K^b({}_b\mathcal{P}) \Rightarrow B \text{ と } b \text{ の間に Perfect isometry がある。}$$

Perfect isometryは指標の言葉で書かれるもので、これがあるとBとbの既約指標のいろいろな性質が保たれとてもありがたいものである。宇佐美氏の講演で詳しく解説される。

僕らの"最大"の関心事のひとつは既約指標の数である。1°の定理2と先にのべたことから自然に次の問題が生ずる。

<u>問題</u>. B、bを上のような2つのblocksとする。

いつ $K^b({}_B\mathcal{P}) \sim K^b({}_b\mathcal{P})$? いつ $K^b({}_{\overline{B}}\mathcal{P}) \sim K^b({}_{\overline{b}}\mathcal{P})$?

いつ $B \leftrightarrow b$ $\exists$Perfect isometry ?

$K^b({}_B\mathcal{P}) \sim K^b({}_b\mathcal{P})$ のとき、$K^b({}_{K\otimes B}\mathcal{P}) \sim K^b({}_{K\otimes b}\mathcal{P})$（i.e. $K^b(\text{mod}K\otimes B) \sim K^b(\text{mod-}K\otimes b)$）で定理2によって与えられる同型 $K_0({}_B\mathcal{P}) \simeq K_0({}_b\mathcal{P})$ $K_0(\text{mod-}K\otimes B) \simeq K_0(\text{mod-}K\otimes b)$ は先の可換な図も保存する。

3° Broué の問題

$\mathcal{O}G$から$\mathcal{O}$へのaugumentation map（係数の和をとる）はalg. homoである。したがって、$\mathcal{O}G$の中心原始的巾等元でその値が1となるものが唯ひとつある。これできまる$\mathcal{O}G$のblockをprincipal blockといい$B_0(G)$とかく。これは自明な加群$\mathcal{O} = \mathcal{O}_G$を含むblockのことである。

一般に、Bを$\mathcal{O}G$のblockとするとき、それにdefect groupとよばれるGのp-部分群が共役を除いて唯ひとつ定まる。Bのdefect groupとは、Gの部分群Dで「$\forall B$-mod M について、$\exists N$: $\mathcal{O}D$-mod. s.t Mは$N^G = \mathcal{O}G\otimes_{\mathcal{O}D}N$の直和因子」なる性質をもつ最小のもの。defect groupをD_Bとかく。principal blockのdefect groupはGのSylow p-部分群となる。
また、B-subpairsという概念がある。$B_0(G)$-subpairsはちょうどp-部分

群と同じ(こと)で，B-subpairs は p-部分群の概念を拡張したものである。(たとえば，津島－永尾[5])。

正確な記述は Broué [1],[2] を見てもらうことにするが，Broué はそこで，次の問題を提起している。

<u>Broué の問題</u>. B, b を 2° の設定の2つの blocks とする。

$D_B \simeq D_b$ のもと，B-subpairs の"ふるまい"と b-subpairs の"ふるまい"が"同じ"とき，$K^b({}_B\mathcal{P}) \sim K^b({}_b\mathcal{P})$?, $K^b({}_{\bar{B}}\mathcal{P}) \sim K^b({}_{\bar{b}}\mathcal{P})$?, $B \overset{?}{\longleftrightarrow} b$ Perfect isometry ?

あとで述べるように，この問題には Broué 自身による否定的な例があるが，この形で問うておく。

Broué の問題の設定がみたされている例を次にあげる。

<u>例</u>

(1) $G \supset P$: Sylow p-subgroup が T.I.-set (i.e. $P^x \cap P = 1$, ${}^\forall x \in G \setminus N_G(P)$) とする。$H = N_G(P)$ とおくとき，$B = B_0(G)$, $b = B_0(H)$

(2) B を $\mathcal{O}G$ の block で D_B : abelian とする。$H = N_G(D_B)$ で b を $\mathcal{O}H$ の block で B の Brauer 対応子。

(3) $G = \mathfrak{S}_n$, $H = \mathfrak{S}_m$ 対称群，$D_B \simeq D_b$ のとき

例(1)の設定では Derived equiv. が存在しない例が知られている。一般に，(1)の設定では mod-kG と mod-kH は stable equiv. となる。実際；

${}_{kG}kG_{kH} \otimes -$; mod-$kH \to$ mod-kG, ${}_{kH}kG_{kG} \otimes -$; mod-$kG \to$ mod-kH は互いに逆の stable equiv. を与える。次の事実がその理由である。

$kG = kH \oplus$ proj. as kH-kH bimod.s,

$kG \otimes_{kH} kH \otimes_{kH} kG = kG \oplus$ proj. as kG-kG-bimod.s

ちなみに，上の maps の前者は 加群の induction，後者は restriction であり，Green correspondence の理論の典型例といえる。

<u>Broué の注意</u>. $p=2$, $G = Suz(8)$ は(1)の設定をみたしているが B と b は derived equiv. とはならない。([1])

$C(B)$ と $C(b)$ が定理2 の(3)をみたさないことを check する。

$$C(B) = \begin{pmatrix} 160 & 72 & 72 & 72 & 20 & 20 & 20 \\ 72 & 34 & 32 & 32 & 8 & 9 & 10 \\ 72 & 32 & 34 & 32 & 10 & 8 & 9 \\ 72 & 32 & 32 & 34 & 9 & 10 & 8 \\ 20 & 8 & 10 & 9 & 4 & 2 & 2 \\ 20 & 9 & 8 & 10 & 2 & 4 & 2 \\ 20 & 10 & 9 & 8 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad C(b) = \begin{pmatrix} 10 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 10 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 10 & 9 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 10 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 10 & 9 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 10 & 9 \\ 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

たとえば次のように check される。それぞれの decomposition matrix $D(B)$, $D(b)$（2° の decomposition map を既約表現を基底として行列表示したもの）は次のようになっている。

$$
{}^{t}D(B) = \begin{pmatrix}
1 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 3 & 7 & 2 & 2 \\
0 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 2 & 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\qquad
{}^{t}D(b) = \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & 1 & 2 & 2 \\
 & 1 & & & \bigcirc & & & 1 & 2 & 2 \\
 & & 1 & & & & & 1 & 2 & 2 \\
 & & & 1 & & & & 1 & 2 & 2 \\
 & \bigcirc & & & 1 & & & 1 & 2 & 2 \\
 & & & & & 1 & & 1 & 2 & 2 \\
 & & & & & & 1 & 1 & 2 & 2
\end{pmatrix}
$$

${}^{t}D(B)$ の最初の7列でできる7次の行列の行列式は 1 $(-1\,?)$ でその逆行列を左からかけると

$$
\begin{pmatrix}
1 & & & & & & & 1 & -1 & -1 \\
 & 1 & & & & & & 1 & -1 & -1 \\
 & & 1 & & \bigcirc & & & 1 & -1 & -1 \\
 & & & 1 & & & & 1 & -1 & -1 \\
 & \bigcirc & & & 1 & & & -1 & 2 & 2 \\
 & & & & & 1 & & -1 & 2 & 2 \\
 & & & & & & 1 & -1 & 2 & 2
\end{pmatrix}
$$

となる。${}^{t}d\,d = C$ に注意して，

$C(B)$, $C(b)$ の定義する2次形式は，それぞれ

$$C(B)\ ;\ \sum_{i=1} x_i^2 + \Big(\sum_i x_i\Big)^2 + 2\Big(\sum_{i=1}^{4} x_i + 2\sum_{j=5}^{7} x_j\Big)^2$$

$$C(b)\ ;\ \sum_{i=1}^{7} x_i^2 + 9\Big(\sum_{i=1}^{7} x_i\Big)^2$$

に同値（$\mathbb{Z}$ の範囲で）となる。値2をとる整ベクトルの個数を見て $C(B)$ と $C(b)$ は同値でないことがわかる。

このBとbについて定理2の他の事実はすべて成立している。したがって，特に stable equiv. だが derived equiv. とはならない例となる。

$Sz(8)$ に限らず，$Sz(2^{2n+1})$ $(={}^{2}B_2$ 型$)$ はすべて2 $(n \geq 1)$ (1)の反例となる。また，Ree の群 $(p=3,\ {}^{2}G_2$ 型$)$，3次の unitary 群 $({}^{2}A_2$ 型$)$ もほとんどすべて(1)の設定での反例となると思う。Sylow 群が T.I. set となる特徴的な群の層の1部で，これらは，ここでも"にくたらしい"群となった。

一方，$SL(2,p^n)$ $(A_1$ 型$)$ もそのような群であるが，これくらいは Broué の問題が肯定的に解けて欲しい。これは，Sylow p-部分群が abelian となっており，上の(2)の設定にもなっている。

(2)の設定は僕らにとってとても興味深い。Brauer の height 予想，Alperin の weight 予想，Alperin-McKay 予想など abelian defect group の条件つきとはいえ，解けてしまうことになる。Perfect isometry が存在するかどうかは，相当の数の単純群で check されておりずい分"進展"があるようである。（すべてに適用する理論とはなっているわけでなく，進展という言葉がよいかどうか問題もある）。Derived equiv. があるかは，ほとんど手がつけられておらず，check されている例もごくわずかである。

(3)の設定は，対称群の表現論自身にとってとてもおもしろい気がする。Richard らによって，研究がつづけられている。（ようである）

以下、例(2)の設定、k上での derived equiv. の存在について議論する。記号の繁雑さをさけるため、これまでの $\bar{B}$, $\bar{b}$ などを B, b で書くことにする。

4° 知られている例

Broué の問題が肯定的に解けている例を上げる。(3° の例 (2) の設定で)

例.

(1) D_B : cyclic (Richard [7])

(2) G : p-solv. (Dade など)

(3) B : p-nilpotent (Broué - Puig [3])

(4) $p=2$, $G=A_5$ ($\simeq SL(2,4)$) $B=B_0(G)$ (Richard [9])
($D_B \simeq \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, また b は $b\simeq B_0(A_4)$ である)

(4)′ $p=2$, $D_B\simeq \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ (Erdmann [4], Richard [9])

注意(1) : 例(2), (3)は実際は Morita equiv. となる。

注意(2) ; (4)′について ; Erdmann [4] によれば、$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ を defect group にもつ block は Morita equiv. を除いて $B_0(A_5)$, $B_0(A_4)$, および $k\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ のいずれかとなる。$k\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ があらわれるのはよく解明されていて、それ以外が (4)の設定で確認される。

注意(3) ; $p=2$, D_B : dihedral のときやはり Erdmann による Block の特徴づけを用いて Linckelmann が (Broué の問題の設定のもと) Derived. equiv を証明しているようである。(abelian case ではないが)。

講演で次の例を追加した。

(5) $p=3$, $G=A_6$ ($\simeq PSL(2,9)$), $B=B_0(G)$
($D_B\cong \mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_3$ である)

また講演後、次の例も Check できた (と思っている)。

(6) $p=2$, $G=SL(2,8)$ $B=B_0(G)$
($D_B\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ である)

現時点で僕が知っているのは上にあげたもののみである。D_B が cyclic とは、B が有限型、$D_B=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ のときは"とてもよい" tame 型である。したがって、Broué の問題が"一般的"に解けた上の例 (1), (4)′ は最初から"良くわかっていた"からできたとも言える。もちろんこのときでも tilting complex を構成するおもしろい議論が見られ、大変なことである。(Richard [7], [9]) "良くわかる" ために沢山の例をみつけ、一般論を予想し、それを証明するということになるが、ほとんど夢のように思える。神様のような人がいて何もかも解き明かしてくれるかもしれないが、そうでなくても、人は Broué の問題の"思想"をかみくだき"実用"に使うことができると思う。夢は夢のままでいい。

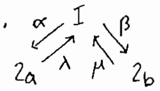
(4), (5), (6)の例について proj. ind.s の構造, 環の quiver, tilting complex などを書き下しておく。(4)は Richard [9] より引用した。

(4)の例： $p=2$, $G=SL(2,4)(\simeq A_5) \supset P$ 2-Sylow $\simeq \mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, $H=N_G(P)\ (\simeq A_4)$

$B=B_0(G)$

simples. $I, 2a, 2b$

quiver.

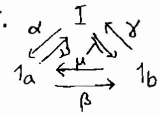


$\alpha\lambda=0=\beta\mu$
$\mu\beta\lambda\alpha=\lambda\alpha\mu\beta$

$b=B_0(H)$

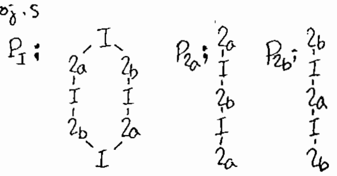
simples. $I, 1a, 1b$

quiver.

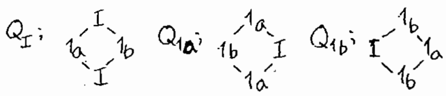


$\nu\alpha=\gamma\lambda$
$\mu\beta=\alpha\nu$
$\lambda\gamma=\beta\mu$
$\beta\alpha=\gamma\beta=\alpha\gamma=0$
$\mu\lambda=\nu\mu=\lambda\nu=0$

proj.s



proj.s



$C(B)$;
$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} I & 2a & 2b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$D(B)$;
$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} I & 2a & 2b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

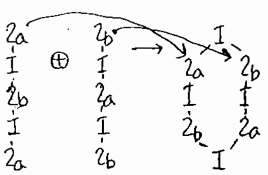
$C(b)$;
$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} I & 1a & 1b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

$D(b)$;
$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} I & 1a & 1b \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

tilting complex.
次の3つのcomplexの直和（項がないところは0）

$P_{2a}\oplus P_{2b}\xrightarrow{f} P_I$
P_{2a}
P_{2b}

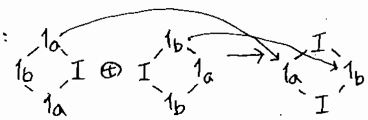
ここで f は



tilting complex
次の3つのcomplexの直和

$Q_{1a}\oplus Q_{1b}\xrightarrow{g} Q_I$
Q_{1a}
Q_{1b}

ここで g:



complexと $D(B), D(b)$ との関係

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} D(B) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D(b)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} D(b) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D(B)$$

以上のblocks間でderived equiv. があれば $\overbrace{\text{tilting complex}}^{\text{（適当な番号づけをして}}$ からできる行列を右からかけ、ある ±1 のみの対角行列を左からかけることで decomposition matrix はうつりあうことになる（と思う）。±1 は Perfect isometry での sign ?。したがって例を作ってみようと思えば、まず右からかけるべき行列を"形式的"に求め、そののち complex をイメージする。符号は項の偶奇に対応するはずだが、±相殺されて行列の成分としては消えてるかもしれない。とにかくやみくもに作るのはめん

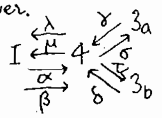
どうです。次のはうまく行った例。

(5)の例: $p=3$. $G=PSL(2,9)\,(\simeq A_6) \supset P$: 3-Sylow. $H=N_G(P)$

$B=B_0(G)$

simples. $I, 3_a, 3_b, 4$

quiver.



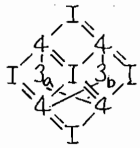
$\mu\alpha=\lambda\beta$ $\quad \mu\gamma=0$ $\quad \lambda\delta=0$ $\quad \alpha\mu=\beta\lambda$

$\tau\alpha=0$ $\quad \sigma\gamma=0$ $\quad \tau\delta=0$ $\quad \alpha\lambda=\delta\tau$

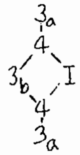
$\sigma\beta=0$ $\quad \beta\mu=\gamma\sigma$

proj.s

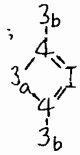
P_I;



P_{3a};

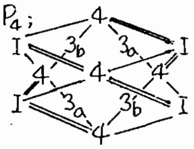


P_{3b};



$$D(B)\ \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} I & 3_a & 3_b & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 1&1&0&1\\ 1&0&1&1\\ 0&1&1&1\\ 1&0&0&1\\ 1&0&0&1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad C(B);\ \begin{pmatrix} 5&1&1&4\\ 1&2&1&2\\ 1&1&2&2\\ 4&2&2&5 \end{pmatrix}$$

P_4;

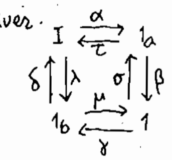


(Benson-Carlson Comm. Alg. 15)

$b=B_0(H)$

simples. $I, 1_a, 1_b, 1$

quiver.



$\tau\alpha=\delta\lambda$

$\sigma\beta=\alpha\tau$

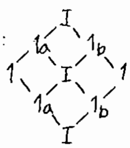
$\mu\gamma=\beta\sigma$

$\lambda\delta=\gamma\mu$

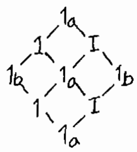
$$\gamma\beta\alpha=\delta\gamma\beta=\alpha\delta\gamma=\beta\alpha\delta$$
$$=\sigma\mu\lambda=\tau\sigma\mu=\lambda\tau\sigma=\mu\lambda\tau=0$$

proj.s

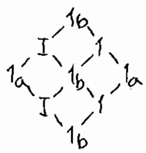
Q_I:



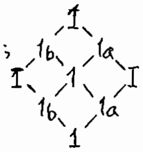
Q_{1a}:



Q_{1b};



Q_1;



$$D(b)=\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} I & 1_a & 1_b & 1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1&0&0&0\\ 0&1&0&0\\ 0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 1&1&1&1\\ 1&1&1&1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad C(b)=\begin{pmatrix} 3&2&2&2\\ 2&3&2&2\\ 2&2&3&2\\ 2&2&2&3 \end{pmatrix}$$

tilting complex. in B
次の直和；

$$P_{3b}\oplus P_{3a}\xrightarrow{h\oplus g}P_4\oplus P_4\xrightarrow{(f,f')}P_I$$

$$P_{3a}\xrightarrow{g}P_4$$

$$P_{3b}\xrightarrow{h}P_4$$

$$P_{3b}\oplus P_{3a}\xrightarrow{(h,g)}P_4$$

f, f', g, h は次の maps：

$f : 4 \longrightarrow \alpha$
$f' : 4 \longrightarrow \beta$
$g : 3_a \longrightarrow \sigma$
$h : 3_b \longrightarrow \tau$

tilting complex in b
次の直和；

$$Q_{1a}\oplus Q_{1b}\xrightarrow{(s,s')}Q_I$$

$$Q_1\xrightarrow{t}Q_{1a}$$

$$Q_1\xrightarrow{u}Q_{1b}$$

$$Q_1\xrightarrow{\binom{t}{u}}Q_{1a}\oplus Q_{1b}$$

s, s', t, u は次の maps

$s : 1_a \longrightarrow \alpha$
$s' : 1_b \longrightarrow \lambda$
$t : 1 \longrightarrow \beta$.
$u : 1 \longrightarrow \mu$

complex と $D(B)$, $D(b)$ との関係

$$\begin{pmatrix}1&&&&&\\&-1&&&&\\&&-1&&&\\&&&1&&\\&&&&-1&\\&&&&&-1\end{pmatrix}D(B)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\-2&-1&-1&-1\end{pmatrix}=D(b),\quad \begin{pmatrix}1&&&&&\\&-1&&&&\\&&-1&&&\\&&&1&&\\&&&&-1&\\&&&&&-1\end{pmatrix}D(b)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\-1&-1&0&-1\\-1&0&-1&-1\\0&1&1&1\end{pmatrix}=D(B)$$

(6)の例は. tilting complex を"数字"だけのイメージではできなかった。書き下すのがとても繁雑なので"感じ"だけを述べる。

(6)の例: $p=2$. $G=SL(2,8)$. $\supset P$: 2-Sylow $\qquad H=N_G(P)$

$B=B_0(G)$
simples は $\{1,2,3\}$ の真部分集合, i.e. $\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}$ で番号づけられる。

quiver.
$$\begin{tikzcd} & \phi \arrow[dl, shift left] \arrow[d, shift left] \arrow[dr, shift left] & \\ \{1\} \arrow[ur, shift left] \arrow[d, shift left] & \{2\} \arrow[u, shift left] \arrow[d, shift left] & \{3\} \arrow[ul, shift left] \arrow[d, shift left] \\ \{1,3\} \arrow[u, shift left] & \{1,2\} \arrow[u, shift left] & \{2,3\} \arrow[u, shift left] \end{tikzcd}$$

(arrows に $I\subsetneq J$ のとき α_{IJ} β_{JI} と名づける。たとえば $\phi\to\{1\}$ に $\alpha_{\phi 1}$, $\{1,2\}\to\{2\}$ に $\beta_{12,2}$)

$\alpha_{\phi 1}\beta_{1\phi}=0=\alpha_{1,13}\beta_{13,1}$ および 添字を $+1, +2$ したもの。
$\alpha_{2,12}\cdot\alpha_{\phi,2}\cdot\beta_{1\phi}=0$ および 〃
$\alpha_{\phi 1}\cdot\beta_{2\phi}\cdot\beta_{12,2}=0$ および 〃

$\beta_{12,2}\cdot\alpha_{2,12}\cdot\alpha_{\phi 2}=\alpha_{\phi 2}\cdot\beta_{1\phi}\cdot\alpha_{\phi 1}$, $\beta_{2\phi}\cdot\beta_{12,2}\cdot\alpha_{2,12}=\beta_{1\phi}\cdot\alpha_{\phi 1}\cdot\beta_{2\phi}$ および 〃
(数字は mod. 3 で考える)

$b=B_0(H)$
simples は $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}=\{0,1,2,\cdots,6\}$ で番号づけられる。
quiver. 各 i からちょうど3本 $i\to i+1,\ i\to i+2,\ i\to i+3$ arrows がある。$\alpha_{i\,i+1}$, $\beta_{i\,i+2}$, $\gamma_{i\,i+4}$ と名づける。

(意味のある積で) $\alpha^2=0$ $\beta^2=0$, $\gamma^2=0$, $\alpha\beta=\beta\alpha$, $\alpha\gamma=\gamma\alpha$, $\beta\gamma=\gamma\alpha$

proj.s を P_I $I\subset\{1,2,3\}$ (B について), Q_i $i\in\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ (b について) と名づける。

B における tilting complex
次の 7つの complex の直和(具体的な写像は省略)

$$P_{23}\oplus P_{12}\oplus P_{13}\longrightarrow P_3\oplus P_2\oplus P_1\longrightarrow P_3\oplus P_2\oplus P_1\longrightarrow P_\emptyset$$

$P_{12}\oplus P_{31} \longrightarrow P_2\oplus P_1 \longrightarrow P_1$ (および添字 +1, +2 したもの)

$P_{31} \longrightarrow P_1$ (および 〃)

b における tilting complex
次の 7つの complex の直和

$$Q_3\oplus Q_5\oplus Q_6\longrightarrow Q_1\oplus Q_2\oplus Q_4\longrightarrow P_0$$

$Q_3\oplus Q_5 \longrightarrow Q_1$ (および添字を ×2, ×4 したもの)

$Q_5\longrightarrow Q_3\oplus Q_5 \longrightarrow Q_1$ (および 〃)

B における最初の complex の 2項目と 3項目は ±1 で相殺されて"数字"としては消える。同じく, b の 3番目の complex でも 3項目と 4項目の Q_5 は 相殺されてしまう。

実際に必要な complex であることを check するのは大変なことである。(4) については Richard [9] によりいくらか"数学的"な議論で計算は楽に check されている。(5)、(6) については、とにかく quiver と relation を与えておいて ひたすら計算を実行した。

参考文献

[1]. Broué, Astérisque 181-182 (1990), 61〜92
[2] Broué, C.R. Acad. Sc. Paris 307 (1988), 13〜18
[3] Broué - Puig, Invent. Math. 56 (1980), 117〜128
[4] Erdmann, S.L.N.M. 1428
[5] 津島・永尾, 有限群の表現 (裳華房)
[6] Richard, J. London Math. Soc. 39 (1989), 436〜456
[7] Richard, J. Pure Appl. Alg. 61 (1989), 303〜317
[8] Richard, J. London Math. Soc. 43 (1991), 37〜48
[9] Richard, Preprint
[10] 若松, 多元環の表現論シンポジウム, 長野戸倉 (1987)

Bass orders in non semi-simple algebras

京大理　土方弘明

0. R は Dedekind domain, K はその商体, A は有限次 K-algebra とする. A が K 上 separable という条件の下で展開された Bass order の理論 [D-K-R 67], [D-K 72], [H-N 92] は「A に何の制限もつけずに自然に展開できる」という筆者と西田憲司氏が共同で得た結果について報告した. その内容を §0, 1 に記す. 話の最后に触れた Bass order の AR (= Auslander Reiten)-quiver について, その後考えたことを, 未完ながら §2 に記す. 会期中, 筆者が勉強中だった AR-関係の事項について, 多くの方々からご教示を受けた. 改めて, お礼申し上げる.

§0 1-1 以外では, R は CDVR (complete discrete valuation ring) として, いわゆる local theory に限る. global theory との関係については, separable のとき唯一知られていた「Roiter-Jacobinski 型の divisibility Theorem」([C-R 81] 31.12 & 31.32) が任意の A 及 R に対して証明でき, それによって global theory が可能であること唯を言明しておく。その定理の証明 [H 93] は書いてあるので, request があれば, お送りする.

0.0 基本概念, A の R-order Λ, それに対する (left) Λ-lattice L 等は, ほぼ [CR-81] に従う. 特に L が left Λ-lattice なら $L^* := \mathrm{Hom}_R(L, R)$ は自然に right Λ-lattice となった.

[C-R 81], [R 70] 等にある, 種々の type の order の定義は必ずしも統一されていない. また A を一般にすると, 定義のとり方に若干の option を生ずるので, まずはっきり書く.

0.1 いろいろの order の定義

Λ は left Gorenstein order とは

(1) Λ^* は projective right Λ-lattice

Λ は left Bass order とは

(2) Λ の over order $\Gamma(\supseteq\Lambda)$ は left Gorenstein

Λ は left strictly Bass order とは

(3) 任意の K-algebra epimorphism $\pi: A\to B$

に対して、$\pi(\Lambda)$ の overorder は Gorenstein

Λ は left hereditary order とは

(4) 任意の left Λ-ideal は Λ-projective

Λ は left strictly hereditary order とは

(5) 任意の left Λ-lattice は Λ-projective.

Λ は maximal order とは

(6) Λ は proper overorder をもたない.

0.1′ 上の left を right で代えた性質 (1′)〜(5′) により right Gorenstein order etc. を def する.

0.2 order Λ の性質として, (i) (i′) の間に次の implication があり, 一般にはそれ以外にない.

(i) (i) $\Longleftrightarrow$ (i′) $\quad 1\leq i\leq 5$

(ii) (6) $\Rightarrow$ (5) $\Longleftrightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1)

0.2.0 A を separable とすると, (i) (ii) はよく知られているか, もしくはすぐに確められる。更に, (3) $\Longleftrightarrow$ (2) も成立つ.

一般に, (3) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (1) ; (5) $\Rightarrow$ (4) ; (5) $\Rightarrow$ (1) は定義よりほぼ自明である. (5) $\Longleftrightarrow$ (4) は A が QF (quasi-Frobenius) なら自明に近いが, 一般には必ずしも自明でない.

0.2.1 性質 (i) (i′) は全て local property である。即ち（Λ が (i) を充す）$\Longleftrightarrow$（各極大 ideal $\mathfrak{p}$ での完備化 $\Lambda_{\mathfrak{p}}$ が全て (i) を充す）。

$\Lambda_{\mathfrak{p}}$ に対しては，Lifting idempotents theorem より (1) $\Longleftrightarrow$ (1′)，これより，上により一般に (i) $\Longleftrightarrow$ (i′) $1 \leq i \leq 3$。

0.2.2 (i), (i′) は全て森田同値で不変である。これは $i = 2, 3$ 以外は自明。2, 3 については [C-R 81] 37.14（記号 $\succ$ の意味も含めて）を次のように'分解'すればよい：

（Λ が (3) (resp. (2)) を充す）$\Longleftrightarrow$（$\forall$ left Λ-lattice L, $\forall$ left Λ-lattice (resp. faithful left Λ-lattice) M につき：

$$M \succ L \Rightarrow M^* \succ L^* \;).$$

0.2.3 A の order Λ がある性質 (i) をもてば，A の構造をその分だけ制限する。まず自明なものは

(i) $\exists \Lambda$ Gorenstein $\Rightarrow$ A : QF

(ii) $\exists \Lambda$ strictly Bass $\Rightarrow$ A : Bass algebra (i.e. A の homomorphic image は QF)

(iii) $\exists \Lambda$ left (or right) strictly hereditary
$\Rightarrow$ A : semi-simple

これら程自明でなく，且つ一般の A の Bass order を調べるのに，本質的に重要なのは

(iv) $\exists \Lambda$ left (or right) hereditary $\Rightarrow$ A : semi-simple

その他，non-Bass algebra A が Bass order Λ を含むことはある。

0.3 以上によって，一般のAに対して，Bass orderの理論を作るに当って，まず一般のAに対してhereditary orderの理論を考え直す必要のあることを若干suggestできたかと思う．

一方，CDVR上の，separable A内のorderに対して用いられている[D-K.72]の方法 —— lattice L の maximal sub Λ-lattice, minimal over Λ-latticeを調べる —— はAの分離性に好んで頼る必要がない．この方法を徹底的に調べ直すことによって，一般のAに対して，まずhereditary orderのlocal theoryが，全く初等的に，でき上る：

例えば：(4) $\Longleftrightarrow$ (5) $\Longleftrightarrow$ (rad Λ は left Λ-projective)

$\Longleftrightarrow$ (right order of rad $\Lambda = \Lambda$)

$\Longleftrightarrow$ ($\Gamma \supseteq \Lambda$, rad $\Gamma \supseteq$ rad $\Lambda \Rightarrow \Gamma = \Lambda$), 但 Γ は order.

最后の性質はleft, rightによらぬので (4) $\Longleftrightarrow$ (4').

0.3.1 (4) $\Longleftrightarrow$ (5) より (iv) 0.2.3 が成立ち，local theoryにおいて：　Λ : hereditary $\Rightarrow A = K\Lambda$: semi-simple.

