第５回

多元環の表現論シンポジュウム

報 告 集

1995年１月

於　三重県大阪商工会議所賢島研修センター

は じ め に

この報告集は、１９９５年１月２３日から２５日まで、三重県大阪商工会議所・賢島研修センターに於いて開催された「第５回多元環の表現論シンポジウム」での講演の記録です。

多元環の表現論は、特に８０年代以降その分野での進展とともに、様々な分野に刺激を与え、多くの研究者に多大な影響をおよぼしてきました。多元環の表現論の門外漢である私も影響をうけた一人で、記念すべき第５回の責任者をつとめるのは気の重いことでした。が、いっそのことと思い、この分野の関わりで私が興味をもち、勉強してみたいことを中心に、プログラムを組ませてもらいました。歴史の重みと講演者のみなさまの力に感謝しています。

講演者の旅費、報告集の出版費等の諸経費は、文部省科学研究費（総合研究(Ａ)、環とその表現の研究、課題番号：０６３０２００２、代表者：平成６年度、京都大学　吉野雄二氏、平成７年度、京都大学　秋葉知温氏）に依頼しました。

筑波大学　山形邦夫氏、信州大学　岩永恭雄氏、京都大学　吉野雄二氏には、講演依頼など、会の開催について多くの助言をいただきました。また、大阪市立大学　河田成人氏、院生諸君には会場の手配、会の運営についてお世話になりました。

原稿依頼の不手際で講演者のみなさまに迷惑をかけ、また出版が大幅に遅れてしまったこと深くお詫びします。みなさまの御協力ありがとうございました。

１９９５年１２月

北海道教育大学旭川校　　奥山　哲郎

目　次

講演プログラム

1月23日（月）

９：００－１０：００　浅芝秀人（阪市大・理）

Some Algebraically Compact Indecomposable Modules for Special Biserial Algebras

１０：１５－１１：１５　河合浩明（熊本電波高専）

Complexity Quotient Categories for Group Algebras（Carlsonらの仕事について）１

１１：３０－１２：３０　宮本雅彦（愛媛大・理）

頂点作用素代数の表現１

１４：００－１５：００　若松隆義（埼玉大・教）

Sklyanin Algebra（Artin-Tate-Van den Bergh, Levasseur-Smith-Staffordの仕事について）１

１５：１５－１６：１５　林　孝宏（名大・理）

II_1型部分因子環のガロア量子群について（仮題）１

１６：３０－１７：３０　山形邦夫（筑波大・数）

ＡＲ－成分の形について

1月24日（火）

９：００－１０：００　海田等子（筑波大・数）

Wild遺伝多元環１

１０：１５－１１：１５　庭崎　隆（愛媛大・理）

Complexity Quotient Categories for Group Algebras（Carlsonらの仕事について）２

１１：３０－１２：３０　宮本雅彦（愛媛大・理）

頂点作用素代数の表現２

１４：００－１５：００　岩永恭雄（信州大・教）

Sklyanin Algebra（Artin-Tate-Van den Bergh, Levasseur-Smith-Staffordの仕事について）２

１５：１５－１６：１５　林　孝宏（名大・理）

II_1型部分因子環のガロア量子群について（仮題）２

１６：３０－１７：３０　田原賢一（愛知教育大）

次元部分群の最近の結果について

1月25日（水）

９：００－１０：００　高谷　進（筑波大・数）

Wild遺伝多元環２

１０：１５－１１：１５　河田成人（阪市大・理）

群環のAuslander-Reiten components（Erdmann の結果の紹介）

１１：３０－１２：３０　越田　均（千葉大・自然科学）

Quiver and relations for SL(2, P^{a}) in characteristic p with p odd

SOME ALGEBRAICALLY COMPACT INDECOMPOSABLE MODULES FOR SPECIAL BISERIAL ALGEBRAS (A REPORT OF A WORK OF C. M. RINGEL)

HIDETO ASASHIBA

(Department of Mathematics, Osaka City University)

Let A be a finite dimensional algebra over an algebraically closed field k. The main purpose of the representation theory of algebras has been to describe the Krull-Schmidt k-category $\mathrm{mod}\, A$ of finite dimensional left A-modules. This is done by describing the k-category $\mathrm{ind}\, A$ (= the full subcategory of $\mathrm{mod}\, A$ whose objects form a complete list of indecomposables). Denote by $k(\Gamma_A)$ the mesh category of the Auslander-Reiten quiver Γ_A of A. Then it is well known that we have a full functor

$$\Phi\colon k(\Gamma_A) \to \mathrm{ind}\, A / \mathrm{rad}^{\infty}(\mathrm{ind}\, A)$$

which is bijective on objects, where $\mathrm{rad}^{\infty}(\mathrm{ind}\, A)$ is the *infinite radical* of $\mathrm{ind}\, A$ (i.e. the intersection of $\mathrm{rad}^n(\mathrm{ind}\, A)$ for all natural numbers n). When A is representation-finite, the infinite radical vanishes. Hence in this case the category $\mathrm{ind}\, A$ can be described as the residue-category $k(\Gamma_A)/\mathrm{Ker}\,\Phi$. In particular if A is standard (e.g. if the characteristic of k is not equal to 2), then $\mathrm{Ker}\,\Phi = 0$, which means that the structure of $\mathrm{ind}\, A$ is completely recovered by the combinatorial data Γ_A. In the representation-infinite case, however, the infinite radical does not vanish. Hence to study representation-infinite algebras, we need to examine the infinite radical. In this report we will explain the recent work of C. M. Ringel on algebraically compact (= pure injective) indecomposable modules over a string algebras. Although the work deals with very special algebras, this seems to be one of the first atempts to construct elements of the infinite radical and to recover some components from combinatorial data. The rough plan proceeds as follows: (1) Add more vertices to Γ_A. (2) Add new arrows between new and old vertices. (3) Then the paths though new vertices give elements of the infinite radical. Since the set of vertices of Γ_A was the set of all isoclasses of finite dimensional indecomposables, the new vertices must represent infinite dimensional indecomposables.

First we recall known facts about representation theory of string algebras. We will give all finite dimensional indecomposable modules, all irreducible maps between them and all Auslander-Reiten sequences of finite dimensional modules over a string algebra. Next we will exhibit the "new verticies". Finally we will explain how some components are recovered by new data using an example.

1. String algebras

For a quiver (= a set of vertices connected by arrows) Q, we denote by Q_0 the set of vertices of Q and by Q_1 the set of arrows of Q. For an arrow $x \xrightarrow{\alpha} y$ of Q, we set $t(\alpha) := x$, $h(\alpha) := y$ and call them the *tail* of α and the *head* of α, respectively.

Following Butler-Ringel [BR] we recall known facts about representation theory of string algebras. We present all finite dimensional indecomposable modules, all irreducible maps between them and all Auslander-Reiten sequences of finite dimensional modules.

1.1. String algebras.

Definition 1.1.1. An algebra A is called a *string algebra* if A has the form kQ/I for some quiver Q and some admissible ideal I of kQ satisfying the follwoing conditions:

(1) I is generated by paths (i.e. A is a *monomial* algebra);
(2) For every $x \in Q_0$, at most two arrows have x as their tails, and at most two arrows have x as their heads; and
(3) For every $\alpha \in Q_1$, there is at most one arrow β with $\beta\alpha \notin I$, and there is at most one arrow γ with $\alpha\gamma \notin I$.

Algebras of the form $A/\operatorname{soc} A$ where $A = kG$ with G a dihedral 2-group and $\operatorname{char} k = 2$ are string algebras. We will use the following example for explanation.

Example 1.1.1. The algebra defined by the following quiver with relations is a string algebra:

$$\begin{tikzcd}
5 \arrow[d, shift right, "\gamma"'] \arrow[d, shift left, "\delta"] & & 6 \arrow[d, shift right, "\varepsilon"'] \arrow[d, shift left, "\zeta"] \\
3 \arrow[dr, "\eta"'] & & 4 \arrow[dl, "\theta"] \\
& 2 \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \arrow[d, shift left, "\beta"] & \\
& 1 &
\end{tikzcd}$$

with $\eta\delta = 0, \alpha\eta = 0, \theta\varepsilon = 0, \beta\theta = 0$.

Throughout the rest of the report A is a *string* algebra unless otherwise stated.

1.2. Finite words. Let Q be a quiver. We set $\overline{Q}_1 := Q_1 \cup \{\alpha^{-1} | \alpha \in Q_1\}$, where α^{-1} is a formal inverse of $\alpha \in Q_1$ so that $t(\alpha^{-1}) := h(\alpha)$ and $h(\alpha^{-1}) := t(\alpha)$. Put $(\alpha^{-1})^{-1} := \alpha$ for every $\alpha \in Q_1$.

Definition 1.2.1. We consider words using the elements of $\overline{Q}_1$ as letters. Arrows are called *direct letters* and their formal inverses are called *inverse letters.* A *word of length* $n \geq 1$ is a sequence of the form

$$w = l_1 l_2 \cdots l_n$$

with $\xleftarrow{l_i}\xleftarrow{l_{i+1}}$ (i.e. $t(l_i) = h(l_{i+1})$) for all $i = 1, \dots, n$ satisfying the following

(W1) $l_i^{-1} \neq l_{i+1}$ for all $i = 1, \dots, n-1$; and

(W2) No subword $l_i l_{i+1} \cdots l_j \quad (1 \leq i < j \leq n)$ or its inverse belongs to I.

We put $w^{-1} := l_n^{-1} \cdots l_2^{-1} l_1^{-1}$.

A *word of length* 0 is a symbol 1_a for each $a \in Q_0$. We put $1_a^{-1} := 1_a$.

Definition 1.2.2. (1) For a word $w = l_1 l_2 \cdots l_n$ of length $n \geq 1$, we put $t(w) := t(l_n)$ and $h(w) := h(l_1)$.
(2) For a word $w = 1_a$ of length 0, we put $t(w) = h(w) = a$.

Remark 1.2.1. For $a \xrightarrow{\alpha} b \xrightarrow{\beta} c$ in Q, the composite of α and β is written as $\beta\alpha$. So for a left A-module M, we have $wM = l_1(l_2(\cdots(l_n(M))\cdots))$.

Definition 1.2.3. Let $w = l_1 l_2 \cdots l_n$ and $w' = l'_1 l'_2 \cdots l'_n$. Then the *concatenation* of w and w' is $ww' = l_1 l_2 \cdots l_n l'_1 l'_2 \cdots l'_n$ if this is again a word.

Definition 1.2.4. A word w containing both direct and inverse letters and such that $w^2 = ww$ is a word is called a *cyclic* word. The powers w^m $(m \geq 2)$ is said to be *proper* powers. A cyclic word w is *primitive* if w is not a proper power of some other word.

1.3. String modules. Let $\delta(\alpha, \beta) := \begin{cases} 1 \in k & (\alpha = \beta) \\ 0 \in k & (\alpha \neq \beta) \end{cases}$ be a Kronecker function.

Definition 1.3.1. Let $w = l_1 l_2 \cdots l_t$ be a word $(t \geq 1)$. We define a finite dimensional left A-module $M(w)$, which is called the *string module* attached to w, as follows:

Put $c(0) := h(l_1), c(i) := t(l_i)$ for $i = 1, \dots, t$, i.e.

$$c(0) \xleftarrow{l_1} c(1) \xleftarrow{l_2} c(2) \xleftarrow{l_3} \cdots \xleftarrow{l_t} c(t).$$

For $a \in Q_0$, we put

$$M(w)_a := \bigoplus_{i=0}^{t} \delta(a, c(i)) \cdot k.$$

Thus $\dim M(w)_a$ is equal to the number of i such that $c(i) = a$. For $\alpha : a \to b$ in Q,

$$M(w)_\alpha : \bigoplus_{i=0}^{t} \delta(a, c(i)) \cdot k \to \bigoplus_{i=0}^{t} \delta(b, c(i)) \cdot k$$

is defined by $(\lambda_i) \mapsto (\mu_i)$ where

$$\begin{cases} \mu_0 := \delta(\alpha, l_1)\lambda_1 \\ \mu_i := \delta(\alpha, l_1^{-1})\lambda_{i-1} + \delta(\alpha, l_{i+1})\lambda_{i+1}, \quad i = 1, \dots, t-1 \\ \mu_t := \delta(\alpha, l_t^{-1})\lambda_{t-1}. \end{cases}$$

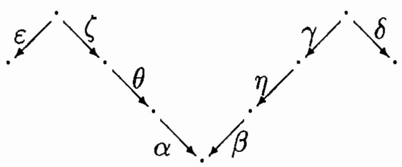
When $w = 1_a$ for some $a \in Q_0$, $M(w)$ is defined to be the simple module corresponding to a.

Remark 1.3.1. (1) The components of the matrix of $M(w)_a$ are 0 or 1.
(2) For every $i = 1, \dots, t-1$, $\mu_i = 0, \lambda_{i-1}$, or λ_{i+1} because $l_i^{-1} \neq l_{i+1}$.
(3) The componentwise expression for the definition of $M(w)_\alpha$ will be used later, with some modifications, to define modules for infinite words.
(4) $\dim M(w) = \sum_{a \in Q_0} \dim M(w)_a = t + 1$, and $\dim M(1_a) = 1$.

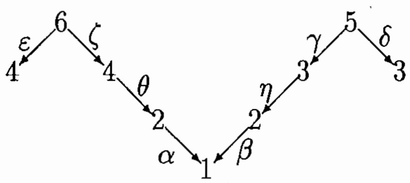
Example 1.3.1. For the algebra in Example 1.1.1, consider a word

$$w = \varepsilon\zeta^{-1}\theta^{-1}\alpha^{-1}\beta\eta\gamma\delta^{-1}.$$

We present this word as follows:



Attaching the name to each vertex, we obtain the quiver presentation of $M(w)$:



The definition of string module gives the usual presentation of $M(w)$ as follows:

$$\begin{tikzcd}
k \arrow[d, shift right, "\binom{1}{0}"'] \arrow[d, shift left, "\binom{0}{1}"] & & k \arrow[d, shift right, "\binom{1}{0}"'] \arrow[d, shift left, "\binom{0}{1}"] \\
k^2 \arrow[dr, "\left(\begin{smallmatrix}0&1\\0&0\end{smallmatrix}\right)"'] & & k^2 \arrow[dl, "\left(\begin{smallmatrix}0&0\\1&0\end{smallmatrix}\right)"] \\
& k^2 \arrow[d, shift right, "(1,0)"'] \arrow[d, shift left, "(0,1)"] & \\
& k &
\end{tikzcd}$$

1.4. Band modules.

Definition 1.4.1. Let $w = l_1 \cdots l_t$ be a primitive cyclic word with l_t an inverse letter (apply a cyclic permutation to w if necessary), V a vector space and φ an endomorphism of V. Put $c(i)$ as follows:

$$c(0) \xleftarrow{l_1} c(1) \xleftarrow{l_2} \cdots \xleftarrow{l_{t-1}} c(t-1) \xleftarrow{l_t} c(0)$$

We define a finite dimensional left A-module $M := M(w;\varphi, V)$ as follows:
For every $a \in Q_0$, $M_a := \bigoplus_{i=0}^{t-1} \delta(a, c(i)) \cdot V$. For every $\alpha : a \to b$ in Q,

$$M_\alpha : \bigoplus_{i=0}^{t-1} \delta(a, c(i)) \cdot V \to \bigoplus_{i=0}^{t-1} \delta(b, c(i)) \cdot V$$

is defined by $(\lambda_i) \mapsto (\mu_i)$ where

$$\begin{cases} \mu_i := \delta(\alpha, l_i^{-1})\lambda_{i-1} + \delta(\alpha, l_{i+1})\lambda_{i+1} & i = 1, \dots, t-1 \\ \mu_0 := \delta(\alpha, l_t^{-1})\varphi(\lambda_{t-1}) + \delta(\alpha, l_1)\lambda_1. \end{cases}$$

We set $M(w; n, \lambda) := M(w; k^n, J_n(\lambda))$, where $J_n(\lambda)$ is the Jordan cell with eigenvalue $\lambda \in k$ of size n. This is called the *band* module attached to a triple $(w; n, \lambda)$.

Remark 1.4.1. $\dim M(w; n, \lambda) = tn$.

1.5. Auslander-Reiten quiver of a string algebra.

Theorem 1.5.1. *The following holds*:

1. *String modules $M(w)$ with w a word of length ≥ 0, and band modules $M(w; n, \lambda)$ with w a primitive cyclic word are indecomposable.*
2. *Any indecomposable left A-module is isomorphic to one of them.*
3. *The following holds :*
   - (a) *String modules are not isomorphic to any band module.*
   - (b) *For words w and w' of length ≥ 0, $M(w) \cong M(w')$ iff $w' = w$ or w^{-1}.*

(c) *For primitive cyclic words* w, w', *for* $n, n' \in \mathbb{N}$ *and for* $\lambda, \lambda' \in k$, $M(w; n, \lambda) \cong M(w', n', \lambda')$ *iff* $n = n', \lambda = \lambda'$ *and* w' *is a cyclic permutation of* w *or* w^{-1}.

Theorem 1.5.2. *If a component of the Auslander-Reiten quiver of* A *contains a band module, then all vertices of the component are band modules. Further the set of all band modules form a disjoint union of homogeneous tubes.*

To describe Auslander-Reiten sequences of string modules we need the following definition.

Definition 1.5.1. Let C be a word of length ≥ 0. Then we say

- C *starts on a peak* if $C\beta$ is not a word for all $\beta \in Q_1$;
- C *starts in a deep* if $C\beta^{-1}$ is not a word for all $\beta \in Q_1$;
- C *ends on a peak* if $\beta^{-1}C$ is not a word for all $\beta \in Q_1$; and
- C *ends in a deep* if βC is not a word for all $\beta \in Q_1$.

Lemma 1.5.3. *We have a complete list of irreducible maps between string modules as follows:*

(1) *For* C *a word not starting on a peak, let* $C^{\wedge} := C\beta_0\beta_1^{-1}\cdots\beta_r^{-1}$ *be the word starting in a deep with* $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_r \in Q_1$. *Then the canonical embedding* $M(C) \xrightarrow{u} M(C^{\wedge})$ *is irreducible.*
(2) *For* C *a word not ending on a peak, let* ${}^{\wedge}C := \beta_r\cdots\beta_1\beta_0^{-1}C$ *be the word ending in a deep with* $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_r \in Q_1$. *Then the canonical embedding* $M(C) \xrightarrow{u} M({}^{\wedge}C)$ *is irreducible.*
(3) *For* C *a word not starting in a deep, let* $C_{\vee} := C\beta_0^{-1}\beta_1\cdots\beta_r$ *be the word starting on a peak with* $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_r \in Q_1$. *Then the canonical projection* $M(C_{\vee}) \xrightarrow{p} M(C)$ *is irreducible.*
(4) *For* C *a word not ending in a deep, let* ${}_{\vee}C := \beta_r^{-1}\cdots\beta_1^{-1}\beta_0 C$ *be the word ending on a peek with* $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_r \in Q_1$. *Then the canonical projection* $M({}_{\vee}C) \xrightarrow{p} M(C)$ *is irreducible.*

Remark 1.5.1. If the length of C is zero, $C^{\wedge}, {}^{\wedge}C$, etc. are not uniquely determined. See [BR] for the precise form.

Theorem 1.5.4. *The Auslander-Reiten sequences containing string modules are listed as follows (we present these as meshes in the Auslander-Reiten quiver):*

(1) *For every* $\beta \in Q_1$, *let* $C\beta D$ *be the word starting in a deep and ends on a peak with* C, D *consisting of inverse letters. Then we have an Auslander-Reiten sequence*

$$\begin{tikzcd}
& M(C\beta D) \arrow[dr, "p"] & \\
M(C) \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, dash, dashed] & & M(D)
\end{tikzcd}$$

(2) *For C neither starting nor ending on a peak (thus both ${}^\wedge C$ and $C^\wedge$ are defined),*

$$\begin{tikzcd}
& M(C^\wedge) \arrow[dr, "u"] & \\
M(C) \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "u"'] \arrow[rr, dash, dashed] & & M({}^\wedge C^\wedge) \\
& M({}^\wedge C) \arrow[ur, "-u"'] &
\end{tikzcd}$$

(3) *For C not starting on a peak but ending on a peak (thus $C^\wedge$ is defined, and C has the form $C = {}_\vee D$),*

$$\begin{tikzcd}
& M({}_\vee D^\wedge) \arrow[dr, "p"] & \\
M({}_\vee D) \arrow[ur, "u"] \arrow[dr, "p"'] \arrow[rr, dash, dashed] & & M(D^\wedge) \\
& M(D) \arrow[ur, "-u"'] &
\end{tikzcd}$$

(4) *For C starting on a peak but ending not on a peak (thus C has the form $C = D_\vee$, and ${}^\wedge C$ is defined),*

$$\begin{tikzcd}
& M(D) \arrow[dr, "u"] & \\
M(D_\vee) \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "u"'] \arrow[rr, dash, dashed] & & M({}^\wedge D) \\
& M({}^\wedge D_\vee) \arrow[ur, "-p"'] &
\end{tikzcd}$$

(5) *For C both starting and ending on a peak (thus C has the form $C = {}_\vee D_\vee$),*

$$\begin{tikzcd}
 & M({}_{\mathrm{v}}D) \arrow[dr, "p"] & \\
M({}_{\mathrm{v}}D_{\mathrm{v}}) \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "p"'] \arrow[rr, dashed, no head] & & M(D) \\
 & M(D_{\mathrm{v}}) \arrow[ur, "-p"'] &
\end{tikzcd}$$

Theorem 1.5.5. *Let A be a string algebra. Then all but finitely many components of the Auslander-Reiten quiver of A are homogeneous tubes or of the form $\mathbb{Z}A_{\infty}^{\infty}$.*

2. Infinite dimensional modules

In this section we will exhibit infinite dimensional indecomposable algebraically compact modules. First special type ofinfinite words will be defined. Next we will attach an infinite dimensional module to each infinite word in a similar way as in the previous section. Most contents of this section are quoted from Ringel[R1], and we assume that A is a *monomial* algebra throughout this section.

2.1. $\mathbb{N}$-words and $\mathbb{Z}$-words. The set of positive integers will be denoted by $\mathbb{N}$, and we write $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. An $\mathbb{N}$-*word* is of the form $l_1 l_2 \cdots l_n \cdots$ such that all finite subsequences $l_1 l_2 \cdots l_t$ are words (such an $\mathbb{N}$-word is just a sequence $(l_1, l_2, \dots)$).

Given a cyclic (of course finite) word w, we may consider the $\mathbb{N}$-word $w^\infty = ww\cdots$. The $\mathbb{N}$-words of the form w^∞ are said to be *periodic*. If w is a primitive cyclic word of length n, then w^∞ is said to be *of period n*. Note that an $\mathbb{N}$-word $w = l_1 l_2 \cdots l_n \cdots$ is periodic provided $l_{i+p} = l_i$ for all $i \geq 1$ and some $p \geq 2$.

Given an $\mathbb{N}$-word $x = l_1 l_2 \cdots l_n \cdots$, the $\mathbb{N}$-words $l_s l_{s+1} \cdots$ with $s \geq 1$ will be said to be $\mathbb{N}$-*subwords of w*.

An $\mathbb{N}$-word is said to be *almost periodic* provided there exists a periodic $\mathbb{N}$-subword. In case $y = l_{s+1} l_{s+2} \cdots$ is a periodic $\mathbb{N}$-subword of the $\mathbb{N}$-word $x = l_1 l_2 \cdots l_n \cdots$, and either $s = 0$ or else $l_s l_{s+1} l_{s+2} \cdots$ is not a periodic $\mathbb{N}$-word, one calls y a *maximal periodic $\mathbb{N}$-subword*. For any almost periodic $\mathbb{N}$-word, there exists a unique maximal periodic $\mathbb{N}$-subword.

A $\mathbb{Z}$-*word* x is of the form $x = \cdots l_{-2} l_{-1} l_0 l_1 l_2 \cdots$, with letters l_i, for all $i \in \mathbb{Z}$; again, we require that all finite subsequences $l_{-t} \cdots l_t$ (with $t \geq 0$) are words. Of course, the inverse x^{-1} of the $\mathbb{Z}$-word $x = \cdots l_{-2} l_{-1} l_0 l_1 l_2 \cdots$ is the $\mathbb{Z}$-word $x^{-1} = \cdots l_2^{-1} l_1^{-1} l_0^{-1} l_{-1}^{-1} l_{-2}^{-1} \cdots$.

Given a $\mathbb{Z}$-word $x = \cdots l_{-2} l_{-1} l_0 l_1 l_2 \cdots$, the $\mathbb{N}$-words $l_s l_{s+1} \cdots$ with $s \in \mathbb{Z}$ will be said to be $\mathbb{N}$-*subwords of x*. Given two $\mathbb{N}$-words y, z, we can form the $\mathbb{Z}$-word $z^{-1}y$ in the obvious way (if $z = l_1 l_2 \cdots$ and $y = l'_1 l'_2 \cdots$, then $z^{-1}y = \cdots l_2^{-1} l_1^{-1} l'_1 l'_2 \cdots$). Of course, y is an $\mathbb{N}$-subword of $x = z^{-1}y$, and z is an $\mathbb{N}$-subword of $x^{-1} = y^{-1}z$.

Given a cyclic word w, we may consider the $\mathbb{Z}$-word ${}^\infty w^\infty = \cdots ww \cdots$; the $\mathbb{Z}$-words of the form ${}^\infty w^\infty$ are said to be *periodic*. A $\mathbb{Z}$-word x is called *right periodic* provided it is of the form $z^{-1}y$ where y is a periodic $\mathbb{N}$-word. Similarly, the $\mathbb{Z}$-word x may be called *left periodic* provided x^{-1} is right periodic. Finally, the $\mathbb{Z}$-word x is called *biperiodic* provided x is both left periodic and right periodic, but not periodic.

If the $\mathbb{Z}$-word $x = \cdots l_{-2}l_{-1}l_0l_1l_2\cdots$ is right periodic, but not periodic, there exists an $s \in \mathbb{Z}$ such that the $\mathbb{N}$-word $y = l_{s+1}l_{s+2}\cdots$ is a periodic $\mathbb{N}$-word, whereas the $\mathbb{N}$-word $l_sl_{s+1}\cdots$ is not periodic. Then y is said to be the *maximal periodic* $\mathbb{N}$*-subword of* x.

2.2. Expanding and Contracting $\mathbb{N}$-Subwords. We want to single out two kinds of maximal periodic $\mathbb{N}$-subwords: the expanding ones and the contracting ones. A periodic $\mathbb{N}$-word w^{∞} is said to be *expanding* provided the last letter of w is inverse, and *contracting* provided the last letter of w is direct.

Consider now an $\mathbb{N}$-word or $\mathbb{Z}$-word x with a maximal periodic $\mathbb{N}$-subword y, and let us assume that x is not a periodic $\mathbb{N}$-word. Thus $x = u^{-1}ly$, where l is a letter and y is a periodic $\mathbb{N}$-subword, whereas ly no longer is periodic (here, u is either a (finite) word of length ≥ 0 or an $\mathbb{N}$-word). The periodic $\mathbb{N}$-word y is called *expanding as an* $\mathbb{N}$*-subword*, provided l is a direct letter and y is an expanding $\mathbb{N}$-word. Correspondingly, y is called *contracting as an* $\mathbb{N}$*-subword*, provided l is an inverse letter and y is a contracting $\mathbb{N}$-word.

An almost periodic $\mathbb{N}$-word x will be said to be *expanding* or *contracting,* provided the maximal periodic $\mathbb{N}$-subword is expanding, or contracting as an $\mathbb{N}$-subword, respectively.

Assume now that x is biperiodic. We call x *expanding*, provided the maximal periodic $\mathbb{N}$-subwords of both x and x^{-1} are expanding as $\mathbb{N}$-subwords. We call x a *mixed* $\mathbb{Z}$-word, provided the maximal periodic $\mathbb{N}$-subword of x is expanding as an $\mathbb{N}$-subword, and the maximal periodic $\mathbb{N}$-subword of x^{-1} is contracting as an $\mathbb{N}$-subword. Finally, we call x *contracting,* provided the maximal periodic $\mathbb{N}$-subwords of x and x^{-1} are both contracting as $\mathbb{N}$-subwords.

Proposition 2.2.1. *Let A be a string algebra. Then: Any almost periodic* $\mathbb{N}$*-word is expanding or contracting. If x is a biperiodic* $\mathbb{Z}$*-word, then x is expanding, or mixed, or contracting, or else x^{-1} is mixed.*

2.3. Some Infinite Dimensional Modules. In the same way as the construction of $M(w)$, we attach an infinite dimensional module $M(x)$ to every $\mathbb{N}$-word x, and to every $\mathbb{Z}$-word x. We call the modules $M(x)$ *string modules.* We write down the formula for x a $\mathbb{Z}$-word.

Thus, let $x = \cdots l_{-2}l_{-1}l_0l_1l_2\cdots$ with $c(i) = s(l_i)$. For any vertex a, we put

$$M(x)_a = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \delta(a, c(i)) \cdot k \ ;$$

an element in $M(x)_a$ is of the form $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ with $\lambda_i \in \delta(a,c(i))\cdot k$ such that only finitely many λ_i are non-zero. Again, the module $M(x)$ itself is the direct sum of these vector spaces $M(x)_a$, where $a \in Q_0$, thus $M(x) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} k$.

For any arrow $\alpha\colon a \to b$, let $M(x)_\alpha\colon M(x)_a \to M(x)_b$ be defined by

$$M(x)_\alpha\Big((\lambda_i)_i\Big) = (\mu_i)_i$$

where

$$\mu_i = \delta(\alpha, l_i^{-1})\lambda_{i-1} + \delta(\alpha, l_{i+1})\lambda_{i+1}$$

for all $i \in \mathbb{Z}$. We also may define a module $\overline{M}(x)$, it is obtained by replacing the infinite direct sum by the corresponding product. Again, it may be sufficient to consider the case of the $\mathbb{Z}$-word x. For any vertex a, we put

$$\overline{M}(x)_a = \prod_{i\in\mathbb{Z}} \delta(a,c(i))\cdot k\ ;$$

an element in $\overline{M}(x)_a$ is of the form $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, with arbitrary $\lambda_i \in \delta(a,c(i))\cdot k$. The module $\overline{M}(x)$ is the direct sum of these vector spaces $M(x)_a$, therefore $M(x) = \prod_{i\in\mathbb{Z}} k$ (here we use that the vertex set Q_0 of the quiver Q is finite). As before, for any arrow $\alpha\colon a \to b$, let $\overline{M}(x)_\alpha\colon \overline{M}(x)_a \to \overline{M}(x)_b$ be defined by

$$\overline{M}(x)_\alpha\Big((\lambda_i)_i\Big) = (\mu_i)_i$$

where

$$\mu_i = \delta(\alpha, l_i^{-1})\lambda_{i-1} + \delta(\alpha, l_{i+1})\lambda_{i+1},$$

for all $i \in \mathbb{Z}$.

In addition, we also may consider the submodule $M^+(x)$ of $\overline{M}(x)$, where $M^+(x)_a$ is the set of elements $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ with $\lambda_i \in \delta(a,c(i))\cdot k$, such that $\lambda_i = 0$ for $i \ll 0$.

2.4. The Main Theorem. Consider now an almost periodic $\mathbb{N}$-word x which is expanding or contracting, or a biperiodic $\mathbb{Z}$-word x which is expanding, mixed or contracting. We define an infinite dimensional module $C(x)$ as follows:

$$C(x) = \begin{cases} \overline{M}(x) & \text{in case } x \text{ is expanding;} \\ M^+(x) & \text{in case } x \text{ is mixed; and} \\ M(x) & \text{in case } x \text{ is contracting.} \end{cases}$$

Theorem 2.4.1. *Let x be either an almost periodic $\mathbb{N}$-word x which is expanding or contracting, or else a biperiodic $\mathbb{Z}$-word x which is expanding, mixed or contracting. Then: The module $C(x)$ is indecomposable and algebraically compact. If x is contracting, then $C(x)$ is even Σ-algebraically compact.*

Remark 2.4.1. We recall that Krause [K] has shown that all the string modules $M(x)$ are indecomposable.