Aがsemi-simpleでなければhereditary orderはない．それにも拘らず，そのlocal theory，0.3の同値，はBass orderの理論を作る基礎となる．

またhereditary order自身にとっても，そのglobal theoryには，Aをsemi-simpleと限らないlocal theoryが役立つ．例えば次の基本的定理が得られる．

0.3.2 Theorem　R : Dedekind domain，A : 有限次K-algebra，S = Aのcenterの中でのRのintegral closure　とする．

(i) Aに対する次の3つの条件は同値である

(1) Aは極大orderをもつ．

(2) A は hereditary order をもつ

$$(3) = \begin{cases} (3.1) & A \text{ は semi-simple} \\ (3.2) & S \text{ は } R\text{-module として有限生成} \end{cases}$$

(ii) $A = \bigoplus_{\ell=1}^{n} A_\ell$ が (i) の条件を充すとする。但し A_ℓ は connected component (i.e. ring としての直既約因子)，また S_ℓ を A_ℓ の center の中での R の integral closure とする。このとき

$(\Lambda$ は A の maximal (resp. hereditary) R-order$)$

$\Longleftrightarrow$ $(\Lambda = \bigoplus_{\ell=1}^{n} \Lambda_\ell$, Λ_ℓ は A_ℓ の maximal (resp. her.) S_ℓ-order$)$

0.3.3 上記 (iii) により，一般の K-algebra A の hereditary order の理論は，A が central simple の場合に完全に reduce する。この現象は Bass order に対しては起らない。このため分類論などでは，何らかの意味で central であることを仮定せざるを得ない (cf. [H-N 92] 0.3.2)。

0.3.4 (3.1) の下で，A の center は体 Z_ℓ の直和で：

A が K 上 separable $\Longleftrightarrow$ Z_ℓ が K の separable extension

$\Longrightarrow$ (3.2). 従って，この場合，(i) は maximal order の存在定理と殆んど変らない。これが従来の理論であった。

我々の (i) は，それに含まれない，例えば K が任意の体上の 1 変数函数体であるような，応用上重要な case を cover している。

(3.1), (3.2) とも，maximal order をもつための自明な必要条件であるから，0.3.2 が知られてなかったとは殆んど信じ難いが，文献には見出せなかった。

1. Bass order の local theory

証明の technical な点，順序等は無視して，どんなことをやるのか解ってもらえることを主眼とする．証明自体 [H-N 93] は書いてあるので，興味をもって頂けたら，request して下されば，お送りする．

<u>1.0</u> R : CDVR， A : 有限次 K-algebra， Λ : A の R-order， $\mathfrak{R} := \mathrm{rad}\,\Lambda$ (Jacobson radical) とする．

$$\mathrm{lat}\,\Lambda \supseteq \mathrm{ind}\,\Lambda \begin{array}{c} \supseteq \mathrm{proj}\,\Lambda \supseteq \\ \supseteq \mathrm{inj}\,\Lambda \supseteq \end{array} \mathrm{bij}\,\Lambda := \mathrm{proj}\,\Lambda \cap \mathrm{inj}\,\Lambda$$

を各々，left Λ-lattice，直既約 left Λ-lattice，直既約且つ projective (or injective or bijective) left Λ-lattice の Λ-isomorphism class のなす set とする．

$L \in \mathrm{proj}\,\Lambda$ に対し，${}'L := \mathfrak{R}L$ は maximum (= unique maximal) sub Λ-lattice of L である

$L \in \mathrm{inj}\,\Lambda$ に対し，$L' := (L^{*}\mathfrak{R})^{*}$ は minimum over Λ-lattice of L である．

<u>1.1. Rejection Lemma</u>　$P \in \mathrm{lat}\,\Lambda$ について：

$$\left(\mathrm{bij}\,\Lambda \ni P \not\simeq P'\right) \Longleftrightarrow \left(\exists \text{ over order } \Lambda' \supseteq \Lambda \text{ s.t. } \mathrm{ind}\,\Lambda' = \mathrm{ind}\,\Lambda - \{P\}\right)$$

但し上行右端の意味は，$L \in \mathrm{ind}\,\Lambda' \Longleftrightarrow P \not\simeq L \in \mathrm{ind}\,\Lambda$

<u>1.1.0.</u> この Lemma は，A が separable のとき，[D-K 72] Lem. 2.9 で与えられた．分離性を落すことは容易である．但し [D-K] には，表現上の違いのためかも知れぬが，$P \not\simeq P'$ の条件がない．$P \simeq P'$ のとき $\Lambda = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$ (ring sum) $\mathrm{ind}\,\Lambda_0 = \{P\}$ i.e Λ_0 は maximal となり，上のような Λ' (で $K\Lambda' = K\Lambda = A$ となるもの) はない．ともかく，$P \simeq P'$ のときは，全く異った状況が生じるので，

分けて考えなければならない.

1.1.1 このような Λ は,存在すれば unique だから,
$\Lambda-(P) := \Lambda'$ で表す. Λ' の構成法より次が出る

(i) P' (resp. $'P$) は Λ'-projective (resp. injective)
ともに Λ-直既約と限らないが

P' Λ-decomposable $\iff$ $'P$ Λ-decomposable

$\iff$ $P' = B \oplus C$, $'P = \eta B \oplus \eta C$ ($B, C, \eta B, \eta C \in \mathrm{ind}\,\Lambda$)

(ii) Λ が Gorenstein のとき

Γ は Λ の minimal overorder

$\iff$ $\mathrm{bij}\,\Lambda \ni {}^{\exists}P \not\simeq P'$, $\Gamma = \Lambda-(P)$

1.2 Def $P \in \mathrm{lat}\,\Lambda$ に対し

P : super bijective $\overset{}{\underset{\mathrm{def}}{\iff}}$ $\mathrm{bij}\,\Lambda \ni P$ & $P' \simeq {}'P$

「Bass order の理論とは, superbijective lattice の理論である」
と言っても過言でない. その情況を見易くするために:

(Λ, P) : superbijective pair

$\underset{\mathrm{def}}{\iff}$ Λ : connected non-hereditary
& P : supbij Λ-lattice

Λ : superGorenstein

$\iff$ ($P \in \mathrm{proj}\,\Lambda \Rightarrow P$ supbij)

1.3 Crucial Lemma

If (Λ, P) supbij pair, then $P \not\simeq P'$ ($\therefore {}^{\exists}\Lambda' = \Lambda-(P)$) and:

(i) Λ' は hereditary or (Λ', P') は supbij pair

(ii) Λ supGoren $\iff$ Λ' supGoren.

1.3.0 この Lemma は, A separable のときの, [DK 72] Th3.3 の証明から抽出したと言ってもよいが, 証明の各部分での見掛け上の類似よりは, 微妙に異った点もある.

1.3.1 $\Lambda^{(0)} := \Lambda$, $\Lambda^{(i)} := (\Lambda^{(i-1)})'$ とおいて

$$\Lambda \subset \Lambda' \subset \Lambda^{(2)} \subset \cdots \subset \Lambda^{(i)}$$

$$\mathfrak{P} \subset \mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}^{(2)} \subset \cdots \subset \mathfrak{P}^{(i)}$$

という supbig pair $(\Lambda^{(i)}, \mathfrak{P}^{(i)})$ の列ができる.

1.3.2 A : semi-simple とする. $\therefore \exists n \geq 1$ $\Lambda^{(n)}$: hereditary. $\mathfrak{P}^{(n)}$ は高々 2 個の直既約因子にしか分れない ((i) 1.1.1)

また comm. her. order Γ については, 容易に判る通り

$$\Gamma : \text{supGoren} \iff |\text{ind}\,\Gamma| = |\text{big}\,\Gamma| \leq 2.$$

これらを合わせて, $\Lambda^{(n)}$ の構造が判る. 実際

$$\Lambda^{(n)} = \mathcal{O},\ \mathcal{O}_1 \oplus \mathcal{O}_2,\ \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathfrak{p} & \mathcal{O} \end{pmatrix} \text{ or } M_2(\mathcal{O})$$

但し, $\mathcal{O}, \mathcal{O}_2, \mathfrak{p}$ は ある division K-alg の 極大 order, 極大 ideal.

結局, Λ は local ring (i.e. $\Lambda = \mathfrak{P}$) $\underbrace{\text{or } \Lambda = \begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathfrak{p}^{n+1} & \mathcal{O} \end{pmatrix}}^{\text{である Bass order}}$.

ind Λ も完全に判る : $\text{ind}\,\Lambda = \{\mathfrak{P}, \mathfrak{P}', \cdots, \mathfrak{P}^{(n-1)}\} \cup \text{big}\,\Lambda^{(n)}$.

semi-simple A の Bass order の一般論は, 実はこれで尽くされていることは次の Lemma からわかる

1.4. Lemma comm. non her. Goren Λ につき次は同値

- 任意の minimal over order は Goren.
- $\text{big}\,\Lambda \ni \mathfrak{P} \not\cong \mathfrak{P}' \implies \Lambda - (\mathfrak{P})$: Goren
- Λ : supGoren
- Λ : Bass

1.4.0 A semi-simple なら 1.3.2 より 1.4 の条件は

・ $\mathrm{bir}\,\Lambda \ni {}^{\exists}P \neq P'$ Λ-(P) Goren

とも同値となる。これは A が hereditary order をもつ($\Lambda^{(i)}$ が行き止る)ために生じた、一般の A の場合との決定的差異である。一般の場合はたゞ1つの P では Λ の性質を統制できない。その代りに、semi-simple のときには成立しない($\Lambda^{(n)} = \mathcal{O}_1 \oplus \mathcal{O}_2$ のときダメ)、次の、目立たないが理論の構成上不可欠の性質が成立つ

1.4.1 A は semi-simple でない K-alg, Λ は A の conn. Bass order $\Longrightarrow$ A は conn K-alg.

pf. Λ : non-her $\overset{1.4}{\Longrightarrow}$ Λ : supGoren.

$\overset{1.3}{\Longrightarrow}$ Λ' : supGoren for $\forall P \in \mathrm{bir}\,\Lambda$

$\Longrightarrow$ Λ の any overorder は conn $\Longrightarrow$ A : conn $\square$

1.4.2 $A = A_{ss} \oplus A_{ns}$ (ring direct sum), 但し A_{ss} は semi-simple, A_{ns} は simple conn component ナシとすると:

Λ : Bass order of A $\Longrightarrow$ $\Lambda = (\Lambda \cap A_{ss}) \oplus (\Lambda \cap A_{ns})$.

i.e. 一般の A の Bass order の理論は A semi-simple の場合($A = A_{ss}$)と totally non-semi-simple の場合($A = A_{ns}$)に分離できる.

pf $\Lambda = \oplus \Lambda_\ell$ (ring direct) $\Longrightarrow$ $A = \oplus K\Lambda_\ell$ (ring direct)

of $K\Lambda_\ell$ non s.s $\overset{1.4.1}{\Longrightarrow}$ $K\Lambda_\ell$ conn.

$\Longrightarrow$ $A_{ns} = \bigoplus_{ns} K\Lambda_\ell$ ($K\Lambda_\ell$ non s.s の和) $\square$

$\underline{1.5}$. $A = A_{ns}$; $\mathfrak{R} := \mathrm{rad}\,\Lambda \neq 0$, $\varphi : A \to A/\mathfrak{R}$ とする.

$\underline{\text{1.5.1 Theorem}}$

(i) A は Bass order をもつ

$$\iff A : \text{QF-RSZ (i.e. QF \& } \mathfrak{R}^2 = 0)$$

(ii) A: QF-RSZ のとき

$$\Lambda : \text{Bass} \iff \varphi(\Lambda) \text{ maximal order of } A/\mathfrak{R}$$

$\underline{\text{1.5.2 Pf of Th}}$ Λ : Bass order

$\mathcal{E}$ = a complete system of orthognal primitive idempotens of Λ

i.e. $\Lambda = \bigoplus_{e \in \mathcal{E}} \Lambda e$ は Λ-lattice としての直既約分解

$\mathrm{big}\,\Lambda = \{ P_i \mid 1 \le i \le s \}$ $P_i = \Lambda e_i$ $e_i \in \mathcal{E}$ をとり

(1) $\Lambda \simeq \bigoplus_{i=1}^{s} P_i^{\nu_i}$

(2) $P_i^{*} \simeq P_{\sigma(i)}$ $\sigma \in \mathfrak{S}_s$ としておく.

各 P_i につき $\underline{1.3.1}$ のように $P_i^{(n)}$ $n \ge 0$ が def できる.

(3) $\Lambda(n_1, \cdots, n_s) := \Lambda - (P_i^{(m)} \mid 1 \le i \le s,\ 0 \le m_i \le n_i)$

が rejection の順序によらず (意味をもつ限り, 即ち $P_i^{(n)}$ を reject した後で $P_i^{(n+1)}$ を reject する) 定る.

(4) Γ: overorder of $\Lambda \Rightarrow \Gamma = {}^{\exists}\Lambda(n_1, \cdots, n_s)$

以上は自然な議論である.

- $\Lambda + \mathfrak{R} \supset {}^{\exists}\text{order}\, \Gamma \supset \Lambda \Rightarrow \Gamma \supset \Lambda - (P_i) \Rightarrow \Gamma \supset {}^{\forall}\Lambda(n_1, \cdots, n_s)$

$\Rightarrow$ ${}^{\forall}$overorder of $\Lambda \subset \Lambda + \mathfrak{R}$

これから (ii) はありそうに見えるし, 実際ある. (i) もある.

1.5.3 Theorem Λ : comm. Bass order. 1.5.2 の記号で

$$\mathbb{P}_m := \{P_i^{(m)} \mid 1 \leq i \leq s\} \qquad \mathbb{P}_\infty := \{P_i \cap R \mid 1 \leq i \leq s\}$$

(i) $\operatorname{ind} \Lambda = \bigcup_{m \geq 0} \mathbb{P}_m \cup \mathbb{P}_\infty$ (disj. union)

(ii) Auslander の意味で, $\operatorname{ind}\Lambda$ の preprojective partition と preinjective partion は一致し, (i) の分解がそれを与える.

(iii) 各 $L \in \operatorname{ind}\Lambda$ の Λ-projective cover $\wp(L)$ は:

$$\wp(P_i^{(m)}) = \begin{cases} P_i & m = 0 \\ P_i \oplus P_{\sigma(i)} & m \geq 1 \end{cases}, \quad \wp(P_i \cap R) = P_{\sigma(i)}.$$

(iv) $L \in \operatorname{lat}\Lambda$ に対し $\mu(L) := \inf |\Lambda\text{-generator of } L|$

I が Λ-ideal 全体を動くとき

$$\sup_I \mu(I) = \sup \{1 + v_i^{-1} v_{\sigma(i)}\}$$

Pf (i) (ii) (iii) ごく自然に出る.

(iv) $M \in \operatorname{lat}\Lambda$ を indecomposables $P_i^{(m)}$, $P_i \cap R$ の和で表しておけば, (iii) より $\wp(M)$ は判り, $\mu(M)$ も判る. M が Λ-ideal (i.e. KM が A の sub A-module) のための条件も書けるので (iv) が出る.

1.5.4 (iv) の $\sup \mu(I)$ の式は一般 ($A = A_{ns}$ と限らない) の A で成立つことが確められる. 従って

non-maximal superGorenstein order について

$$\sup \mu(I) \leq 2 \iff v_i = v_{\sigma(i)} \quad 1 \leq i \leq s$$

$\iff \Lambda \simeq \Lambda^*$. これから, H. Bass [B.63] がその名がつくこととなった order を考える動機となった $\mu(I) \leq 2$ を

characterize する問題について，ごく自然な (local) solution が得られた。

<u>1.6 Theorem</u> QF-alg A の order Λ につき，次は同値

(1) Λ の任意の overorder Γ は $\Gamma \simeq \Gamma^*$ を充す.

(2) Λ は selfdual (i.e. $\Lambda \simeq \Lambda^*$) superGorenstein

(3) $\sup_I \mu(I) \leq 2$.

Pf. (3) $\Rightarrow$ (1): A が Frobenius でないと (3) が成立しないことをまず見る。A が Frobenius なら，separable のときの Roiter の証明 (cf. [C-R 81] 37.17) がそのまま通じる。

<u>1.6.0</u> A が QF でないと，(3) が成立ち，(1) が成立しない order が <u>1.5</u> で考えた Λ の quotient の1つとして作れる。

<u>1.7 global version of 1.6</u> superGorenstein の概念は大域化できそうな気がしないので置くとして：(1) は明らかに local property である。A が semi-simple なら (2) も Swan-Forster Theorem (cf. [CR 87] 41.21) により local property である。従って <u>1.6</u> は既に global solution (1) $\Longleftrightarrow$ (3) を与えている。一般には (1) $\Rightarrow$ (3) は成立しない，$\sup \mu(I) = 2 \sim 3$ しかない。しかし (3) を充す order を characterize することはできる。

特に <u>1.5</u> の記号で，Λ strictly Bass $\Longleftrightarrow$ A/R simple

$\Rightarrow$ global に $\sup \mu(I) = 2$ である。

1.8 分類　$A = A_{ns}$ のときの Bass order を分類するには、まず QF-RSZ alg を分類する。A conn. として、$|\mathrm{proj} A| \geq 2$ のときは $0 \to R \to A \to A/R \to 0$ が無条件で split するので易しい。その Bass order も簡単に、explicit に判る。

$|\mathrm{proj} A| = 1$ ($\overset{\text{実は}}{\Longleftrightarrow}$ $|\mathrm{proj} \Lambda| = 1$) のとき、(Λ basic としておけば、Λ が local ring のとき) が semi-simple の場合と同様に面倒な場合である。

semi-simple の(分類ができている)場合 [H-N 92] と同様

- A/R は K 上 central 且つ
- $R/\mathrm{rad} R$ は perfect 且つ coh dim ≤ 1

を仮定する。

このとき A はある division K-alg により

$$A \simeq D \underset{K}{\otimes} K[X]/X^2$$

となる。[H-N 92] §6, 特に 6.2 と殆んど同じ方法が apply できて、Bass order の chain が決定できる。

$A = D \oplus D$ の場合と極めてよく似た結果を得る。

2. AR-quiver

Bass order の AR-quiver の characterization についてある speculation を述べた．その後，会期中に受けたご教示のお陰もあって，いく分かは理解も深まり，Bass order よりもやや広い class の order を考えた方が，遥かに調和のとれた情況を期待できることに気づいた．

その，これから導入する order を仮に a.B (almost Bass) order と呼ぶ．
R は CDVR とする．A については，実質は半単純性によらないのは間違いないのだが，どのみち $A = A_{ns}$ のときは結果が単純すぎて面白く見えないので，A は始めから semi-simple とする．

2.0 definition order Λ, $\mathfrak{r} := \mathrm{rad}\,\Lambda$ に対し

Λ は left almost Bass order (l.a.B) とは

$$(1) = \begin{cases} (1.1) & \Lambda^* \succ \Lambda \\ (1.2) & \mathfrak{r}\Lambda^* \succ (\Lambda^*\mathfrak{r})^* \end{cases} \quad \text{as right } \Lambda\text{-lattices}$$

Λ は right a.B order とは

$$(1') = \begin{cases} (1', 1) & \Lambda^* \succ \Lambda \\ (1', 2) & \Lambda^*\mathfrak{r} \succ (\mathfrak{r}\Lambda^*)^* \end{cases} \quad \text{as left } \Lambda\text{-lattices}$$

但し $M \succ L \iff \exists n \quad \exists \pi : M^n \twoheadrightarrow L \quad \Lambda\text{-hom.}$

実は $(1) \iff (1')$ で，これを充すものを a.B order とするわけだが，上の def は，Λ が connected でない場合にも適用するように択んだため，その意図が見えにくい．

2.0.1 (1) は Λ の各 connected component の性質だから，Λ connected のときに限ってみれば：

$$(1) \iff (\Lambda : \text{hereditary}) \text{ or } (\Lambda : \text{conn. non her. Goren s.t } (1.2))$$

$$\mathfrak{B} := \mathrm{big}\,\Lambda, \qquad \mathfrak{B}' \ (\text{resp. } {}'\mathfrak{B}) := \{ L \in \mathrm{ind}\,\Lambda \mid \exists P \in \mathfrak{B},\ L \mid P' \ (\text{resp. } L \mid {}'P) \}$$

とおく．§1 (というより [H-N 92]) 類似の議論で次を得る．

2.1 Lemma Λ は conn. non her. Goren order とする

(i) Rejection の順序によらずに $\dot{\Lambda} := \Lambda - \mathcal{B}$ が定る

and $\operatorname{ind}\dot{\Lambda} \doteq \operatorname{ind}\Lambda - \mathcal{B}$ だが，さらに

$$\dot{\Lambda} \doteq (\Lambda^{*}\mathfrak{R})^{*} = \mathcal{O}_r(\mathfrak{R}) := \text{right order of } \mathfrak{R}$$
$$= (\mathfrak{R}\Lambda^{*})^{*} = \mathcal{O}_\ell(\mathfrak{R}) := \text{left order of } \mathfrak{R}.$$

(ii) 次の条件は同値である

イ) Λ は right a.B order,

ロ) Λ は left a.B order,

ハ) $\dot{\Lambda}$ は Gorenstein

ニ) $\mathcal{B}' = {}'\mathcal{B}$

(iii) ハ) が a.B order の def の実質である。特に Bass $\Rightarrow$ a.B.

2.2 Lemma Λ : conn non her. a.B $\Rightarrow$ $\dot{\Lambda}$ a.B.

特に Λ は finite lattice type (i.e. $|\operatorname{ind}\Lambda| < \infty$) である．Pf.は本質的に，rejection lemma による．

2.2.1 Λ から $\dot{\Lambda}$ を作り，$\dot{\Lambda}$ non her なら $\ddot{\Lambda}$ を作る．この操作をつづけて her. order に到達する。このように作られる order の列を a.B (almost Bass) chain と呼ぶ．即ち

$$\Lambda_0 \supset \Lambda_1 \supset \cdots \supset \Lambda_\nu \supset \cdots$$

が a.B chain とは：Λ_0 her, Λ_ν $(\nu \geq 1)$ conn. a.B そして $\Lambda_{\nu-1} = \mathring{\Lambda}_\nu$ $(\nu \geq 1)$ となっていることをいう．

(i) Λ を含む a.B chain (Λ_ν) で $\Lambda = \Lambda_m$ のとき，m を Λ の rank と呼ぶ．rank $\Lambda = 0 \Longleftrightarrow \Lambda$: her である．

(ii) $\Lambda = \Lambda_m$ がより長い a.B. chain に含まれない (i.e ある conn. a.B order Γ によって $\Lambda = \dot{\Gamma}$ とならぬ) とき Λ を minimal a.B order と呼ぶ．

(iii) 全ての Λ_ν ($\nu \geq 1$) が local ring である a.B chain を primary Bass chain と呼び，それらは [H-N 92] によりほぼ完全に分類されている．特に長さ無限の primary Bass chain は，A の index 2 の subdivision K-algebra D と 1:1 に対応し，対応する D から明解に構成される [H-N 92] 0.3 Th.

2.3 Theorem (crude form) Λ が connected almost Bass order であるための必要十分条件は Λ の full AR-quiver $\mathfrak{A}(\Lambda)$ (stable part $\mathfrak{A}_s(\Lambda)$ ではない！) が古典群の Dynkin diagram X_n ($X = A, B, C, D$) から得られる Riedtmann quiver となることである：

$$\Lambda : \text{conn.a.B} \iff \mathfrak{A}(\Lambda) = \mathbb{Z}X_n/G \quad G < \operatorname{aut}\mathbb{Z}X_n.$$

2.3.0 crude な点

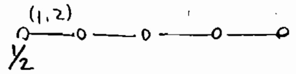
(i) $\Rightarrow$) には例外条項がつく： Λ が minimal 且つ rank 1 のとき，$\mathbb{Z}X_n/G$ とならないときもある． 例外条件は更に絞れる．また，この場合 Λ は Bäckström order あるいはそれに近く，pair category の方法 [Rin-Rog 79] が適用できる．

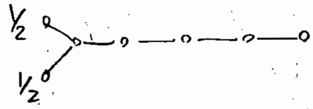
(ii) $L \in \operatorname{lat}\Lambda$ に対し，rational length $\ell(L)$ を $\ell(L) := \operatorname{length}_A KL$ と def する． conn. a. B order Λ の $\mathfrak{A}(\Lambda)$ では，rational length から定る $\mathfrak{A}(\Lambda)$ 上の sub additive function は，(X_n の) X と G を fix すると，2.3.1 のように一意に定ってしまう．

従って $\Rightarrow$) は強い． しかし $\Leftarrow$) は sub add fct を決めてしまうので，quiver theory としては，弱い．

2.3.1 subadditive function on $\mathfrak{a}(\Lambda)$

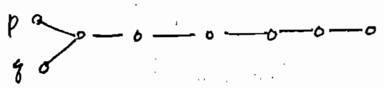
値の比が問題なので、なるべく多くのvertexで1(これは図に書かない)ととることにして: $X=A, C$ では全vertexで1.

B_n 

D_n 

と決める これから $\mathbb{Z}X_n$ 上の $\mathrm{Aut}\,\mathbb{Z}X_n$-不変な subadd fct が一意に定り、$\mathbb{Z}X_n/G$ 上の subadd fct が定る. comm. a.B order の $\mathfrak{a}(\Lambda)$ の rational length より定る subadd fct はこれに限る.

(i) 書き方が前後して恐縮だが、2.6.1の構成により本当にあることが判る $\mathfrak{a}(\Lambda)$ については確かに上の通りである. 一方 実際の構成を伴わない 2.5.1 の段階では、今のところ、2.5.1(i) の $(\mathrm{II})_{odd}$, $(\mathrm{II})_{even}$ については:

D_n 

$0<p, q\in\mathbb{Q}$ $p+q=1$

という可能性が消せないでいる.

(ii) $\mathfrak{a}(\Lambda)$ や $\mathfrak{a}_0(\Lambda)$ 上に実際現れる subadd fct の形についての intrinsic な考察法をもたないので、多元環での類似問題にご経験のある方等から、ご教示頂ければ有難い.

2.4 Riedtmann quiver [Rie a], [Rie, b] を valuation については [H-P-R 80] で補って、Dynkin diagram X_n より $\mathbb{Z}X_n$ を作る. $G(\subset \mathrm{Aut}\,\mathbb{Z}X_n)$ についての制約は、[Rie. a] 1.5 def の "zulässig" で、基本的にはよいが、一寸だけ強すぎる. そこにある条件 $|G\text{-orbit} \cap (\{x\}\cup x^+)| \leq 1$ を $|G\text{-orbit}\cap x^+| \leq 1$ と弱めたものが正解と思う. ともかく、実際ある筈のものは $G=\langle\tau^n\rangle$ $n\geq 1$ の他は [Rie. a] §4 にあるものだけである. 但しそこで除いた $G=\langle\rho\rangle$ A_{2n} だけは入れる.

<u>2.4.1</u>　$X = A, B, C, D$ に対して

$$X_{n,r} := \mathbb{Z}X_n / \langle \tau^r \rangle \quad \text{また}$$

$$D_{n,\tilde{r}} := \mathbb{Z}D_n / \langle \tau^r \phi \rangle$$

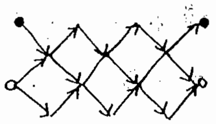
$$A_{2n+1,\tilde{r}} := \mathbb{Z}A_{2n+1} / \langle \tau^r \phi \rangle$$

$$A_{2n,\tilde{r}} := \mathbb{Z}A_{2n} / \langle \rho^{2r+1} \rangle \qquad \rho^2 = \tau$$

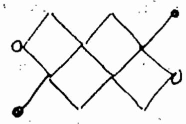
後の3つについては [Rie a] §4 と [Rie b] P454 参照. 2.3Th に関与する $\mathbb{Z}X_n/G$ はこれだけである.

<u>例</u>

$A_{4,3}$

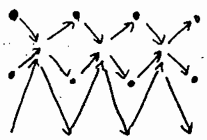


$A_{4,\tilde{3}}$



(○ と ○ / • と • 同一視)

$D_{4,3}$



(左端, 右端 そのまま同一視 / • は length 1/2, 他は 1)

という具合の全く規則正しい quiver である.

<u>2.4.2</u>　Λ は Bass order $\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{a}(\Lambda) = X_{n,1}$ or $X_{n,\tilde{1}}$.

実際 [H-N 92] §4 の primary Bass chain の系列 (I)〜(IVb) は各々

(I): $B_{n,1}$,　(II) $D_{n,1}$,　(III) $D_{n,\tilde{1}}$

(IVa): $C_{n,1}$　(IVb) $A_{2n,\tilde{1}}$

そこに扱われていない primary (= local ring) でない系列

(V): $\begin{pmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} \\ \mathfrak{p}^{n+1} & \mathcal{O} \end{pmatrix}$ は $A_{n,1}$ となる.

但し上に現われない $A_{2n+1,\tilde{1}}$ は $A_{2n+1,1}$ と一致する.

2.5 bij $\supseteq \mathcal{C} = \{P_0, \cdots, P_{r-1}\}$ $(r \geq 1)$ が cycle とは

${}^{t}P_i \simeq P'_{i+1}$ $i \in \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ が成立つこととする。

connected Gorenstein order Λ に対し次の条件を考える

$$(\text{※}) \quad \text{bij}\,\Lambda = \coprod_{\nu=1}^{t} \mathcal{C}_\nu \quad (\text{cycle の disj. union})$$

このとき、2.1 より Λ は almost Bass order となる。Λ の rank を m とし、$\Lambda_m = \Lambda$ となる a.B chain を考える。

$$(2) \quad \Lambda = \Lambda_m \subset \Lambda_{m-1} \subset \cdots \subset \Lambda_1 \subset \Lambda_0 \quad (\Lambda_0 \text{ は hereditary})$$

2.5.1 Theorem conn. Goren order Λ が (※) を充すとする

(i) $a(\Lambda_i)$ $(1 \leq i \leq m)$ は次の系列のどれか1つである。

(I) $B_{i+1, r}$; (II)$_{odd}$ $D_{i+2, 2r+1}$ (II)$_{even}$ $D_{i+2, \widetilde{2r}}$

(III)$_{odd}$ $D_{i+2, \widetilde{2r+1}}$ (III)$_{even}$ $D_{i+2, 2r}$

(IVa) $C_{i+1, r}$ (IVb)$_{odd}$ $A_{2i+2, \tilde{r}}$ (IVb)$_{even}$ $A_{2i+1, \tilde{r}}$

$(\mathrm{V})^0$ $A_{2i+1, r}$ $(\mathrm{V})^1$ $A_{2i+2, r}$

(ii) $a(\Lambda_0)$ も容易に判るが、(IVb)odd, (V)^1 の場合に自然に、$i=0$ を入れた $A_{2,\tilde{r}}$, $A_{2,r}$ となる以外は ($a(\Lambda_1) \Rightarrow a(\Lambda_0)$ の step で、bij Λ_1 とそれにつく arrow を除くだけでは済まず) $i \geq 1$ の表示 $\mathbb{Z}X_n/G$ と形式上結びつかない。

2.5.2 Lemma conn. almost Bass order Λ が、2.3.0 (ii) の例外条件 (i.e. Λ は minimal 且つ rank $\Lambda = 1$) に該当しなければ、Λ は条件 (※) を充す。

これにより、2.3 の $\Rightarrow$ が出た。

2.5.3 2.3 の formal な ⇐) は，rational length から定る subadditive function を 2.3.1 のように固定しているので，ほゞ自明である． Λ が 2.5.1 (i) の $a(\Lambda)$ $i=m$ をもてば Λ は rank m の comm. almost Bass order でなければならぬ．

例えば 2.4.1 例 において，rational length の関係から，bijective vertex は $A_{4,3}$，$A_{4,\tilde{3}}$ においては，最上行及最下行にあるもの； $D_{4,3}$ においては 最下行のものとなる $\dot{\Lambda} = \Lambda - \mathrm{bij}\Lambda$ の $a(\dot{\Lambda})$ は，従って，$A_{2,3}$，$A_{2,\tilde{3}}$，$D_{3,3}$ となる．

2.3 に於る，強い意味の ⇐) 即ち，「$\mathbb{Z}X_n/G$ を $a(\Lambda)$ としてもつ a.B order Λ が存在する」ことは，より強く，2.5.1 の系列の形で，しかも，全く統一的に証明できる

2.6 semi-simple algebra B の中の primary Bass chain

$$\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \cdots \supset \Delta_{\nu-1} \supset \Delta_\nu \cdots$$

が与えられたとする 即ち，Δ_0 は hereditary，Δ_ν $(\nu \geq 1)$ は local ring である comm. Goren order かつ $\Delta_{\nu-1} = \dot{\Delta}_\nu$．

Δ_ν は minimal でない (i.e. $\Delta_\nu \supset {}^{\exists}\Delta_{\nu+1}$) とする

$N_\nu := \mathrm{rad}\, \Lambda_\nu$ とする

整数 $n \geq 1$ を fix して，$0 \leq l \leq n$ に対し

$$(3) \quad \Lambda_l(\Delta_\nu) := \left(\begin{array}{ccccccc} \overbrace{\Delta_\nu \ \cdots \ \Delta_\nu}^{l} & & & \overbrace{\Delta_{\nu-1} \ \cdots \ \Delta_{\nu-1}}^{n-l} & & & \\ N_\nu & \ddots & & & & & \vdots \\ N_\nu & & \ddots & & & & \Delta_{\nu-1} \\ N_{\nu+1} & & & \ddots & & & \Delta_\nu \\ \vdots & & & & \ddots & & \\ N_{\nu+1} & \cdots & N_{\nu+1} & \underbrace{N_\nu \ \cdots \ N_\nu}_{n-l} & & & \Delta_\nu \end{array}\right) \subset M_n(B)$$

とおく

(4) $\Lambda_0(\Delta_1) \supset \Lambda_1(\Delta_1) \supset \cdots \supset \Lambda_n(\Delta_1) = \Lambda_0(\Delta_2) \supset \cdots$

$$\supset \Lambda_n(\Delta_{\nu-1}) = \Lambda_0(\Delta_\nu) \supset \Lambda_1(\Delta_\nu) \supset \cdots \supset \Lambda_n(\Delta_\nu) \supset \cdots$$

という $A := M_n(B)$ の R-lattice の系列が生じた.

<u>2.6.1 Theorem</u> (i) 系列 (4) は almost Bass chain である. primary Bass chain (Δ_ν) の type (I)〜(IVb), および n の parity (odd or even) に従って, 系列 (4) の Auslander-Reiten quiver は <u>2.5.1</u> (i) (I)〜$(\mathrm{IVb})_{even}$ となる.

(i') (I)〜(IVa) では $\Lambda_0(\Delta_1)$ は hereditary であるが, (IVb) では, そうでなく, (4) は左に, her order まで延長される

(ii) Bass chain $\Delta_\nu = \begin{pmatrix} O & O \\ \wp^{2\nu} & O \end{pmatrix}$ (resp. $\Delta_\nu = \begin{pmatrix} O & O \\ \wp^{2\nu+1} & O \end{pmatrix}$) より, 同様の構成により, 系列 $(V)^0, (V)^1$ を得る

(iii) 特に (Δ_ν) が無限系列の場合には, almost Bass order の無限列が生じる.

<u>2.7 Theorem?</u> 長さ無限の almost Bass chain は, 全て <u>2.6</u> (4) の形をもつ.

これは, まだ証明できていないが, 1つの approach としては [H-N92] §2 の方法によって, かなり確実に「正しい」と思われる. 無限 a.B chain (Λ_ν) があれば, 「$\cap \Lambda_\nu$ は A の semi-simple subalgebra の principal order になる」という事実がある. 「無限列がある」という, 多元環論にはない, order の理論の利点によっている. 無限列が解れば, Bass order のときのように, 有限列 (minimal a.B order) に対する理解も自ずと得けることも期待される.

<u>2.8</u> 今迄，引用の機会がなかったが，Wiedemann の一連の結果，[W 81]，[W 86]，[W 87]，は§2 で試みていることと深い関りをもつ．

[W86] では，local ring であり，かつ finite lattice type である connected Gorenstein order Λ の AR-quiver $\mathcal{Q}(\Lambda)$ を決定している：quiver theory から $\mathcal{Q}(\Lambda)$ の充すべき必要条件（≒ prop.4）を与え，それを充す quiver $\mathcal{Q}$ については，全て（きちんと，見ていないが多分）$\mathcal{Q}=\mathcal{Q}(\Lambda)$ となる Λ を作っている．但し，作り方は，order 自体の分類につなげるという方向は，殆んど放棄した方法に思える．

我々の試みは，[W86] にある無限系列の約半分（primary Bass chain が出ているもの）について，一面ではそれを一般化（local ring と限らぬ）し，一面では深める（quiver にとどまらず，order 自体の分類につなげる）ことを意図する．

<u>2.8.1</u> 先に挙げた疑問 2.3.1 は，上記 prop 4 [W86] の approach を筆者が未だ十分検討していないために生じたのかも知れないとは思うが，一方 [W86] で $\mathcal{Q}(\Lambda)$ 上の subadd. fct の可能性を決定しているようには見えず，2.3.0 と同じ意味で $\Leftarrow$) は弱いように思える．

<u>2.8.2</u> 我々の扱っている場合，a.B order，が特に簡単な場合 —— bijective lattice だけを考えればよく，従って全てが rejection Lemma で片づく —— のは確かである．しかし他の無限系列が「難しい」か否かは別問題である．無限列 $\Lambda_0 \supset \Lambda_1 \supset \cdots \supset \Lambda_n \supset \Lambda_{n+1} \supset \cdots$ のあるところ，必ず（拡張された）rejection Lemma（$\mathcal{Q}(\Lambda_{n+1})$ から $\mathcal{Q}(\Lambda_n)$ が判る）がある筈というのも1つの考え方であろう．

References

[B 63] H. Bass, On the ubiquity of Gorenstein rings, Math. Z. 82 (1963) 8-28

[C-R 81] C. W. Curtis, I. Reiner, Method of Representation Theory vol 1, Interscience, 1981

[C-R 87] ———— vol. 2 , 1987

[D-K 72] Yu. A. Drozd, V. V. Kirichenko, On quasi Bass orders Math. USSR Izvestija 6 (1972) 323-365

[D-K-R 67] Yu. A. Drozd, V. V. Kirichenko, A. V. Roiter, On hereditary and Bass orders, Math. USSR Izvestija (1967) 1357-1376

[H 93] H. Hijikata, On the decomposition of lattices over orders (preprint)

[H-N 92] H. Hijikata, K. Nishida, Classification of Bass orders, J. reine ang. Math. 431 (1992) 191-220

[H-N 93] H. Hijikata, K. Nishida Bass orders in non semi-simple algebras (preprint)

[R 70] K. W. Roggenkamp, Lattices over orders II, Springer Lecture Note 142, 1970

Reference 追加 (for §2)

[H-P-R 80] D. Happel, U. Preiser, C. M. Ringel, Vinberg's characterization of Dynkin diagrams using subadditive functions with application to DTr-periodic modules,
Sp. L. N 832 (1980) 280-294

[Ri, 80a] C. Riedtmann, Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück,
Comm. Math. Helvetici 55 (1980) 199-224

[Ri, 80b] C. Riedtmann, Representation-finite selfinjective algebras of class An, Sp. L. N 832 (1980) 449-520

[Rin-Rog 79] C. M. Ringel, K. W. Roggenkamp, Diagrammatic Methods in the Representation Theory of Orders,
J. of algebra 60 (1979) 11-42

[W. 81] A. Wiedemann, Brauer-Thrall I for orders and its application to orders with loops in the Auslander-Reiten Graphs
Sp. L. N. 903 (1981) 350-357

[W. 86] A. Wiedemann, Classification of the Auslander-Reiten quivers of local Gorenstein orders and a characterization of the simple curve singularitees
J. of Pure and applied alg. 41 (1986) 305-329

[W. 87] A. Wiedemann, Auslander-Reiten quivers of local orders of finite lattice type,
Manusscripta math 59 (1987) 187-207

Cohen-Macaulay Approximations

京大総合人間学部　吉野雄二 *(Yuji Yoshino)*

§0. Introduction

Cohen-Macaulay approximation（以下 CM 近似と書く）は Auslander-Buchweitz [**AB**] によって初めて導入された概念である。これ以前に、2 次元の正規局所環に対しては Auslander 加群が定義せられており、それが 2 次元の場合の表現論に決定的な役割を果たすことが知られていた。CM 近似はこの Auslander 加群の高次元化として考えられたものであると思う。しかし、今の所これが表現論にどの様な意味を持つのかは、はっきりしないようである。ところが CM 近似の概念に付随して現われるデルタ不変量が可換環のイデアル論的構造に大きな意味を持つことが分かってきている。また、表現論以外の場でこのデルタ不変量が役立つ場合がいくつか報告されている。

本稿は CM 近似に関するこれらの最近の結果を紹介することを目的とする。§1 ではその定義を [**AB**] にならって与える。一般に考えている可換局所環が canonical module を持つ Cohen-Macaulay 環であれば定義ができるのであるが、ここでは簡単のために Gorenstein 環において話を進める。極小 CM 近似の存在と一意性は §2 で与えられる。またデルタ不変量の定義とその簡単な性質について、ここで議論する。§3 では極小 CM 近似の具体的な構成法について、現在知られている 3 つの方法を紹介する。

§4 以降は CM 近似の理論の応用である。まず §4 では加群が weakly liftable であるための必要条件をデルタ不変量を使って書き表す。§5 ではデルタ不変量の挙動で環が hypersurface であることを特徴付けることができるという Ding の結果を紹介する。また §6 では 2 次元の場合に環の斉次性（quasihomogeneity）が極大イデアルの CM 近似と関連しているのではないかという Auslander の予想について最近の結果を述べる。最後の節では、直接 CM 近似の理論とは関係はないが、完全交叉環についての Auslander-Reiten 予想の成立について [**ADS**] が議論していることを解説する。

おそらく 1993 年春までの CM 近似に関する結果は殆ど本稿で尽くされているものであろうと信じる。しかしながら最初に述べたように CM 近似の理論はその表現論的意味をはっきりさせて初めて完成するものであると思う。そのような方向の結果はまだ

報告されていない。本稿を読まれた方がこの方面に興味をもち、理論の完成に少しでも手を貸していただけるなら望外の幸せである。

§1. Definition

以下では簡単のために $(R, \mathfrak{m}, k)$ を Gorenstein 完備局所環とする。また、R-mod で有限生成 R 加群の圏を表し、$\mathfrak{C}$, $\mathfrak{F}$ をそれぞれ R-mod の full subcategory で極大 CM 加群の圏、有限射影次元の加群の圏とする。R が Gorenstein 環であるという仮定から、$M \in R$-mod が $M \in \mathfrak{C}$ であるための必要十分条件は $\mathrm{Ext}^i_R(M, R) = 0$ $(i > 0)$ であることを注意しておこう。また、このとき $M^{**} \cong M$ すなわち M は reflexive である。

次の事柄は定義と CM 加群に関する簡単な知識で示すことができる。[Y] を参照してほしい。

Proposition (1.1).
(*a*) $N \in \mathfrak{F}$ かつ $M \in \mathfrak{C}$ ならば $\mathrm{Ext}^i_R(M, N) = 0$ $(i > 0)$ である。

(*b*) $M \in \mathfrak{C} \cap \mathfrak{F}$ ならば M は free である。

(*c*) 完全列 $0 \to A \to B \to C \to 0$ があるとき、

$$A,\ C \in \mathfrak{C} \implies B \in \mathfrak{C}$$
$$B,\ C \in \mathfrak{C} \implies A \in \mathfrak{C}$$

(*d*) R は $\mathfrak{C}$ における injective cogenerator である。すなわち、任意の $X \in \mathfrak{C}$ に対して完全列 $0 \to X \to R^\ell \to X' \to 0$ $(\ell > 0, X' \in \mathfrak{C})$ が存在する。さらにこのとき、$R^\ell \to X'$ が minimal であるなら X' を X の (first) cosyzygy といい $\Omega^{-1}(X)$ と表す。

これらの事実を確認した後 CM approximation の定義を与えよう。

Definition (1.2). $M \in \mathfrak{C}$ について、完全列

(1.2.1)
$$0 \longrightarrow Y \longrightarrow X \xrightarrow{\ \pi\ } M \longrightarrow 0$$

(または写像 π) は条件 $X \in \mathfrak{C}$, $Y \in \mathfrak{F}$ を満たすとき M の CM 近似 (CM approximation) という。

また、完全列

(1.2.2)
$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Y' \longrightarrow X' \longrightarrow 0$$

が $X' \in \mathfrak{C}, Y' \in \mathfrak{F}$ を満たすとき M の有限射影被覆 (finite projective hull) という。

Remark (1.3). M が CM 近似 (1.2.1) を持つとき、任意の $Z \in \mathfrak{C}$ に対して (1.1)(*a*) より $\mathrm{Ext}^1_R(Z, Y) = (0)$ であるから、特に自然な写像 $\mathrm{Hom}_R(Z, X) \to \mathrm{Hom}_R(Z, M)$ は全射である。言い換えれば任意の R 線形写像 $Z \to M$ は $Z \to X$ に lift するのである。これが完全列 (1.2.1) を CM 近似と呼ぶ由縁である。

有限射影被覆についても同様である。

REMARK (1.4). 私達は R を Gorenstein 環であると仮定したので上のような定義が最も simple と思われる。一般に R が CM 環の時にも CM 近似が考えられるがその時には圏 $\mathfrak{F}$ は R 上の入射次元有限の加群の圏であるとするのが適当である。**[AB]** を見よ。

§2. Existence, Uniqueness and Delta Invariants

この節では定義 (1.2) で述べた CM 近似がいつでも存在して、かつ minimal な CM 近似は同型を除いて一意的であることを証明しよう。まず存在から。

THEOREM (2.1). (Auslander-Buchweitz **[AB]**)

任意の $M \in R$-mod に対して M の CM 近似と有限射影被覆が存在する。

PROOF: $t = \operatorname{depth} M$ についての上からの帰納法で示す。$t = \dim R$ のとき、$M \in \mathfrak{C}$ であるから $X = M$, $Y = 0$ とおいて CM 近似が存在する。また、X の cosyzygy を取る列 ((1.1)(d) の完全列) が有限射影被覆を与える。

次に $t < \dim R$ と仮定する。M の first syzygy を $\Omega(M)$ と書くと完全列 $0 \to \Omega(M) \to R^n \to M \to 0$ がある。$\operatorname{depth} \Omega(M) > t$ となるのでこの $\Omega(M)$ に帰納法の仮定より有限射影被覆 $0 \to \Omega(M) \to Y \to X'' \to 0$ ($Y \in \mathfrak{F}$, $X'' \in \mathfrak{C}$) が存在する。このとき、これらから次の pushout diagram を考える。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & X'' & \xrightarrow{=} & X'' & & & & \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & X & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & =\uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega(M) & \longrightarrow & R^n & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

この第 2 列が完全であることから $X \in \mathfrak{C}$ が出る。また $Y \in \mathfrak{F}$ であったから、上の第 2 行が M の CM 近似を与えることが分かる。次にこの X の cosyzygy $X' = \Omega^{-1}(X) \in \mathfrak{C}$

を考えて列 $0 \to X \to R^m \to X' \to 0$ を取り、次の pushout diagram を考える。

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 & 0 & \\
 & & X' \arrow[u] \arrow[r, "="] & X' \arrow[u] & \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & R^m \arrow[r] \arrow[u] & Y' \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
0 \arrow[r] & Y \arrow[r] \arrow[u, "="] & X \arrow[r] \arrow[u] & M \arrow[r] \arrow[u] & 0 \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

ここで $Y \in \mathfrak{F}$ と第 2 行が完全であることから $Y' \in \mathfrak{F}$ が従う。よってこの第 3 列が M の有限射影被覆を与える。∎

次に一意性を示すために補題を用意しておこう。

LEMMA (2.2).

(*a*) 完全列 $0 \to Y \to X \xrightarrow{\pi} M \to 0$ において $M \neq (0)$ とする。もし $\varphi \in \mathrm{End}(X)$ で φ は非同型かつ $\pi \cdot \varphi = \pi$ を満足するものがあるならば、$\mathrm{Ker}(\pi)$ の自明でない部分加群 X' で X の直和因子になるものがある。

(*b*) 完全列 $0 \to M \xrightarrow{i} Y \to X \to 0$ において $M \neq (0)$ とする。もし $\psi \in \mathrm{End}(Y)$ で ψ は非同型かつ $\psi \cdot i = i$ を満足するものがあるならば、Y の自明でない部分加群 Y' で $Y' \cap i(M) = (0)$ かつ Y' は $X = Y/i(M)$ の直和因子になるものがある。

PROOF: ここでは (*a*) のみを証明する。いま Λ を $\mathrm{End}_R(X)$ の中で R と φ によって生成される R 代数とする。すなわち $\Lambda = R[\varphi] \subseteq \mathrm{End}_R(X)$ である。Λ は可換環であることに注意しよう。

まず Λ が non-local であることを示そう。実際もし Λ が local ならば、その極大イデアルは $\mathrm{rad}(\Lambda) = \sqrt{\mathfrak{m}\Lambda}$ となるはずである。φ は同型でないので Λ の中で non-unit である。したがって $\varphi^n \in \mathfrak{m}\Lambda$ となる自然数 n がある。すると $\varphi^n = \sum_{i=0}^{l} a_i \varphi^i$ $(a_i \in \mathfrak{m})$ と書けるので、仮定より

$$\pi = \pi \cdot \varphi^n = \sum_i a_i \pi \varphi^i = (\sum_i a_i)\pi \subseteq \mathfrak{m}\pi$$

となり中山の補題から $\pi = 0$ となってしまい仮定に矛盾する。これで Λ が non-local であることが分かった。

すると R が完備局所環（特に Hensel 環）であるから Λ は nontrivial idempotent e を持つ。すなわち $e\in\Lambda, e^2=e, e\neq 0,1$ となる e がある。$e=\sum_{i=0}^m b_i\varphi^i$ $(b_i\in R)$ と書いておく。但し必要があれば e の代わりに $1-e$ を考えて $c=\sum_{i=0}^m b_i\in R-\mathfrak{m}$（すなわち c は unit）と仮定して構わない。すると、仮定より $\pi\cdot e=c\pi$ であるから、$X'=\mathrm{Ker}(e)=\mathrm{Im}(1-e)$ とおくと $X'\subseteq\mathrm{Ker}(\pi)$ であり X' は X の直和因子である。∎

Definition (2.3). $M\in R$-mod の CM 近似 $0\to Y\to X\xrightarrow{\pi} M\to 0$ において π が right minimal、すなわち $\pi\cdot\varphi=\pi$ となる $\varphi\in\mathrm{End}_R(X)$ は皆同型、という条件を満たすとき、この CM 近似を極小 (minimal) であるという。同様に有限射影被覆 $0\to M\xrightarrow{i} Y'\to X'\to 0$ において i が left minimal、すなわち $\psi\cdot i=i$ となる $\psi\in\mathrm{End}_R(Y')$ は皆同型、という条件を満たすとき、この有限射影被覆を極小であるという。

もし (2.1) によって存在した M の CM 近似が極小でなければ、(2.2) によりその短完全列から自明でない直和因子が split off する。そのような直和因子を取り除いた新たな短完全列は再び M の CM 近似である。もしこれが極小でなければ、また (2.2) より直和因子が出る。このような操作を繰り返していけば最後には M の極小な CM 近似に到達するはずである。これによって次の定理の存在の部分が証明された。

Theorem (2.4). ([**AB**]) 任意の $M\in R$-mod について M の極小 CM 近似が（同型を除いて）一通りに存在する。

Proof: 一意性を示す。2 つの短完全列 $0\to Y_1\to X_1\to M\to 0$ と $0\to Y_2\to X_2\to M\to 0$ が共に M の極小な CM 近似であったとする。このとき (1.3) によって次の図式を可換にする φ と ψ がある。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \varphi\downarrow & & =\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Y_2 & \longrightarrow & X_2 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0\\
 & & \downarrow & & \psi\downarrow & & =\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & Y_1 & \longrightarrow & X_1 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

すると極小性によって $\psi\cdot\varphi$ と $\varphi\cdot\psi$ はそれぞれ X_1, X_2 の上の自己同型写像でなければならない。よって Krull-Schmidt の定理から φ は同型写像となり、上の二つは短完全列として同型である。∎

Exercise (2.5). 有限射影被覆についても CM 近似のときと同じように極小なものが一意的に存在することを証明せよ。(解:上記 (2.4) の証明と全く同じ、またはその双対。)

極小 CM 近似および極小有限射影被覆は一意的に存在するのだから次のように記号を整理しておくのが便利である。

NOTATION (2.6). 任意の $M \in R$-mod に対して、その極小 CM 近似と極小有限射影被覆をそれぞれ次のように表す。

$$0 \longrightarrow Y_M \longrightarrow X_M \xrightarrow{\pi_M} M \longrightarrow 0$$
$$0 \longrightarrow M \longrightarrow Y^M \longrightarrow X^M \longrightarrow 0$$

($X_M, X^M \in \mathfrak{C}$ かつ $Y_M, Y^M \in \mathfrak{F}$ であることを忘れないように。)

$M \in R$-mod に対して上記のように X_M 等が定まると、それによって M の invariant が定義できる。後で必要となる invariant の一つをここで与えておこう。そのために、一般に加群 $X \in R$-mod が自明でない free direct summand を含まないとき、X を stable と呼ぶことにしよう。また R-mod は Krull-Schmidt category なので、$X \in R$-mod について f-rank X を X に含まれる最大の free direct summand の free rank として定義することができる。X が stable であることは f-rank $X = 0$ であることと同値である。

DEFINITION (2.7). $M \in R$-mod に対して $\delta(M) = \text{f-rank}\, X_M$ とおき、これを M のデルタ不変量と呼ぶ。このとき $X_M \cong X \oplus R^{\delta(M)}$ (X : stable) である。

簡単なデルタ不変量の性質について述べておこう。

LEMMA (2.8). $M \in R$-mod に対して

$$\tau(M) = \sum\{f(X) \mid f : X \to M \text{ は } R \text{ 加群の写像であって } X \text{ は stable CM 加群}\}$$

とおく。このとき次の等式が成立する。

$$\delta(M) = \mu(M/\tau(M))$$

但し、μ は R 加群の最小生成元の個数を表す。

PROOF: $X_M \cong X \oplus R^\delta$ ($\delta = \delta(M)$) と書き表しておく。但し X は stable である。$\pi_M : X_M \cong X \oplus R^\delta \to M$ が全射であることと $\pi_M(X) \subseteq \tau(M)$ であることから $\delta \geq \mu(M/\tau(M))$ となる。

逆の不等式を証明しよう。M が Noether 加群であることから、適当な stable CM 加群 Y と R 加群の写像 $g : Y \to M$ があって、$\tau(M) = g(Y)$ となることが分かる。(1.3) によってこの g は $h : Y \to X_M$ に lift する。

$$\begin{array}{ccccc} X_M \cong X \oplus R^\delta & \xrightarrow{\pi_M} & M & \longrightarrow & 0 \\ {\scriptstyle h}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle =} & & \\ Y & \xrightarrow{g} & M & & \end{array}$$

Y が stable であることから $h(Y) \subseteq X \oplus \mathfrak{m}R^\delta$ である。よって全射 $M/g(Y)+\mathfrak{m}M \to M/\pi_M(X)+\mathfrak{m}M$ がある。したがって $\mu(M/\tau(M)) = \mu(M/g(Y)) \geq \mu(M/\pi_M(X))$。この右辺と δ が等しいことを示せばよい。そのためには π_M から導かれる写像 $R^\delta \to M/\pi_M(X)$ が minimal free cover であることを見ればよい。もし、これが minimal でないと仮定すると R^δ の basis element のひとつ e で $\pi_M(e) = \pi_M(x)$ for some $x \in X$ となるものがある。すると $X_M \cong X \oplus R^\delta$ の元 $(e, -x)$ で生成される部分加群は X_M の free direct summand であり、$\pi_M(e,-x) = 0$ となるから π_M が極小 CM 近似を与えることに反する。∎

COROLLARY (2.9). R-mod における全射 $M \to N$ があると仮定すると $\delta(M) \geq \delta(N)$ である。

PROOF: 全射 $M/\tau(M) \to N/\tau(N)$ が存在する。∎

次の補題は得られた CM 近似が極小かどうかを判断するのに有用である。

COROLLARY (2.10). $M \in R$-mod の CM 近似 $0 \to Y \to X \xrightarrow{\pi} M \to 0$ について次の二つの条件は同値である。

(a) π は M の極小 CM 近似である。

(b) $X \cong X' \oplus F$ (F : free, X' : stable) と分解したとき、π から導かれる写像 $F \to M/\pi(X')$ は minimal free cover である。

PROOF: $(a) \Rightarrow (b)$ は既に Lemma (2.8) の証明の中で示されている。

$(b) \Rightarrow (a)$: これが極小 CM 近似でなかったと仮定してみよう。すると $Y \subseteq X$ は共通の直和因子 $L(\neq (0))$ を含む。L は Y の直和因子として $L \in \mathfrak{F}$、一方 X の直和因子として $L \in \mathfrak{C}$ であるから、(1.1)(b) によって L は free である。この L は $\pi(L) = 0$ をみたすから、これから (b) が成り立たないことが分かる。∎

極小有限射影被覆を使ってもデルタ不変量を表すことができることが知られている。

LEMMA (2.11). 任意の有限射影被覆 $0 \to M \to Y^M \to X^M \to 0$ について $\delta(M) = \mu(Y^M) - \mu(X^M)$ が成り立つ。

PROOF: 与えられた有限射影被覆が極小であると仮定して構わない。M の極小 CM 近似及び X_M の cosyzygy $C = \Omega^{-1}(X_M)$ を取る列 (cf. (1.1)(d)) をそれぞれ次のように与える。

$$0 \longrightarrow Y_M \longrightarrow X_M \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow X_M \longrightarrow R^n \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

X_M, $C \in \mathfrak{C}$ かつ $Y_M \in \mathfrak{F}$ である。$X_M \to M$ と $X_M \to R^n$ によって次のような pushout diagram を考える。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & Y_M & \xrightarrow{=} & Y_M & & & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & X_M & \longrightarrow & R^n & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & {\scriptstyle =}\downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & W & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\
 & & 0 & & 0 & & & &
\end{array}
$$

まず $n = \mu(C)+\delta$ であることを示す。但し $\delta = \delta(M)$ である。$X_M \cong X \oplus R^\delta$ (X : stable) と書いておく。X の free module への極小な埋め込み (cf. (1.1)(d)) を $X \subseteq R^m$ とすると、$X_M \cong X \oplus R^\delta$ であることから $n = m+\delta$ であり、また完全列 $0 \to X \to R^m \to C \to 0$ がある。ここで X が stable であることから $X \subseteq \mathfrak{m}R^n$ なので、$\mu(C) = m$ であることが分かる。以上より $n = \mu(C)+\delta$ が分かった。すなわち上の図式より全射 $R^{\mu(C)+\delta} \cong R^n \to W$ がある。

さて上記の図式の第 3 行の完全列において $W \in \mathfrak{F}$ かつ $C \in \mathfrak{C}$ だから、これは M の有限射影被覆を与えている。したがって、この完全列は極小有限射影被覆と自明な列の直和となっているのだから、この列について等式 $\delta = \mu(W) - \mu(C)$ を示せば十分である。これには上記の全射 $R^{\mu(C)+\delta} = R^n \to W$ が minimal free cover であることを示せば良い。そこで、これが minimal でないと仮定してみよう。このとき上の図式から $Y_M \not\subseteq \mathfrak{m}R^n$ である。ところがこれは Y_M が R^n の free direct summand を含むことを意味し、よって Y_M は X_M の free direct summand を含むことになる。これは最初の列 $0 \to Y_M \to X_M \to M \to 0$ が極小 CM 近似であることに矛盾する。これで証明が終わった。∎

この系として得られる次の事実は良く用いられる。

Corollary (2.12). 任意の $M \in R$-mod について次の 3 条件は同値である。

(a) $\delta(M) = 0$

(b) X_M は stable CM 加群である。

(c) 任意の $Z \in \mathfrak{F}$ と任意の R 加群の写像 $\varphi : M \to Z$ に対して $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathfrak{m}Z$ である。