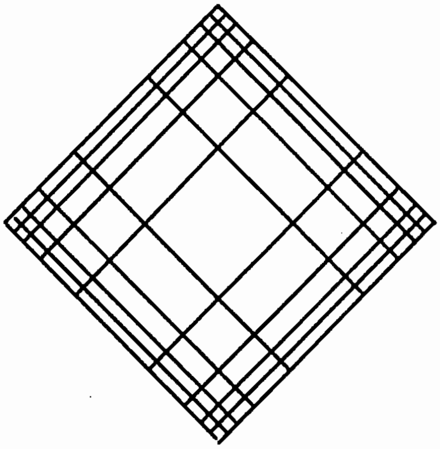


FIGURE 1

3. SEWING OF COMPONENTS (A PATCH WORK)

3.1. A way of displaying of A_∞^∞ components. We display a component of the form $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ like a logarithm mesh (see Figure 1).

3.2. Sewing of components, an example. In the display of $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$, what will sit on the boundary of the square? It must be infinite dimensional A-modules corresponding to infinite words. Consider the algebra in Example 1.1.1. We denote by $\Theta(x)$ the "closure" of the component containing the string module $M(x)$. Put $v := \alpha^{-1}\beta$. In the picture we write just finite words w instead of modules $M(w)$, and infinite words w instead of modules $C(w)$. Using the knowledge of section 1, we show the component $\Theta(C)$ for $C = 1_2$ or $C = v^m$ for some $m \in \mathbb{N}$ (see Figure 2).

Note that these components can be sewed together to get a much larger "super-component" (see Figure 3).

Sewing of all the components that are not homogeneous tubes looks like Figure 4.

It can be shown by Ringel [R2] that the full subcategory of ind A defined by this "super-component" Y can be recovered by the Y.

REFERENCES

[BR] Butler, M. C. R. and Ringel, C. M.: *Auslander-Reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras*, Comm. Alg. **15** (1987), 145–179.

[K] Krause, H.: *A note on infinite string modules*, CMS Conference Proceedings **14** (1993), 309–312.

[R1] Ringel, C. M.: *Some algebraically compact modules, I*, preprint.

[R2] ———: *The sewing of Auslander-Reiten components*, in preparation.

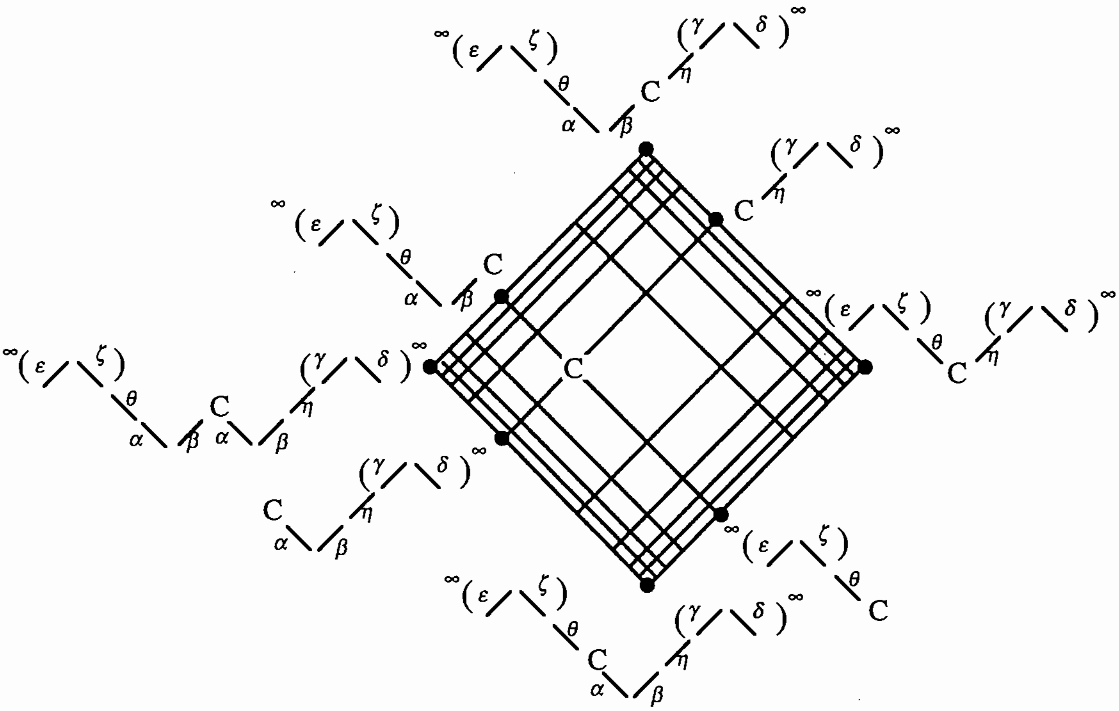


FIGURE 2

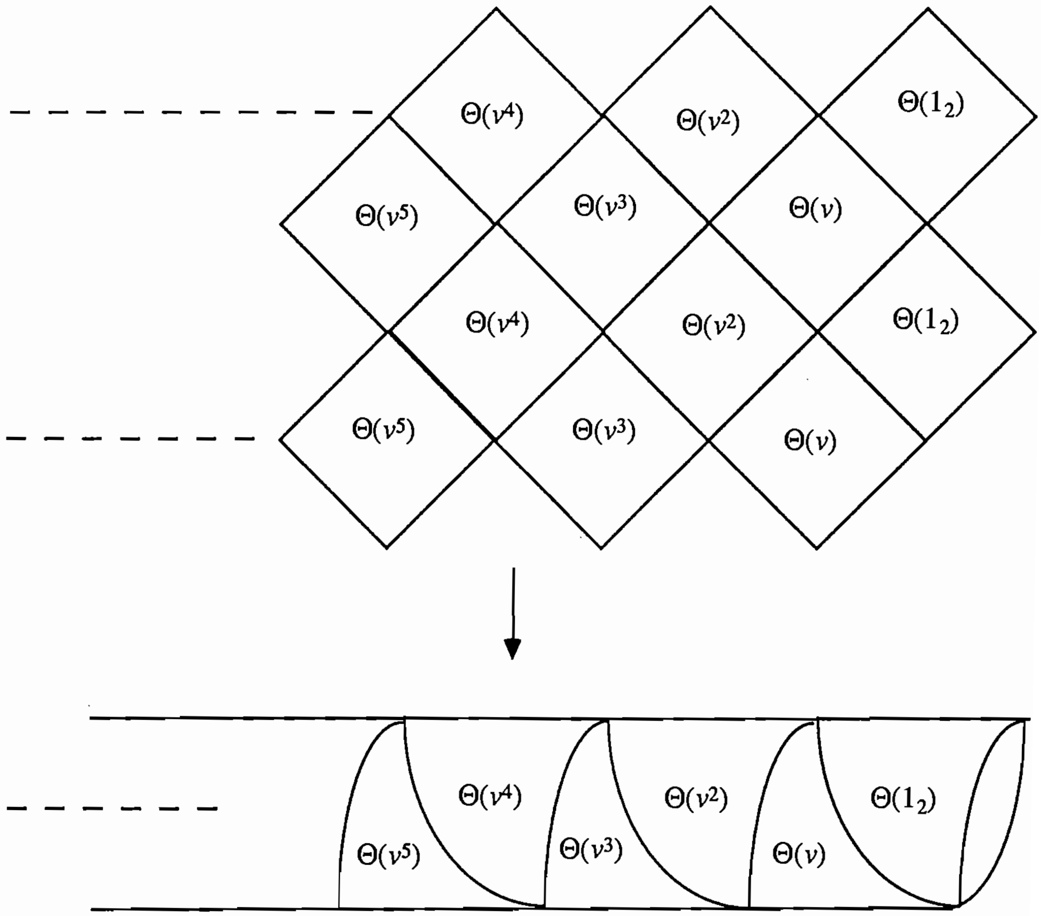

Θ(ν⁴)
Θ(ν²)
Θ(1₂)
Θ(ν⁵)
Θ(ν³)
Θ(ν)
Θ(ν⁴)
Θ(ν²)
Θ(1₂)
Θ(ν⁵)
Θ(ν³)
Θ(ν)
Θ(ν⁴)
Θ(ν²)
Θ(1₂)
Θ(ν⁵)
Θ(ν³)
Θ(ν)

FIGURE 3

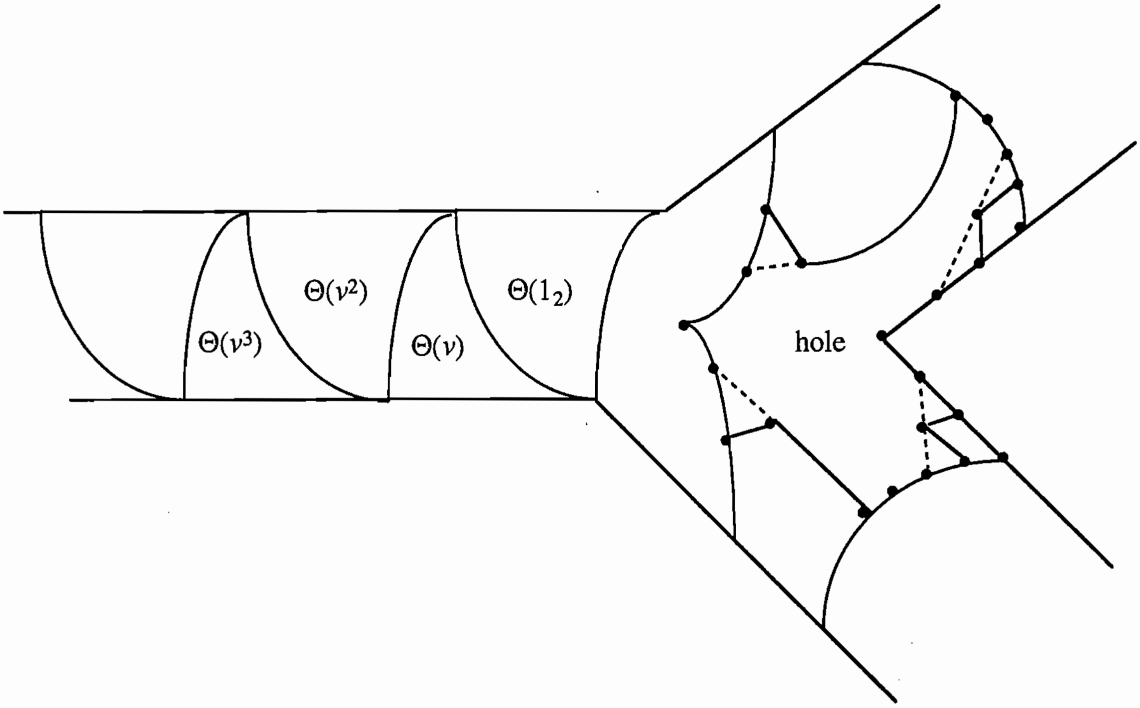


FIGURE 4

Complexity Quotient Categories for Group Algebras
(Carlsonらの仕事について) 1.

河合浩明 (熊本電波高専)

Carlsonたちは triangulated category に関する D. Happel 及び J. Rickard の研究に刺激されて, module variety の応用として, group algebra の stable category のある種の filtration を与えそれについて調べた. この報告の目的は彼らの研究を紹介することである.

以後, G は finite group, K は標数 $p>0$ の代数的閉体を表わす. この報告ではすべての KG-modules は有限生成と仮定する. 任意の KG-modules (すなわち infinitely generated の場合も含めて) に対しても complexity (variety) の定義を拡張して同様な filtration が導入されているが, その事に関しては庭崎氏の報告を読んで下さい.

1. 準備.

$\Lambda \ni 1$: finite dimensional algera over field K (Kは任意)

mod-Λ : finite generated Λ-modules 全体のなす category

$\overline{\text{mod}}$-Λ : mod-Λ の stable category

(i.e. $\overline{M} \cong \overline{N}$ in $\overline{\text{mod}}$-KG $\Leftrightarrow$ $M_1 \cong N_1$ in mod-KG)
non proj. part

(注) $\overline{\mathrm{mod}}$-Λ は additive category であるが Kernel, coKernel が決定できないので abelian category ではない。ただし、Krull-Schmidt Th. は成り立つ。

ここでは、category の localization と triangulated category に関する最小限の事項のみ記す。これらの概念及びその起源ともいうべき Derived category については [6], [10]。又 category の localization のより進んだ議論に関しては [8] を参照して下さい。

<u>Proposition (1.1)</u>, [7] Λ が self-injective f.d. K-algebra のとき、$\overline{\mathrm{mod}}$-Λ は triangulated category となる;

triangles : $\{ \bar{M}_1 \xrightarrow{\bar{f}} \bar{M}_2 \xrightarrow{\bar{g}} \bar{M}_3 \to \Omega^{-1}(\bar{M}_1)$ と同型な sextuples $\mid$ $0 \to M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3 \to 0$ が exact in mod-$\Lambda \}$

translation : Ω^{-1}

(localization) C を category, $S \subset \mathrm{map}(C)$ を multiplicative system とする。次の様にして C の localization C_S が定義される;

Objects of C_S = objects of C, maps of $C_S \ni X \dashrightarrow Y$: $X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{a} Y$

ここで、$X' \in \mathrm{obj}\, C$, $s \in S$, $a \in \mathrm{map}(C)$

maps に関して次の同値関係が成り立つ,

$$\left(X \xleftarrow{s} X' \xrightarrow{a} Y\right) \equiv \left(X \xleftarrow{t} X'' \xrightarrow{b} Y\right) \iff {}^{\exists}u : X''' \to X \text{ in } S;\ {}^{\exists}f, g \in \mathrm{map}(C);$$

$$\begin{tikzcd} & X' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "a"] & \\ X & X''' \arrow[l, "u"'] \arrow[r] \arrow[u, "f"] \arrow[d, "g"'] & Y \\ & X'' \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "b"'] & \end{tikzcd}$$

が可換。

ここで，functor $L_S : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_S$ （$L_S(X) = X$ for $X \in \mathrm{obj}(\mathcal{C})$，
$L_S(a) = \begin{smallmatrix} & X & \\ \swarrow\!/\!/ & & \searrow a \\ X & & Y \end{smallmatrix}$ for $a : X \to Y$ in $\mathcal{C}$ ）を定義すると任意の $s \in S$
に対して，$L_S(s)$ は $\mathcal{C}_S$ において同型（可逆）となり $\mathcal{C}_S$ と L_S は
この性質に関して universality をもつ。

（variety ） finite group G，$\mathrm{ch}\,K = p > 0$ の alg. closed field K
において，$H^*(G, K) = \sum_{n \geq 0} \mathrm{Ext}^n_{KG}(K, K)$ は finitely generated な K-alg.
となる。この時，$\mathrm{Rad}\, H^*(G, K)$ （Jacobson radical）は nilpotent となり
$H^*(G, K) / \mathrm{Rad}\, H^*(G, K)$ は affine K-algebra となる。そこで，

$V_G(K)$ ： $H^*(G, K)$ の maximal ideal 全体。

$V_G(K)$ の closed subset ： $H^*(G, K)$ のある ideal I を含む maximal ideal 全体。
として，$V_G(K)$ は affine variety となる。KG-module M に対し，
$J(M) = \{ \varphi \in H^*(G, K) \mid \varphi \cdot I_M = 0 \}$ （annihilator of $\mathrm{Ext}^*_{KG}(M, M)$ ）
に対応する $V_G(K)$ の subvariety を $V_G(M)$ と記す。

i.e. $V_G(M)$ ： $J(M)$ を含む maximal ideal 全体。

くわしくは [1]，[5] も参照して下さい。

2. Quotient category

この section で Reference の番号をつけていない結果はすべて [3]
において示された結果です。まず次の notain を導入する，

r ： G の p-rank （G の elementary abelian p-subgroup の位数の最大巾指数）

$\mathcal{M}_c$ ： $\dim V_G(M)$ が c （$1 \leq c \leq r$ ）以下の modules から成る
$\underline{\mathrm{mod}}$-KG の full subcategory.

<u>Proposition (2.1).</u> M_c は $\overline{\mathrm{mod}}$-KG の triangulated subcategory となる.

そこで, $S_c = \{ s \mid \text{triangle } X \xrightarrow{s} Y \to C_s \to \Omega^{-1}(X),\ C_s \in M_c \}$ とすると S_c は multiplicative system となり, さらに $(\overline{\mathrm{mod}}\text{-}KG)_{S_c}$ は triangulated category となる. 又, Rickard の lemma[9]より M_c が thick (i.e. Kernel $L_{S_c} = M_c$) となることがただちに分る.