Proof: (a) $\Leftrightarrow$ (b) は定義より明らか。

$(c) \Rightarrow (b)$ 有限射影被覆 $0 \to M \to Y^M \to X^M \to 0$ において $Y^M \in \mathfrak{F}$ であるから仮定より $M \subseteq \mathfrak{m}Y^M$ となる。したがって $\mu(Y^M) = \mu(X^M)$ が分かる。特に Lemma (2.11) より $\delta(M) = \mu(Y^M) - \mu(X^M) = 0$ である。
$(a) \Rightarrow (c)$ $\varphi : M \to Z$ $(Z \in \mathfrak{F})$ が与えられているとする。(1.3) によってこの φ は $\psi : Y^M \to Z$ に延長する。さて Lemma (2.11) と (a) によって $\mu(Y^M) = \mu(X^M)$ となるから、極小有限射影被覆において $M \subseteq \mathfrak{m}Y^M$ でなくてはならない。以上より $\varphi(M) = \psi(M) \subseteq \psi(\mathfrak{m}Y^M) \subseteq \mathfrak{m}Z$ となり (c) が示された。∎

§3. Constructions

前節では与えられた加群に対してその極小 CM 近似が存在することなどをみたが、この節ではそれらを実際にどの様に構成したらよいのかを考えてみよう。

$(R, \mathfrak{m}, k)$ は前節と同様 Gorenstein 完備局所環で $\dim R = d$ とおく。

(I) （Auslander の方法 [**AB**]）

一般に $M \in R$-mod と正数 i に対して ith syzygy を $\Omega^i(M)$ で表す。すなわち $\Omega^0(M) = M$ と完全列

$$0 \longrightarrow \Omega^i(M) \longrightarrow F_{i-1} \longrightarrow \Omega^{i-1}(M) \longrightarrow 0$$

によって帰納的に定義される。但し $F_{i-1} \to \Omega^{i-1}(M)$ は minimal free cover である。同様 M が CM 加群のときには $i < 0$ についても (1.1)(d) によって cosyzygy $\Omega^i(M)$ が定義される。このときには $\Omega^i(M)$ はまた CM 加群であり、さらに stable であることに注意せよ。

さて $M \in R$-mod が任意に与えられたとき $\Omega^d(M)$ はいつでも CM 加群になるので、その cosyzygy を考えることができる。結局次のような完全列からなる可換図式が存在することが分かる。

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \to & \Omega^d(M) & \to & F_{d-1} & \to & \cdots & \to & F_0 & \to & M & \to & 0 \\
 & & =\uparrow & & \uparrow & & & & \uparrow & & \psi\uparrow & & \\
0 & \to & \Omega^d(M) & \to & G^0 & \to & \cdots & \to & G^{d-1} & \to & \Omega^{-d}(\Omega^d(M)) & \to & 0
\end{array}$$

ここで ψ は必ずしも全射ではない。そこで free cover $\rho : R^\ell \to M/\mathrm{Im}(\psi)$ をとって、$X_M = \Omega^{-d}(\Omega^d(M)) \oplus R^\ell$ とおき ψ と ρ から induce される写像 $\pi : X_M \to M$ を考える。さらに $Y_M = \mathrm{Ker}(\pi)$ とおいて完全列

$$(3.1) \qquad 0 \longrightarrow Y_M \longrightarrow X_M \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

が得られる。

上記の可換図式における diagram chasing によって、$Z \in \mathfrak{C}$ と R 加群の写像 $Z \to M$ が与えられると $Z \to \Omega^{-d}(\Omega^d(M))$ に持ち上げられることが比較的簡単に分かる。これから更に $\mathrm{Ext}^1(Y, Z) = 0$ $(Z \in \mathfrak{C})$ が導かれ、従って Y は finite injective dimension（よって finite projective dimension）を持つ。従って (3.1) は M の CM 近似になっている。

更に free cover $\rho : R^\ell \to M/\mathrm{Im}(\psi)$ が minimal であるときには (3.1) は極小 CM 近似を与えていることが容易に分かる。

(II) （Ding の方法 **[D1]**）

ここでは M が codimension r の CM 加群である場合を考えよう。すなわち $\dim M = \operatorname{depth} M = d-r$ とする。このとき $\mathrm{Ext}^r(M, R)$ を $M^\vee$ と書くと、$M^\vee$ もまた codimension r の CM 加群であって、$M^{\vee\vee} \cong M$ となることが知られている。また $\mathrm{Ext}^i(M, R) = 0$ $(i \neq r)$ である。

さて $M^\vee$ の rth syzygy を考える。

$$(3.2) \qquad 0 \longrightarrow \Omega^r(M^\vee) \longrightarrow F_{r-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M^\vee \longrightarrow 0$$

この完全列の双対をとって次の完全列を得る。

$$0 \longrightarrow F_0^\vee \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_{r-1}^\vee \longrightarrow \Omega^r(M^\vee)^\vee \longrightarrow M^{\vee\vee} \cong M \longrightarrow 0$$

ここで $X_M = \Omega^r(M^\vee)^\vee$、$Y_M = \mathrm{Coker}(F_{r-2}^\vee \to F_{r-1}^\vee)$ と置くと、X_M は CM 加群であり、更に上の完全列から Y_M は finite projective dimension を持つ。よって、完全列

$$(3.3) \qquad 0 \longrightarrow Y_M \longrightarrow X_M \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

は M の CM 近似である。

また、もし (3.2) が minimal free resolution であるときには (3.3) は M の極小 CM 近似を与えている。

(III) （Herzog-Martsinkovsky の glueing construction **[HM]**）

ここでも M は codimension r の CM 加群であるとする。M と $M^\vee$ の minimal free resolusion を次の様に与える。

$$\begin{aligned} K_\bullet &: \cdots \longrightarrow K_1 \longrightarrow K_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0 \\ L_\bullet &: \cdots \longrightarrow L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow M^\vee \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

$L_\bullet^\vee = \mathrm{Hom}(L_\bullet, R)$ を考える。

$$L_\bullet^\vee : 0 \longrightarrow L_0^\vee \longrightarrow \cdots \longrightarrow L_r^\vee \longrightarrow L_{r+1}^\vee \longrightarrow \cdots$$

この homology は $\mathrm{Ext}_R^\bullet(M^\vee, R)$ なので $L_\bullet^\vee$ は $L_r^\vee$ の所でのみ 0 でない homology を持つ。言い換えると $L_\bullet^\vee[-r]$ は complex $K_\bullet$ と quasi-isomorphic であるので、quasi-isomorphism $g : K_\bullet \to L_\bullet^\vee[-r]$ が存在する。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & K_r & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & K_0 & \longrightarrow & 0 & & \\
 & & \downarrow{\scriptstyle g_r} & & & & \downarrow{\scriptstyle g_0} & & & & \\
0 & \longrightarrow & L_0^\vee & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & L_r^\vee & \longrightarrow & L_{r+1}^\vee & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

さて、この g の mapping cone $Con(g)$ を取る。

$$(Con(g)) \qquad \cdots \longrightarrow K_i \oplus L_{n-i-1}^\vee \xrightarrow{\begin{pmatrix} d_K & g_i \\ 0 & d_L \end{pmatrix}} K_{i-1} \oplus L_{n-i}^\vee \longrightarrow \cdots$$

mapping cone の定義から次のような完全列がある。

$$(3.4) \qquad 0 \longrightarrow L_\bullet^\vee[-r] \longrightarrow Con(g) \longrightarrow K_\bullet[-1] \longrightarrow 0$$

さて τ_i を ith truncation functor としよう。すなわち、与えられた complex においてその $i-1$ 次の項から右側を切り捨てる関手である。完全列 (3.4) をこの τ_i によって truncate して、

$$(3.5) \qquad 0 \longrightarrow \tau_i L_\bullet^\vee[-r] \longrightarrow \tau_i Con(g) \longrightarrow \tau_i K_\bullet[-1] \longrightarrow 0$$

が complex の完全列を与えることが分かる。$i > 0$ のときには (3.5) の各 complex は i 番目においてのみ 0 でない homology をもつ。したがって (3.5) の homology をとって

$$(3.6) \quad 0 \longrightarrow H_i(\tau_i L_\bullet^\vee[-r]) \longrightarrow H_i(\tau_i Con(g)) \longrightarrow H_i(\tau_i K_\bullet[-1]) \longrightarrow 0$$

が R 加群の完全列である。(但し $i > 0$。) ここで定義によって右端の項について $H_i(\tau_i K_\bullet[-1]) \cong \Omega^{i-1}(M)$ である。更に真中の項については $Con(g)$ が exact complex であることから、任意の n について $H_i(\tau_i Con(g))$ はある加群の nth syzygy になっている。特にそれは CM 加群である。次に左端の項については $L_\bullet^\vee$ が左から r 項において完全であることから $H_i(\tau_i L_\bullet^\vee[-r])$ は finite projective dimension を持つ。

結局 (3.6) は $\Omega^{i-1}(M)$ の CM 近似を与えている。また、最初の free resolution $K_\bullet, L_\bullet$ が minimal であることから (3.6) が極小 CM 近似を与えることも容易に分かる。

定理 (3.7). $i>0$ のとき完全列 (3.6) は $\Omega^{i-1}(M)$ の極小 CM 近似を与える。

$M^\vee$ に対して上と同様にしてその syzygy の極小 CM 近似を求めれば、$L_\bullet$ と $K_\bullet$ の双対性から次の系が得られる。

系 (3.8). 上と同様 M が codimension r の CM 加群である時、次の同型がある。

$$X_{\Omega^i(M^\vee)} \cong (X_{\Omega^{r-i}(M)})^\vee \quad (1 \le i \le r)$$

さて一般に加群 M に対して $\delta^i(M) = \delta(\Omega^i(M))$ と置く。この δ^i という invariant は Auslander が定義したもので、非常に面白い性質を持つことが段々分かってきた。(§4 参照。) ここでは上記の (3.8) より次のような双対性があることだけを注意するにとどめよう。

Proposition (3.9). M が codimension r の CM 加群であるとき、次の等式が成立する。

$$\delta^i(M) = \delta^{r-i}(M^\vee)$$

特に $\delta^i(k) = \delta^{d-i}(k)$ である。

§4. Application 1 (Lifting Problem [**ADS**])

ここでは §2 で定義したデルタ不変量の応用として加群の lifting 問題を考えてみよう。以下では $(R, \mathfrak{m}, k)$ は以前と同様 Gorenstein 完備局所環とし、$x \in R$ を非零因子、$\overline{R} = R/xR$ とする。また $N \in R$-mod に対して $N/xN = N \otimes_R \overline{R}$ を $\overline{N}$ と書くことにする。

Definition (4.1). $M \in \overline{R}$-mod が weakly liftable (w.l.) であるとは、加群 $N \in R$-mod が存在して x は N 上非零因子かつ M は $\overline{N}$ の直和因子であるときをいう。

次の事実は知られているし、また確かめるのも容易である。

Fact (4.2). $M \in \overline{R}$-mod に対して次の 3 条件は同値である。

(a) M は w.l. である。

(b) $\overline{\Omega^1_R(M)} \cong M \oplus \Omega^1_{\overline{R}}(M)$

(c) $\overline{\Omega^{i+1}_R(M)} \cong \Omega^i_{\overline{R}}(M) \oplus \Omega^{i+1}_{\overline{R}}(M) \quad (i \ge 0)$

Lemma (4.3). $N \in R$-mod について x は N 上非零因子であると仮定する。更に N の R 上での極小 CM 近似が次のように与えられているとする。

$$(4.3.1) \qquad 0 \longrightarrow Y^R_N \longrightarrow X^R_N \longrightarrow N \longrightarrow 0$$

このとき、この列に $\otimes_R \overline{R}$ を施して得られる次の列は $\overline{N}$ の $\overline{R}$ 上での極小 CM 近似を与える。

$$(4.3.2) \qquad 0 \longrightarrow \overline{Y_N^R} \longrightarrow \overline{X_N^R} \longrightarrow \overline{N} \longrightarrow 0$$

PROOF: $\overline{Y_N^R} \in \mathfrak{F}(\overline{R})$ かつ $\overline{X_N^R} \in \mathfrak{C}(\overline{R})$ であるから (4.3.2) は $\overline{N}$ の CM 近似を与える。極小性は (4.3.1) の極小性から容易。∎

この補題において、もし M が $\overline{N}$ の直和因子ならば、$X_M^{\overline{R}}$ は $\overline{X_N^R}$ の直和因子であることが分かる。すなわち次の系が得られた。

COROLLARY (4.4). $M \in \overline{R}$-mod が w.l. ならば、$X_M^{\overline{R}}$ もまた w.l. である。

LEMMA (4.5). $M \in \overline{R}$-mod が w.l. であると仮定すると次の等式が成立する。

$$\delta_R(M) = \delta_{\overline{R}}(M)$$

PROOF: $\delta = \delta_R(M)$、$\overline{\delta} = \delta_{\overline{R}}(M)$ と置く。

[$\overline{\delta} \leq \delta$ なること] $X_M^R = X \oplus R^\delta$ (X は stable) と書くことができるので、$\overline{R}$ 加群の全射 $\overline{\pi}: \overline{X} \oplus \overline{R}^\delta = \overline{X_M^R} \to M$ がある。ここで $\overline{X}$ は $\overline{R}$ 加群として stable であることに注意しよう。($\mathrm{Hom}_R(X, R) \to \mathrm{Hom}_R(X, \overline{R}) = \mathrm{Hom}_{\overline{R}}(\overline{X}, \overline{R})$ が全射であることから。) 更に $\mu(M/\overline{\pi}(\overline{X})) \leq \delta$ であるから、(2.8) によって $\overline{\delta} \leq \delta$ である。

[$\delta \leq \overline{\delta}$ なること] (4.4) と (4.2) によって次の同型がある。

$$\overline{\Omega_R^1(X_M^{\overline{R}})} \cong X_M^{\overline{R}} \oplus \Omega_{\overline{R}}^1(X_M^{\overline{R}})$$

この右辺の第 2 項は syzygy をとっているので free summand を含まないことに注意しよう。すなわち右辺は $X' \oplus \overline{R}^{\overline{\delta}}$ (X' は stable $\overline{R}$ 加群) と書くことができる。従って $\Omega_R^1(X_M^{\overline{R}}) \cong Z \oplus R^{\overline{\delta}}$ と書ける。ところで次のような全射

$$\varphi: \Omega_R^1(X_M^{\overline{R}}) \to \quad \overline{\Omega_R^1(X_M^{\overline{R}})} \to X_M^{\overline{R}} \to M$$

が存在するので、(2.8) によって $\delta \leq \mu(M/\varphi(Z)) \leq \overline{\delta}$ である。∎

DEFINITION (4.6). 任意の $M \in R$-mod に対して

$$\Delta_R(M) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \delta_R^i(M)$$

と定義する。$i > d$ のときには $\Omega^i(M)$ は stable CM 加群なので $\delta_R^i(M) = 0$、したがって上の和は有限和であることを注意しておこう。

さていよいよ主結果を述べよう。

THEOREM (4.7). [**ADS**]
$M \in \overline{R}$-mod が w.l. であるときには $\Delta_R(M) = 0$ である。

PROOF: 任意の $i \geq 0$ について次のような R 上の極小 CM 近似を考える。

$$0 \longrightarrow Y^i \longrightarrow X^i \longrightarrow \Omega_R^{i+1}(M) \longrightarrow 0$$

すると (4.2)(c) と (4.3) によって、$\overline{R}$ 上の極小 CM 近似が得られる。

$$0 \longrightarrow \overline{Y^i} \longrightarrow \overline{X^i} \longrightarrow \Omega_{\overline{R}}^i(M) \oplus \Omega_{\overline{R}}^{i+1}(M) \longrightarrow 0$$

これより $i \geq 0$ のとき次の等式が得られる。

$$\delta_R^{i+1}(M) = \delta_{\overline{R}}^i(M) + \delta_{\overline{R}}^{i+1}(M) \tag{4.7.1}$$

ここで前にも注意したように $\delta_R^i(M) = 0$ $(i > d)$ が成り立つので、定義より $\Delta_R(M) = \delta_R(M) - \delta_{\overline{R}}(M)$ となる。この右辺が 0 になることは (4.5) で示した。∎

今 x が $x \notin \mathfrak{m}^2$ のときには、自然な写像

$$k = R/\mathfrak{m} \xrightarrow{x} \mathfrak{m}/x\mathfrak{m} \longrightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$$

は split mono なので、剰余体 k は w.l. であることが分かる。この事実から次のことを示すことができる。

THEOREM (4.8). (Auslander) R が Gorenstein and non-regular であるとき、任意の $i \geq 0$ について $\delta^i(k) = 0$ が成り立つ。

PROOF: R の次元に関する帰納法で示す。R が Artin 環ならば殆ど明らか。R を正次元として、上の様に $x \in \mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ を取る。すると k は w.l. なので、(4.7) の証明中の等式 (4.7.1) が k について成立する。$\overline{R}$ についての帰納法の仮定により、その右辺は 0 であるから $i > 0$ のとき $\delta_R^i(k) = 0$ が導かれる。$i = 0$ の場合は Lemma (4.5) と帰納法の仮定から出る。∎

§5. Application 2 (Index of Local Rings [**D1**])

この節でも前と同じように $(R, \mathfrak{m}, k)$ は Gorenstein 完備局所環とする。また自明な場合を除くため常に R は正則局所環でないとする。まず次のことに注意しよう。

REMARK (5.1).
(a) $\delta(k) = 0$

実際 R が正則局所環でないことから、自明でない stable CM 加群 M が少なくとも一つは存在する。このとき全射 $M \to M/\mathfrak{m}M \to k$ があるので、(2.8) によって $\delta(k) = 0$ である。∎

(b) 適当な整数 n_0 が存在して $\delta(R/\mathfrak{m}^n) > 0\ (n \geq n_0)$ が成り立つ。

実際、$\mathfrak{a}$ を R のパラーメターイデアルとすると $R/\mathfrak{a}$ は射影次元有限であるから、

$$0 \longrightarrow \mathfrak{a} \longrightarrow R \longrightarrow R/\mathfrak{a} \longrightarrow 0$$

は極小 CM 近似である。特に $\delta(R/\mathfrak{a}) = 1$ であることが分かる。そこで n_0 を $\mathfrak{m}^{n_0} \subseteq \mathfrak{a}$ となるように取れば、$n \geq n_0$ なる n については全射 $R/\mathfrak{m}^n \to R/\mathfrak{a}$ があるので、(2.9) によって $\delta(R/\mathfrak{m}^n) \geq \delta(R/\mathfrak{a}) > 0$ である。∎

この注意によって次の様に index を定義することができる。

DEFINITION (5.2). $\mathrm{index}(R) = \inf\{n \mid \delta(R/\mathfrak{m}^n) > 0\}$

我々は R が正則でないと仮定してのだが、正則であるときにもこの定義は有効で、その時には $\mathrm{index}(R) = 0$ である。

次の補題によって index にはいつもある上限が存在するということが分かる。

LEMMA (5.3). k が無限体であると仮定すると次の不等式が成立する。

$$\begin{aligned} e(R) &\geq \mathrm{index}(R) + \mathrm{emb}(R) - \dim(R) - 1 \\ &\geq \mathrm{index}(R) \end{aligned}$$

PROOF: 第 2 の不等式は R が正則局所環でないのだから明らか。第 1 の不等式を示すために、$\mathfrak{m}$ の minimal reduction $\mathfrak{a}$ をとり、n を $\mathfrak{m}^n \subseteq \mathfrak{a}$ となる最小の自然数とする。(5.1)(b) の証明を見れば $n \geq \mathrm{index}(R)$ であることが分かる。したがって $n \leq e(R) + \dim(R) + 1 - \mathrm{emb}(R)$ であることを示せば良い。これには次のようなイデアルの列を考える。

$$\mathfrak{a}\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}^{n-1} + \mathfrak{a}\mathfrak{m} \subset \cdots \subset \mathfrak{m}^3 + \mathfrak{a}\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}^2 + \mathfrak{a}\mathfrak{m} = \mathfrak{m}^2 \subset \mathfrak{m} \subset R$$

ここで n の取り方から $\ell(\mathfrak{m}^i + \mathfrak{a}\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^{i+1} + \mathfrak{a}\mathfrak{m}) \geq 1\ (2 \leq i < n)$ である。また $\ell(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2) = \mathrm{emb}(R)$ であるから、等式 $\ell(R/\mathfrak{a}\mathfrak{m}) \geq (n-2) + \mathrm{emb}(R) + 1$ が得られる。一方で $\ell(R/\mathfrak{a}\mathfrak{m}) = \ell(R/\mathfrak{a}) + \ell(\mathfrak{a}/\mathfrak{a}\mathfrak{m}) = e(R) + \dim(R)$ であるから、問題の式が出る。∎

COROLLARY (5.4). $e(R) = \mathrm{index}(R)$ ならば R は hypersurface である。

PROOF: (5.3) より $\mathrm{emb}(R) = \dim(R) + 1$ である。∎

この系の逆も成立することが Ding によって示されている。

THEOREM (5.5). (Ding [**D1**])

R が hypersurface ならば $e(R) = \mathrm{index}(R)$ が成り立つ。

この定理はもっと一般の次の定理から導かれる。

THEOREM (5.6). (Ding [**D1**]) $(S, \mathfrak{m}_S, k)$ を Gorenstein 局所環、$x \in \mathfrak{m}_S$ のその非零因子とし、更に $R = S/xS$ と置く。このとき任意の $M \in R$-mod に対して、もし $x \in \mathfrak{m}_S \operatorname{Ann}_S(M)$ ならば、任意の $i \geq 0$ について $\delta_R^i(M) = 0$ である。

この定理の証明には Shamash の定理といわれる free resolution に関する結果を必要とする。ここでは、(5.6) の証明を与えるだけのスペースがないので、興味のある方は Ding の論文をご覧下さい。定理 (5.5) はこの (5.6) から得られることだけを注意しておこう。

もし R が hypersurface なら $R = S/xS$ (S : regular local) と書くことができる。但し R 自身は regular でないと仮定しているので $x \in \mathfrak{m}^2$ である。さて R の重複度 $e(R)$ を e とすると $e = \sup\{n \mid x \in \mathfrak{m}_S^n\}$ である。特に $x \in \mathfrak{m}_S \cdot \mathfrak{m}_S^{e-1}$ となるので, $1 \leq i < e$ なる i に対して $M = R/\mathfrak{m}^i$ とおいて (5.6) を使えば $\delta(R/\mathfrak{m}^i) = 0$ が出る。これより $\mathrm{index}(R) \geq e$ である。∎

DEFINITION (5.7). $M \in R$-mod に対して、その Loewy length $\ell\ell(M)$ を次のように定義する。

$$\ell\ell(M) = \inf\{n \mid \mathfrak{m}^n M = 0\}$$

R が 0 次元のときには全ての加群は CM なので、$\mathrm{index}(R)$ は $\inf\{n \mid R/\mathfrak{m}^n \text{ is free } R\text{-module}\}$ に等しいが、これは正に $\ell\ell(R)$ である。よって $\mathrm{index}(R) = \ell\ell(R)$ である。一般次元のときには次のことが言える。

THEOREM (5.8). (Ding [**D2**])

次の不等式が成り立つ。

$$\mathrm{index}(R) \leq \inf\{\ell\ell(R/\mathbf{x}R) \mid \mathbf{x} \text{ is a s. o. p. for } R\}$$

PROOF: $n = \mathrm{index}(R)$ とする。定義より $\delta(R/\mathfrak{m}^n) > 0$ である。$\mathbf{x}$ を R の s.o.p. で $n > \ell\ell(R/\mathbf{x}R)$ なるものとしよう。このとき $\mathfrak{m}^{n-1} \subseteq \mathbf{x}R$ であるから全射 $R/\mathfrak{m}^{n-1} \to R/\mathbf{x}R$ がある。一方で index の定義より $\delta(R/\mathfrak{m}^{n-1}) = 0$ であるから、(2.9) によって $\delta(R/\mathbf{x}R) = 0$ が出る。しかしながら $R/\mathbf{x}R$ は finite projective dimension をもつので $\delta(R/\mathbf{x}R) > 0$ となるはずである。(cf. Lemma (2.11)) したがってこのような $\mathbf{x}$ は存在しない。∎

PROPOSITION (5.9). R が hypersurface のときには (5.8) の不等式は等式である。

PROOF: このとき (5.5) によって $e(R) = \mathrm{index}(R)$ である。一方 $\mathbf{x}$ を $\mathfrak{m}$ の minimal reduction とすると次の不等式から求める等式が得られる。

$$\mathrm{index}(R) \leq \ell\ell(R/\mathbf{x}R) \leq \ell(R/\mathbf{x}R) \leq e(R) \quad ∎$$

R が Gorenstein でない場合についても index を考えることができる。このとき index と Loewy length についての関係等面白い記述が [**D2**] に見られる。

§6. Application 3 (Auslander Conjecture [**YK**])

ここでは $(R, \mathfrak{m}, k)$ は 2 次元の normal hypersurface であるような完備局所環とする。但し、自明な場合を除くため R は non-regular であると仮定する。すなわち $S = k[[x, y, z]]$, $f \in \mathfrak{m}_S^2$ として R は $R = S/fS$ と表される。

このときには R は Gorenstein 環であるので、次のような同型がある。

$$\mathrm{Ext}^1(\mathfrak{m}, R) \cong \mathrm{Ext}^2(k, R) \cong k$$

これは次のような nonsplit な完全列が同型を除いて一通りに存在することを意味している。

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow A \longrightarrow \mathfrak{m} \longrightarrow 0 \tag{6.1}$$

この中央に現われた R 加群 A は CM 加群であり、やはり同型を除いて一意的に定まることが分かる。この A を R の Auslander 加群という。

完全列 (6.1) は §1 より $\mathfrak{m}$ の CM 近似を与えていることに注意しよう。すなわち $A = X_{\mathfrak{m}}$ である。

さて R が quasihomogeneous であるとは, x, y, z に適当な次数付けを行って f を homogeneous な多項式にできるときをいう。言い換えると R 上に Euler 導分と呼ばれる特殊な derivation δ が存在することである。すなわち k-derivation $R \to R$ であって $\delta(x) = d_1 x$, $\delta(y) = d_2 y$, $\delta(z) = d_3 z$ $(d_i \in \mathbf{N})$ を満足するものがある。

さて R の the universally finite module of k-differentials を $D_k(R)$ と表すことにする。($D_k(R)$ は R の Kähler 微分加群 $\Omega_k(R)$ の分離化である。)

Lemma (6.2). R が quasihomogeneous ならば R の Auslander 加群 A は $D_k(R)^{**}$ に同型である。

Proof: R が quasihomogeneous であるときには、その Euler 導分 δ は R-linear な写像 $\epsilon : D_k(R) \to R$ を導く。Euler 導分の性質から $\mathrm{Im}(\epsilon) = \mathfrak{m}$ である。この R-bidual をとって $\epsilon^{**} : D_k(R)^{**} \to R$ が得られる。このとき $\mathrm{Ker}(\epsilon^{**}) \cong (\wedge^2 D_k(R))^{**}$ であり、この右辺は R の canonical module と同型であるので free である。特に次の完全列がある。

$$0 \longrightarrow R \longrightarrow D_k(R)^{**} \xrightarrow{\epsilon^{**}} R$$

さて $\mathfrak{m} \subseteq \mathrm{Im}(\epsilon^{**}) \subseteq R$ であるが、もし $\mathrm{Im}(\epsilon^{**}) = R$ であるとすると、上の完全列が split して $D_k(R)^{**}$ が free となってしまう。$D_k(R)^{**}$ が free であるとき R は regular で

あろうという予想（Zariski-Lipman 予想）は hypersurface の場合には正しいことが証明されている（Scheja-Storch）。したがって我々の状況ではこれは起こり得ないことが分かる。よって $\mathrm{Im}(\epsilon^{**}) = \mathfrak{m}$ である。結局上の完全列より $A \cong D_k(R)^{**}$ が得られる。∎

さてこの Lemma の逆も成立するであろうと予想されている。

AUSLANDER CONJECTURE (6.3). $A \cong D_k(R)^{**}$ であるならば R は quasihomogeneous であろう。

この予想について既に得られている結果の中で最も良い結果と思われるのは恐らく次の Martsinkovsky によるものであろう。

THEOREM (6.4). (Martsinkovsky [M1])
$f = x^n + g(y, z)$ という形のときには Auslander 予想は正しい。

REMARK (6.5). Martsinkovsky はその論文 [M2] において Auslander 予想を（hypersurface の場合に）完全に証明したと主張しているが、その論文には重大な誤りがあってとても正しいと認めるわけにはいかない。

もっと詳しく言うと [M2] の 553 ページ中央部分で $\Omega^1 A$ が 4×4 行列 τ の Cokernel と表され、更に τ の各列の 2, 3, 4 成分が R 上の derivation を与えるようにできると主張している部分に gap がある。これが可能であることは、$D_k(R)$ の 3 つの生成元が自然な写像 $D_k(R) \to D_k(R)^{**}$ によって $D_k(R)^{**}$ の minimal generator の一部になっているという条件と同値であることが証明できる。この条件のもとには [H] によって予想は正しいのだが、[M1] において暗に指摘されているように、予想の仮定がこの条件を導くかどうかということが本質的なのです。（間違いのある論文には気を付けよう。）

ともかくこの論文 [M2] は存在しないものと考えた方がよい。

今のところ Auslander 予想については、方程式 f が与えられれば、それについて予想が成り立つことを確かめることができるようにはなった。実際 [YK] において次のことが示されている。

THEOREM (6.6). f が次の形の方程式のいずれかであるときには Auslander 予想は正しい。

(a) $f = x^n + g(y, z)$ (Martsinkovsky's case cf. (6.4))

(b) $f = x^p + y^q + z^r + xyz$ (cf. Behnke [B] or Yoshino-Kawamoto [YKaw])

(c) $f = g + H(g)$ where $g = x^p + y^q + z^r$ and $H(g)$ is the Hessian of g.