<u>Definition (2.2).</u> localization $(M_c)_{S_{c-1}}$ を $Q_c = M_c / M_{c-1}$ と表わす ($c = 1, \cdots, r$).

<u>Proposition (2.3).</u> (i) Q_c 上に webb の subadditive function $\gamma_c : Q_c \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ が定義できる. それにより, Q_c における任意の object は indecomposable objects の finite direct sum として表わせることが分る. (下の注で示す様に, 一意性は成り立たない).

(ii) Q_c ($1 \leqq c < r$) における indecomposable objects の同型類の個数は infinite.

(注) $G = D_{2^n}$ (dihedral group, $n \geqq 3$) のとき, Q_2 における同型類は 3つの ind. obj. K, $M(a)$, $M(b)$ のみであり, さらに $K \oplus K \cong M(a) \oplus M(b)$ in Q_2 が成り立つ ([3] を参照)

次の Lemma はここで紹介する Carlson たちの研究において基本的役割りをする.

Lemma (2.4). $\dim V_G(U) < \dim V_G(M) \Rightarrow {}^{\exists}\eta \in H^n(G,K)$ s.t.

$V_G(U) \subset V_G(\eta)$, $\underline{\dim(V_G(M)\cap V_G(\eta)) < \dim V_G(M)}_{(*)}$

(ここで, $V_G(\eta)$ は η を含む max. ideal of $H^*(G,K)$ 全体から成る variety)

証) $V_G(M) = V_1 \cup \cdots \cup V_t \cup W$ (V_i は $\dim V_G(V_i) = \dim V_G(M)$ となる irriducible homogeneous component, W は $\dim W < \dim V_G(M)$) とする.

この時, 各 i, $1 \leqq i \leqq t$, に対し

$${}^{\exists}\eta_i \in H^{n_i}(G,K) \ ; \quad V_G(U) \cup (\bigcup_{j\neq i} V_j) \subset V_G(\eta_i),\ V_i \not\subset V_G(\eta_i)$$

$$\Big(\text{i.e. } \sqrt{I(V_G(U)\cup(\textstyle\bigcup_{j\neq i} V_j))} \ni \eta_i \quad \sqrt{I(V_i)} \not\ni \eta_i\Big)$$

対応する ideal

巾乗してもよいので, $\eta = \eta_1 + \cdots + \eta_t$ ($n = \mathrm{L.C.M}\{n_i\}$) が求めるものである.

Lemma (2.4) の右の条件 (*) を満す η に対し次のことがわかる.

Proposition (2.5). Q_c における任意の object は periodic.

証) exact 列 $0 \to L_\eta \to \Omega^n(K) \xrightarrow{\hat{\eta}} K \to 0$ ($\hat{\eta}$ は η の代表元) に対し,

$0 \to L_\eta \otimes_K M \to \Omega^n(K) \otimes_K M \xrightarrow{\hat{\eta}\cdot I_M} M \to 0$ を考えるとき, Variety の基本性質より

$$V_G(L_\eta \otimes M) = V_G(L_\eta) \cap V_G(M) = V_G(\eta) \cap V_G(M) < \dim V_G(M) = C$$

$$\therefore \quad \Omega^n(M) \cong M \quad \text{in } Q_c .$$

Main Theorem (2.6). M, N を Q_c の任意の objects とする. この時,

$$(\mathrm{Ext}^*_{KG}(M,N)\cdot R^{-1})^0 \cong \mathrm{Hom}_{Q_c}(M,N) \quad \text{as vector spaces.}$$

ここで、$R=\{\beta\cdot I_M \mid \beta\in H^*(G,K)$ は homogeneous で $\dim(V_G(\beta)\cap V_G(M))<c\}$
左辺は $R\subseteq(\mathrm{Ext}^*_{KG}(M,M)$ の center) による localization の degree 0 の元全体。

証) bijection のみ証明する。まず写像を自然に定義する。

$$\phi : (\mathrm{Ext}^*_{KG}(M,N)\cdot R^{-1})^0 \to \mathrm{Hom}_{Q_c}(M,N)\ ;\ \frac{\alpha}{\beta} \longmapsto M \xleftarrow{\hat\beta} \Omega^n(M) \xrightarrow{\hat\alpha} N \quad \left(\begin{array}{c}\beta,\ \alpha \text{ の}\\ \text{degree を}\\ n \text{ とする}\end{array}\right)$$

ここで、Prop. (2.5) の証明と同様にして、Rの条件は $\hat\beta\in S_{c-1}$ を意味する。

((epi))

$$\begin{tikzcd} & M' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ M & & N \end{tikzcd} \Rightarrow \left(\begin{array}{l} ^{(*)}\ s : M'\to M \text{ in } S_c \text{ に対し、} \\ ^{\exists}g : \Omega^n(M)\to M' \text{ s.t. } s\cdot g \text{ が ある } \beta\cdot I_M\in R \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{の代表元} \end{array}\right) \Rightarrow \begin{tikzcd} & M' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\ M & \Omega^n(M) \arrow[l] \arrow[u, "g"] \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & N \\ & \Omega^n(M) \arrow[ul, "s\cdot g"] \arrow[ur, "f\cdot g"'] & \end{tikzcd}$$

(*) の部分を示す。平行移動の公理より次の triangle がある。

$$U \to M' \xrightarrow{s} M \to \Omega^{-1}(U) \quad , \quad \dim(V_G(U))<c \ .$$

$$(E :\ 0\to U\to M'\to M\to 0 \text{ in mod-}KG \text{ が対応する})$$

E に関する long exact sequence

$$\cdots\to \mathrm{Ext}^n_{KG}(M,M') \xrightarrow{s^*} \underset{\substack{\cup\!\!\!\shortmid \\ \beta\cdot I_M}}{\mathrm{Ext}^n_{KG}(M,M)} \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^{n+1}_{KG}(M,U) \to \cdots$$

において、

$$\delta(\beta\cdot I_M) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{cap 積}}}{cl(E)\cdot\beta\cdot I_M} = (cl(E)\cdot\beta)\cdot I_M$$

ここで、$cl(E)$ は E に対応する $\mathrm{Ext}^1_{KG}(M,U)$ の element.

ところで、条件 $\dim V_G(U)<c$ より、Lemma (2.4) から

$$^{\exists}\eta\cdot I_M\in R \ ;\ V_G(U)\subset V_G(\eta) \quad (\text{i.e. } \eta^*\cdot I_U = 0)$$

が示される。

$Ext^*_{KG}(M,U)$ は $Ext^*_{KG}(U,U)$-module であることより，上の事は
η^t が $Ext^*_{KG}(M,U)$ を annihilate することを意味する．$\eta^t=\beta$ とすれば
$\exists\,\bar g \in Ext^n_{KG}(M,M') = \overline{Hom}_{KG}(\Omega^n(M),M')$; $s\cdot\bar g = s^*(\bar g) = \beta\cdot I_M$.

((mon))

$(\hat\beta,\hat\alpha)=\phi(\frac{\alpha}{\beta})=0$ とする．$(\hat\beta,\hat\alpha)=(1,\hat\alpha)(\hat\beta,1)$ ，$(\hat\beta,1)$ が可逆より，
$(1,\hat\alpha)=0$ となる．これを図示すると，

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega^m(M) \arrow[dr, "\hat\alpha"] & \\
\Omega^m(M) \arrow[ur, equal] \arrow[dr, equal] & M' \arrow[l, "s"'] \arrow[u, "s"] \arrow[d, "s"] \arrow[r, dashed] & M \\
 & \Omega^m(M) \arrow[ur, "0"'] &
\end{tikzcd}$$

すなわち，$\exists s\in S_{c-1}$; $\hat\alpha\cdot s=0$

ここで，前出の(*)より次の可換図式が得られる．

$$\begin{tikzcd}
 & & M' \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr] & \\
N & \Omega^m(M) \arrow[l, "\hat\alpha"'] \arrow[r, dash] & \Omega^{m+n}(M) \arrow[u, "\exists g"] \arrow[d, equal] \arrow[r, dashed] & \cdot \\
 & & \Omega^{m+n}(M) \arrow[ul, "s\cdot g"] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

, $sg=\Omega^m\hat r$ ($\hat r$: $rI_M\in R$ の代表元，Ω^m : 平行移動)

従って，$0=\hat\alpha\cdot sg=\hat\alpha\cdot\Omega^m\hat r$.
ところで，$\hat\alpha\cdot\Omega^m\hat r$ は cup 積 $\alpha\cdot r$ の代表元を表わすので，
$\alpha\cdot r=0$ となる．$r\in R$ より $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha r}{\beta r}=0$ よって mon が示される．
定理の証明終り．

続いて，Carlson たちは $Q_c={}^{M_c}/_{M_{c-1}}$ のさらに細かい filtration を考えている．まず notation を導入する．これまでの様に $\dim V_G(M)=c$ とおく．

$V_G(M)=V_1\cup\cdots\cup V_t\cup W$ (V_i : dim. c の irr. comp. , W : $\dim W<c$).

N_i : $V_G(L)\not\supset V_i$ となる module L すべてから成る M_c の full subcategory．

とする．

Proposition (2.1) と同様にして N_i は thick な triangulated subcat. となっている。又, $M=N$ の時 Th. (2.6) の同型は K上の algebra 同型となる。

Theorem (2.7) [4]

$$\mathrm{Hom}_{Q_c}(M,M) \cong \bigoplus_{i=1}^{t} \mathrm{Hom}_{M_c/N_i}(M,M) \quad \text{as K-algebras.}$$

証) Lemma (2.4) と同様にして,

$^\exists$homog. elem. $\zeta^{(i)}$: $\bigcup_{j\neq i} V_j \cup W \subseteq V_G(\zeta^{(i)})$, $V_i \subsetneq V_G(\zeta^{(i)})$

中集して, $\deg \zeta^{(1)} = \cdots = \deg \zeta^{(t)}$, $\zeta^{(i)}\cdot\zeta^{(j)}\cdot I_M = 0$ としてよい.

$\zeta = \zeta^{(1)} + \cdots + \zeta^{(t)}$ とおくと, $\dim(V_G(\zeta)\cap V_G(M)) < C$ より $\zeta\cdot I_M \in R$ となる.

$e_i = \dfrac{\zeta^{(i)} I_M}{\zeta I_M}$ とおくと, $1 = e_1 + \cdots + e_t$, $\{e_i\}$: central orthogonal idempotent

が得られる. 従って, Th. (2.6) の同一視のもと

$$\mathrm{Hom}_{Q_c}(M,M) = \bigoplus_{i=1}^{t} \mathrm{Hom}_{Q_c}(M,M)e_i \quad .$$

さらに Th. (2.6) と同様にして,

$$\mathrm{Hom}_{M_c/N_i}(M,M) \cong (\mathrm{Ext}^*_{KG}(M,M)R_i^{-1})^0 \quad \text{を得る.}$$

ここで, $R_i = \{\zeta I_M \mid \zeta \in H^*(G,K)$ は homogeneous, $V_G(\zeta)\cap V_G(M) \not\supseteq V_i\}$.

$R \subset R_i$ より 自然に次の写像ができる

$$\varphi_i : \mathrm{Hom}_{Q_c}(M,M) \cong (\mathrm{Ext}^*_{KG}(M,M)R^{-1})^0 \longrightarrow (\mathrm{Ext}^*_{KG}(M,M)R_i^{-1})^0 \cong \mathrm{Hom}_{M_c/N_i}(M,M).$$

この時 φ_i は $\mathrm{Hom}_{Q_c}(M,M)e_i \cong \mathrm{Hom}_{M_c/N_i}(M,M)$ を導びくが, この事に関しては [4] を参照して下さい.

3. Decomposition

[2] の結果を紹介するのであるが，大変複雑な議論が行なわれているため概略を述べるに止めます.

<u>Induction Theorem (3.1)</u>　r を G の p-rank，$\{E_1, \cdots, E_s\}$ を G の maximal elementary abelian p-subgroups の共役類の代表元とする. この時，$\overline{\mathrm{mod}}\text{-}KG/M_{r-1}$ において，

$$\exists n,\ m_i \in \mathbb{N}\ ;\quad K^n \cong \sum_{i=1}^{s} (K_{C_G(E_i)}{\uparrow}^G)$$

ここで，$K_{C_G(E_i)}{\uparrow}^G$ は trivial $KC_G(E_i)$-module の induced module，$\sum$ は direct sum を意味する.

(考察の出発点)　$\mathcal{M} \in V_E(K)$ (E は任意の elem. ab. p-subgp) に対し，homog. elem. $\zeta \notin \mathrm{res}^*_{G,E}(\mathcal{M}) = \mathrm{res}^{-1}_{G,E}(\mathcal{M}) \in V_G(K)$ ならば，

$$0 \to L_\zeta \to \Omega^n(K) \xrightarrow{\hat{\zeta}} K \to 0 \quad \text{において，} \quad \mathcal{M} \notin V_E(L_{\zeta}|_E).$$

作用の制限.

induced module $K^{\uparrow G}$ に対しても同様な列がほしいのであるが，Carlson は次の様に考察を進めている.

E : G の elem. ab. p-subgp (maximal でなくてよい)

$N = N_G(E)$　，subgroup D : $E \leq D \leq N$

$$K_D{\uparrow}^G|_D \cong U \oplus T \quad \left(U = \sum_{x \in N} x \otimes K_D,\ T = \sum_{x \notin N} x \otimes K_D,\ \text{ここで，} U|_E = K_D^{|N:D|} \text{ に注意}\right)$$

<u>Lemma (3.2)</u>　$\mathfrak{m} \in V_E(K)$ に対し，

$\zeta = Tr_D^G(\gamma) \notin res^*_{G,E}(\mathfrak{m})$ となる hom. elem. $\gamma \in H^n(D, K)$ が存在するならば，次の様な（ζ から作られる）exact 列が存在する；

$$0 \to M \to (\Omega^n(K))^{|N:D|} \to U \to 0, \quad \mathfrak{m} \notin V_E(M_{|E}).$$

次の場合に Lemma の条件を満たす γ が存在する（homogeneous element を取るのが大変である）．

E : maximal elem. ab. p-subgp.

$D = \{ x \in N_G(E) \mid {}^\exists a_x \ (1 \leqq a_x \leqq p-1) \text{ s.t. } xyx^{-1} = y^{a_x} \text{ for all } y \in E \}$

$x \in N$，$\alpha \in K$ に対し，

$W(x, \alpha) = \{ \mathfrak{m} \in V_E(K) \mid x \cdot \mathfrak{m} = \alpha \cdot \mathfrak{m}$　ここで，$x \cdot : H^*(E,K) \cong H^*(E,K)$ は共役作用$\}$

$$\widetilde{W}_E = \bigcup_{\substack{x \in N-D \\ \alpha \in K}} W(x, \alpha)$$

この時，（大雑把に言えば）Quillen's stratification Theorem より $\mathfrak{m} \notin \widetilde{W}_E$ なら，上の E，D に対して hom. elem. γ が存在する．

Lemma の exact 列を利用して，次の Theorem が得られる．

<u>Theorem (3.3)</u>　E を maximal elem. ab. p-subgroup，

$\mathfrak{m} \in V_E(K)$ が $\mathfrak{m} \notin W_E \cup \widetilde{W}_E$ $\{ W_E = \bigcup_{E' \subsetneqq E} res^*_{E,E'}(V_{E'}(K)) \}$ とする．

この時，some $n > 0$ と all $t > 0$ に対し次の様な exact 列が存在する；

$$0 \to L \to (\Omega^{nt}(K))^{|N:D|} \oplus (\text{Projective module}) \to K_D^{\uparrow G} \to 0,$$

$\mathfrak{m} \notin V_E(L_{|E})$．

ここで、$\mathfrak{M} \notin V_E(L_{\downarrow E})$ となる $\mathfrak{M} \in V_E(K)$ が存在することは stratification Theorem より $res^*_{G,E}(V_E(K)) = V_E$ (i.e. maximal irr. comp. of $V_G(K)$) とすると、$V_G(L) \cap V_E \subsetneq V_E$ と同値である。

Theorem (3.1) の各 E_i に対し得られる Theorem (3.3) の exact 列を、雑に言えば、足し合わせることにより次の exact 列が得られる。

$$0 \to L \to (\Omega^{nt}(K))^{m} \oplus (\text{projective module}) \to \sum_{i=1}^{s} (K_{D_i}^{\uparrow G})^{m_i} \to 0$$

, $V_G(L) \cap V_{E_i} \subsetneq V_{E_i}$ for all $i=1, \cdots, s$.
(i.e. $\dim V_G(L) < r$)

ここで、D_i は E_i に対する D を意味する。$m = L.C.M\{|N_G(E_i) : D_i|\}$ $m_i = m/|N_G(E_i) : D_i|$ 。ところで、上の exact 列において $t \in \mathbb{N}$ は任意にとれるので Proposition (2.5) より、

$$K^{m} \cong \sum_{i=1}^{s} (K_{D_i}^{\uparrow G})^{m_i} \quad \text{in} \quad \overline{\mathrm{mod}}\text{-}KG/M_{r-1}$$

となることがわかる。さらに細かな議論を行うことにより D_i を $C_G(E_i)$ で置き換えることができ Theorem (3.1) の同型が得られている。

References

[1] D. J. Benson, Representations and Cohomology II : Cohomology of Groups and Modules, Cambridge Studies in Adv. Math. 31, C. U. P., 1991.