これらはもっと一般的な形の定理から導かれるのが、紙数の関係上これ以上の議論は避けたい。興味のある方は [YK] を見て下さい。

§7. Addendum (Nakayama Conjecture)

Auslander 達はその論文 [**ADS**] の中で、完全交叉環における中山予想（Auslander-Reiten 予想）の成立を示している。これに関してはシンポジウムの時に星野氏（筑波大）に指摘されたので、ここでその証明の概略を説明しておきたいと思う。

以下 R を可換な完備局所環、Λ を R 上の（必ずしも可換でない）Noetherian algebra とする。$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ を R の極大イデアルの元の列で Λ 上 regular sequence であるものとする。そして $\Gamma = \Lambda/(x_1, x_2, \ldots, x_n)\Lambda$ とおく。

Definition (7.1). $M \in \Gamma$-mod に対して次の 2 条件を満たす $N \in \Lambda$-mod が存在するとき M を liftable といい、N を M の lifting という。

(a) $M \cong \Gamma \otimes_\Lambda N$

(b) $\mathrm{Tor}_i^\Lambda(\Gamma, N) = 0 \ (i > 0)$

この (b) の条件は $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ が N 上の regular sequence であることと同値である。また、勿論のことであるが §4 で述べた weakly liftable というのは、この liftable という概念の一般化である。

さて一般に与えられた加群 $M \in \Gamma$-mod がいつ liftable かということが問題になる。次のような十分条件が知られている。

Lemma (7.2). もし $\mathrm{Ext}_\Gamma^2(M, M) = 0$ ならば M は liftable である。

これは [**ADS**] に証明が述べられているが、おそらく deformation の理論の一部として以前から知られていたものであると思う。（実際、homology というものは常に何かの操作に対する obstruction を与えるもので、$\mathrm{Ext}_\Gamma^2(M, M)$ は lifting の obstruction を、また $\mathrm{Ext}_\Gamma^2(M, M) = 0$ の仮定のもとで $\mathrm{Ext}_\Gamma^1(M, M)$ はその lifting の一意性に対する obstruction を与える。）

さて $M \in \Gamma$-mod が liftable で、N がその lifting であるとき、$P_\bullet$ を N の Λ 上での projective resolution とする。条件 (7.1)(a)(b) は $\Gamma \otimes_\Lambda P_\bullet$ が M の Γ 上での projective resolution を与えることを意味している。特に $\mathrm{pd}_\Gamma M \leq \mathrm{pd}_\Lambda N$ であることが分かる。したがって次の補題が示された。

Lemma (7.3). Λ が finite global dimension を持つとき、$\mathrm{Ext}_\Gamma^2(M, M) = 0$ となる任意の $M \in \Gamma$-mod に対して、$\mathrm{pd}_\Gamma M < \infty$ が成り立つ。

これによって次の定理が示される。

Theorem (7.4). Λ, Γ は上記の通りとする。さらに Λ は finite global dimension を持つものとする。（すなわち Γ は完全交叉環である。）このとき、$\mathrm{Ext}_\Gamma^i(M \oplus \Gamma, M \oplus \Gamma) = 0 \ (i \geq 1)$ を満たす $M \in \Gamma$-mod は Γ-projective である。

Proof: $\mathrm{Ext}_\Gamma^2(M, M) = 0$ であるから (7.3) によって $\mathrm{pd}_\Gamma M < \infty$ となる。一方 $\mathrm{Ext}_\Gamma^i(M, \Gamma) = 0 \ (i \geq 1)$ でもあるから M は Γ-projective である。∎

REFERENCES

[AB]. M.Auslander and R.O.Buchweitz, *The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations*, Soc. Math. de France, Mem. **38** (1989), 5–37.

[ADS]. M.Auslander, S.Ding and Ø.Solberg, *Liftings and weak liftings of modules*, J. Algebra **156** (1993), 273–317.

[B]. K.Behnke, *On Auslander modules of normal surface singularities*, Manuscripta Math. **66** (1989), 205–223.

[D1]. S.Ding, *Cohen-Macaulay approximation and multiplicity*, J. Algebra **153** (1992), 271–288.

[D2]. S.Ding, *A note on the index of Cohen-Macaulay rings*, Comm. in Alg. **21** (1993), 53–71.

[DS]. S.Ding and Ø.Solberg, *The Marranda theorem and liftings of modules*, Comm. in Alg. **21** (1993), 1161–1187.

[H]. J.Herzog, *On two dimensional quasihomogeneous singularities II*, Arch. Math **59** (1992), 556–561.

[DM]. J.Herzog and A.Martsinkovsky, *Glueing Cohen-Macaulay modules with applications to quasihomogeneous complete intersections with isolated singularities*, to appear in Comm. Helv. (1993).

[M1]. A.Martsinkovsky, *Almost split sequences and Zariski differentials*, Trans. Amer. Math. Soc. **319** (1990), 285–307.

[M2]. A.Martsinkovsky, *Maximal Cohen-Macaulay modules and the quasihomogeneity of isolated Cohen-Macaulay singularities*, Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 9–18.

[M3]. A.Martsinkovsky, *On two dimensional quasihomogeneous singularities I*, Arch. Math. **59** (1992), 550–555.

[Y]. Yuji Yoshino, "Cohen-Macaulay modules on Cohen-Macaulay rings," Cambridge University Press (Lecture Notes of London Math. Soc.), 1990.

[YK]. Y.Yoshino and K.Kato, *Auslander modules and quasihomogeneity of local rings*, preprint (1993).

[YKaw]. Y.Yoshino and T.Kawamoto, *The fundamental modules of a normal local domain of dimension 2*, Trans. Amer. Math. Soc. **309** (1988), 425–431.

Ten Phases of Gorenstein Rings

Kei-ichi WATANABE

Introduction

The origin of Gorenstein rings lies in the duality theorem of Grothendieck [Gr]. Then H. Bass noticed the condition of having finite injective dimension and also unified the results of several authors in [B].

Thirty years have passed since then and the concept of Gorenstein rings is now quite familiar among commutative algebraists and even among algebraic geometers. We would think that we can produce any examples of Gorenstein rings with a given condition (if they exist), or, given a ring, we, commutative algebraists, would think we can determine if the ring is Gorenstein or not in a due time. In another words, we think that the condition to be Gorenstein is a "computable" property. (Of course this is not quite true in many cases. But, generally speaking, to find a condition for a class of rings to be Gorenstein is not so exciting as it used to be years ago.)

On the other hand, it seems that non-commutative Gorenstein rings have been studied for a long time. So, I thought it might be fun to exchange the view-points of commutative algebraists and those who are studying non-commutative Gorenstein rings.

So, the purpose of this note is to show how we would produce examples of Gorenstein rings from numerous situations or how we would distinguish Gorenstein rings from non-Gorenstein ones in various circumstances.

All rings considered in this article are commutative Noetherian with identity. All modules are unitary. Since Cohen-Macaulay or Gorenstein property is a local one, we are mostly interested in local or graded rings.

0. Preliminaries

Let $(A, \mathfrak{m})$ be a Noetherian local ring of dimension d and let $\mathbf{x} = (x_1. \dots , x_d)$ be a system of parameters (s.o.p.) of A. First, we will give characterizations of Cohen-Macaulay rings. For simplicity, we will write **CM** for Cohen-Macaulay in the following.

(0.1) A is a Cohen-Macaulay ring if the following equivalent conditions are satisfied. (cf. [G-H], [Ma], [B-H])

(1) $(x_1, \dots, x_d)$ forms an A-regular sequence.

(2) $Ext^i_A(A/\mathfrak{m}, A) = 0$ for every $i < d$.

(3) The ideal $(x_1, \dots, x_i)$ is unmixed for every i, $0 < i \leq d$.

(4) $H^i_{\mathfrak{m}}(A) = 0$ for every $i < d$.

[If $R \subseteq A$ for a regular local ring R, A is a finite R-module,]

(5) A is free as an R-module.

[If $A \cong S/I$ for a regular local ring S,]

(6) $\dim S = d + hd_S A$ (where $hd_S A$ is the projective dimension of A as an S-module).

(0.2) A is **Gorenstein** if the following equivalent conditions are satisfied. (cf. [B], [G-H],

(1) $(x_1, \dots, x_d)$ forms an A-regular sequence and generates an irreducible ideal.

(2) $Ext^i_A(A/\mathfrak{m}, A) = 0$, $(i < d)$ and $Ext^d_A(A/\mathfrak{m}, A) \cong A/\mathfrak{m}$.

(3) The ideal $(x_1, \dots, x_i)$ is unmixed and each primary component of it is irreducible for every i, $0 < i < d$.

(3') The ideal $(x_1, \dots, x_d)$ is irreducible for every s.o.p. $\underline{x}$.

(4) $H^i_{\mathfrak{m}}(A) = 0$ for every $i < d$ and $H^d_{\mathfrak{m}}(A)$ is A-injective.

(5) $inj.dim_A(A) < \infty$ (resp. $inj.dim_A(A) = d$).

[If $R \subseteq A$ for a regular local ring R, A is a finite R-module,]

(6) A is R-free and $Hom_R(A, R) \cong A$ as A-modules.

[If $A \cong S/I$ for a regular local ring S,]

(7) $hd_S A = s := \dim S - \dim A$ and $Ext^s_S(A, S) \cong A$ as A-modules.

(0.3) If A is CM, then the following numbers are equal and is called the "type" (or CM-type) of A and is denoted by $r(A)$.

(1) The number of irreducible components of $(x_1, ..., x_d)$,

(2) $\dim_{A/\mathfrak{m}} Ext^d_A(A/\mathfrak{m}, A)$,

(3) The length of the socle of $H^d_{\mathfrak{m}}(A)$.

[If $R \subseteq A$ for a regular local ring R, A is a finite R-module]

(4) The number of minimal generators of $Hom_R(A, R)$ as A-module.

[If $A \cong S/I$ for a regular local ring S,]

(5) The number of minimal generators of $Ext^s_S(A, S)$ as A-module, where $s = hd_S A = \dim S - \dim A$.

(0.4) Thus a Gorenstein ring is a CM ring with type 1. If $x \in \mathfrak{m}$ is an A-regular element, then A is CM (resp. Gorenstein) if and only if so is A/xA. Also, we have $r(A) = r(A/xA)$ in this case.

1. Inverse system of Macaulay

If A is an Artinian local ring, A is Gorenstein if and only if A is self-injective. If $A = R/I$, R is a polynomial ring, the injective envelope $E = E_A(A/\mathfrak{m})$ of $A/\mathfrak{m}$ is calculated in terms of *inverse polynomials* and, conversely, we can construct a Gorenstein ideal I as the annihilator of an inverse polynomial.

To be precise, let $R = k[X_1, \ldots, X_n]$ be a polynomial ring over a field k. Then the "graded dual"

$$R^* = \underline{Hom}_k(R, \underline{k}) = \bigoplus_{n \leq 0} Hom_k(R_{-n}, k)$$

is the injective envelope of $R/(X_1, \ldots, X_n)$ (cf. [GW-1]). If $A = R/I$, where $I \subseteq (X_1, \ldots, X_n)$, then $E_A(A/\mathfrak{m}) = Hom_R(A, R^*) =$ annihilator of I in R^* (where, $\mathfrak{m} = (X_1, \ldots, X_n)/I$). Thus we have

(1.1) If $A = R/I$ as above is Artinian local, then A is Gorenstein if and only if $[0 : I] = \phi A$ for some $\phi \in R^*$ or, equivalently, $I = Ann_R(\phi)$ for some $\phi \in R^*$.

(1.2) It is convenient to write an element ϕ of R^* by an "inverse polynomial ". Namely, we denote $X_1^{-a_1} \cdots X_n^{-a_n}$ the k-linear map sending the monomial $X_1^{a_1} \cdots X_n^{a_n}$ to 1 and all other monomials to 0. In this manner, the set of all inverse monomials forms a k-basis of R^* with R-module structure defined by

$$(X_1^{b_1} \cdots X_n^{b_n}).(X_1^{-a_1} \cdots X_n^{-a_n}) = \begin{cases} X_1^{b_1-a_1} \cdots X_n^{b_n-a_n} & (a_1 \leq b_1, \ldots, a_n \leq b_n) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

Example (1.3). (1) If $\phi = X_1^{-a_1} \cdots X_n^{-a_n}$, then $Ann_R(\phi)$ $= (X_1^{a_1+1}, \ldots, X_n^{a_n+1})$, producing a complete intersection ideal.

(2) If $\phi = X^{-1}Y^{-2} + Z^{-3}$, then $Ann_R(\phi) = (X^2, Y^3, XZ, YZ, XY^2 - Z^3)$ and $A = R/Ann_R(\phi)$ is an Artinian Gorenstein ring.

Interested readers are recommended to make lots of examples of Artinian Gorenstein rings by this method or to find ϕ such that $I = Ann_R(\phi)$ for a given Artinian Gorenstein ring $A = R/I$.

2. Free Resolutions

If $A = R/\mathfrak{a}$ is a local ring with dim $A =$ d, where R is a regular local ring with dim $R =$ d+s, we have the equality

$$\text{hd}_R A + \text{depth} A = \text{s} + \text{d} \tag{2.1}$$

(where $\text{hd}_R A$ is the projective dimension of A as R-module and depth A is the maximal length of A-regular sequences in $\mathfrak{m}$). In particular, A is CM if and only if $\text{hd}_R A = s$ and when A is CM, A is Gorenstein if and only if $Ext_R^s(A, R) \cong A$ as A-modules.

In another words, if

$$0 \to F_t \to F_{t-1} \to \ldots \to F_1 \to F_0 = R \to A \to 0$$

is the minimal free resolution of A as R-module (which is unique up to isomorphisms), $t \geq s$ in general, A is CM if and only if $t = s$ and if A is CM, A is Gorenstein if and only if rank $F_s = 1$.

Also, if A is Gorenstein, then the minimal free resolution $F_\bullet$ is self-dual. (Namely, the two complexes $(F_\bullet)$ and $(F_\bullet^*)$ (the dual complex) is isomorphic.)

There are some structure theorems for the case s (= embedding codimension of A) is small.

Theorem 2.2. (1) (Hilbert-Burch; [Bu],[N]) If $s = 2$, A is CM and if

$$0 \to R^{n-1} \xrightarrow{\phi} R^n \to R \to A = R/I \to 0$$

is the minimal resolution of A over R, then I is generated by the maximal minors of ϕ. (We can think ϕ as $n \times (n-1)$ matrix being a linear mapping between free modules.)

In particular, a Gorenstein ring with embedding codimension 2 is a complete intersection ([Se]).

(2) (Buchsbaum-Eisenbud, J. Watanabe; [BE-3], [WJ]) If $s = 3$, A is Gorenstein and if

$$0 \to R \to F_2 = R^n \xrightarrow{\phi} F_1 = R^n \to R \to A = R/I \to 0$$

is the minimal free resolution, then n is odd, we can choose bases of F_2 and F_1 so that the matrix of ϕ is alternating and then I is generated by the n $(n-1)$-Pfaffians of ϕ. (cf. also [BE-1,2].)

For example, the corresponding matrix in the first example of (2.3) can be chosen as

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -x & -z \\ x & 0 & 0 & z^2 & y^2 \\ -y & x & -z^2 & 0 & 0 \\ 0 & z & -y^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(which is alternating) and the Pfaffians obtained by deleting 1st to 5th row and column are $xy^2 - z^3, y^3, yz, xz, x^2$ respectively.

Example 2.3. Ten years ago, it was not practical to compute the free resolution of A over R. But nowadays, thanks to "Macaulay"by D. Bayer and M. Stillman or "Cocoa"by A. Giovini and G. Niesi, it is quite practical to decide if a given (graded) ring is CM (or Gorenstein) or not. Let us see some examples of calculations by "Macaulay".

In the following, the map $F_i \to F_{i-1}$ is shown by a matrix. So, for example, the third matrix of the first example shows that rank $F_2 = 5$ and rank $F_3 = 1$. In the following, an explanation about the commands are showed in *italics*.

```
% ring r
! characteristic (if not 31991) ?
! number of variables ? 4
! 4 variables, please ? xyzw
! variable weights (if not all 1) ?
! monomial order (if not rev. lex.) ?
; largest degree of a monomial : 512
% ideal I    (This ideal is the one appeared in §2.)
```

```
! number of generators ? 5
! (1,1) ? x2
! (1,2) ? y3
! (1,3) ? xz
! (1,4) ? yz
! (1,5) ? xy2-z3
% res I p    ("p" is the resolution of I)
; 1.2..3..4..[126k].5...6...7...
; computation complete after degree 7
% pres p    (show p)
; ----------------------------------
; x2 y3 xz yz xy2-z3
; ----------------------------------
;  0 -z y2 0  0
;  0  0  0 -x -z
; -y  x -z2 0  0
;  x  0  0 z2 y2
;  0  0 -x  y  0
; ----------------------------------
; xy2-z3
; y3
; yz
; xz
; -x2
; ----------------------------------
```

This computation shows that $k[x,y,z]/I$ is Gorenstein since this resolution has length $3 = \mathrm{ht}\, I$ and rank $F_3 = 1$.

```
% ideal J    (A = k[X,Y,Z,W]/(X,Y) ∩ (Z,W).)
! number of generators ? 4
! (1,1) ? xz
! (1,2) ? xw
! (1,3) ? yz
! (1,4) ? yw
% res J p1
; 1.2...
; computation complete after degree 2
% pres p1
; ----------------------------------
; xz xw yz yw
; ----------------------------------
;  0  0 -y -w
; -y  0  0  z
;  0 -w  x  0
;  x  z  0  0
; ----------------------------------
; -z
```

```
; x
; w
; -y
; ----------------------------------
```

This shows that A is not CM since $\dim R - \dim A = 2 < hd_R A = 3$.

```
% ideal J2
! number of generators ? 4
! (1,1) ? x3
! (1,2) ? y3
! (1,3) ? z3
! (1,4) ? xyz
% res j2 p2
; 2.3.4..5...6...
; computation complete after degree 6
% pres p2
; ----------------------------------
; x3 y3 z3 xyz
; ----------------------------------
; -yz 0 0 -z3 0 -y3
;  0 -xz 0  0 -z3 x3
;  0  0 xy x3 y3 0
;  x2 y2 -z2 0  0  0
; ----------------------------------
; 0 z2 -y2
; z2 0 x2
; y2 x2 0
; 0 -y 0
; -x 0 0
; 0 0 z
; ----------------------------------
```

This shows that $A = k[X,Y,Z]/J_2$ *is CM with* $r(A) = 3$*, since* $hd_R A = 3 = ht\ J_2$ *and rank* $F_3 = 3$.

3. Canonical (Dualizing) Modules

If $A = R/\mathfrak{a}$, with R Gorenstein and dim R = d+r, the module $Ext^r_R(A, R)$ is called a canonical module (or dualizing module) of A and is denoted by K_A (or ω_A). This does not depend on the presentation of A and is compatible with completion and localization. (Namely, if $\hat{A}$ is the completion of a local ring A, $K_{\hat{A}} = (K_A)^\wedge$ and the canonical module of $A_\mathfrak{p}$ is $(K_A)_\mathfrak{p}$.)

Local duality theorem is essential in the theory of CM or Gorenstein rings.

Local Duality. ([G-H], [HK-2]) *If A is a CM local ring of* $\dim A = d$ *with maximal ideal* $\mathfrak{m}$*, then for every i and for every A-module M,*

$$[Ext^i_A(M, K_A)]' \cong H^{d-i}_\mathfrak{m}(M). \tag{3.1}$$

(Where $(\ )' = Hom_A(\ , E_A(A/\mathfrak{m}))$, taking dual by the injective envelope of the residue field.)

In particular, we have $(K_A)^\wedge \cong (H^d_\mathfrak{m}(A))'$ and $r(A) =$ the number of minimal generators of K_A as A-module.

(3.2) By local duality, if A is CM with the canonical module K_A, we have inj $\dim_A K_A < \infty$. H. Bass asked the following question

Bass' Conjecture If there exists a *finitely generated* A-module $M \neq 0$ with inj $\dim_A M < \infty$, then is A CM ?

This was answered affirmatively by Peskine-Szpiro, Hochster and P. Roberts and K_A is characterized as a CM A-module of "rank 1" with finite injective dimension. (cf. [Ho-2], [PS], [Ro])

If this is the case, every finitely generated A-module with finite injective dimension has a resolution consisting of finite sum of K_A by the following procedure.

(1) If M is a finitely generated A-module with inj $\dim_A M < \infty$ and depth $M = d$, then $M \cong [K_A]^n$ for some n.

(2) If depth $M < d$, make an exact sequence $0 \to N \to [K_A]^n \to M \to 0$ and then we have depth $N =$ depth $M + 1$.

Using K_A, we can restate the definition of Gorenstein rings as

(3.3) A is Gorenstein if A is CM and $K_A \cong A$.

In some sense, these two conditions are independent and A is called **quasi-Gorenstein** if $K_A \cong A$. If A is "generically Gorenstein"(the localization of A at every minimal prime is Gorenstein), then K_A is isomorphic to an ideal of A. If A is normal, then K_A determines an element of the divisor class group of A which is called **"the canonical class"** of A. In this context, to check Gorenstein property of A breaks up into

(1) A is CM or not and

(2) Calculate the canonical class.

In the following, we will show how to calculate K_A in several situations.

4. Graded Rings

(4.1) Let $R = \bigoplus_{n\geq 0} R_n$ be a Noetherian graded ring over a field $k = R_0$. We denote $\mathfrak{m} = R_+ = \bigoplus_{n>0} R_n$, the unique graded maximal ideal of R. Then we have $E_R(R/\mathfrak{m}) = R^* = \bigoplus_{n\leq 0} \mathrm{Hom}_k(R_n, k)$, the graded k-dual of R and in this case, taking E-dual is equivalent to taking the graded k-dual. Namely, we have

$$(M)' = \mathrm{Hom}_R(M, E) \cong M^* := \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} Hom_k(M_n, k)$$

for a graded R-module $M = \bigoplus_{n\in\mathbf{Z}} M_n$). (cf. [GW-1].)

(4.2) Also the local cohomology groups and the canonical module have the structure of graded R-modules and we define the invariant $a(R)$ of R by

$$a(R) = \max\{n \in \mathbb{Z} \mid (H^d_\mathfrak{m}(R))_n \neq 0\}. \tag{4.2.1}$$

This number plays an important role with respect to CM, Gorenstein property or rational singularities. For example,

(0) If R is (quasi) Gorenstein, then $K_R \cong R(a(R))$ as graded modules, where, in general, $R(n)$ is defined by $R(n)_i = R_{n+i}$.

(1) If R is (quasi) Gorenstein and if $r|a(R)$, then the r-th Veronese subring $R(r) = \bigoplus_{n\geq 0} R_{rn}$ is (quasi) Gorenstein;

(2) The "Segre product" $R\#S = \bigoplus_{n\geq 0} R_n \otimes_k S_n$ of two graded rings R and S is CM if both are CM and $a(R)$, $a(S)$ are negative. Also, $R\#S$ is quasi-Gorenstein if so are R and S and $a(R) = a(S)$. For example, the Segre product of two polynomial rings $k[X_1, \dots, X_n]\#k[Y_1, \dots, Y_m]$ (where, $n, m \geq 2$ and we set $\deg X_i = \deg Y_j = 1$ for every i, j) is Gorenstein iff n=m. (cf. [GW-1, Chap. 3,4])

Attached to R and a graded R-module M are projective variety $X = Proj(R)$ and a sheaf $\tilde{M}$ on X. But the converse is not so simple. The simplest way is to take the homogeneous coordinate ring of X embedded in some $\mathbb{P}^N$ (projective N-space). In this case, R is generated by R_1. The next method is to take a pair $(X, \mathcal{L})$ of X and an ample invertible sheaf $\mathcal{L}$ on X. But this is not enough to construct arbitrary graded rings.

(4.3) If R is normal, R corresponds to a pair (X, D) of a normal projective variety X and a fractional divisor

$$D = \sum_V \frac{p_V}{q_V} V$$

(the sum is taken over irreducible subvarieties of codimension 1 of X) such that ND is an ample Cartier divisor for some positive integer N, by

$$R = R(X, D) = \oplus_{n\geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD)).T^n \subseteq k(X)[T], \tag{4.3.1}$$

where $k(X)$ is the rational function field of X and

$$H^0(X, \mathcal{O}_X) = \{f \in k(X) \mid div_X(f) + nD \geq 0\}$$

($div_X(f)$ is the divisor of X attached to f).

(4.4) If D is an integral divisor, $R(X, D)$ is quasi-Gorenstein if and only if $K_X \sim aD$ (that is, $K_X - aD = div_X(f)$ for some $f \in k(X)$) for some integer a, where K_X is the canonical divisor of X. If this is the case, we have $a = a(R)$.

But if D is fractional, we have to count the "ramification"

$$D' := \sum_V \frac{q_V - 1}{q_V} V. \tag{4.4.1}$$

$R(X, D)$ is quasi-Gorenstein if and only if

$$K_X + D' \sim aD \quad \text{for some integer } a. \tag{4.4.2}$$

Also, if this is the case, it turns out that $a = a(R)$. ($R(X,D)$ is CM iff $H^i(X, O_X(nD)) = 0$ for every $0 < i < \dim X$ and $n \in \mathbb{Z}$.)

Examples. (4.5) (1) If $X = \mathbb{P}^n$ $(n \geq 1)$ and H is a hyperplane of X, the invertible sheaf $\mathcal{O}_X(nH)$ is usually denoted by $\mathcal{O}_X(n)$. Also, it is known that $K_X \sim -(n+1)H$.

If we take $D = H$, $R(X,H) = k[X_0, \ldots, X_n]$ is a polynomial ring in n+1 variables and we can see that $R = R(X,H)$ is Gorenstein with $a(R) = -n-1$. If, instead, we take $R = R(X, rH)$, we see that $R \cong (k[X_0, \ldots, X_n])^{(r)}$, the r-th Veronese subring of the polynomial ring. Thus $R(X, rH)$ is Gorenstein iff $r|n+1$.

Since every divisor on X is linearly equivalent to some rH $(r \in \mathbb{Z})$, the Veronese subrings are the only rings which is described in the form $R = R(X,D)$ with D an ample integral divisor. But there are lots of graded rings R with $Proj(R) = \mathbb{P}^n$ other than those.

(2) Let $X = \mathbb{P}^1$ with $k(X) = k(t)$ with $div_X(t-a) = (a) - (\infty)$ for $a \in k$ and put

$$D = \frac{1}{3}(0) + \frac{1}{5}(-1) - \frac{1}{2}(\infty).$$

Then it can be seen that $R = R(X,D) = \sum_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD)).T^n$ is generated by

$$x = \frac{1}{t^2(t+1)}T^6, \quad y = \frac{1}{t^3(t+1)^2}T^{10} \text{ and } z = \frac{1}{t^5(t+1)^3}T^{15}$$

with the relation $x^5 = y^3 + z^2$. Thus $R(X,D) \cong k[X,Y,Z]/(X^5 - Y^3 - Z^2)$. In this case, we can take $K_X = -(0) - (-1)$ and $D' = \frac{2}{3}(0) + \frac{4}{5}(-1) + \frac{1}{2}(\infty)$ so that we have $K_X + D' = -D$. Of course, this equality corresponds to the fact that R is Gorenstein with $a(R) = -1$.

5. Poincaré Series, Hilbert Functions

Let $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ be a Noetherian graded ring over a field $k = R_0$. Then R_n is a finite dimensional k-vector space for every n and the formal power series

$$P(R,t) = \sum_{n \geq 0} \dim_k R_n t^n$$

is called "the Poincaré series"of R. In fact, $P(R,t)$ is a rational function of t with pole of order $\dim R$ at 1 and if R is CM, $\deg P(R,t) = a(R)$. In the same manner, we can define $P(M,t)$ for a Noetherian or Artinian graded R-module M.

The following duality was pointed out by R.Stanley ([St-1]).

If R is CM, then

$$P(R, t^{-1}) = (-1)^d P(K_R, t), \tag{5.1}$$

where K_R is the canonical module of R.

In general, we have

$$(5.2) \qquad P(M,t^{-1}) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i P((H^i_{\mathfrak{m}}(M))^*,t)$$

for every Noetherian graded R-module M.

Using this formula, we have ([St-1])

Theorem 5.3. *If R is Gorenstein with $a = a(R)$, then*

$$P(R,t^{-1}) = (-1)^d t^{-a} P(R,t).$$

Conversely, if this equality holds for some integer a and if R is a CM integral domain, then R is Gorenstein.

Example (5.4). (1) If $x \in R_m$ is an R-regular element, then we have

$$P(R/xR,t) = (1-t^m)P(R,t).$$

In particular, if $R = k[X_1,\ldots,X_{d+r}]/(F_1,\ldots,F_r)$ is a complete intersection with $\deg(X_i) = a_i$ and $\deg F_j = b_j$, then we have

$$P(R,t) = \frac{(1-t^{b_1})\cdots(1-t^{b_r})}{(1-t^{a_1})\cdots(1-t^{a_{d+r}})}.$$

(2) Let $A = k[X,Y,Z]/(F)$ with $\deg(F) = 3$ and X,Y,Z have degree 1. Then $P(A,t) = \frac{1-t^3}{(1-t)^3} = 1+3\sum_{n\geq 1} nt^n$. Now, let $R = A\# A$ be the Segre product of A and A. Then we have

$$P(R,t) = 1 + 9\sum_{n\geq 1} n^2t^n = \frac{1+6t+12t^2-t^3}{(1-t)^3},$$

and we have the equality $P(R,t^{-1}) = -P(R,t)+2$, which corresponds to the fact $K_R \cong R$ (as graded modules), $H^i_{\mathfrak{m}}(R) = 0$ for $i = 0,1$ and that $H^2_{\mathfrak{m}}(R) \cong \underline{k}^2$ (2-dimensional k-vector space situated at degree 0). (cf. [GW-1])

6. Semigroup Rings

For a finitely generated additive semigroup $H \subset \mathbb{Z}^n$ and a field k, we define $k[H]$ to be the subring of Laurent polynomial ring generated by the monomials $\{t^h \mid h \in H\}$ ($t^h = t_1^{h_1}\cdots t_n^{h_n}$ if $h = (h_1,\ldots,h_n)$).

(6.1) ([HK-1]) If n = 1 (or dim $k[H] = 1$), $k[H]$ is Gorenstein if and only if H is symmetric (i.e. $\mathbb{Z}\setminus H = c - H := \{c-h \mid h \in H\}$ for some $c \in \mathbb{Z}$, if $\mathbb{Z} = H - H$, or, equivalently, if GCD $\{h \mid h \in H\} = 1$).

The similar result holds for higher dimension. (cf. [GW-2], [T-H]. Unfortunately, Lemma 3.3.8 and Theorem 3.3.3 of [GW-2] are not true, as pointed out in [T-H].)

If $k[H]$ is normal we have the following results of M. Hochster and R. Stanley.

Theorem 6.2. (1) [H-1] If $k[H]$ is normal, then it is CM.

(2) [St-1], [St-3] If $H = \sigma \cap \mathbb{Z}^n$ for some convex rational polyhedral cone, then we have $K_{k[H]} = k[Int(\sigma) \cap \mathbb{Z}^n]$, where $Int(\sigma)$ means the relative interior of σ. Thus $k[H]$ is Gorenstein if and only if $Int(\sigma) \cap \mathbb{Z}^n = h_0 + H$ for some $h_0 \in H$.

Example (6.3). Let $H = \sigma \cap \mathbb{Z}^2$, where $\sigma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq nx\}$, where n is a positive integer. Then we have

$$Int(\sigma) \cap \mathbb{Z}^2 = \bigcup_{1 \leq i \leq n-1} (1,i) + H \text{ if } n \geq 2,$$

which means that if we put $R = k[H] = k[X^iY^j \mid (i,j) \in H]$, then the canonical module K_R is generated by $\{XY^j \mid 1 \leq j \leq n-1\}$ as an R-module and hence we have $r(R) = n-1$ if $n \geq 2$. (If n = 1, then $R = k[X, XY]$ and $K_R = X^2Y.R$.)

7. Invariant Subrings of Finite Groups

If $(A, \mathfrak{m})$ is a local ring and G is a finite subgroup of $\mathrm{Aut}(A)$ *whose order is a unit in* A and if

$$B = A^G = \{a \in A \mid \sigma(a) = a \text{ (for } \forall \sigma \in G)\}$$

is the invariant subring of G, we have the isomorphism of local cohomology groups

$$H^i_{\mathfrak{n}}(B) \cong [H^i_{\mathfrak{m}}(A)]^G, \tag{7.1}$$

where we put $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}^G = \mathfrak{m} \cap B$. In particular, if A is CM, so is B and when A is not CM, we can sometimes find G which annihilates the middle local cohomology of A so that B is CM (cf. (7.3) (3)).

If A is (quasi) Gorenstein, the action of G on the generator w of K_A determines a character χ by

$$\sigma(w) = \chi(\sigma).w \tag{7.2}$$

for every $\sigma \in G$. By (7.1), we have $K_B \cong [K_A]^G$ and B is (quasi) Gorenstein if and only if $[K_A]^G$ is a free B-module. Thus B is (quasi) Gorenstein if $\chi = 1$ and the converse also holds if A is unramified over B in "codimension 1". (That is, if there is no prime ideal $\mathfrak{p}$ of A with $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 1$ which is fixed by some element $\sigma \neq 1$ of G and that the action of σ on $A/\mathfrak{p}$ is the identity.)

Note that we can discuss CM and quasi-Gorenstein property of B separately.

Example (7.3). (1) If $A = k[[X_1, ..., X_n]]$ (or $k[X_1, \ldots, X_n]$) and if $G \subset GL(n,k)$, $\chi = \det$ and, consequently, B is Gorenstein if $G \subset SL(n,k)$. The converse holds if G does not contain a "pseudo-reflection" ($\sigma \in GL(n,k)$ is a pseudo-reflection if $\mathrm{rank}(\sigma - 1) = 1$).

(2) If A is a complete intersection, χ is given as a ratio of two determinants. Namely, let $A = k[[X_1, \dots, X_n]]/(f_1, \dots, f_r)$ with $\dim(A) = n - r$. If $\sigma(X_i) = \sum a_{ij}X_j$ and $\sigma(f_i) = \sum b_{ij}f_j$, the we have $\chi(\sigma) = \det(a_{ij})/\det(b_{ij})$. (cf. [W-1], [St-2], [Kh], [Fo])

(3) Let $R = A\sharp B$ be the Segre product of $A = k[X,Y,Z]/(X^2+Y^4+Z^4)$ (with $\deg X = 2, \deg Y = \deg Z = 1$) and $B = k[U,V,W]/(U^2+V^4+W^4)$ (with $\deg U = 2, \deg V = \deg W = 1$), where k is a field of char$(k) \neq 2$. Note that R is normal with $\dim R = 2$, quasi-Gorenstein with $a(R) = 0$ and not CM with $H^2_{\mathfrak{m}}(R) \cong \underline{k}^2$.

Let $G =< \sigma >$ be a cyclic group of order 2. We define two actions of G on R.

(a) If $\sigma(X) = -X, \sigma(U) = -U$ and if all other variables are invariant under the action of σ, then $[H^2_{\mathfrak{m}}(R)]^G = 0$ and R^G is CM. (In fact, the generator of K_R is invariant under σ and R^G is Gorenstein.)

(b) If $\sigma(X,Y,Z,U,V,W) = (X,-Y,-Z,U,-V,-W)$, then $[H^2_{\mathfrak{m}}(R)]^G = H^2_{\mathfrak{m}}(R)$ and R^G is not CM. We can also check that R^G is quasi-Gorenstein.

8. Face Rings of Simplicial Complexes

Commutative ring theory includes topology !?

Let Δ be a simplicial complex on vertex set $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ and k be a field. We define the face ring $k[\Delta]$ by

$$k[\Delta] = k[X_1, \dots, X_n]/I_\Delta, \quad I_\Delta = (X_\sigma \mid \sigma \notin \Delta), \tag{8.1}$$

where we denote $X_\sigma = \prod_{v\in\sigma} X_v$. This ring is called a **face ring** (or a **Stanley-Reisner ring**) of the simplicial complex Δ. As usual, we denote $\mathfrak{m} = (X_1, \dots, X_n)$ (the unique graded maximal ideal of R).

The local cohomology groups of $R = k[\Delta]$ is described by the cohomology groups of "links"of Δ (cf. [Re], [Ho-3], [St-3]). For example, the homogeneous component of degree $(0, \dots, 0)$ (R and the local cohomology groups $H^i_{\mathfrak{m}}(R)$ are graded by the group $\mathbb{Z}^n$ in a obvious manner) is described by

$$[H^i_{\mathfrak{m}}(R)]_{(0,\dots,0)} \cong \tilde{H}^{i-1}(\Delta, k), \tag{8.2}$$

where $\tilde{H}^j(\Delta, k)$ is the reduced cohomology group of Δ (admitting the empty set as a (-1)-dimensional face).

To be more precise, the homogeneous component $[H^i_{\mathfrak{m}}(R)]_{(a_1,\dots,a_n)}$ is 0 if $a_i > 0$ for some i and if $a_i \leq 0$ for every i, then we put $I = \{i | a_i < 0\}$,

$$link_I(\Delta) = \{\tau \in \Delta \mid I \cap \tau = \phi \text{ and } I \cup \tau \in \Delta\} \quad \text{and we have} \tag{8.3}$$

$$[H^i_{\mathfrak{m}}(R)]_{(a_1,\dots,a_n)} \cong \tilde{H}^{i-1}(link_I(\Delta), k). \tag{8.4}$$

Example (8.5). If Δ is a manifold, then every proper link of Δ is a sphere. Hence by (8.4) the middle local cohomology groups are annihilated by $\mathfrak{m}$ since $[H^i_{\mathfrak{m}}(R)]_{\underline{a}} = 0$ if $\underline{a} \neq (0, \dots, 0)$. In this case, R is a Buchsbaum ring.

If, moreover, $H^i(\Delta, k) = 0$ for $i < \dim \Delta$, then R is CM and if $H^d(\Delta, k) \cong k$ (d = dim Δ), then R is quasi-Gorenstein.

In general, CM property of $R = k[\Delta]$ depends only on the topological space $|\Delta|$ and not on triangulations (cf. [Mu]). But Gorenstein property does depend on Δ. While, for example, every triangulation Δ of a sphere gives a Gorenstein ring.

(8.6) As a typical class of examples of Δ, we can make an "order complex "$\Delta(P)$ from a poset (partially ordered set) P. Namely, $\Delta(P)$ is the set of totally ordered subsets of P. We denote $k[P]$ for $k[\Delta(P)]$. If $\{X_\alpha \mid \alpha \in P\}$ is a set of variables, then we can check that

$$(8.7) \qquad k[P] \cong k[X_\alpha \mid \alpha \in P]/(X_\alpha X_\beta \mid \alpha \text{ and } \beta \text{ are not comparable in } P).$$

Given a cell decomposition of a manifold M, we can make a poset P such that $|\Delta(P)| \cong M$. In this manner, we can make lots of Gorenstein rings starting from a triangulation of a sphere (cf. [St-4], [W-3]).

9. ASL (Algebras with Straightening Law)

Although the examples of §8 are interesting, they almost never are integral domains. The concept of **ASL** (*A*lgebras with *S*traightening *L*aw) is defined by giving an order to a distinguished set of generators of an algebra (they form a poset) and many nice rings including determinantal rings, Pfaffian ideals, homogeneous coordinate rings of Grassmannians and Schubert subvarieties are among ASL's.

Definition (9.1). Let P be a finite poset, k be a ring and $A = \oplus_{n \in \mathbf{Z}} A_n$ be a graded k-algebra given an inclusion map $P \subset A$ so that $k \subset A_0$ and every element of P is homogeneous with positive degree. In this situation, a product of elements of P is called a "monomial"and a product $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n$ is called a "standard monomial"if the set $\{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n\}$ is a linearly ordered subset of P. In this terminology, we can state the definition of ASL.

The k-algebra A is an ASL on P if the following conditions are satisfied.

(ASL-1) A is a free k-module with the set of standard monomials as a free basis.

(ASL-2) If $\alpha, \beta \in P$ are incomparable elements of P and if

$$(9.2) \qquad \alpha\beta = \sum c_i m_i$$

is the unique expression of $\alpha\beta$ as a linear combination of standard monomials ($c_i \in k, c_i \neq 0$, m_i are standard monomials), then every m_i contains an element $\gamma_i \in P$ such that $\gamma_i < \alpha, \beta$ by the order of P. (We agree the right-hand side to be 0 if the sum is empty.)

The fundamental theorem of ASL to deduce the CM or Gorenstein property from that of $k[P]$ (which is defined in §8 and is sometimes called a "discrete ASL") is the following.

Theorem 9.3. (cf. [Es], [DEP], [BV]) *If $k[P]$ is CM (resp. Gorenstein), so is any ASL on P over k.*

As for CM property, CM property for $k[P]$ and any ASL on P are supposed to be quite near so that there is even a conjecture

If A is a CM ASL on P over k, is $k[P]$ also CM ?

N. Terai showed a partial result concerning this conjecture (cf. [Te]) and we don't know a counterexample. But about Gorenstein property, the property "$k[P]$ is Gorenstein"is a much stronger property than an ASL on P over k to be Gorenstein.

But since A and $k[P]$ has the same Poincaré series, we can use results of §5. Namely,

(9.4) If A, B are two ASL's on the same poset P (including the degrees of elements of P), B is Gorenstein and A is an integral domain then A is Gorenstein, too, by (5.3), since A and B have the same Poinçaré series.

Although the reduction from A to $k[P]$ is a considerable simplification, the situation is yet complicated in general and some new tool is necessary for this purpose. Then there are notions of "shellable" and "wonderful" (or, "upper semimodular") posets to deduce CM-property for $k[P]$ (cf. [St-5], [E], [Bj]).

The most important family of posets in this line would be the ones defined by the "Bruhat Order" of Coxeter groups. Using the concept of "lexicographic shellability", the Coxeter groups, as ordered sets by the Bruhat order (with their cosets by parabolic subgroups) are proved to be Cohen-Macaulay (cf. [BW]). Using this result, the homogeneous coordinate rings of "Schubert Varieties" G/P are proved to be Cohen-Macaulay (cf. [DL], [LS], [BV]).

Example (9.5). Let $S = k[X_{ij} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n]$ $(m \le n)$. We think these mn variables $(\underline{X})$ are entries of an $m \times n$ matrix. Now, let R be the subring of S generated by all the maximal minors of $(\underline{X})$. Namely, R is the homogeneous coordinate ring of the Grassmann variety $Grass(n, m)$ embedded via "Plücker embedding" in $\mathbb{P}^{mn-1}$. Let P be the set of maximal minors of $(\underline{X})$ and then we have

$$\begin{aligned} P \cong I(n,m) :=& \{i_1, \dots, i_m \mid 1 \le i_1 < i_2 < \dots < l_m \le n\} \\ \cong& S_n/(S(1,\dots,m) \times S(m+1,\dots,n)) \end{aligned}$$

and R is proved to be an ASL on P via "Plücker relations" (cf. [BV]). This P is easily seen to be "wonderful", which proves that R is CM. (In fact, in this case, P is a *distributive lattice.*

The homogeneous coordinate ring of a Schubert subvariety of $Grass(n, m)$ is defined an element $\tau \in I(n, m)$ in such a way that

(9.5.1) $$R_\tau = R/I_\tau, \text{ where } I_\tau = (\xi \in I(n,m) \mid \xi \not\geq \tau).$$

Then, R_τ is an ASL on the subposet $\{\alpha \in I(m,n) \mid \alpha \ge \tau\}$ by (ASL-2). (In general a subset I of a poset P is an *ideal* of P if the condition "$\alpha \in I$, $\beta \le$

$\alpha \Longrightarrow \beta \in \alpha$"is satisfied. An important feature of the axiom (ASL-2) is that if A is an ASL on P and if I is an ideal of P, then $A/(\alpha \mid \alpha \in I)$ is also an ASL on the poset $P \setminus I$.)

It is easily seen that the subposet $\{\alpha \in I(n,m) \mid \alpha \geq \tau\}$ is also a distributive lattice implying the Cohen-Macaulay property of R_τ (cf. [BV] for more detailed discussion in this line).

(9.6) In general, to show the existence of a "good"ASL on a given poset (for example, an ASL *domain*) on a given poset P is not easy. But if P is a distributive lattice, or, equivalently, if $P \cong J(\Delta)$, the poset of ideals of a poset Δ ordered by the inclusion (cf. [St-4], Chap. 3) then we can define (cf. [Hi])

$$(9.6.1) \qquad R[P] := k[T_\alpha \mid \alpha \in P]/(T_\alpha T_\beta - T_{\alpha\vee\beta}T_{\alpha\wedge\beta} \mid \alpha, \beta \in P)$$

for any field k and show that $R[P]$ is a normal domain. (In fact, $R[P]$ is a normal semigroup ring.) Using (6.2, (2)), Hibi also showed

Theorem 9.7. *$R[P]$ is Gorenstein if and only if every maximal chain in Δ has the same length (where $P \cong J(\Delta)$).*

Since every ASL on a poset P has the same Poincaré series, by (5.3) we can assert that

(9.8) An ASL domain on a distributive lattice P, $P \cong J(\Delta)$ is Gorenstein if and only if every maximal chain in Δ has the same length.

In the case of "Schubert subvarieties", the corresponding poset Δ can be easily computed and we can easily know the Gorenstein property of R_τ in (9.5).

10. Cyclic Coverings

Given a CM ring A, can we construct a Gorenstein ring B from A in a "canonical" way ? The theory of cyclic covers answers to this question under certain condition. Also, this fact suggests that non-(quasi)-Gorenstein rings are sections (or phases) of (quasi)-Gorenstein rings. This concept is also related to the concept of "canonical embeddings" of projective varieties.

Let $S = \oplus_{i\in\mathbb{Z}_r} S_i$ be a $\mathbb{Z}_r$-graded normal domain ($S_i.S_j \subset S_{i+j}$ for $\forall i,j \in \mathbb{Z}_r$) and put $R = S_0$. In this situation, we say that S is a **finite cyclic cover** of R. We assume that R is a local ring.

Fix an element $u \neq 0$ in S_1 and let $f = u^r$. Then each S_i can be described as

$$(10.1) \qquad S_i = R(iD).u^i$$

in terms of the divisor $D = \frac{1}{r} div_R(f) = \sum_V \frac{p_V}{q_V} V$ (cf. [TW-2]), where we define

$$R(E) = \{f \in Q(R) \mid div_R(f) + E \geq 0\} \quad (Q(R) \text{ is the quotient field of } R)$$

for a (fractional) divisor E of R. In general, D is a fractional divisor. If D is an integral divisor, we say that S is an **integral** cyclic cover of R.

If D is not integral, the divisorial ramification of $R \hookrightarrow S$ is described by the fractional divisor $D' = \sum_V \frac{q_V - 1}{q_V} V$. Using this D', the canonical module K_S of S is written as

$$K_S = \oplus_{i \in \mathbf{Z}_r} R(\mathfrak{k}_R + D' + iD).u^i, \tag{10.2}$$

where $\mathfrak{k}_R$ is a divisor of R defined by $K_R = R(\mathfrak{k}_R)$. Hence

(10.3) S is quasi-Gorenstein iff $\mathfrak{k}_R + D' \sim iD$ for some i (where, we write $E \sim F$ for fractional divisors E and F if $E - F = div_R(f)$ for some f in the quotient field of R).

If the class of canonical divisor $\mathfrak{k}_R$ has finite order in the divisor class group $Cl(R)$ of R and if $r\mathfrak{k}_R = div_R(f)$ $(f \in Q(R))$, where $r = \mathrm{ord}(\mathfrak{k}_R)$, we define a "canonical cover" of R by

$$S = S(R, D, f) = \oplus_{i \in \mathbf{Z}_r} R(i\mathfrak{k}_R)u^i \text{ with } u^r = f. \tag{10.4}$$

Then by (10.3), S is quasi-Gorenstein and S is CM if and only if so is each $R(\mathfrak{k}_R)$ as R-module.

In general, we can't expect the canonical cover S to be Gorenstein even if R is CM. But there are family of rings whose canonical (or integral finite cyclic) cover is also CM.

If R is a localization of a finitely generated algebra over a field k of characteristic 0, then there is a notion of "log-terminal singularity" with the implication

log-terminal singularity $\Longrightarrow$ rational singularity $\Longrightarrow$ CM.

Since the property of being a log-terminal singularity is preserved under finite integral cyclic cover (cf. [KMM]) (and also, by definition, the canonical class has a finite order), a canonical cover of a log-terminal singularity is Gorenstein.

If R contains a field of characteristic $p > 0$, M. Hochster and C. Huneke (resp. Hochster and J.Roberts) defined a remarkable class of rings called F-regular (resp. F-pure) rings using Frobenius map on R (cf. [HR], [HH-1])[1]. Note that F-regular implies normal and CM. (Gorenstein F-regular local ring is characterized by the property "$E_R(R/\mathfrak{m})$ is a principal $R[F]$-module generated by its socle", where $R[F]$ is a (non-commutative) ring obtained by "attaching the Frobenius map F to R" (cf. [Y])).

These properties behave well under taking cyclic covers. For example, if R is strongly F-regular (resp. F-pure), D is integral and if $(p, r) = 1$, then $S = S(R, D, f)$ is also strongly F-regular (resp. F-pure) (cf. [W-4]). Thus we have

(10.5) Let R be a strongly F-regular local ring of $\mathrm{char}(R) = p > 0$. If the canonical class of R has a finite order r in $Cl(R)$ and if $(r, p) = 1$, then the canonical cover of R is Gorenstein.

If the canonical class of R has infinite order, we consider

[1] For our purpose, the notion of "strongly F-regular ring" is convenient (cf. [HH-2]). In general, strongly F-regular implies F-regular and both concepts are equivalent for Gorenstein rings.

$$(10.6) \qquad S = \oplus_{n\geq 0} R(-n\mathfrak{k}_R)U^n \subset K[U],$$

which we call an **infinite anti-canonical cover** of R. This is a Krull ring and if S is Noetherian, we can prove that S is quasi-Gorenstein (cf. [TW-1], [GHNV]). Also, if R is strongly F-regular, S is strongly F-regular and hence is Gorenstein (cf. [W-5]).

We have seen several phases of Gorenstein property in 10 acts. Of course, there are more phases and if I am to proceed, the topics would be *Resolution of Singularities, Rees and Associated Graded Rings, Invariant Subrings of Algebraic Groups,* and so on. But now, I am afraid this manuscript has become too long and I am stopping here.

REFERENCES

[B] Bass, H.: On the ubiquity of Gorenstein rings, Math. Zeit., **82** (1963), 8-28.

[BE-1] Buchsbaum, D.A. and Eisenbud, D.: What makes a complex exact, J. of Alg. **25** (1973), 259-268.

[BE-2] Buchsbaum, D.A. and Eisenbud, D.: Some structure theorems for finite free resolutions, Adv. Math. **12** (1974), 84-139.

[BE-3] Buchsbaum, D.A. and Eisenbud, D.: Algebra structures for finite free resolutions, and some structure theorems for for ideals of codimension 3, Amer. J. Math. **99** (1977), 447-485.

[BH] Bruns, W., and Herzog, J., Cohen-Macaulay Rings, Cambridge Studies in Adv. Math. **39**, Cambridge, 1993.

[Bj] Björner, A., Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered sets, Trans. A.M.S. **260** (1980), 159-183.

[Bu] Burch, L., On ideals of finite homological dimension in local rings, Proc. Camb. Phil. Soc. **64** (1968), 941-946.

[BV] Bruns, W., and Vetter, U., Determinantal Rings, Lecture Notes in Math. **1327**, Springer, 1988.

[BW] Björner, A., and Wachs, M., Bruhat Order of Coxeter Groups and Shellability, Adv. in Math. **43** (1982), 87-100.

[DEP] De Concini, C., Eisenbud, D., and Procesi, C., Hodge Algebras, Astérisque **91**, 1982.

[DL] De Concini, C., and Lakshmibai, V., Arithmetic Cohen-Macaulayness and Arithmetic Normality for Schubert Varieties, Amer. J. Math. **103** (1981), 835-850.

[E] Eisenbud, D., Introduction to algebras with straightening laws, "Ring Theory and Algebra III", 243-267, M.Dekker, 1980.

[Fo] Fossum, R.M., The divisor class group of a Krull domain, Ergebnisse der Math. **74**, Springer, 1973.

[Gr] Grothendieck, A., Théorèmes de dualité pour les faisceuax algébriques cohérents, Sém. Bourbaki **149**, 1957.

[G-H] Grothebdieck, A. (Notes by R. Hartshorne), Local Cohomology, Lecture Notes in Math. **41**, Springer, 1967.

[GW-1] Goto, S. and Watanabe, K.-i.: On graded rings, I, J. Math. Soc. Japan, **30** (1978), 179-213.

[GW-2] Goto, S. and Watanabe, K.-i.: On graded rings, II. ($\mathbb{Z}^n$-graded rings), Tokyo J. Math. **1** (1978), 237-261.

[GHNV] Goto, S., Herrmann, M., Nishida, K., and Villamayor, O.: On the structure of Noetherian symbolic Rees algebras, Manuscripta Math., **67** (1990), 197-225.

[HH-1] Hochster, M. and Huneke, C.: Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem, J. of Amer. Math. Soc. **3** (1990), 31-116.

[HH-2] Hochster, M. and Huneke, C.: Tight closure and strong F-regularity, Mém. Soc. Math. France **38** (1989), 119-133.

[Ho-1] Hochster, M., Rings of invariants of tori, Cohen-Macaulay rings generated by monomials, and polytopes, Annals of Math. **96** (1972), 318-337.

[Ho-2] Hochster, M., Topics in the homological theory of modules over commutative rings, Regional Conf. Series in Math., **24**, A.M.S., 1975.

[Ho-3] Hochster, M., Cohen-Macaulay rings, combinatorics, and simplicial complexes, in "Ring Theory" II (Proc. Second Oklahoma Conf.), (B.R. Macdonald and R. Morris, eds.), 171-223, Dekker, 1977.

[Hi] Hibi, T., Distributive Lattices, Affine Semigroup Rings and Algebras with Straightening Laws, Adv. Studies in Pure Path. **11**, "Commutative Algebra and Combinatorics", 93-109, Kinokuniya, 1987.

[HK-1] Herzog, J., and Kunz, E., Die Wertehalbgruppe eines lokalen Rings der Dimension 1, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, **2** Abh., Springer, 1971,

[HK-2] Herzog, J., and Kunz, E., (eds.), Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings, Lecture Notes in Math. **238**, Springer, 1971.

[HR] Hochster, M. and Roberts, J.L.: The purity of the Frobenius and local cohomology, Adv. in Math. **21** (1976), 117-172.

[Kh] Khinich, V.A., On Gorensteinness of invariant subrings of a Gorenstein ring, Izvestia, A. N. U.S.S.R. **40** (1976), 50-56.

[KMM] Kawamata, Y., Matsuda, K., and Matsuki, K., Introduction to Minimal Model Problem, "Algebraic Geometry" (Sendai, 1985), 283-360, Adv. Studies in Pure Math., Kinokuniya, 1985.

[LS] Lakshmibai, V., and Seshadri, C.S. et al., Geometry of G/P, I - X, Proc. Indian Acad. Sc. **87A** (1978) (Geometry of G/P VIII, J. of Alg. **108** (1987), 435-471.

[Ma] Matsumura, H., Commutative Ring Theory, Cambridge Studies in Adv. Math. **8**, Cambridge U.P., 1989.

[Mu] Munkres, J., Topological results in combinatorics, Michigan Math. J. **31** (1984), 113-128.

[N] Northcott, D.G., Finite free resolutions, Cambridge Tracts in Math. **71**, Cambridge Univ. Press, 1976.

[PS] Peskine, C. and Szpiro, L., Dimension projective finie et cohomologie locale, Publ. I.H.E.S. **42** (1973), 47-119.

[Re] Reisner, G.A., Cohen-Macaulay quotients of polynomial rings, Adv. in Math. **21** (1976), 30-49.

[Ro] Roberts, P., Intersection Theorems, in "Commutative Algebra" (Proc. Microprogram, Berkeley, 1987), 417-436, Springer, 1989.

[Se] Serre, J.-P., Sur les modules projectifs, Seminaire Dubreil, (1960).

[St-1] Stanley, R.P., Hilbert functions of graded algebras, Adv. Math. **28** (1972), 57-83.

[St-2] Stanley, R.P., Invariants of finite groups and their applications to combinatorics, Bull. A.M.S. **1** (1979), 475-511.

[St-3] Stanley, R.P., Combinatorics and Commutative Algebra, Birkhäuser, 1983.

[St-4] Stanley, R.P., Enumerative Combinatorics, vol. 1, Wadsworth, 1986.

[St-5] Stanley, R.P., Cohen-Macaulay complexes, "Higher combinatorics" (M. Aigner, ed.), 51-62, Reidel, Dordrecht/Boston, 1977.

[Te] Terai, N., Some remarks on algebras with straightening laws, Proc. Symp. Comm. Alg. **14** (1992, Tokyo), 166-187. [第 14 回可換環論シンポジウム報告集]

[TH] Trung, N.V., and Hoa, L.T., Affine semigroups and Cohen-Macaulay rings generated by monomials, Trans. A.M.S. **298** (1986), 145-167.

[TW-1] Tomari, M. and Watanabe, K.-i.: Filtered rings, filtered blowing-ups and normal two-dimensional singularities with "star-shaped" resolution, Publ. RIMS. Kyoto Univ. **25**, (1989) 681-740.

[TW-2] Tomari, M. and Watanabe, K.-i.: Normal $\mathbb{Z}_r$-graded Rings and Normal Cyclic Covers, Manuscripta Math. **76** (1992), 325-340.

[WJ] Watanabe, Junzo, A note on Gorenstein rings of embedding codimension 3, Magoya Math. J. **50** (1973), 227-232.

[W-1] Watanabe, K.-i., Certain invariant subrings are Gorenstein, I, II, Osaka Math. J. **11** (1974), 1-8, 379-388.

[W-2] Watanabe, K.-i.: Some remarks concerning Demazure's construction of normal graded rings , Nagoya Math. J. **83** (1981), 203-211.

[W-3] Watanabe, K.-i.: Study of Four-Dimensional Gorenstein ASL Domains I (Integral posets arising from triangulations of a 2-sphere), Adv. Studies in Pure Path. **11**, "Commutative Algebra and Combinatorics", 313-335, Kinokuniya, 1987.

[W-4] Watanabe, K.-i., F-regular and F-pure normal graded rings, J. of Pure and Appl. Alg. **71** (1991), 341-350.

[W-5] Watanabe, K.-i., Infinite cyclic covers of strongly F-regular rings, to appear in Proc. Conf. at Mt. Holyoke, 1992.

[Y] Yoshino, Y., Ideal Theory of Skew-Polynomial Rings of Frobenius Type, Proc. 25th Symp. on Ring Theory (Matsumoto, 1992), 17-25.

Kei-ichi Watanabe
Department of Mathematical Sciences,
Tokai University
Hiratsuka, 259-12, Japan
E-mail address: watnbkei@ss.u-tokai.ac.jp

MODULES OF FINITE ENDOLENGTH

Shinsuke TAKASHIMA

§0. INTRODUCTION

In this report, we will study the paper "Modules of finite length over their endomorphism rings" written by Crawly-Boevey, especially after section 8. He proved in the paper that

THEOREM If A is artinian C-algebra with C artinian commutative local rings having radical m, next condition (C2)-(C4) are all equivalent. If field C / rad C is not finite field, then these are equivalent (C1).

(C1) Mod A has infinitely many non-isomorphic indecomposable objects of some fixed length.
(C2) Mod A has infinitely many non-isomorphic indecomposable objects of some fixed endlen.
(C3) Mod A has an indecomposable object X which has A-$C[T]_{mC[T]}$-bimodule structure, and it is finite length as right $C[T]_{mC[T]}$-module.
(C4) Mod A has an indecomposable object X with infinite length and finite length as End(X)-module.

For the proof of the above, he used the technick named "lift pair". So, to begining with, we shall study lift pairs in the first section. In next section, we shall study length and endolongth in the lift categories following Crawly-Boevey. And we will give the proof of above theorem in the last section.

§1. LIFT PAIRS AND LIFT CATEGORIES

DEFINITION We say pair (R, ξ) is a lift pair, if R is a ring, and ξ is a short exact sequence of R-R-bimodule of the form :

$$\xi : 0 \to M \to E \to R \to 0$$

DEFINITION Let (R, ξ) be lift pair, we difine a category $\xi(R)$, called the lift category of (R, ξ), as follows.

(1) The objects of $\xi(R)$ are pairs (P, e) ; P is projective left R-module, e is section for surjection $\pi_P : E \otimes_R P \to R \otimes_R P = P$ (i.e. $\pi_P \cdot e = 1_P$).

(2) The maps of $\xi(R)$ are difened by :

$$\mathrm{Hom}_{\xi(R)}((P, e), (Q, f)) = \{ \theta \in \mathrm{Hom}_R(P, Q) \mid f\cdot\theta = e\cdot 1_E \otimes_R \theta \}$$

(3) The composition of $\xi(R)$ is composition as left R-homomorphisms.