[2] J. F. Carlson, Decomposition of the trivial module in the complexity quotient category, 1993, preprint.

[3] J. F. Carlson, P. W. Donovan and W. W. Wheeler, Complexity and quotient categories for group algebras, 1993, Preprint.

[4] J. F. Carlson and W. W. Wheeler, Varieties and localization of module categories, 1993, Preprint.

[5] L. Evens, The Cohomology of Groups, Oxford Univ. Press, 1991.

[6] P. P. Grivel, 'Catégories dérivées et foncteurs dérivés', Algebraic D-modules (Academic Press, 1987), 1~108.

[7] D. Happel, Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras, London Math. Soc. Lecture Notes 119, C. U. P., 1988.

[8] N. Popescu, Abelian Categories with Applications to Rings and Modules, Academic Press, 1973.

[9] J. Rickard, Derived categories and stable equivalence, J. Pure and Appl. Alg. 61 (1989), 303-317.

[10] 若松隆義, '多元環の表現論におけるDrived Category', 多元環の表現論シンポジューム報告 (1987), 135-168.

Complexity quotient categories for group algebras II
— Infinitely generated modules —

愛媛大　庭崎　隆

1　はじめに

本稿を通して，G は有限群，k は標数 $p>0$ の代数的閉体とする。kG-加群 (無限生成でもよい) の圏において，射影的加群を経由するような射を 0 と同一視することにより得られる圏を StMod(kG)，そのうち有限生成 kG-加群達のなす充満部分圏を stmod(kG) と書く。また，complexity が c 以下の有限生成加群達のなす充満部分圏を $\mathcal{M}_c$ で表す:

$$\mathcal{M}_0=\{0\}\subset\mathcal{M}_1\subset\cdots\subset\mathcal{M}_{r-1}\subset\mathcal{M}_r=\mathrm{stmod}(kG)\qquad(r=G\text{ の }p\text{-階数})$$

stmod(kG) は加群の短完全列から誘導される triangulation の構造を持ち，上は triangulated な部分圏の列である。Carlson らは商圏 $\mathcal{M}_c/\mathcal{M}_{c-1}$ における射集合がコホモロジーの局所化として表せることを示し，商圏における奇妙な同型，通常のコホモロジー論への応用など，幾つかの興味ある結果を提示した (河合浩明氏の講演)。しかし，この商圏では Krull-Schmidt-Azumaya の定理 (直既約分解の一意性) が成り立たない。

Benson, Carlson, Rickard [2] は $\mathcal{M}_c$ を含むような StMod(kG) の適当な部分圏において同様な操作を行えば，Krull-Schmidt-Azumaya の定理が成り立ち，$\mathcal{M}_c/\mathcal{M}_{c-1}$ でも直和に関する簡約法則が成り立つことを証明した。その過程で彼らは，自己準同型環の巾等元が与えられたとき，対応する直和因子の具体的な構成法を示した。それは無限生成加群の或る短完全列を求めることに帰着され，多くの場合にそれ程難しい計算を必要としないと思われる。また，彼らは無限生成加群にも complexity に相当する値を定義し，その流れのもとで無限生成加群にも多様体を定義した。この新しい多様体は有限生成加群については確かに今までの多様体と一致し，更に有限生成の場合に成り立った幾つかの性質も継承している。しかし，群 G とその部分群の多様体を強く関係付ける Avrunin-Scott の定理が成り立たない。また，加群の周期性に関しても無力のようで，彼ら自身も多様体の定義に関してはまだ改良の余地があると述べている。

本稿では以上のことを [2] に従って紹介していく。記号も [2] に準じたものを用いることにする。

2 無限生成のトリックと KSA 定理

まず，無限生成加群の取り扱いについて幾つかのことを確認しておく。

H を G の部分群とする。kH-加群 U (無限生成でもよい) に対して，$|G:H|<\infty$ だから，$\mathrm{Ind}_H^G(U)\simeq\mathrm{Coind}_H^G(U)$，即ち

$$kG\otimes_{kH}U\simeq\mathrm{Hom}_{kH}(kG,U)$$

が成り立つ (有限直和 = 有限直積)。このことから，Frobenius の相互律 (二種類とも)，トレース写像に関する Higman の判定条件などが無限生成の場合にもそのまま成り立ち，特に kG-加群 P に対して，

$$P\text{ は射影的}\iff P\,\Big|\,\mathrm{Ind}_1^G(P)\iff P\,\Big|\,\mathrm{Coind}_1^G(P)\iff P\text{ は入射的}$$

となる。kG-加群 M に対して，入射包絡 $M\to P$ はいつでも存在するのでその余核を $\Omega^{-1}(M)$ で表す。stmod(kG) のときのように，短完全列 $0\to L\to M\to N\to 0$ から誘導される $L\to M\to N\to\Omega^{-1}(L)$ を triangle として，StMod(kG) にも triangulation の構造が入る。

さて StMod(kG) を持ち出す動機でもある，無限生成加群に対する或るトリック ([2],[3]) を紹介する。

補題 2.1. $\mathcal{C}$ は次の性質を持つ triangulated category とする。

(1) $\mathcal{C}$ は可算直和で閉じている (可算個の対象には直和が存在する)。

(2) 二つの triangle の直和はまた triangle になる。

この時，$\mathcal{C}$ の任意の対象 M に対し，End(M) の巾等元 e は分裂する (即ち e に対応する直和因子がある)。

これを示すために，まず M の可算直和を作り，それを $\hat{M}$ とおく。$\varphi,\psi\in\mathrm{End}(\hat{M})$ を次の図で定義する。

$$\begin{tikzcd}
\hat{M} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, equal] & \hat{M} \arrow[d, equal] \\
M \arrow[r, "e"] & M \\
\oplus & \oplus \\
M \arrow[r, "e"] \arrow[uur, "e'"] & M \\
\oplus & \oplus \\
\vdots \arrow[uur, "e'"] & \vdots
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\hat{M} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, equal] & \hat{M} \arrow[d, equal] \\
M \arrow[r, "e'"] & M \\
\oplus & \oplus \\
M \arrow[r, "e'"] \arrow[uur, "e"] & M \\
\oplus & \oplus \\
\vdots \arrow[uur, "e"] & \vdots
\end{tikzcd}$$

ここで $e' = e-1$ である (加法圏では二個の直和は直積だから，各因子における $M \to M\oplus M$ は well-defined で，φ, ψ も well-defined となる)。

$$M' \to \hat{M} \xrightarrow{\varphi} \hat{M} \to T(M'), \qquad\qquad M'' \to \hat{M} \xrightarrow{\psi} \hat{M} \to T(M'')$$

を φ, ψ に対応する triangle とする。その直和

$$M' \oplus M'' \to \hat{M} \oplus \hat{M} \xrightarrow{\varphi\oplus\psi} \hat{M} \oplus \hat{M} \to T(M') \oplus T(M'')$$

を作ると，仮定よりこれも triangle である。ここで $\varphi \oplus \psi$ は前述の φ の定義図において，M を $M \oplus M$ に，e, e' をそれぞれ

$$f = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e' \end{pmatrix}, \qquad f' = \begin{pmatrix} e' & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

に置き換えたものである。ところが $a, b, c \in \mathrm{End}(M \oplus M)$ を

$$a = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad c = \begin{pmatrix} e' & e \\ -e & e' \end{pmatrix}$$

で定めると，$cfc^{-1} = a$，$cf'c^{-1} = b$ であるから，$\varphi \oplus \psi \colon \hat{M} \oplus \hat{M} \to \hat{M} \oplus \hat{M}$ は

$$\begin{tikzcd}
M \oplus M \arrow[r, "a"] & M \oplus M \\
\oplus & \oplus \\
M \oplus M \arrow[r, "a"] \arrow[uur, "b"] & M \oplus M \\
\oplus & \oplus \\
\vdots \arrow[uur, "b"] & \vdots
\end{tikzcd}$$

で定義される $\theta \colon \hat{M} \oplus \hat{M} \to \hat{M} \oplus \hat{M}$ と同値である。θ に対応する triangle は

$$M \to \hat{M} \oplus \hat{M} \xrightarrow{\theta} \hat{M} \oplus \hat{M} \to T(M)$$

である (θ は分裂する全射で，$M = \mathrm{Ker}\,\theta$)。従って，$M \simeq M' \oplus M''$ である。この同型を通して，e が $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ になることは容易に計算できる。

この証明の重要な点は，φ, ψ の triangle の構成 (我々にとっては主に加群の短完全列の構成) が直和因子の具体的な構成に直結するということである。実際 [2] ではこの方法を用いて，二面体群の場合に自明な加群 k を，以下で述べる $\mathcal{U}_c/\mathcal{U}_{c-1}$ において無限生成加群達の直和に分解している。(尚，[2, Lemma 3.1] では上の補題の仮定 (2) も「可算直和」にしているが,「二個の直和」でよいと思われる。)

さて，自然数 c に対し $\mathbf{Min}_c$ を

(∗)　$\mathcal{M}_c$ を含み,「直和因子・可算直和・triangle」の三つをとる操作で閉じている

ような StMod(kG) の充満部分圏のうち最少のものとして定義する (即ち，(∗) を満たす充満部分圏達の共通部分)。

定理 2.2. $M \in \mathrm{StMod}(kG)$ に関する以下の四条件は互いに同値である。この性質を持つ M 達のなす StMod(kG) の充満部分圏を $\mathcal{U}_c$ で表せば，これは (∗) を満たし，

$$\mathbf{Min}_c = \left\{ M \in \mathcal{U}_c \;\middle|\; M \text{ は可算生成} \right\} \subset \mathcal{U}_c$$

が成り立つ;

(1) $X \in \mathrm{stmod}(kG)$ で $f\colon X \to M$ ならば，f は $\mathcal{M}_c$ の対象を経由する。

(2) $X \in \mathrm{stmod}(kG)$ で $f\colon X \to M$ ならば，$fg = 0$ となる射 $g\colon Y \to X$ があって，g は $\mathrm{stmod}(kG)/\mathcal{M}_c$ においては同型射となる。

(3) S が M の有限部分集合ならば，或る有限生成射影的加群 P と $\left\{(s,0) \;\middle|\; s \in S\right\} \subset Z \subset M \oplus P$ となる $Z \in \mathcal{M}_c$ がある。

(4) M は $\mathcal{M}_c$ の対象達の或る filtered colimit として表せる。即ち，次の性質を満たすような (小さな) 圏 I からの $\mathcal{M}_c$ に値をとる関手の余極限として表せる;

　(i) $i, i' \in I$ ならば，或る $j \in I$ と射 $i \to j$, $i' \to j$ が存在する。

　(ii) 任意の二つの射 $i \rightrightarrows j$ に対して，これらを等化するような射 $j \to k$ が存在する。

(1) と (2) の対応は次のような triangle の射を考えればよい。

$$\begin{array}{ccccccc}
Y & \xrightarrow{g} & X & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \Omega^{-1}(Y) \\
\big\downarrow & & {\scriptstyle f}\big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\
0 & \longrightarrow & M & = & M & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

一般に単射 $Z \xrightarrow{\iota} P$ (例えば入射包絡) を固定したとき，$Z \xrightarrow{h} M$ を与えることと単射 $Z \xrightarrow{h \oplus \iota} M \oplus P$ を与えることは同値である。(1) と (3) の対応はこれから出る。(4) は I としてコンマカテゴリー $(\mathcal{M}_c \downarrow M)$ ($\mathcal{M}_c$ の対象から M への射のなす圏) をとればよい。ま

た $\mathbf{Min}_c$ に関する主張については，$\mathcal{M}_c$ における図 $M_0 \to M_1 \to M_2 \to \ldots$ の余極限を $\hat{M}$ としたとき，

$$\bigoplus_{i\geq 0} M_i \to \bigoplus_{i\geq 0} M_i \to \hat{M} \to \Omega^{-1}(\bigoplus_{i\geq 0} M_i)$$

という形の triangle が実際に構成できることから，$\hat{M} \in \mathbf{Min}_c$ が出る。

$\mathcal{M}_c$, $\mathcal{U}_c$ の何れも直和因子をとる操作で閉じている (thick) ので，これらによる商圏には trianglulation の構造が自然に入る。このとき，自然な関手

$$\mathcal{M}_c/\mathcal{M}_{c-1} \to \mathcal{U}_c/\mathcal{U}_{c-1}$$

は埋め込み (忠実充満) である。

射集合の一致を確かめたい。全射性を示す。$X, X' \in \mathcal{M}_c$ に対して，$\mathcal{U}_c/\mathcal{U}_{c-1}$ における射 $X \leftarrow U \to X'$ は $Y \in \mathcal{M}_c$ を用いた射 $X \leftarrow Y \to X'$ で表せることを示したい。$U \to X \to M \to \Omega^{-1}(U)$ は triangle で，$M \in \mathcal{U}_{c-1}$ とすると，定理 2.2 (2) より次の triangle 達の図が書ける。

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r] \arrow[d, equal] & U \arrow[d] & & \\
Y \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{-1}(Y) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r, equal] \arrow[d] & M \arrow[r] & 0 \\
\Omega^{-1}(Y) \arrow[r] & \Omega^{-1}(U) & &
\end{tikzcd}$$

$Z \in \mathcal{M}_{c-1}$ であり，$\mathcal{U}_c/\mathcal{U}_{c-1}$ において $Y \simeq X \simeq U$ だからよい。単射性も同様。

$\mathcal{M}_c/\mathcal{M}_{c-1}$ の任意の対象の自己準同型環はアルチン環であることが，[4] による自己準同型環の表示 (コホモロジー環の局所化) から示すことができる。そこで，$\mathcal{M}_c/\mathcal{M}_{c-1}$ を直和因子をとる操作で閉じるように膨らませた圏 (直和因子達を付け加えた圏) を $\mathcal{M}_{c,c-1}$ とおけば，$\mathcal{M}_{c,c-1}$ においても任意の対象の自己準同型環はアルチン環となる。一方，補題 2.1 により，$\mathcal{U}_c/\mathcal{U}_{c-1}$ においては任意の対象の自己準同型環の巾等元は分裂する。従って，$\mathcal{M}_{c,c-1}$ でもそうであるから，次が成り立つ。

定理 2.3. $\mathcal{M}_{c,c-1}$ では KSA 定理 (直既約分解の一意性) が成り立つ。特に $\mathcal{M}_c/\mathcal{M}_{c-1}$ において，直和に関する簡約法則 ($L \oplus M \simeq L \oplus N \Rightarrow M \simeq N$) が成り立つ。

3　加群の多様体

コホモロジー環 $H^*(G,k)$ の極大スペクトル (極大イデアルのなすアファイン多様体) を $V_G(k)$ とかく。有限生成 kG-加群 N に対し，コホモロジー環 $\mathrm{Ext}^*_{kG}(N,N)$ は有限生成 $H^*(G,k)$ 加群である。N の多様体 $V_G(N)$ とは，

$$V_G(\mathrm{Ann}(\mathrm{Ext}^*_{kG}(N,N)) = \Big\{ I \in V_G(k) \,\Big|\, \mathrm{Ann}(\mathrm{Ext}^*_{kG}(N,N)) \subset I \Big\}$$

のことであった ([1])。ここで $\mathrm{Ann}(U)$ は U の $H^*(G,k)$ における零化イデアルである。

(有限生成とは限らない) kG-加群 M について多様体 $\mathcal{V}_G(M)$ を，次を満たす $V_G(k)$ の斉次閉部分多様体 V 達の集合として定義する:

> 或る有限生成 kG-加群 N と或る有限生成斉次 $H^*(G,k)$-部分加群 $U \subset \mathrm{Ext}^*_{kG}(N,M)$ に対して，$V \subset V_G(\mathrm{Ann}(U))$ となる。

M が有限生成のときは，$\mathcal{V}_G(M)$ は $V_G(M)$ の斉次閉部分多様体すべての集合と一致する。しかし一般的には $\mathcal{V}_G(M)$ に最大元があるわけではない。複雑な定義であるが，定義の条件は次の補題の意味で有限生成加群達から測れるものである ([2, Lemma 7.1] には小さなミスがあるようである)。

補題 3.1. M を kG-加群，N を有限生成 kG-加群とし，$U \subset \mathrm{Ext}^*_{kG}(N,M)$ を有限生成斉次 $H^*(G,k)$-加群とする。

(1) 或る有限生成 kG-加群 X と kG-準同型 $\varphi\colon X \to M$ が存在して，

$$U\,\mathrm{Ext}^*_{kG}(N,N) \subset \mathrm{Im}\Big(\varphi_*\colon \mathrm{Ext}^*_{kG}(N,X) \to \mathrm{Ext}^*_{kG}(N,M)\Big)$$

が成り立ち，しかも或る次数以上からはすべて等号となっている。

(2) $\sqrt{\mathrm{Ann}(U)} = \sqrt{\mathrm{Ann}(U\,\mathrm{Ext}^*_{kG}(N,N))} = \sqrt{\mathrm{Ann}(\mathrm{Im}\,\varphi_*)}$。

(3) $\rho \in H^n(G,k)$ に対して，triangle $L_\rho \to \Omega^n(k) \xrightarrow{\rho} k \xrightarrow{\rho'} \Omega^{-1}(L_\rho)$ を考える。このとき

$$\rho \in \mathrm{Ann}(\mathrm{Im}\,\varphi_*) \iff \varphi \text{ は } X \xrightarrow{1\otimes\rho'} X \otimes \Omega^{-1}(L_\rho) \to M \text{ と分解する。}$$

(1) は U の生成元 $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ ($\deg\zeta_i = n_i$) に対して，$\sum_i \zeta_i\colon \oplus_i \Omega^{n_i}(N) \to M$ をとればよい。(2) は明らか。(3) は次のような triangle 間の射の存在性を考えればよい。

$$\begin{array}{ccccccc}
X\otimes L_\rho & \longrightarrow & X\otimes\Omega^n(k) & \xrightarrow{1\otimes\rho} & X\otimes k & \xrightarrow{1\otimes\rho'} & X\otimes\Omega^{-1}(L_\rho) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \downarrow \\
\Omega(M) & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & = & M
\end{array}$$

このことより，$\mathcal{V}_G(M)$ を次のように特徴づけることができる。

定理 3.2. $\mathcal{V}_G(M)$ は $V_G(k)$ の斉次閉部分多様体の集合で次の条件を満たすもののうち，最少のものである。

(1) $W \subset V \in \mathcal{V}_G(M) \Rightarrow W \in \mathcal{V}_G(M)$。

(2) $V_1, \ldots, V_t \in \mathcal{V}_G(M) \Rightarrow V_1 \cup \cdots \cup V_t \in \mathcal{V}_G(M)$。

(3) 有限生成加群 X からの kG-準同型 $\varphi\colon X \to M$ に対して，$V_G(M') \in \mathcal{V}_G(M)$ となる有限生成加群 M' が存在して，φ は M' を経由する。

(3) については 定理 2.2 と同様の言い換えが成り立つ。部分圏 $\mathcal{U}_c$ を最も妥当な拠り所と考えたとき，この (3) が $\mathcal{V}_G(M)$ の定義の動機であったと思われる。実際 [2] では，$\mathcal{U}_c$ と $\mathcal{V}_G(M)$ の間には次のような自然な関係があることを確認している。

命題 3.3. $M \in \mathcal{U}_c$ となる最少の c を M の complexity と呼び，$\mathrm{cx}_G(M)$ と書く。このとき，

(1) $\mathrm{cx}_G(M) = \max\left\{\dim V \,\middle|\, V \in \mathcal{V}_G(M)\right\}$

(2) $\mathrm{cx}_G(M) = \max\left\{\mathrm{cx}_E(M) \,\middle|\, E \text{ は } G \text{ の基本可換 } p\text{-部分群}\right\}$

(3) $\mathrm{cx}_G(M) = 0 \iff M$ は射影的 kG-加群

以上は有限生成加群の場合に知られている結果の拡張である。しかし残念ながら，有限生成の場合に G の部分群と加群多様体を強く結び付ける Avrunin-Scott の定理の拡張，及びその典型的な応用は成り立たない。(それぞれ次の命題における等号のこと。尚，直和に関しては自然な等式がある。)

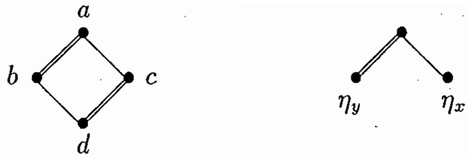
命題 3.4. M, N は kG-加群，H は G の部分群とすると，次の包含関係がある。

(1) $\mathcal{V}_H(M) \subset (\mathrm{res}^*_{G,H})^{-1}\mathcal{V}_G(M)$

(2) $\mathcal{V}_G(M \otimes N) \subset \mathcal{V}_G(M) \cap \mathcal{V}_G(N)$

ここで等号の成り立たない例が [2] にあるので，それを詳しく見てみることにする。

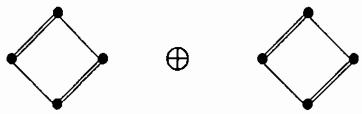
まず $G = < x, y >$ を Klein の 4-群とし，k は標数 2 とする。kG-加群を次のような図で表す (Ringel の方法)。



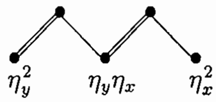
即ち，図の頂点を基底とする線型空間で，$X := x-1$ の作用を二重線の下向きで，$Y := y-1$ の作用を一重線の下向きで定義する。但し，対応する線の出ていない基底には 0 として作用するものとする。例えば，左側の加群では

$$Xa = b, \quad Ya = c, \quad Xc = Yb = d$$

である。従って，上図は左が kG，右が $kG/k = \Omega^{-1}(k)$ を表している。また，$H^1(G,k) \simeq \mathrm{Hom}_{kG}(k, \Omega^{-1}(k)) \simeq \mathrm{Soc}\,\Omega^{-1}(k)$ であるから，上の図の η_x, η_y は $H^1(G,k)$ の基底である。$kG \oplus kG$ の図



において，$<(c,b),\ (d,0),\ (0,d)>_k \simeq \Omega^{-1}(k)$ であるから，$(kG \oplus kG)/\Omega^{-1}(k) = \Omega^{-2}(k)$ は



で表される。ここで積は次のように計算できる。例えば $\eta_y\eta_x$ の場合，chain map

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & k & \longrightarrow & kG & \longrightarrow & \Omega^{-1}(k) & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \eta_y} & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Omega^{-1}(\eta_y)} & & \\
0 & \longrightarrow & \Omega^{-1}(k) & \longrightarrow & kG \oplus kG & \longrightarrow & \Omega^{-2}(k) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

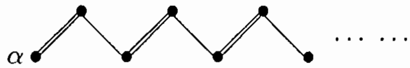
を自然に作ると，$\Omega^{-1}(\eta_y) \colon \Omega^{-1}(k) \to \Omega^{-2}(k)$ は

という左半分への埋め込みとなる。カップ積 $\eta_y\eta_x$ は合成積 $\Omega^{-1}(\eta_y) \cdot \eta_x$ のことだから，それは $\Omega^{-2}(k)$ の図の真ん中の頂点に対応する。η_y^2，η_x^2 の計算も同様で，$H^2(G,k) = \mathrm{Soc}(\Omega^{-2}(k)) =<\eta_y^2,\ \eta_y\eta_x,\ \eta_x^2>_k$ が出る。以下同様にして，

$$H^*(G,k) = k[\eta_x, \eta_y] \qquad (\text{多項式環})$$

となる。

今，M を右方向へ無限に続く図

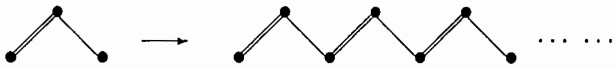


で定義される無限生成直既約加群とする。先と同様に M を $kG \oplus kG \oplus \ldots$ に埋め込んでみると，その剰余は再び M である。即ち，M は $M \simeq \Omega^{-1}(M)$ となる周期的加群である。以下，コホモロジー $H^*(G, M)$ を前と同じ議論を用いて眺めてみる。

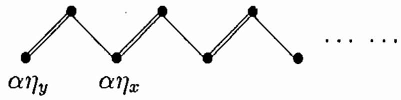
$H^0(G, M) = \mathrm{Hom}_{kG}(k, M) = \mathrm{Soc}(M)$ であるから，これは M の図の下段の頂点達で張られる空間である。その左端の頂点を α とおく。先と同様に $\alpha\eta_y$，$\alpha\eta_x$ を計算してみる。まず，chain map

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & k \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & kG \arrow[r] \arrow[d] & \Omega^{-1}(k) \arrow[r] \arrow[d, "\Omega^{-1}(\alpha)"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M \arrow[r] & kG \oplus kG \oplus \ldots \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

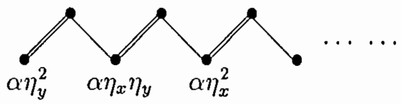
を自然に作ると，$\Omega^{-1}(\alpha) \colon \Omega^{-1}(k) \to M$ は



という左端への埋め込みである。従って，$H^1(G, M) = \mathrm{Soc}(\Omega^{-1}(M)) = \mathrm{Soc}(M)$ における $\alpha\eta_y$，$\alpha\eta_x$ の位置は



である。$H^2(G, M) = \mathrm{Soc}(\Omega^{-2}(M)) = \mathrm{Soc}(M)$ においては



で，高次の場合も同様である。

以上より，$\alpha_\# \colon H^*(G, k) \to H^*(G, M)$ は単射であり，$\mathrm{Ann}(\mathrm{Im}\,\alpha_\#) = 0$ である。特に，$\mathcal{V}_G(M) = \mathcal{V}_G(k)$ となる。一方，$H := < x >$ とおいたとき，M は kH-加群としては

であるから自由であり，$\mathcal{V}_H(M) = \{0\}$ となる。これは 命題 3.4 (1) において，等号の成り立たない例を与える。(2) の例も，M と

で定義される加群 ($k[G/H]$) との tensor 積が kG-自由であることから作れる。

今の例から次のようなこともわかる。

まず，M は周期的であるが，$\mathrm{cx}_G(M) = \mathrm{cx}_G(k) = 2$ である。有限生成加群については，周期的であることと complexity が 1 であることは同値であったから，これも無限生成では成り立たないことになる。周期的という性質は部分圏 $\mathcal{U}_c$ では中々測り難いことのようで，例えば周期的加群達の filtered colimit ではあるが周期的部分加群を全く持たないような加群の例も [2] で紹介されている。

第二に，コホモロジー環 $\mathrm{Ext}^*_{kG}(M,M)$ の $H^*(G,k)$ における零化イデアル $J_G(M)$ について考えてみる。$\mathrm{Ext}^*_{kG}(M,M)$ は各次数が $\mathrm{End}_{\mathrm{StMod}(kG)}(M) = \mathrm{End}_{kG}(M)$ である巨大な環であるが，先程の議論にカップ積 (tensor 積) の計算を組み合わせて，自然な環準同型

$$H^*(G,k) \to \mathrm{Ext}^*_{kG}(M,M) \qquad (\rho \mapsto \rho \cdot 1_M)$$

をやはり前述のように図示することができる。特にこれは単射で，$J_G(M) = 0$ である (このことは $J_G(M) \subset \mathrm{Ann}(\mathrm{Im}\,\alpha_\#) = 0$ からもわかる)。従って，単に $J_G(M)$ から多様体を定義するだけでは $\mathcal{V}_G(M)$ の場合と同じ議論を繰り返すことになり，やはり有限生成加群の場合の拡張を得ることは難しい。例えば周期性に限って考えてみても，有限生成の場合に complexity による特徴づけが得られたのは，主に周期性がコホモロジーの各次数の次元の話にすりかわったためであると言ってよいであろう。しかし今の M の場合，$\mathrm{End}_{kG}(M)$ すら $H^*(G,k)$ を内包するといえるほど巨大である。商圏 $\mathcal{M}_c/\mathcal{M}_{c-1}$ ではすべての対象が周期的になるという結果があるが，それはコホモロジーの局所化が元の加群の周期性に関する情報を隠蔽していった帰結である。コホモロジー環 $\mathrm{Ext}^*_{kG}(M,M)$ が与えられたとき，M の周期性に関する情報を引きだそうというのとは逆の方向であり，その糸口はまだ皆無のようにみえる。

周期性とはコホモロジー環の大きさに関する命題である。今の例の $\mathrm{Ext}^*_{kG}(M,M)$ は $\mathrm{End}_{kG}(M)$ の単なる積み重ねでありながら，$H^*(G,k)$ だけからはその大きさを測ることができない。無限生成加群をも制御しようとするならば，$H^*(G,k)$ だけにこだわらない，何か新しい大きさの尺度が必要と思われる。

参考文献

[1] D. J. Benson, *Representations and cohomology II*, Cambridge Studies in Advanced Math., vol. 31, Cambridge Univ. Press, 1991.

[2] D. J. Benson, J. F. Carlson, and J. Rickard, *Complexity and varieties for infinitely generated modules*, 1993, preprint.

[3] M. Bökstedt and A. Neeman, *Homotopy limits in triangulated categories*, Compositio Math. **86** (1993), 209–234.

[4] J. F. Carlson, P. W. Donovan, and W. W. Wheeler, *Complexity and quotient categories for group algebras*, J. Pure Appl. Algebra **93** (1994), 147–167.

[5] J. F. Carlson and W. W. Wheeler, *Varieties and localizaions of module categories*, 1993, preprint.

[6] D. Happel, *Triangulated categories in the representation theory of finite dimensional algebras*, London Math. Soc. LNS, vol. 119, Cambridge Univ. Press, 1988.