DEFINITION Let (R, ξ) be a lift pair with $\xi : 0 \to M \to E \to R \to 0$, and let I be an ideal of R. We denote ξ_I be the short exact :

$$\xi_I : 0 \to M / M \cap (EI + IE) \to E / (EI + IE) \to R / I \to 0.$$

and define a natural functor $\rho_I : \xi(R) \to \xi_I(R / I)$ which sends an object $(P, e) \in \xi(R)$, to $\sigma_N((P,e)) :\equiv ((R / I) \otimes_R P, \hat{e})$, where $\hat{e}$ is the composition :

$$\hat{e} : (R / I) \otimes_R P \to (R / I) \otimes_R E \otimes_R P \to E / (EI + IE) \otimes_R P,$$

and sends a morphism $\theta : (P, e) \to (Q, f)$ to $(R / I) \otimes_R \theta$.

DEFINITION Let (R, ξ) be a lift pair with $\xi : 0 \to M \to E \to R \to 0$, and let N be a subbimodule of M. We denote ξ_N be the short excact :

$$\xi_N : 0 \to M / N \to E / N \to R \to 0,$$

and define a natural functor $\sigma_N : \xi(R) \to \xi_N(R)$ which sends an object $(P, e) \in \xi(R)$, to $\sigma_N((P,e)) :\equiv (P, \bar{e})$, where $\bar{e}$ is the composition :

$$\bar{e} : P \to E \otimes_R P \to (E / N) \otimes_R P.$$

Next, Let $X = (P, \bar{e})$ be an object of $\xi_N(R)$. We difine a lift pair (R_X, ξ_X) as follows.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\xi_X : 0 \to & M_X & \to & E_X & \to & R_X & \to 0 \\
 & \| & & \downarrow & \text{Pull Back} & \downarrow \beta & \\
0 \to & \mathrm{Hom}_R(P, N \otimes_R P) & \to & \mathrm{Hom}_R(P, E \otimes_R P) & \to & \mathrm{Hom}_R(P, (E / N) \otimes_R P) & \to 0,
\end{array}$$

where $R_X :\equiv \mathrm{End}(X)$, and β sends 1 to $\bar{e}$, and difine natural functor $\tau_X : \xi_X(R_X) \to \xi(R)$ which sends an object $(Q, g) \in \xi_X(R_X)$, to $(P \otimes_{R_X} Q, e)$, where e is the composition :

$$e : P \otimes_{R_X} Q \to P \otimes_{R_X} E_X \otimes_{R_X} Q \to P \otimes_{R_X} \mathrm{Hom}_R(P, E \otimes_R P) \otimes_{R_X} Q \to E \otimes_R P \otimes_{R_X} Q$$

THEOREM Let same arguments above difinitions, then following holds.

(1) If I is left T-nilpotent and $MI = IM = 0$, then ρ_I is representation

equivalence.

(2) σ_N is faithful, dense, reflects isomorphisms.

(3) τ_X is fully and faithful, and $\operatorname{Im} \tau_X = \sigma_N^{-1}(\mathrm{Add}(X))$, where $\mathrm{Add}(X)$ is all of summands of sum of copies of X.

DEFINITION Let R be semiperfect ring. We difine lift pair (R_A, ξ_A) as follows :

$$R_A = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix},\ \xi_A : 0 \to \begin{pmatrix} 0 & J \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & J \\ 0 & A \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \to 0,$$

where $J = \mathrm{rad}(A)$. And we difine funcotr $\upsilon_A : \xi_A(R_A) \to \mathrm{Mod}\ A$ as follows :

(1) For an object $X = (P, e)$ in $\xi_A(R_A)$, υ_A sends X to :

$$\upsilon_A(X) :\equiv \mathrm{Cok}({}_A(A\ 0) \otimes_{R_A} P \xrightarrow{e} {}_A(A\ 0) \otimes_{R_A} E \otimes_{R_A} P \to {}_A(A\ A) \otimes_{R_A} P)$$

(2) For a morphism $\theta : (P, e) \to (Q, f)$ in $\xi_A(R_A)$, υ_A sends θ to :

$$\upsilon_A(\theta) :\equiv \mathrm{Cok}({}_A(A\ 0) \otimes_{R_A} \theta \xrightarrow{e} {}_A(A\ 0) \otimes_{R_A} E \otimes_{R_A} \theta \to {}_A(A\ A) \otimes_{R_A} \theta)$$

PROPOSITION Functor υ_A is full and dense.

§2. LENGTH AND ENDLENGTH

DIFINITION Let (R, ξ) be a lift pair, and $X = (P, e)$ be an object in $\xi(R)$. We difine lengh X as length $P / \mathrm{rad}(P)$ and difine endlen X as length $P / \mathrm{rad}(P)_{\mathrm{End}(X)}$.

REMARK Under the hypotheses of previous section, functor ρ_I and σ_N preserve lengh and endlen of objects.

PROPOSITION If (R, ξ) is a lift pair with R left perfect, and N is subbimodule of the first term of ξ, M. Then if an object X in $\xi_N(R_N)$ has finite length and any summands of X has multiplicity 1 in X, for any object (Q, g) of $\xi_X(R_X)$ following inequation holds.

(1) $\text{lengh}\,(Q, g) \le \text{length}\ \tau_X((Q, g)) \le \text{length}\ X \cdot \text{length}\,(Q, g)$.

(2) $\text{endlen}\,(Q, g) \le \text{endlen}\ \tau_X((Q, g)) \le \text{endlen}\ X \cdot \text{endlen}\,(Q, g)$.

Proof. (1) Since R is semiprimary and X has finite length, R_X is semiprimary. Thus Q is direct sum of indeconposable projectives, so we may put $Q = \oplus R_X e_i$, where e_i is nonzero primitive idempotents. Then P' is isomorhic to $\oplus P\tau_X(e_i)$. Thus,

$$\begin{aligned} \text{lengh}\,(Q, g) &= \Sigma_i 1 \\ &\le \Sigma_i \text{ length } (P / \mathrm{rad}\ P)\tau_X(e_i) \\ &= \text{length } (\oplus P / \mathrm{rad}\ P)e_i \\ &= \text{length } \tau_X((Q, g)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{length } \tau_X((Q, g)) &= \Sigma_i \text{ length } (P / \text{rad } P)\tau_X(e_i) \\ &\leq \Sigma_i \text{ length } X \\ &= \text{length } X \cdot \text{length } (Q, g) . \end{aligned}$$

(2) We use same symbols in proof of (1), and put $F = \mathrm{End}((Q, g))$, then

$$\text{endlen } (Q,g) = \text{length } R_X / \text{rad}(R_X) \otimes_{R_X} Q_F$$
$$\text{endlen } \tau_X((Q, g)) = \text{length } P / \text{rad}(P) \otimes_{R_X} Q_F .$$

Thus for any simple right R_X-module S,

$$\text{length } (S \otimes_{R_X} Q_F) \leq \text{length } R_X / \text{rad}(R_X) \otimes_{R_X} Q_F = \text{endlen } (Q,g) .$$

Consider the composition series of $P / \text{rad}(P)_{R_X}$, then since length $P / \text{rad}(P)_{R_X} = \text{endlen } X$,

$$\text{endlen } \tau_X((Q, g)) = \text{length } P / \text{rad}(P) \otimes_{R_X} Q_F \leq \text{endlen } X \cdot \text{endlen } \tau_X((Q, g)) .$$

Finally, by assumption, $R_X / \text{rad}(R_X)_{R_X}$ is direct sum of non-isomorhic simple left R_X-module. On the other hand, since $P / \text{rad}(P)$ is sincere as right R_X-module, any simple left R_X-module appears the composition series of $P / \text{rad}(P)_{R_X}$, thus.

$$\text{endlen } (Q,g) = \text{length } R_X / \text{rad}(R_X) \otimes_{R_X} Q_F \leq \text{length } P / \text{rad}(P) \otimes_{R_X} Q_F = \text{endlen } \tau_X((Q, g)).$$

□

LEMMA If (R, ξ) is lift pair with R left perfect, and X is an object of $\xi(X)$ with finite length and it is direct sum of non-isomorphic indecomposable object, then for any decomposition $X = \oplus X_i$,

$$\text{endlen } X = \Sigma \text{ endlen } X_i$$

DEFINITION We define Biheight N for R-S-bimodule, as follows :

$$\text{Biheight } N = \min \{ k \mid \text{rad}(R)^i \cdot N\text{rad}(S)^j = 0 \text{ for any } i + j = k \} .$$

PROPOSITION Under same hypotheses of previous proposition, for any sincere object (Q,g) in $\xi_X(R_X)$, either endlen $(Q, g) <$ endlen $(\tau_X((Q, g)))$, or Biheight M_X as R_X-R_X-bimodule is not larger than Biheight N as R-R-bimodule.

Proof. Assume endlen $(Q, g) =$ endlen $(\tau_X((Q, g)))$. And put $n = \text{length } R_X / \text{rad}(R_X)_{R_X}$, and denote primitive idempotent decomposition of 1_{R_X} to $1_{R_X} = \Sigma f_i$. Since (Q,g) is sicere, for any simple right R_X-module S, $S \otimes Q \neq 0$. Then,

$$\text{length } R_X / \text{rad}(R_X) \otimes_{R_X} Q_F = \text{length } P / \text{rad}(P) \otimes_{R_X} Q_F = n .$$
$$\therefore \text{ length } R_X / \text{rad}(R_X)_{R_X} = \text{length } P / \text{rad}(P)_{R_X} = n .$$

Thus, if we denote X_i to be summand of X associate with i, endlen $X_i = 1$ by above lemma. Then $Pf / \mathrm{rad}(P)f$ is simple right fFf-module. So $fF / \mathrm{rad}\, fF$ appears in top of $P / \mathrm{rad}(P)_{R_X}$. Thus P / JP is semisimple F-module by length of top of $P / \mathrm{rad}(P)_{R_X} \geq n$. Hence it implies that $\mathrm{rad}(R)\cdot P \supset P\cdot \mathrm{rad}(F)$. Hence by $M_X = \mathrm{Hom}_R(P, N \otimes_R P)$, assertion holds.

□

DEFINITION Let A be ring, and M be an left A-module. We define endlen M as length of M as right $\mathrm{End}(M_A)$-module.

LEMMA If A is right artinian, then for any left A-mudule M, there exists object X in $\xi_A(R_A)$ such that $\upsilon_A(X) = M$, endlen $X \leq$ endlen $M \cdot (\text{length } A_A + 1)$.

Proof. Let $\Gamma : Q' \to Q \to M \to 0$ be projective cover of M, and $J = \mathrm{rad}(A)$. We consist $X = (P, e)$ as follows :

$$P = \begin{pmatrix} Q' \\ Q \end{pmatrix}, e : P \to P \otimes E = \begin{pmatrix} 1_{Q'} & \oplus\, Q \to M \\ & 1_Q \end{pmatrix}$$

Put $S = \mathrm{End}(X)$, then all of homomorphism in sequence Γ become A-S-bimap. Since Γ is projective cover, $Q / JQ = M / JM$, so length Q / JQ_S = length M / JM_S. Next in the same ways, length Q' / JQ'_S = length $\mathrm{Ker}(Q \to M)_S / J\cdot \mathrm{Ker}(Q \to M)_S$. Consider

$$Q \supset JQ \supset J^2Q \supset \cdots \supset 0 .$$

Any term of this chain is R-S-bimodule, and all of it's factor are semisimple as R-module, so as R-S-bimodule. Thus $\mathrm{Ker}(Q \to M)_S / J\cdot \mathrm{Ker}(Q \to M)_S$ is embedded to $\oplus J^iP / J^{i+1}P$. Hence $\oplus J^iP / J^{i+1}P$ is generated direct sum of at most length A_A's copies of P/JP as right S-module. Thus endlen X = length Q / JQ_S + length $Q' / JQ' \leq$ endlen $M \cdot (\text{length } A_A + 1)$.

□

§3. MAIN RESULTS

Throughout this section, we assume next.

(*) (R, ξ) is finitely generated over C, and R is artinian C-algebra over C for some commutative local artinian ring C with radical m and residue field k. i.e. R is finitely generated C-algebra, and both term of ξ is finitely generated as C-module.

Under condition (*), we prove next theorem.

THEOREM For any lift pair (R, ξ), next condition (C2)-(C4) are all equivalent. If field k is not finite field, then these are equivalent (C1).

(C1) $\xi(R)$ has infinitely many non-isomorphic indecomposable objects of some fixed length.

(C2) $\xi(R)$ has infinitely many non-isomorphic indecomposable objects of some fixed endlen.

(C3) $\xi(R)$ has an indecomposable object $X = (P, e)$ with $P / \mathrm{rad}(P)$ has R-$C[T]_{mC[T]}$-bimodule structure, and it is finite length as right $C[T]_{mC[T]}$-module.

(C4) $\xi(R)$ has an indecomposable object X with infinite length and finite length.

For the proof of this theorem, we use after lemmas.

LEMMA If M is semisimple left R-module, then (C2)-(C4) are equivalent to $\xi(R)$ has infinite representation type, (R, ξ) is said to be infinite representation type if there is infinitely many isomorphism classes of indecomposable finite length object in $\xi(R)$. If in addition k is not finite field, these are equivalent to (C1).

LEMMA If N is maximal subbimodule of M, and if (R_N, ξ_N) has infinite representation type, then (R, ξ) satisfies (C2)-(C4). In addition k is not finite field, (R, ξ) satisfies (C1).

Proof of theorem. It is easily to seen (C1) $\Rightarrow$ (C2), (C3) $\Rightarrow$ (C4). So it is sufficient to prove (C2) $\Rightarrow$ (C3), (C4) $\Rightarrow$ (C2), and (C4) $\Rightarrow$ (C1) in case k is not finite field.

(C2) $\Rightarrow$ (C3). Assume (C2), we use induction on d at statement (C2) and Biheight M. In case $M = 0$, then $\xi(R) \cong \mathrm{Proj}(R)$ can't satisfies (C2). So we may assume $M \neq 0$. Let N be a some maximal subbimodule of M containing $M\mathrm{rad}(R) + \mathrm{rad}(R)M$. If (R_N, ξ_N) has infinite representation type, then by above lemma, (R, ξ) satisfies (C3). Next we concider case it has finite representation type. Let $\{X_i\}$ is non-isomorphic indecomposable objects with endlength d. Since (R_N, ξ_N) has finite representation type, we put $\{Y_1, \cdots, Y_n\}$ a complete set of isomorphic classes of indecomposable objects. Thus $\sigma_N(X_i)$ decompose :

$$\sigma_N(X_i) \cong Y_1^{m_{i1}}, \cdots, Y_n^{m_{in}} .$$

We put $Y = \oplus \{Y_j \mid m_{ij} \neq 0 \text{ for infinitely many } i\}$, then $\sigma_N(X_i)$ is in add(Y) for infinitely many i. After we concider only such index. Then for any i, there is $Z_i \in \xi_Y(R_Y)$ such that $X_i = \tau_Y(Z_i)$. Hence (R_Y, ξ_Y) satisfies (C2). On the other hand, there is infinitely many disjoint finite subsets J_k of indexies $\{i\}$ such that $\mathrm{add}(\oplus_{i \in J_k} Y_i)$ contains Y. Thus for any k, $\oplus_{i \in J_k} Z_i$ are sincere. Hence by previous section, either $\mathrm{endlen}(\oplus_{i \in J_k} Z_i)$ is strictly less than $\mathrm{endlen}(\oplus_{i \in J_k} X_i)$, or Biheight $M_Y \leq$ Biheight $N <$ Biheight M. If in second case, by induction, (R_Y, ξ_Y) satisfies (C3). Then since by result of previous section, (R, ξ) satisfies (C3). Next if second condition is not true,then for any k, $\mathrm{endlen}(\oplus_{i \in J_k} Z_i)$ is less than $\mathrm{endlen}(\oplus_{i \in J_k} X_i) = d \cdot {}^{\#}J_k$. Hence since Z_i is non isomorphic each other, $\mathrm{endlen}(\oplus_{i \in J_k} Z_i) = \Sigma_{i \in J_k} Z_i$. So there are i such that $\mathrm{endlen}(Z_i)$ is strictly less than d for each k. Then (R, ξ) satisfies (C3) on same ways.

after two implication is proved by the same method of above.

□

CORROLLARY For artinian C-algebra A, next condition (C2)-(C4) are all equivalent. If field k is not finite field, then these are equivalent (C1).

- (C1) Mod A has infinitely many non-isomorphic indecomposable objects of some fixed length.
- (C2) Mod A has infinitely many non-isomorphic indecomposable objects of some fixed endlen.
- (C3) Mod A has an indecomposable object X which has A-$C[T]_{mC[T]}$-bimodule structure, and it is finite length as right $C[T]_{mC[T]}$-module.
- (C4) Mod A has an indecomposable object X with infinite length and finite length as End(X)-module.

References

[1] D. Bear, W. Geigle and H. Lenzing, The preprojective algebra of a tame hereditary Artinian algebra, Commun. Algebra, 15 (1987), 425 - 457.

[2] W. W. Crawley-Boevey, Regular modules for tame hereditary algebras, to appear in Proc. London Math. Soc.

[3] W. Crawly Boevey, Modules of finite length over their endomorphism rings, Representations of Algebras and Related Topics, (L.M.S. Lecture Note Series 168, Cambredge Univ. Press, 1992),127 - 184.

[4] W. Crawly-Boevey, Matrix reductions for artinian rings, and an application to rings of finite representation type, to appear in J.Algebra.

[5] J. C. McConnell and J. C. Robson, 'Noncommutative Noetherian rings' (Wiley, Chichester, 1987)

[6] C. M. Ringel, Infinite dimentional representations of finite dimentional hereditary algebras, Ist. Naz. Alta Mat., Symp. Math. 23 (1987) 321 - 412.

Department of Mathematics
Osaka City University
Osaka, 558, Japan

Derived equivalence and Perfect isometry II

お茶の水女子大学（理）　宇佐美 陽子

§1. 序

Brouéは、1989年の論文[B]の定理3.1で次のことを論じている。

つまり、ある有限群のblockと、ある有限群のblockのderived categoryどうしの間にtriangulated category同値がある場合、各々のblockの通常一般指標の間には何が引き起こされるかというものである。結論として、既約指標に既約指標もしくはその−1倍を対応させるbijective isometryが引きおこされ、しかもそれは、perfect isometryと呼ばれるような強い性質を持つというのである。

ここで言う有限群のblockとは、§2のような完備離散付値環$\mathcal{O}$上のblock algebraであり、blockのderived categoryとは、その全ての左-modulesからなるcategoryを$\mathfrak{A}$とした時、$D^b(\mathfrak{A})$と書かれるものである。（定義は、[H],[W]参照。）　この仮定の部分は、Rickardによって同値な言い換えが幾つもあり（[R] Th.6.4, Prop.9.1）それは、§2で紹介した上で使う。（§3の定義2も見よ。）

しかし、ここで簡単に、環論的に言っておこう。blockをB, bとする。有限生成左B-modulesのcategoryをB-modと書いた時、この仮定は、

(1.1)　D^b(B-mod) が D^b(b-mod) と triangulated category として同値

と同じであり、この仮定の下で $\mathcal{O}$ の商体 K に対し、D^b($K\underset{\mathcal{O}}{\otimes}$B-mod) と D^b($K\underset{\mathcal{O}}{\otimes}b$-mod) の間に何が引き起こされるか考えているということになる。(§2で少し詳しく説明する。)

ところが、この証明は、スケッチとして、概略が書いてあるに過ぎず、読みにくい状態なので、少し補足をして、幾らかでも読み易くなるように試みた。いわゆる Broué 流の言い方による derived category 同値が指標の上に落とした影（影の落ちるメカニズム）を読み取ろうというわけである。

ところで有限群の modular 表現を研究するものが perfect isometry に関心を持つのは、有名な Alperin の weight 予想 [A] に関連する為である。可換 defect group P を持つ有限群 G の block B については、Alperin の weight 予想は、ごく単純な形となり、B の Brauer correspondent と呼ばれる $N_G(P)$ の block $Br_P(B)$ を b として

(1.2)　B と b のそれぞれの irreducible modular 指標の個数が等しい

ということになる。B と b の間に perfect isometry があれば、perfect isometry の性質の一つとして (1.2) は出てくるのである。(定理2 (ii) 参照)

なお、Alperin の weight 予想は、Dade の仕事 [D1][D2]（Dade 予想 1990）によって単純群でのチェックに帰されるであろうと言われている。その一方で、可換 defect group P を持つ block B については、$b = \mathrm{Br}_P(B)$ との間に、(1.2) が成り立つ以上の密接な関係があるのではないかと考えられ、Broué は、上記の derived category どうしの triangulated category としての同値が存在するのではないかと問題提起（[B] 問題 6.2）している。この問題がどのような具体例で解決されているかは、奥山氏の I の方に挙げられていると思う。

ちなみに、この状況では、B-subpairs と b-subpairs の "ふるまい" が同じであり、derived category どうしに多分もっと深い同値があってそれが指標の上に落ちてきた影として perfect isometry よりもっと強い関係すなわち、isotypie（[B] Def.4.6）を Broué は予想している。

予想（[B] 予想 6.1） 可換 defect group P を持つ block B と $\mathrm{Br}_P(B)$ は isotypie

この予想は、惰性剰余群の小さい時は解決している。（[BP] [U1] [PU1][PU2] [U2] [U3]）これらはいずれも isotypie より強い形で block が同じタイプ（[B] Def 4.6 注意 2 の "良い定義" 参照）となっている。

本稿では、§2 で表記法を並べ、triangulated category どうしの同値や perfect isometry の定義など最

小限のことを述べる。derived categoryや triangulated category について詳しいことは宮地氏の講義及び[H],[W]を参照して欲しい。§3では、Brouéの定理の証明の方針を述べ、§4で証明に入る。

§5では、下の命題の証明をつけた。Brouéの初期の予想([B] section 6)の反例として、Thompsonが具体的な群のblockを挙げた時、derived category 同値のない事を、各々のカルタン行列の定義する二次形式が同値でないことから示した(奥山氏のI参照)が、その根拠となる命題である。[B] Th.3.1のRemark 3にもその事が書かれているが、余りきちんと書かれていないので、環として、より一般的な命題の形にして簡単な証明をつけた。(ΛP, $K^b(\Lambda P)$など§2の定義を見よ。)

命題 kは任意の体，Λ, Γはk上有限次元 algebra とする。$K^b(\Lambda P)$と$K^b(\Gamma P)$が triangulated category として同値ならば、$C(\Lambda)$，$C(\Gamma)$をそれぞれのカルタン行列として

$$C(\Lambda) = A\, C(\Gamma)\, {}^tA$$

をみたす$\mathbb{Z}$成分の行列の中で可逆な行列Aが存在する。特に $\det C(\Lambda) = \det C(\Gamma)$が成り立つ。

Rickardは右-moduleでやっているが([R] Th.6.4, Prop. 9.1) ここではBrouéにあわせ左-moduleを主とする。環論が専門というわけでなく、書き方がぎこちないかも知れない事を

前もってお詫びしたい。

§2. 表記法と定義

次のような表記法とする。

G, H : 有限群

$\mathcal{O}$: 完備離散付値環

$\mathfrak{p}$: $\mathcal{O}$ の maximal ideal

$\mathcal{O}/\mathfrak{p}$: 標数 $p \neq 0$ の体で代数的に閉じているとする

K : $\mathcal{O}$ の商体で標数零。考える有限群に対し十分大

e, f : 各々 $Z\mathcal{O}G$, $Z\mathcal{O}H$ の原始巾等元

$B = \mathcal{O}Ge$: $\mathcal{O}G$ の block algebra

$b = \mathcal{O}Hf$: $\mathcal{O}H$ の block algebra

$K \otimes_{\mathcal{O}} B = KGe$, $K \otimes_{\mathcal{O}} b = KHf$

以下、環 Λ (具体的には B, $K \otimes_{\mathcal{O}} B$ 等) に対して

Λ-mod : 有限生成左 Λ-modules よりなる category

${}_{\Lambda}P$: 有限生成 projective 左 Λ-modules よりなる category

$K_0(\Lambda\text{-mod})$: Λ-mod の Grothendieck group
(${K_0(K \otimes_{\mathcal{O}} B\text{-mod})}$ は B に属す通常一般指標のつくる加法群となる)

$K_0({}_{\Lambda}P)$: ${}_{\Lambda}P$ の Grothendieck group

$K^{-b}(\Lambda\text{-mod})$: Λ-mod の object からなる complex を

$$X^{\bullet} : \quad \cdots \to X^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}} X^{i} \xrightarrow{d^{i}} X^{i+1} \to \cdots$$

と書いた時、上側 bounded, かつほとんど至る所 cohomology 零になるもの全体を

object とし、morphism は (degree 0 の) complexes の morphism の homotopy 同値類とした category

$K^{-b}({}_\Lambda P)$: ${}_\Lambda P$ の object からなる同上の性質の complex 全体を object とし、morphism も同上のものとした category

$K^{b}(\Lambda\text{-mod})$: $K^{-b}(\Lambda\text{-mod})$ の中で両側 bounded complexes からなる full subcategory

$K^{b}({}_\Lambda P)$: $K^{-b}({}_\Lambda P)$ の中で両側 bounded complexes からなる full subcategory

$(\Lambda\text{-mod})^{(\mathbb{Z})}$: 次数つき有限生成左 Λ-modules の category

Λ^{op} : Λ の opposite ring

また category $\mathfrak{A}$ の object 全体を $\mathrm{Obj}(\mathfrak{A})$, morphism 全体を $\mathrm{Mor}(\mathfrak{A})$ と書く。

ここで Broué の定理を述べるが、その仮定は、

(2.1) $K^{b}({}_B P)$ と $K^{b}({}_b P)$ が triangulated category として同値

に言い換えられ ([R] Th.6.4)、今は、B や b が左 Noether 的な為、更に言い換えた形 ([R] Prop. 8.1, Prop. 8.2) で書いておく。

<u>定理 1 ([B] Th.3.1) (Broué)</u>

(2.2) $K^{-b}({}_B P)$ と $K^{-b}({}_b P)$ が triangulated category として同値

ならば、$K_0(K \underset{\mathcal{O}}{\otimes} B)$ と $K_0(K \underset{\mathcal{O}}{\otimes} b)$ の間に perfect isometry

と呼ばれる bijective isometry が存在する。

$D^b(B\text{-mod})$ は、今 $K^{-b}({}_BP)$ と同一視できることで、仮定 (2.2) は、(1.1) と同じとなる。

仮定 (2.2) の補足をしておこう。triangulated category 間の関手とは、加法的関手であって、かつ triangulated category についている translation と呼ばれる autofunctor と可換，かつ distinguished triangles を保存するという条件がつけ加わる。B や b のように $\mathcal{O}$-algebra の場合であれば $\mathcal{O}$-加法的という条件も要求される。仮定 (2.2) は、

(2.3) triangulated category 間の関手

$$\mathbb{I}: \quad K^{-b}({}_bP) \longrightarrow K^{-b}({}_BP)$$

$$\mathbb{R}: \quad K^{-b}({}_BP) \longrightarrow K^{-b}({}_bP)$$

が存在して $\mathbb{I}\circ\mathbb{R}$, $\mathbb{R}\circ\mathbb{I}$ が各々恒等関手と自然同値

ということである。

後で必要なので translation の説明をしておく。complex $X^\bullet$ に translation を1回行なった $X^\bullet[1]$ とは、各 i について $X^\bullet[1]^i = X^{i+1}$, $d^i_{X^\bullet[1]} = -d^{i+1}_{X^\bullet}$ という complex である。n 回 translation したものは $X^\bullet[n]$ と書く。module X について零次に X があり、他の次数では零となっている complex を慣例で同じ X と書く。

さて、§1 で、Broué の定理1は、仮定 (1.1) の下での

$D^b(K \underset{O}{\otimes} B\text{-mod})$ と $D^b(K \underset{O}{\otimes} b\text{-mod})$ の関係を論じていると言ったのは、$D^b(K \underset{O}{\otimes} B\text{-mod})$ と $(K \underset{O}{\otimes} B\text{-mod})^{(\mathbb{Z})}$ がcategory同値だからである。それは、$D^b(K \underset{O}{\otimes} B\text{-mod})$ の任意の object がその cohomology を取って作った微分なしの object と同型となることによる。そして実際証明では (2.2) の仮定の下で

(2.4)　$(K \underset{O}{\otimes} B\text{-mod})^{(\mathbb{Z})}$ と $(K \underset{O}{\otimes} b\text{-mod})^{(\mathbb{Z})}$ の category 同値を示す（そのような関手を作る）方向で行ない、これを指標の方へ落とす形を取る。

次に perfect isometry の定義を与えよう。([B] Def 1.4 Prop. 4.1)

<u>定義 1</u>　$K_0(K \underset{O}{\otimes} B)$ と $K_0(K \underset{O}{\otimes} b)$ の間に perfect isometry が存在するとは、isometry

$$F : K_0(K \underset{O}{\otimes} b) \longrightarrow K_0(K \underset{O}{\otimes} B)$$
$$F' : K_0(K \underset{O}{\otimes} B) \longrightarrow K_0(K \underset{O}{\otimes} b)$$

が存在して、$F \circ F'$ も $F' \circ F$ も恒等写像となり、更にそれぞれの群の上の K-valued central functions どうしの間に linear に拡張した時、次の条件をみたす時に言う。

(i)　F は $CF(H, b, O)$ を $CF(G, B, O)$ にうつしている。

(ii)　F' は $CF(G, B, O)$ を $CF(H, b, O)$ にうつしている。

(iii)　F は $CF_{p'}(H, b, K)$ を $CF_{p'}(G, B, K)$ にうつしている。

(iv)　F' は $CF_{p'}(G, B, K)$ を $CF_{p'}(H, b, K)$ にうつしている。

（ただし $CF(G, B, O)$ は G 上の O-valued central functions の中で B に属すものの集合，$CF_{p'}(G, b, K)$ は G 上の

K-valued central functions の中で B に属しかつ G の p' 元以外の元上零となるもの全体を表わしている。)

perfect isometry の存在から保証される事を挙げておく。derived category 同値から言えることのうち群論で欲しいものはほとんど出ている。(奥山氏の I 参照)

定理 Z ([B] Prop 1.3, Th. 1.5)(Broué) $B = \mathcal{O}Ge$, $b = \mathcal{O}Hf$ として $K_0(K \otimes_{\mathcal{O}} B)$ と $K_0(K \otimes_{\mathcal{O}} b)$ の間に perfect isometry が存在するならば、次のことが成り立つ。