頂点作用素代数の表現

宮本雅彦

平成７年１月２３日

まず，初めに，多元環のシンポジウムで頂点作用素代数の話しをする機会をいただいた時は，頂点作用素代数も環の一つである程度に考えていましたが，講演を通して，環論の立場から頂点作用素代数を見ることの重要性を教えられたような気がします．このことは今年の夏に行われた代数的組合せ論研究集会でもオハイオ州立大学の原田先生も述べられています．頂点作用素代数は現在急速に発展していますが，研究者の数はそれ程多くなく，頂点作用素代数がモンスター単純群，モジュラー形式，リー代数，共形場理論などと結び付いているので，個々の研究者がそれぞれの興味を追いかけているだけではないかという懸念があります．頂点作用素代数は始まったばかりですし，元々ムーンシャイン加群という特別な例から始まった頂点作用素代数の研究であり，しかも他の分野との神秘的な関係を見せるので，興味が個々の例に向かうのは仕方が無かったかもしれません．しかしながら，これは環論に例えると，完全可約な単純環のみを扱っているにすぎないといえます．イデアル等が環と同様に定義出来るにもかかわらず，現時点で頂点作用素代数を研究している人々は全くイデアルを扱おうとしていません．これから環論的な視野を持った方がイデアルを含めた頂点作用素代数の理論を発展させてくれることを期待したいと思います．

頂点作用素代数 (Vertex operator algebra) 略して VOA，は生まれてまだ１０年たらずの新しい分野で，不思議な魅力を持っていますが，特にそのうちの一つ，

$$\infty/\infty$$

を副題として述べていきます．頂点作用素代数が出てきたきっかけはモンスター単純群に関係して起こったムーンシャイン予想です．モンスター単純群とは無限系列に入っていない２６個ある散在型有限単純群のうち、最大のものです。この群の位数はほぼ 10^{54} で，コンピュータが幾らすすんでもそう簡単に構造を扱えるものとは思えません．また，この位数は無限系列に入っていない意味を持つ固有の数としては，知られているのもの中で最大の数だと思います。しかし，モンスター単純群を研究する理由は位数が大きいからではなく，これから述べるように不思議な性質を持っているからなのです．

有限群のように、有限のものを扱おうとすると、通常は有限体や，有限幾何などの有限のものを使うのが自然だと思います．無限系列であるリー型の単純群などはこれで成功したのですが、散在型単純群の場合、あまり成功しませんでした。では、どうするか？と考えたとき、それ以外の方法として、無限のものに無限個の条件をつけて、有限にするという方法が考えられます。しかし，これは一般には簡単ではありませんし，適当に入れてしまうと自己同型などなくなります．

ところが，これから述べる頂点作用素代数では、このような事がバランスよく起こっているのです．しかも、このような設定ですから、有限のものと無限のものが密接に関係しており、これまでの数学とはひと味違ったものを楽しむ事ができます。

簡単に歴史を説明しましょう．

頂点作用素代数の理論の出発点はモンスター単純群 $\mathbb{M}$ の存在が 20 年程前に予言された瞬間です。このモンスター単純群の各元を行列で表現しようとすると最低 196883 次の正方行列が必要なことが分かりました。この 196883 という数字がモジュラー関数の一番基本的なものである古典的楕円モジュラー関数（定数項を０にしておく）の

$$J(z)=q^{-1}+0+196884q+21493760q^2+\ldots.q=e^{2\pi iz}$$

の係数に類似しているという事に McKay 気づき、更に確認すると，２番目に小さい行列

表現 21296876 を使うと

$$21296876 + 196883 + 1 = 21493760$$

となることがわかり，また，モジュラー関数を研究していた Ogg が

$$p \,\Big|\, |G| \Longleftrightarrow \Gamma(p)^+ \text{ が種数 0 を持つ}$$

を見つけるなど，奇妙な偶然の一致が数多く見つかりました．それらをまとめた Conway, Norton によるムーンシャイン予想となったわけです．この中には色々な偶然の一致が書かれているのですが，一番基本的な形は McKay's observation による

ムーンシャイン予想 I　ある自然な無限次元の次数付きモンスター加群 $V = \sum_{n=1}^{\infty} V_n$ があって、$dimV_n$ が $J(z)$ の q^{n-1} の係数となるものがある。

という事です。

色々な候補の後で，1984 年に Frenkel（数理物理)、Lepowsky（リー代数), Meurman（群論）の 3 人がアフィンリー代数をツイストするという操作によって無限の次数のついたムーンシャイン加群

$$V^{\natural} = \sum_{i=0}^{\infty} V_n^{\natural}$$

を構成しました。

そしてこの結果を知った Borcherds が 1986 年にこのムーンシャイン加群 $V^{\natural}$ の中に彼が考えていた頂点代数の概念（無限個の演算）が定義できることを発表し、

それらをまとめて 1988 年 上記の 3 人が ムーンシャイン頂点作用素代数 $V^{\natural}$ を構成したのが最初の頂点作用素代数です．

しかも、驚くべきことに、無限個の演算の為にムーンシャン頂点作用素代数の全自己同型群が丁度モンスター単純群となるのです。

このように無限次元を使って有限群を与えていますが，一方無限加群の設定ですから、色々な関数との関係がでてきます．例えば、一般に 次数付き加群 $V=\sum V_n$ があって、g がそれの次数を保つ線形変換とすると、

$$\mathrm{ch}(g)=e^{-2\pi ih}\sum \mathrm{Tr}(g)_{V_n}e^{2\pi iz}$$

は収束するかどうかは今問題としないで，関数を定義する事ができます．そして，頂点作用素代数の場合には，これが不思議とモジュラー不変性を持っていることが多いのです．

では，頂点作用素代数の説明に入りましょう．無限個の演算は決して複雑に定義されているわけではありません。頂点作用素代数とは一言で述べると可換な元からなる代数なのです。

この可換という意味について少し説明しますと，環 R に対して R の元を係数に持つような形式的巾級数 $a(z)=\sum a_nz^{-n-1}, b(z)=\sum b_nz^{-n-1}$ を考えます。ここで $a_n, b_n\in R$ です。通常可換というのは

$$a(z)b(z)=b(z)a(z)$$

の事ですが、無限和ですので積 $a(z)b(z)$ 自体が定義出来ていません。そこで形式的巾級数なので

$$a(z_1)b(z_2)=b(z_2)a(z_1)$$

を考え、$z_1\times z_2$ 平面の中の一直線 z_1-z_2 を除いて考えます。すなわち、 十分大きな n があって

$$(z_1-z_2)^na(z_1)b(z_2)=(z_1-z_2)^nb(z_2)a(z_1)$$

が成り立つとき、 $a(z)$ と $b(z)$ は"可換である"と呼ぶ事にして、$a(z)\sim b(z)$ で表します。

簡単の為に一変数で説明すると、

$\frac{1}{1-z}$ は $|z|<1$ の範囲で

$$1+z+z^2+z^3+\dots$$

という展開を持ちますし、 $|z|>1$ では

$$\frac{1}{1-z}=\frac{1}{-z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-z^{-1}-z^{-2}-\dots$$

という展開を持ちます。差をとると delta 関数 $\delta(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}z^n$ となっています。これらは元々同じ関数の差なので、0 の展開と呼んでいます。デルタ関数に対しては $(1-z)\delta(z)=0$ となります。逆に $(1-z)f(z)=0$ なら $f(z)$ は $\delta(z)$ の倍数となっていることが分かると思います。

さらに、 $(1-z)^2\delta(z)=0$ ですから、微分すると、

$$-2(1-z)\delta(z)+(1-z)^2\delta(z)'=(1-z)^2\delta(z)'=0$$

が成り立ちます。これを繰り返すと、上の可換という意味は差がこれらデルタ関数 $\delta(z_1/z_2)$ の微分したものの倍数の線形結合でかけることと同じであることが分かります。

注意してほしいのは，変数が違いますので、自分自身に対しても可換かどうかは分からないという事です。

自分自身に可換な例として、重要なヴィラソロ代数について説明します．

$V=\mathbb{C}[x,x^{-1}]$ の微分全体の集合を考えます．微分というのは V の線形変換 σ で $\sigma(f(x)g(x))=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$ を満足するもので，これらはリー積 $[\sigma,\tau]=\sigma\tau-\tau\sigma$ によって閉じており基底として

$$\tilde{L}(n)=-x^{n+1}\frac{d}{dx}:n\in\mathbb{Z}$$

が取れ，積は

$$[\tilde{L}(i),\tilde{L}(j)]=(i-j)\tilde{L}(i+j)$$

を満足しています．このリー代数にエネルギーを表わす中心 t によって中心拡大したものがヴィラソロ代数,

$$Vir=(\oplus\mathbb{C}L(i))\oplus\mathbb{C}t$$

で関係式

$$[L(i),L(j)]=(i-j)L(i+j)+\delta_{i+j,0}\binom{i+1}{3}\frac{c}{2}$$

を満たします．通常はヴィラソロ代数の表現が重要で， t が $c \in \mathbb{C}$ 倍 として作用するとき，c のことを central charge と呼びます。

ヴィラソロ代数の表現が与えられたとき，

$$w(z) = \sum L(n) z^{-n-2}$$

と置くと、

$$\begin{aligned}
& [w(z_1), w(z_2)] \\
= \; & [\sum L(n) z_1^{-n-2}, \sum L(m) z_2^{-m-2}] \\
= \; & \sum_n \sum_m (n-m) L(n+m) z_1^{-n-2} z_2^{-m-2} + \sum_n \binom{n+1}{3} c z_1^{-n-2} z_2^{n-2} \\
= \; & \sum_h \sum_m (h-2m) L(h) z_1^{m-h-2} z_2^{-m-2} + \sum_n \binom{n+1}{3} c z_1^{-n-2} z_2^{n-2} \\
= \; & \sum_h h L(h) z_1^{-h-2} z_2^{-2} \sum_m \frac{z_1}{z_2}^{m} {}^{m} - 2 \sum_h L(h) z_1^{-h-1} z_2^{-3} \left(\sum_m m \frac{z_1}{z_2}^{m-1} \right) \\
& + z_1^{-4} \sum_n \binom{n+1}{3} c \frac{z_2}{z_1}^{n-2} \\
= \; & \sum_h h L(h) z_1^{-h-2} z_2^{-2} \delta(\tfrac{z_1}{z_2}) - 2 \sum_h L(h) z_1^{-h-1} z_2^{-3} \delta(\tfrac{z_1}{z_2})' + z_1^{-4} \delta(\tfrac{z_1}{z_2})'''
\end{aligned}$$

なので

$$(z_1 - z_2)^4 [w(z_1), w(z_z)] = 0$$

となり、 $w(z)$ は自分自身に可換となっていることが分かります。

これは無限和の特性です．これが有限和では係数全てが互いに可換でなければこのようなことは起こりません．

では頂点作用素代数の定義を述べましょう。まず，フォック空間と呼ばれる無限次元の次数付き空間 $V = \oplus_{n=0}^{\infty} V_n$ であって，各 $v \in V$ に対して、頂点作用素と呼ばれる V の線形変換を係数とする形式的巾級数　$Y(v, z) = \sum v_n z^{-n-1} \in End\, V[[z, z^{-1}]]$ が与えられており、

(1) $Y(v, z)$ は互いに可換

(2) ヴィラソロ元と呼ばれる特別な元 $w \in V_2$ があって、

$$Y(w, z) = \sum w_n z^{-n-1} = \sum L(n) z^{-n-2} \text{ は}$$

(a) 上のヴィラソロ代数の性質を持つ。

(b) 微分の性質

$$Y(L(-1)v,z) = [L(-1), Y(v,z)] = \frac{d}{dz}Y(v,z)$$

を満たし,

(c) V_n は $L(0)$ の固有値 n の固有空間となる.

実際にはあと幾つかあるのですが、小さな性質なので、ここでは省きます。

各元に対して 頂点作用素 $Y(v,z) = \sum v_n z^{-n-1}$ の係数 v_n は V の線形変換なので、無限個の積

$$v \times_n w = v_n w$$

が定義出来ます。これらの積の内、一つに注目すると、可換代数や、リー代数などの色々な代数がでてきます。

また，上の公理から $v \in V_m$ とすると v_{m-1} は V の次数を保つ線形変換となり， 関数

$$v_{m-1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} tr\ (v_{m-1})_{|V_n} e^{2\pi i n z}$$

が定義でき，これは V 全体に線形に拡張できます.

代数が定義されると，環論と同様に，加群が定義されます．実際，頂点作用素代数においても加群がもっとも重要な研究対象であり，共形場理論とは，これら加群の fusion rule （テンソル積の様なもの）を調べることに他ならないのです.

頂点作用素代数 (V,Y) の加群の定義は無限の次数付ベクトル空間 $M = \oplus_{n=0}^{\infty} M_n$ であって，形式的巾級数 $End(M)[[z,z^{-1}]]$ の元の中に同じ様に可換と微分を考え，頂点作用素代数 $v \in V$ の頂点作用素 $Y(v,z)$ から $End(M)[[z,z^{-1}]]$ の元 $Y_M(v,z)$ への写像が 無限個の演算に関して環準同型となっているようなものです.

頂点作用素の内部に含まれる加群をイデアルと呼び，通常の環と同様に剰余代数などが考えられます.

最後に　もう一つ ∞/∞ の例として有限のものを無限のものから導く例を紹介したいと思います。

これは昨年　マサチューセッツ州で開かれたムーンシャイン研究集会で発表した結果です。

元々　モンスター単純群を構成するために、グライスは後でグライス代数と呼ばれる196884 次元の可換代数 D を構成したのですが、これは結合代数でもなく、複雑な構造をしています。

ムーンシャイン加群 $V^\natural$ の中で次数 2 の部分空間 $V_2^\natural$ は一つの積 v_1u によって閉じており，このグライス代数となっているのです.

演算を一つしか持たない代数の場合 元 e から自己同型を定義するとすると reflection のようにその演算を使うしかありません. ところが、頂点作用素代数のように無限の演算を持っていると、各元 e に対して、その頂点作用素

$$e(z) = \sum e_i z^{-i-1}$$

から無限個の演算 e_i を取り出して、V に作用する無限次元の代数 $< e_i : i \in \mathbb{Z} >$ を考える事ができ、この作用によって、自己同型が定義できることがあるのです。

しかも　この代数が特別なものである場合には，その元 e 自身が特別なものになってきます.

実際、ムーンシャイン加群のように、$V_1 = 0$ の場合、次の定理を得ることが出来ます.

定理 I　　$e \in V_2$ が idempotent である必要十分条件は $< 2e_i : i \in \mathbb{Z} >$ がヴィラソロ代数である

代数で重要な idempotent と共形場理論で重要なヴィラソロ代数がここでは同じものになっているのです. しかも、 central charge 1/2 のヴィラソロ代数の表現は良く分かっているので,

$$\begin{array}{cccc} V = & V^0 \oplus & V^{1/2} \oplus & V^{1/16} \\ \tau_e & 1 & 1 & -1 \\ \sigma_e & 1 & -1 & \end{array}$$

と定義するとこれらが自己同型となることが分かります.

定理 V_2 が 長さ $<e,e>=1/16$ の idempotent $e_1 e = e$ を含んでいると、V は位数 2 の自己同型を持つ。

これは $<e,e>\leq 1/4$ までの idempotent に関してはなにかしらの有限位数の関係しているのではないかと考えられます。実際ムーンシャイン加群を調べると、$<e,e>=1/10$ の idempotent と位数 3 の元が関係しています。

グライス代数を調べるとたくさんの上のような idempotent があり、このことで、$V^\natural$ の自己同型がモンスター単純群まで大きくなるということが簡単に証明できます。また, 上の自己同型の 2 重性はモンスター単純群の部分群におけるコンウエイ群とフィッシャー単純群との関係に関係しているのではないかと考えられます.

Sklyanin Algebras I

埼玉大学教育学部
若松隆義 (Takayoshi Wakamatsu)

1 序

本稿では Sklyanin algebras の定義と性質を述べ，Frobenius algebras がどのように関係するのかの説明を目標とします．筆者自身まだ充分に理解しているとはいえないので，いくつかの問題提起をするだけになることを予めお詫びしておきます．

Sklyanin algebras は Koszul 性をもった augumented algebras であり，双対 algebras が定義されてそれが有限次元の Frobenius algebras になるというのが筆者には興味のあるところです．双対の algebras は，定義イデアルの直交空間を考えることによっても，また augumentation であたえられる単純加群 K を用いて，$\bigoplus_{i\geq 0} Ext^i(K,K)$ としても定義されます．この2つの定義が一致するというのが Koszul 性の意味なのですが，この対応自体は，多元環のもっと広いクラスに対しても考えるべきものであるようにみえます．また， Frobenius algebras といっても，今迄のところ，その定義とそれから形式的に導かれる性質は研究されているが，一般的な構造定理といったものや，充分満足できる構成法などが知られている訳ではないように思えます．Sklyanin algebras の双対は quantum determinant と呼ばれる multilinear map から構成される graded local Frobenius algebras であり，これを一般化して，任意の graded Frobenius algebras も得られることが示されます．

筆者が望むことは，はじめに graded Frbenius algebras を構成しておいて，それらの双対を調べることによって，上に述べた対応をより広い多元環のクラスに対して考えたいということです．

もともと Sklyanin algebras は Yang-Baxter 方程式の方面の議論から導かれたものですが，それは Artin-Schelter の regular rings と呼ばれる具合の良い性質を備えた非可換ネター環の系列に属するものであり，非可環代数幾何の試みとも関連させてその周辺が研究されています．そのような対象と Frobenius algebras の分類問題とが直接に関係してくることは，それだけでも面白いと感じられますが，さらに，Koszul 双対の考えがコホモロジー環の研究にも有効であって，多元環に関する他のホモロジー代数的問題に自然と関連してくるように思います．

有限次元多元環の構造論や表現論は quiver の概念を有力な道具としてかなり発展してきたのですが，quiver だけで決まる遺伝的な algebras とは異なり Frobenius algebras などの場合，quiver 自体は単純であっても relations が複雑なため，relations を如何に扱う