(i) $Z(B) \simeq Z(b)$ algebra 同型

(ii) $K_0({}_{kGe}P) \simeq K_0({}_{kHf}P)$

(iii) $C(B)$, $C(b)$ を各々 B と b のカルタン行列とすれば、$\mathbb{Z}$-成分の行列の中で可逆な行列 A で

$$C(B) = A\, C(b)\, {}^tA$$

をみたすものが存在する。

§3 方針

ここで ring Λ と Γ の間の森田同値を思い出そう。それは、次のような性質を持つ左 Λ-module M の存在と同値であった。

(1) 有限生成 projective Λ-module

(2) $\mathrm{End}_{\Lambda}(M) \cong \Gamma$

(3) generator, すなわち適当な n に対し $\Lambda \mid \underbrace{M \oplus \cdots \oplus M}_{n \text{ 個}}$

そこで M は、(2)によって自然に (Λ,Γ)-bimodule ${}_\Lambda M_\Gamma$ となり、全ての左 Γ-modules の category から全ての左 Λ-modules の category への同値を与える関手は ${}_\Lambda M_\Gamma \otimes_\Gamma -$ であった。
一方で、derived category 同値 すなわち

<u>定義 2</u> ring Λ と Γ が derived category 同値とは、全ての左 modules の作る category を $\mathfrak{A}$ とした時 $D^b(\mathfrak{A})$ どうしが triangulated category として同値

についても、M と類似した性質を持つ tilting complex の存在と同値である([R] Th. 6.4)。

<u>定義3</u> tilting complex T とは、次をみたすものである。

(1) 有限生成 projective Λ modules からなる bounded complex

(2) $\mathrm{End}\,(T) \cong \Gamma$

(3) $\mathrm{Hom}\,(T, T[i]) = 0 \quad (\forall i \neq 0$ に対し$)$

(4) T の有限直和の直和因子全体からなる subcategory は triangulated category として $K^b({}_\Lambda P)$ を生成する。

ここでは、上の derived category 同値を与える関手を T を使って作るのは、森田同値程は簡単でない。([R])
しかし、$(K \otimes_{\mathfrak{o}} B\text{-mod})^{(\mathbb{Z})}$ と $(K \otimes_{\mathfrak{o}} b\text{-mod})^{(\mathbb{Z})}$ の間の

category 同値を与える関手を、(Bと$\mathcal{B}$がderived category 同値の下で)
Tを使って作るのは、森田同値の時に似て簡単である。

まず tilting complex $\in \mathrm{Obj}(K^b({}_BP))$ を商体Kに係数環拡大した後、cohomology を取って微分の無い complex すなわち普通の次数つき module にしてしまう。tilting complex は、その endomorphism が$\mathcal{B}$に同型であった(定義3(2))ので、このようにした次数つき module にもその性質が継承されて、次数つき$(K\otimes B, K\otimes\mathcal{B})$-bimodule の構造が入っている。これと、$(K\otimes\mathcal{B}\text{-mod})^{(\mathbb{Z})}$ の object とのテンソル積を作れば二重次数つき左$K\otimes B$-module ができるので、total complex を作る要領でやれば、ふつうの1つの次数つきの$(K\otimes B\text{-mod})^{(\mathbb{Z})}$のobject を得る。これが(2.4)の category 同値を与える関手というわけである。(§4 命題3)

こうして得られた関手を $K_0(K\otimes B)$と$K_0(K\otimes\mathcal{B})$ の間に落としてやれば bijective isometry が構成できる。更に perfect isometry となる定義1の(i)〜(iv)の性質はひとえに、もとの tilting complex が有限生成 projective modules の bounded complex であった(定義3(1))というその projective 性より生じる。

§4. Brouéの定理の証明

仮定は、(2.3)のような関手$\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$の存在であった。

まず次のことが言える。 $X^{\cdot} \in \mathrm{Obj}(K^{-b}({}_B P))$で有限生成 projective 左B-modules の bounded complex に同型なものは、与えられた$Y^{\cdot} \in \mathrm{Obj}(K^{-b}({}_B P))$に対して十分大きい$i$達については $\mathrm{Hom}(X^{\cdot}, Y^{\cdot}[i])=0$ とできるものとして特徴づけられる。(参考[R] 453頁) このことから次の事がわかる。

(4.1) $\mathbb{I}$ 及び $\mathbb{R}$ を full subcategory $K^b({}_b P), K^b({}_B P)$ に制限すると、この両者の間の triangulated category としての同値を誘導する。

さて、complex $b \in \mathrm{Obj}\, K^b({}_b P)$ に対し、$\mathbb{I}(b) \in \mathrm{Obj}(K^b({}_B P))$ が tilting complex となる([R] Th.6.4 中にある)。そこで定義3(2)(3)より

(4.2) ring 同型 : $\mathrm{End}(\mathbb{I}(b)) \cong \mathrm{End}(b) \cong b$

$0 \neq {}^{\forall} i \in \mathbb{Z}$ につき $\mathcal{O}$-module同型 :

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{I}(b), \mathbb{I}(b)[i]) \cong \mathrm{Hom}(b, b[i])=0$$

が成り立つ。同様に tilting complex $\mathbb{R}(B) \in \mathrm{Obj}(K^b({}_b P))$ についても

(4.3) ring 同型 : $\mathrm{End}(\mathbb{R}(B)) \cong \mathrm{End}(B) \cong B$

$0 \neq {}^{\forall} i \in \mathbb{Z}$ につき $\mathcal{O}$-module 同型

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{R}(B), \mathbb{R}(B)[i]) \cong \mathrm{Hom}(B, B[i])=0$$

が成り立つ。

Broué は、1992年 Ottawa での国際会議では、

各々 bimodule からなる complex となった $\mathbb{I}(b)$, $\mathbb{R}(B)$を積極的に使って block の時の derived category 同値を言い換えているが、ここではそこまでは言及しない。

さて、ここで H は cohomology を取る操作として次のように定義する。

<u>定義 4</u>

$$M_K \underset{def}{=} K\underset{O}{\otimes} H\,\mathbb{I}(b) \in Obj(K^b(K\underset{O}{\otimes} B\text{-mod}))$$
$$N_K \underset{def}{=} K\underset{O}{\otimes} H\,\mathbb{R}(B) \in Obj(K^b(K\underset{O}{\otimes} b\text{-mod}))$$

注意として

$$K\underset{O}{\otimes} H(\mathbb{I}(b)) = H(K\underset{O}{\otimes} \mathbb{I}(b)),$$
$$M_K \in Obj((K\underset{O}{\otimes} B\text{-mod})^{(\mathbb{Z})})$$

等がある。M_K, N_K にもとの tilting complex の性質(4.2), (4.3)を持ち込む為に、係数環を商体Kへ拡大するとどうなるか、また cohomology を取ったものとどう関連するかについて補題を準備する。

<u>Lemma 1</u> ${}^\forall X^\bullet$, ${}^\forall Y^\bullet \in Obj(K^{-b}({}_BP))$で片方は $Obj(K^b({}_BP))$に入っているならば

$$Hom_{K^{-b}(K\underset{O}{\otimes} B\text{-mod})}(K\underset{O}{\otimes} X^\bullet, K\underset{O}{\otimes} Y^\bullet) = K\underset{O}{\otimes} Hom_{K^{-b}({}_BP)}(X^\bullet, Y^\bullet)$$

が成り立つ。

<u>Lemma 2</u> (i) 左$K\underset{O}{\otimes}B$-moduleからなる${}^\forall$bounded complex $X^\bullet$は

$$X^\bullet = H(X^\bullet) \oplus (\text{零obj と同型なもの有限個の直和})$$

となる。

(ii) ${}^{\forall}X^{\bullet} \in \mathcal{O}bj(K^{-b}(K\underset{o}{\otimes}B\text{-mod}))$ について

$$X^{\bullet} \cong H\!\!\mid\!\mid(X^{\bullet})$$

となる。

さらに、M_Kの構造を知る為、次の準備をする。

Lemma 3. 零 object 手 ${}^{\forall}X^{\bullet} \in \mathcal{O}bj(K^{-b}(eP))$を固定すると、

$$\mathrm{Hom}\ (b[i],\ X^{\bullet}) \neq 0$$

となる $i \in \mathbb{Z}$ が存在する。

さて、(4.2)だけからわかるM_Kの構造は、以下である。

命題 1

(i) ① $\mathrm{End}_{K^b(K\underset{o}{\otimes}B\text{-mod})}(M_K) \cong K\underset{o}{\otimes} b$

② $\mathrm{End}_{(K\underset{o}{\otimes}B\text{-mod})(\mathbb{Z})}(M_K) \cong K\underset{o}{\otimes} b$

③ M_Kには異なる次数に同型な simple 左$K\underset{o}{\otimes}B$-module は出現しない。

④ 左 $K\underset{o}{\otimes}B$-module として $\mathrm{End}_{K\underset{o}{\otimes}B}(M_K) \cong K\underset{o}{\otimes} b$

⑤ M_Kは $(K\underset{o}{\otimes}B,\ K\underset{o}{\otimes}b)$-bimodule

(ii) 任意に固定した simple 左 $K\otimes B$-module が M_K のどこかの次数に出現する。

(iii) simple $K\underset{o}{\otimes}B$-module 同型類の個数は、simple $K\underset{o}{\otimes}b$-module

同型類の個数に等しい。

（証明）

(i) (4.2) の最初の式と Lemma 1 から $K\underset{\mathcal{O}}{\otimes}\mathrm{II}(\mathscr{L})$ の endomorphism ring を決定し Lemma 2 よりそれが $M_K = H(K\underset{\mathcal{O}}{\otimes}\mathrm{II}(\mathscr{L}))$ の endomorphism ring とわかり ① が出る。微分なしになっているので ② も出る。全く同様に (4.2) の後 3 の式から $0 \neq {}^\forall i \in \mathbb{Z}$ につき

$$\mathrm{Hom}(M_K, M_K[i]) = 0$$

が出て、これは ③ を意味する。③ より M_K から M_K への morphism は、同次数間という制限をはずしてよくなり ④ が出て、そこで ④ は M_K への右乗法なので ⑤ が出る。

(ii) $\mathcal{O}$-free 左 B-module W で $K\underset{\mathcal{O}}{\otimes}W$ が与えられた simple 左 $K\underset{\mathcal{O}}{\otimes}B$-module となるものが存在する。$W'^{\bullet}$ を W の projective resolution とすれば $W'^{\bullet} \in K^{-,b}({}_BP)$ かつ $H(W'^{\bullet}) \cong W$ となっている。さて $\mathbb{R}(W'^{\bullet}) \in K^{-,b}({}_{\mathscr{L}}P)$ に Lemma 3 を適用し、適当な $i \in \mathbb{Z}$ で

$$0 \neq \mathrm{Hom}(\mathscr{L}[i], \mathbb{R}(W'^{\bullet}))$$

II で移しても同型故

$$0 \neq \mathrm{Hom}(\mathrm{II}(\mathscr{L})[i], \mathrm{II}(\mathbb{R}(W'^{\bullet}))) \cong \mathrm{Hom}(\mathrm{II}(\mathscr{L})[i], W'^{\bullet})$$

Lemma 1 をまず使い、次に Lemma 2 で両方の cohomology を取り

$$0 \neq \mathrm{Hom}(K\underset{\mathcal{O}}{\otimes}\mathrm{II}(\mathscr{L})[i], K\underset{\mathcal{O}}{\otimes}W'^{\bullet}) \cong \mathrm{Hom}(M_K[i], K\underset{\mathcal{O}}{\otimes}W)$$

となり結論が出る。

(iii) 与えられた module に直既約因子として出る indecomposable moduleの同型類には、もとのmoduleのendomorphism ringの原始巾等元の可逆元による共役類が1:1対応していることは知られている。そこで左 $K\underset{\circ}{\otimes}B$-module M_Kと左 $K\underset{\circ}{\otimes}b$-module $K\underset{\circ}{\otimes}b$ を (i)の⑤を使って比べると

$$\mathrm{End}_{K\underset{\circ}{\otimes}B}(M_K) \cong K\underset{\circ}{\otimes}b \cong \mathrm{End}_{K\underset{\circ}{\otimes}b}(K\underset{\circ}{\otimes}b)$$

となっており、更に今はindecomposable moduleはsimple moduleなので (ii)とあわせて結論が出る。(証明終わり)

N_Kについても(4.3)のみから同様の命題が成り立つ。次にM_KとN_Kを対比させて、同時に、構造を決定してしまう。

<u>命題2</u> (i) $\forall i \in \mathbb{Z}$について各々$(K\underset{\circ}{\otimes}B\text{-mod})^{(\mathbb{Z})}$及び$(K\underset{\circ}{\otimes}b\text{-mod})^{(\mathbb{Z})}$でのmorphismとして

$$(4.4) \qquad \mathrm{Hom}(K\underset{\circ}{\otimes}B,\ M_K[i]) \cong \mathrm{Hom}(N_K,\ K\underset{\circ}{\otimes}b[i])$$

なる左$K\underset{\circ}{\otimes}B$-module同型が存在し、更に

$$(4.5) \qquad \mathrm{Hom}(M_K,\ K\underset{\circ}{\otimes}B[-i]) \cong \mathrm{Hom}(K\underset{\circ}{\otimes}b,\ N_K[-i])$$

なる左$K\underset{\circ}{\otimes}b$-module同型が存在する。

(ii) 任意にiを固定すると、M_Kのi次成分が$\sum_j U_j \underset{K}{\otimes} V_j^*$と書ける時、$N_K$の$-i$次成分は$\sum_j V_j \underset{K}{\otimes} U_j^*$と書ける。ただし各$U_j$はsimple左$K\underset{\circ}{\otimes}B$-module, 各$V_j$はsimple左$K\underset{\circ}{\otimes}b$-moduleであり $*$はdual moduleで右-

moduleになったものとする。そしてU_jはjが異なる時同型でなく、V_jも同様である。

（証明）

(i) 次のO-module同型が存在する。

$$(4.6)\qquad \mathrm{Hom}_{K^{-b}({}_BP)}(B,\ \mathrm{II}(b)[i]) \cong \mathrm{Hom}_{K^{-b}({}_bP)}(\mathbb{R}(B), b[i])$$

さらに morphism の合成を考えると

$$\mathrm{End}\,(B) \cong B \cong \mathrm{End}(\mathbb{R}(B))$$

が(4.6)の両辺いずれにも右から（morphism合成の最初）作用していると考えうる。ただし endomorphism は、右乗法になっているので、(4.6)は右B^{op}-module同型すなわち左B-module同型となる。ここで Lemma 1, Lemma 2, (4.6)をあわせ、既に微分なしになっていることから(4.4)を得る。(4.5)も全く同様。

(ii) (4.4)は、左$K\underset{O}{\otimes}B$-module同型

$$\mathrm{Hom}_{K\underset{O}{\otimes}B}(K\underset{O}{\otimes}B,\ M_K\text{の}i\text{次成分}) \cong \mathrm{Hom}_{K\underset{O}{\otimes}b}(N_K\text{の}-i\text{次成分},\ K\underset{O}{\otimes}b)$$

を意味し、それは

(4.7) 左$K\underset{O}{\otimes}B$-module同型：$(M_K\text{の}i\text{次成分}) \cong (N_K\text{の}-i\text{次成分})^*$

を意味する。＊は dual module である。同じく(4.5)は、左$K\underset{O}{\otimes}b$-module同型

$$\mathrm{Hom}_{K\underset{O}{\otimes}B}(M_K\text{の}i\text{次成分},\ K\underset{O}{\otimes}B) \cong \mathrm{Hom}_{K\underset{O}{\otimes}b}(K\underset{O}{\otimes}b,\ N_K\text{の}-i\text{次成分})$$

を意味し、それは、

(4.8) 左 $K\underset{\circ}{\otimes}\mathcal{B}$-module 同型: $(M_K$ の i 次成分$)^* \cong (N_K$ の $-i$ 次成分$)$

を意味する。(4.7) と (4.8) より M_K の i 次成分と N_K の $-i$ 次成分が dual になる形とわかる。命題 1 (ii) より M_K には全ての simple 左 $K\underset{\circ}{\otimes}B$-module が出ているが、一方 同じく N_K の性質の方から、全ての simple 右 $K\underset{\circ}{\otimes}\mathcal{B}$-module も出ていることがわかる。命題 1 (i) ④ より 左 $K\underset{\circ}{\otimes}B$-module として M_K には同型な simple 左 $K\otimes B$-module がどれかの simple 左 $K\otimes\mathcal{B}$-module の次数だけの重複度で出ていることとを考えあわせて (ii) が出る。(証明終わり)

$(K\underset{\circ}{\otimes}\mathcal{B}\text{-mod})^{(\mathbb{Z})}$ から $(K\underset{\circ}{\otimes}B\text{-mod})^{(\mathbb{Z})}$ への関手を M_K を使って作ろう。$Y \in Obj((K\underset{\circ}{\otimes}\mathcal{B}\text{-mod})^{(\mathbb{Z})})$ に対し $M_K \overset{L}{\underset{K\underset{\circ}{\otimes}\mathcal{B}}{\otimes}} Y$ すなわち n 次成分が

$$\bigoplus_{l+m=n} (M_K \text{ の } l \text{ 次成分}) \underset{K\underset{\circ}{\otimes}\mathcal{B}}{\otimes} (Y \text{ の } m \text{ 次成分})$$

なる $(K\underset{\circ}{\otimes}B\text{-mod})^{(\mathbb{Z})}$ の object を対応させる。零次に V_j があるだけで他は零の次数つき左 $K\underset{\circ}{\otimes}\mathcal{B}$-module を同じく V_j と書くと 命題 2 (ii) のように M_K の i 次成分に $U_j\underset{K}{\otimes}V_j^*$ が出ているとして

$$U_j \underset{K}{\otimes} V_j^* \underset{K\underset{\circ}{\otimes}\mathcal{B}}{\otimes} V_j \cong U_j$$

より $M_K \overset{L}{\underset{K\underset{\circ}{\otimes}\mathcal{B}}{\otimes}} V_j$ は i 次成分が U_j で他は零の次数つき左 $K\underset{\circ}{\otimes}B$-module となる。$f \in Hom(Y, Y')$ とすると、

次数つきmoduleのmorphismは同次数の間のみであり、またYもY′もsimple moduleの直和になっていることから、Yのn次成分にV_jがt個の直和になって出ていれば、そこからは、Y′のn次成分の中のV_jの直和になっている部分へのhomomorphismのみ考えればよいことになる。それはV_jが絶対既約になっていることでK上の行列で表わされ、今度は、$M_K \overset{L}{\underset{K\otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{b}}{\otimes}} Y$ の$i+n$次成分の中のt個のU_jの直和の部分から、やはり$M_K \overset{L}{\underset{K\otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{b}}{\otimes}} Y'$ の$i+n$次成分中、U_jの直和となっている部分へのhomomorphismとしてその行列が使える。U_jも絶対既約なので、それは全単射の対応となる。このやり方でfの像を $\mathrm{Hom}(M_K \overset{L}{\underset{K\otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{b}}{\otimes}} Y, M_K \overset{L}{\underset{K\otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{b}}{\otimes}} Y')$ に作ってやれる。この関手を$\mathbb{I}_K$としよう。

<u>命題3</u> $(K\otimes_{\mathcal{O}} B\text{-mod})^{(\mathbb{Z})}$ と $(K\otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{b}\text{-mod})^{(\mathbb{Z})}$ は、category同値であり、その関手は、$\mathbb{I}$, $\mathbb{R}$ から誘導された

$$\mathbb{I}_K = M_K \overset{L}{\underset{K\otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{b}}{\otimes}} - \quad : (K\otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{b}\text{-mod})^{(\mathbb{Z})} \longrightarrow (K\otimes_{\mathcal{O}} B\text{-mod})^{(\mathbb{Z})}$$

$$\mathbb{R}_K = N_K \overset{L}{\underset{K\otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{b}}{\otimes}} - \quad : (K\otimes B\text{-mod})^{(\mathbb{Z})} \longrightarrow (K\otimes_{\mathcal{O}} \mathfrak{b}\text{-mod})^{(\mathbb{Z})}$$

である。

(証明) 上記のように$\mathbb{I}_K$を作り、$\mathbb{R}_K$も同様に作る。

$\mathbb{I}_K$, $\mathbb{R}_K$が加法的関手で $\mathbb{I}_K \circ \mathbb{R}_K$, $\mathbb{R}_K \circ \mathbb{I}_K$ が恒等関手になることも命題2(ii)より明らかである。(証明終わり)

次に、$K_0(K \underset{\mathcal{O}}{\otimes} b\text{-mod})$ から $K_0(K \underset{\mathcal{O}}{\otimes} B\text{-mod})$ への isometry を $\mathbb{I}_K$ から次のように誘導する。$(K \underset{\mathcal{O}}{\otimes} B, K \underset{\mathcal{O}}{\otimes} b)$-bimodule M_K を使ったその各次数における $G \times H$ の表現の指標の交代和(偶数次1倍, 奇数次 -1 倍)を μ とおく。交代和としているので、cohomology を取る前の $K \underset{\mathcal{O}}{\otimes} \mathbb{I}(b)$ から、従って $\mathbb{I}(b)$ から作ったものと一致していることに注意する。また、命題2(ii)のように M_K の i 次成分が $\sum_j U_j \underset{K}{\otimes} V_j^*$ の形の時、U_j, V_j の指標を各々 χ_j, η_j として $(-1)^i \sum_j \chi_j \eta_j$ を作り、各次数 i について和を取った一般指標と μ は同じとなる。また命題2(ii)より N_K から作っても μ は同じ形でありこれまた $\mathbb{R}(B)$ から作ったものに一致していることに注意する。Hの(bに属す)一般指標 η に対して、Gの(Bに属す)一般指標 $I_\mu(\eta)$ を

$$I_\mu(\eta)(g) = \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \mu(g, h^{-1}) \eta(h) \qquad {}^\forall g \in G$$

で定義する。Gの(Bに属す)一般指標 χ に対して、Hの(bに属す)一般指標 $R_\mu(\chi)$ を

$$R_\mu(\chi)(h) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mu(g^{-1}, h) \chi(g) \qquad {}^\forall h \in H$$

で定義する。

命題4　$K_0(K\underset{\circ}{\otimes}B)$ と $K_0(K\underset{\circ}{\otimes}b)$ の間に perfect isometry が存在し、定義1の F, F' は I_μ, R_μ がみたしている。

(証明) I_μ, R_μ が bijective isometry を与えていること、及び $I_\mu \circ R_\mu$, $R_\mu \circ I_\mu$ がいずれも恒等写像になることは、命題3より明らかである。従ってあとは、$F=I_\mu$, $F'=R_\mu$ が定義1の(i)～(iv)をみたすことを示すとよい。

μ は $\mathrm{II}(b)$ の交代和指標なので、偶数次数の分と奇数次数の分に分けて考えると、(B,b)-bimodule で左 B-module として projective module となっている2つのものから作った指標の差の形となっている。この時、[B] Prop. 1.2は Higman の projective module か否かの判定法等、projective というだけから、比較的容易に

(4.9)　$\forall g\in G$, $\forall h\in H$ について $\dfrac{\mu(g,h)}{|C_G(g)|}\in \mathcal{O}$

(4.10)　H の任意の p'元 h, G の任意の p-singular元 g について $\mu(g,h)=0$

の出ることを証明している。[B] 4章の最初の議論は、(4.9)は、$R_\mu=F'$ が (ii) をみたすことを保証し、(4.10)は、$I_\mu=F$ が (iii) をみたすことを保証している。

同様にして、μ は $\mathbb{R}(B)$ の交代和指標なので、$(\mathcal{b}, B)$-bimodule で左 $\mathcal{b}$-module として projective module となっているもの２つから作った差の形になっている。全く同様にして

(4.11)　$\forall g \in G$, $\forall h \in H$ について　$\dfrac{\mu(g,h)}{|C_H(h)|} \in \mathcal{O}$

(4.12)　G の任意の p′元 g, H の任意の p-singular 元 h について $\mu(g,h)=0$

が出て、I_μ が (i) をみたし、R_μ が (iv) をみたす。(証明終わり)

§5　命題の証明

Grothendieck は [G] section 2 で triangulated category $\mathcal{T}$ に対する Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{T})$ を次のように定義している。すなわち $Obj(\mathcal{T})$ の生成する free abelian group を作り、全ての distinguished triangle $Y \to X \to Z \to Y[1]$ に対する $X-Y-Z$ で生成される subgroup を考え、それによる quotient group とした。そして、同じく section 3 で

(5.1)　triangulated category として $\mathcal{T}$ と $\mathcal{T}'$ が同値であればその関手を使って自然に abelian group としての同型 $K_0(\mathcal{T}) \cong K_0(\mathcal{T}')$ が得られる

事を示している。同じく section 4 では任意の abelian category $\mathfrak{A}$ について

$$K_0(D^b(\mathfrak{A})) \cong K_0(\mathfrak{A})$$

を示しており、この時の写像と同様にして

$$K_0(K^b(\Lambda P)) \cong K_0(\Lambda P)$$

も出せる。すなわち、$^\forall X \in Obj(\Lambda P)$ に対して $[X] \in K_0(\Lambda P)$ とすると、これに complex $X \in Obj(K^b(\Lambda P))$ に対する $K_0(K^b(\Lambda P))$ の元（同じく $[X]$ と書く）を対応させる。逆向きは、$^\forall X^\bullet \in Obj(K^b(\Lambda P))$ に対する $[X^\bullet] \in K_0(K^b(\Lambda P))$ に $\sum_j (-1)^j [X^j] \in K_0(\Lambda P)$ を対応させるのである。ちなみに $X^\bullet$ は bounded なので非零となっている次数の分を1つ減らす形で作った distinguished triangle を使って書き換え続けると、$K_0(K^b(\Lambda P))$ の中で既に

$$(5.2)\qquad [X^\bullet] = \sum_j (-1)^j [X^j]$$

は成り立っている。

さて、$^\forall X^\bullet,\ ^\forall Y^\bullet \in Obj(K^b(\Lambda P))$ について

$$(5.3)\qquad (X^\bullet, Y^\bullet) = \sum_i (-1)^i \dim_k \mathrm{Hom}(X^\bullet, Y^\bullet[i])$$

と定義すれば（bounded 故有限和）、$[X^\bullet]$, $[Y^\bullet] \in K_0(K^b(\Lambda P))$ 上の関数とみなせる。実際 $X^\bullet$ を固定して、$(X^\bullet, -)$ を $K^b(\Lambda P)$ から $\mathbb{Z}$ への関数とみると、distinguished triangles に対して additive（[G] section 2）

となることを Hom$(X^\cdot, -)$ が $K^b(\Lambda P)$ 上の cohomological functor であることから出せるので $[Y^\cdot]$ からとみなせるのである。更に同様の事を $Y^\cdot$ を固定してやればよい。(5.3) は各々(5.2) の右辺の形で項別計算可能ともなる。改めて $([X^\cdot], [Y^\cdot])$ と書く。

今、命題の仮定にある triangulated category 同値を与える関手を

$$\mathbb{F} : K^b(\Lambda P) \longrightarrow K^b(\Gamma P)$$

とすれば (5.3) の定義から

$$(X^\cdot, Y^\cdot) = (\mathbb{F}X^\cdot, \mathbb{F}Y^\cdot)$$

は明らかである。$_\Lambda P$ の indecomposable modules を $\{P_s\}$ $_\Gamma P$ の indecomposable modules を $\{P'_v\}$ とおく。(5.2) によって $[\mathbb{F}P_s]$ を零次の成分のみ非零(の projective module) となっている complex 達にばらした後、その projective module を直和分解して

$$[\mathbb{F}P_s] = \sum_v a_{sv} [P'_v] \qquad a_{sv} \in \mathbb{Z}$$

と書ける。(5.1) は (s,v) 成分が a_{sv} の行列 A が $\mathbb{Z}$ 成分の行列の中で可逆行列になっていることを示す。$C(\Lambda)$ の (s,t) 成分を c_{st}, $C(\Gamma)$ の (v,w) 成分を c'_{vw} として

$$\begin{aligned} c_{st} &= \dim_k \mathrm{Hom}(P_s, P_t) = (P_s, P_t) = (\mathbb{F}P_s, \mathbb{F}P_t) \\ &= ([\mathbb{F}P_s], [\mathbb{F}P_t]) = \sum_{v,w} a_{sv}\, a_{tw} ([P'_v], [P'_w]) \\ &= \sum_{v,w} a_{sv}\, c'_{vw}\, a_{tw} \end{aligned}$$

となり結論が出る。(証明終わり)

REFERENCES

[A] J. Alperin: Weights for finite groups, in Proc. of Sym. Pure Math., 47 (1987), 369-379

[B] M. Broué: Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées, Astérisque, 181-182 (1990), 61-92

[BP] M. Broué and L. Puig, A Frobenius theorem for blocks, Invent. Math. 56 (1980), 117-128

[D1] E. C. Dade, Counting characters in blocks I, Invent. Math. 109 (1992), 187-210

[D2] E. C. Dade, Counting characters in blocks II, preprint

[G] A. Grothendieck, Groupes des classes des catégories abéliennes et triangulées, complexes parfaits, in SGA 5, Springer L. N. 589 (1977), 351-371

[H] R. Hartshorne, Residues and duality, Springer L. N. 20 (1966)

[PU1] L. Puig and Y. Usami, Perfect isometries for blocks with abelian defect groups and Klein four inertial quotients, to appear in J. of Algebra

[PU2] L. Puig and Y. Usami, Perfect isometries for blocks with abelian defect groups and cyclic inertial quotients of order 4, submitted to J. of Algebra

[R] J. Rickard, Morita theory for derived category, J. London Math. Soc. (2) 39 (1989), 436-456

[U1] Y. Usami, On p-blocks with abelian defect groups and inertial index 2 or 3 I and II, J. of Algebra 119 (1988), 123-146; 122 (1989), 98-105

[U2] Y. Usami, Perfect isometries for blocks with abelian defect groups and dihedral inertial quotients of order 6, preprint

[U3] Y. Usami, Perfect isometries for blocks with abelian defect groups and inertial quotients isomorphic to $Z_4 \times Z_2$, in preparation

[W] 若松隆義，「多元環の表現論における Derived Category」多元環の表現論シンポジウム報告集　１９８７年（戸倉）