かの議論が必要になってきます．この意味でも，Sklyanin algebras の周辺は筆者にとって面白そうな分野に感じられます．

2 Graded Algebras

体 K 上の多元環 $\Lambda = \bigoplus_{i\geq 0}\Lambda_i$ が条件 $\Lambda_i\Lambda_j = \Lambda_{i+j}$ を満足するとき次数付き多元環であるという．本稿では，更に，Λ が部分環 Λ_0 の上で Λ_1 によって生成されており，$dim_K(\Lambda_1) < \infty$ であるものだけを扱う．はじめの条件は $\Lambda_i = \Lambda_1^i$ に同じである．Λ は Λ_0 上 Λ_1 で生成されるテンソル多元環 $T(\Lambda_1) = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1 \oplus \Lambda_1^{\otimes 2} \oplus \Lambda_1^{\otimes 3} \oplus \cdots$ の剰余環となる．

$R = Ker(T(\Lambda_1) \to \Lambda)$ は $T(\Lambda_1)$ のイデアルであるが，もしこれが $\Lambda_1^{\otimes 2}$ の部分空間 R_2 によって生成される場合には，Λ は quadratic algebra であるという．このとき R は斉次イデアルであり，$R = R_2 \oplus R_3 \oplus R_4 \oplus \cdots$ と分解されて，$\Lambda_n = \Lambda_1^{\otimes n}/R_n$ となる．有限次元ベクトル空間 V の双対空間 $Hom(V, K)$ を V^* で表す．$(V \otimes V)^* \cong V^* \otimes V^*$ となるから，部分空間 $R_2 \subseteq V \otimes V$ の直交空間 $R_2^{\perp} \subseteq V^* \otimes V^*$ が考えられる．Λ が $\Lambda_0 = K$, $\Lambda_1 = V$ となる quadratic algebra であるとき，直交多元環

$$\Lambda^! = T(V^*)/(R_2^{\perp})$$

が定義される．もちろん，$(\Lambda^!)^! \cong \Lambda$ が成り立つ．

またこの場合，$\Lambda/\bigoplus_{i\geq 1}\Lambda_i \cong K$ であるから，Λ は augumentation $\Lambda \to K$ をもち，K は単純な Λ 加群となり，コホモロジー環 $\bigoplus_{i\geq 0} Ext_\Lambda^i(K, K)$ が定義できる．これが $K = Ext_\Lambda^0(K, K)$ 上で $Ext_\Lambda^1(K, K)$ によって生成されるための条件は，Λ の Koszul 複体の完全性で与えられる．

V の勝手な K 上の基底 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ を選び，これによる V^* の双対基底を $e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*$ とする．K 上でのテンソル積 $V^* \otimes V$ において，要素 $e = \sum_{i=1}^n e_i^* \otimes e_i$ は基底の選び方によらず一定であることが確かめられる．さらに，Λ の成分と $\Lambda^!$ の成分ごとの双対とのテンソル積の全体を考えて，$(\Lambda_i^!)^* \otimes \Lambda_j$ から $(\Lambda_{i-1}^!)^* \otimes \Lambda_{j+1}$ への写像として，内側から要素 e をかけるものとして定義する．すなわち，$f \otimes m \in (\Lambda_i^!)^* \otimes \Lambda_j$ の行き先を $\sum_{t=1}^n f(e_t^* ?) \otimes (e_t m)$ と定める．これによって，複体 $((\Lambda^!)^* \otimes \Lambda, \delta)$ が得られるが，これを Λ の Koszul 複体という．これを用いて次が示される [Priddy, Löfwall]

定理 1 *quadratic algebra* Λ について次の条件は同値である．

(1) *Koszul* 複体 $((\Lambda^!)^* \otimes \Lambda, \delta)$ は完全．

(2) $\Lambda^!$ は $\bigoplus_{i\geq 0} Ext_\Lambda^i(K, K)$ と同型．

(3) $\bigoplus_{i\geq 0} Ext_\Lambda^i(K, K)$ は K 上で $Ext_\Lambda^1(K, K)$ によって生成される．

上の定理の条件 (3) を満たす algebra は Koszul であるという．これに関しては次も知られている [Beilinson-Ginsburg-Soergel]．

定理 2 *Koszul algebra* は *quadratic* である．

後ほど Sklyanin algebras の性質を述べるのに必要な定義をいくつか与えておく．体 K 上の augmented なネター多元環 Λ が $id(\Lambda_\Lambda) < \infty$ および $id({}_\Lambda\Lambda) < \infty$ を満たすとき，これを単に $id(\Lambda) < \infty$ で表す．同様に，$id(\Lambda) = n$ は左右両側で入射次元が n であることを意味する．$id(\Lambda) = n$ であって，さらに次の条件

$$Ext^i_\Lambda(K, \Lambda) \cong \begin{cases} 0 & \text{if i} \neq \text{n} \\ K & \text{if i} = \text{n} \end{cases}$$

を満たすときに Gorenstein 性をもつという．

また，Λ の Auslander 性（ Auslander の性質）とは，$0 \to \Lambda \to I_0 \to I_1 \to \cdots$ を Λ の極小入射列（左右いずれでも）とするとき，

$$fd(I_i)_\Lambda \leq i$$

が各 i について成り立つことである．この条件は，任意の有限生成 Λ 加群 M と任意の部分 R 加群 $N \subseteq Ext^j_\Lambda(M, \Lambda)$ に対して，

$$Ext^i_\Lambda(N, \Lambda) = 0$$

が各 $i < j$ について成立することに同値であることが知られている．$gl.dim(\Lambda) < \infty$ であって Auslander 性を備えているときには Λ は Auslander-regular であるという．

3 Sklyanin Algebras

Sklyanin によって考えられた algebras とは次のようなものである．楕円曲線 $E = C/(Z \bigoplus Z\eta)$ 上の 4-トーションでない点 $\tau \in E$ に対して，θ_{ab} で

$$\left(\frac{1+a}{2}\right)\eta + \left(\frac{1+b}{2}\right)$$

を零点にもつ Jacobi 関数を表し，

$$\alpha_1 = \left(\frac{\theta_{11}(\tau)\theta_{00}(\tau)}{\theta_{01}(\tau)\theta_{10}(\tau)}\right)^2, \alpha_2 = -\left(\frac{\theta_{11}(\tau)\theta_{01}(\tau)}{\theta_{00}(\tau)\theta_{10}(\tau)}\right)^2, \alpha_3 = -\left(\frac{\theta_{11}(\tau)\theta_{10}(\tau)}{\theta_{00}(\tau)\theta_{01}(\tau)}\right)^2$$

とおく．これによって，関係式

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = 0$$

を満足するパラメーター α_1，α_2，α_3 が得られて，次の関係式

$$x_0x_i - x_ix_0 = \alpha_i(x_{i+1}x_{i+2} + x_{i+2}x_{i+1}),\ x_0x_i + x_ix_0 = x_{i+1}x_{i+2} - x_{i+2}x_{i+1}$$

による，テンソル多元環 $C < x_0, x_1, x_2, x_3 >$ の剰余環として定義されるものが Sklyanin により与えられた algebras である．ただし，法 3 で巡回的に考えて，番号 1, 2, 3 は 3 の次は 1 として順序付けておくものとする．

現在では拡張されて，一般の n 次元の Sklyanin algebras が定義され，上に述べたものは 4 次元の Sklyanin algebras と呼ばれている．$n \geq 3$ とし，K を代数閉体とする．このとき次のデーターから多元環が定義される．E は K 上の楕円曲線で，$\sigma : E \to E$ は固定点 $\zeta \in Pic(E) \cong E$ による translation automorphism であり，$\mathcal{L}$ は E 上の次数 n の line bundle，$V = H^0(E, \mathcal{L})$ として V は次元 n の K ベクトル空間となる．$E \times E$ の divisor $\Delta_\sigma = \{(p, \sigma^{n-2}(p)) | p \in E\}$ を考え，また，involution $(p, q) \mapsto (\sigma^2(q), \sigma^{-2}(p))$ の固定点の全体を M とおき，$E \times E$ の divisor D はこの involution で stable であって M が偶数回の重複で現れるときに allowable であるという．ここで，$R = \{finV \otimes V | div(f) = \Delta_\sigma + D, D : allowable\}$ とおいて，$T(V)/(R)$ と定め，これを n 次元の Sklyanin algebra という [Odesskii-Feigin]．Sklyanin algebras について次が知られている [Artin-Tate-Bergh, Levasseur-Smith, Smith-Stafford 等]．

定理 3 *Λ を n 次元の Sklyanin algebra とすれば，Koszul であって Auslander regular なネター環（$gl.dim(\Lambda) = n$）である，また $\Lambda^!$ は Frobenius 多元環となる．*

表現論的に Λ とその Koszul 双対 $\Lambda^!$ の意味を付けるものとして，Beilinson-Ginsburg-Soergel[5] による，derived categories の同型がある．Λ を正次数付きの K 多元環とする．$(M, \delta) = (\bigoplus_{i,j} M^i_j, \delta)$ は次数付き加群の複体で，$\delta : M^i_j \to M^{i+1}_j$ とし，i は複体としての位置を，j は次数付き加群としての次数を表すものとする．$C^+(\Lambda)$ で次数付き Λ 加群の複体 (M^i_j, δ) で $0 \ll i$ または $i+j \ll 0$ のとき $M^i_j = 0$ となるもののホモトピー圏を表し，$D^+(\Lambda)$ で quasi-isomorphisms によるその導来圏を表す．同様に $D^-(\Lambda)$ も定義される．

定理 4 *Λ が Koszul であるとき $D^+(\Lambda) \cong D^-((\Lambda^!)^{op})$.*

上の同値を与える函手は，$(M, \delta) \to (M \bigotimes (\Lambda^!)^{op}, \delta^*)$ から導かれたものとして与えられる．ここで，δ^* は

$$\delta^*(m \otimes \lambda) = \delta(m) \otimes \lambda + (-1)^{i+j} \sum_t m e_t \otimes \lambda e_t^*, \ m \otimes \lambda \in M^i_{i+j} \bigotimes (\Lambda^!)^{op}$$

であり，$(M \bigotimes (\Lambda^!)^{op})^k = \bigoplus_{i+j=k} M^i_j \bigotimes (\Lambda^!)^{op}$ としている．この結果により，Sklyanin algebras などの derived categories が有限次元の次数付き Frobenius 多元環の derived categories と密接に関係していることが分かる．次数付き加群の複体の derived categories と通常の加群の複体の derived categories との関連など自然な問題は多いが，充分には知られていないと思う．

4 Frobenius Algebras

体 K 上の有限次元多元環 Λ が Frobenius であるとは，単に同型

$$\Lambda_\Lambda \cong \Lambda^*_\Lambda$$

が存在することとして定義される．一般にはその構造は簡単なものではないが，次数付き多元環 $\Lambda = \bigoplus_{i=0}^{d} \Lambda_i$ の場合には少しばかり単純であって，以下に述べるようなものとして記述される．

まず，$\Lambda_0 = K$ であって，Jacobson 根基の巾が $rad^i\Lambda = \bigoplus_{t \geq i} \Lambda_t$ となっている場合には，$soc(\Lambda_\Lambda) = \Lambda_d$ であり，Λ における積によって導かれる全射 $\Lambda_1^{\otimes d} \to \Lambda_d$ によって多元環としての構造が完全に決定される．すなわち，この写像を用いて Λ が再構成される．これは殆ど明かであろう．このことは一般の次数付き Frobenius 多元環の場合へと拡張される．

A を有限次元の K 多元環とし，$\sigma \in Aut_K(A)$ で ${}_AX_A$ は両側加群とする．σ を用いて X への A の作用をヒネることにより定義される両側加群を ${}_\sigma X_\sigma$ で表す．${}_AX_A$ と ${}_\sigma X_\sigma$ とは同型であるとして，$\gamma\colon {}_AX_A \to {}_\sigma X_\sigma$ をその同型写像とする．A 上のテンソル積を単に $\otimes$ で示すこととし，上への写像

$$\varphi\colon\ {}_AX_A^{\otimes d} \to {}_\sigma A_A^*$$

が次の性質を持つものとする：

$$\varphi(x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_d)(1) = \varphi(x_2 \otimes \cdots \otimes x_d \otimes \gamma(x_1))(1)$$

組 $\Phi = (\sigma, \gamma, \varphi)$ が上の条件をみたすとき，多元環 $\Lambda(\Phi)$ がテンソル多元環 $T_A(X) = A \bigoplus X \bigoplus X^{\otimes 2} \bigoplus \cdots$ の剰余環として定義される．まず，$\varphi^{(i)} : X^{\otimes i} \to Hom_{mod\,A}(X^{\otimes(d-1)}, A^*)$ を $\varphi^{(i)}(y)(z) = \varphi(y \otimes z)$ と定め，$R_i = Ker(\varphi^{(i)})$，$R = R_1 \bigoplus R_2 \bigoplus \cdots \bigoplus R_d \bigoplus X^{\otimes(d+1)} \bigoplus \cdots$ とおく．R は $T_A(X)$ の両側イデアルとなるので，$\Lambda(\Phi) = T_A(X)/R$ と定義できる．$R_d = Ker(\varphi)$ であるから，${}_A(X^{\otimes d}/R_d)_A$ は双対加群 ${}_\sigma A_A^*$ に同型である．

定理 5 次が成り立つ．

(1) $\Lambda(\Phi)$ は *Frobenius* 多元環．

(2) 代数閉体上の直既約な次数付き *Frobenius* 多元環はある $\Lambda(\Phi)$ に同型．

これによって，次数付きの Frobenius 多元環を得るには（代数的閉体上），システム $\Phi = (\sigma, \gamma, \varphi)$ を与えればよいことになる．一般のものでも同様であるが，簡単のため local なものについてその構成法を述べる．$A = K$ とするから，$\sigma = id$ であり，$A^* = K$，$\gamma \in GL(X)$ である．ベクトル空間 X と γ が与えられたときに，$\varphi : X^{\otimes d} \to K$ で条件

$$\varphi(x_1 \otimes y) = \varphi(y \otimes \gamma(x_1))$$

を満たすものを構成せよという問題である．ここで，$\varphi(x \otimes X^{\otimes(d-1)}) = 0 \Rightarrow x = 0$ という性質（φ の non-degenerate 性と呼ぶ）をもつものだけ考えておいて充分であることが確かめられる．つまり，この条件を満たさない場合には，$\varphi(x \otimes X^{\otimes(d-1)}) = 0$ をみたす要素 $x \in X$ の全体 X_0 は部分空間となり，剰余空間 X/X_0 上にシステムが導入され，それからつくられる Frobenius 多元環はもとのシステムから得られるものと同型である．さて，この条件があれば，φ に対して γ はユニークとなることが示される．だから，システム

といっても実際には φ だけですべてが決まることになる．従って，この場合には，得られる多元環を $\Lambda(\varphi)$ と表す方がよい．

X の K 次元を n として，$e_1, e_2, \cdots, e_n$ を基底とする．$\varphi \in (X^{\otimes d})^* \cong (X^*)^{\otimes d}$ であるから，$e_1^*, e_2^*, \cdots, e_n^*$ を双対基底として，

$$\varphi = \sum_{f \in F} c(f) e^*_{f(1)} \otimes e^*_{f(2)} \otimes \cdots \otimes e^*_{f(d)}$$

とかかれる．ここで，F で集合 $\{1, 2, \cdots, d\}$ から集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ への写像の全体を表し，$c : F \to K$ とする（$c(f) \in K$）．つまり，φ を与えることは $c : F \to K$ を与えることに同じである．従って，条件 $\varphi(x \otimes y) = \varphi(y \otimes \gamma(x))$ を写像 c の言葉で記述すれば，その条件を満たすスカラーの組 $\{c(f)\}_{f \in F}$ によって求めるものが得られる．集合 $\{2, \cdots, d\}$ から $\{1, 2, \cdots, n\}$ への写像全体を G で表し，$g \in G$ と $1 \leq i \leq n$ について

$$\tilde{g}_i = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & d \\ i & g(2) & \cdots & g(d) \end{pmatrix}$$

によって $\tilde{g}_i \in F$ を定義する．また，$f \in F$ に対して

$$f^* = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & d-1 & d \\ f(2) & \cdots & f(d) & f(1) \end{pmatrix}$$

としておく．さらに，$\gamma(e_i) = \sum_j e_j \gamma_{ji}$ によって係数 γ_{ji} を定めておく．

定理 6 上の記号のもとで次が成り立つ．

(1) φ が条件を満たすためには $c(\tilde{g}_i) = \sum_j c((\tilde{g}_j)^*)\gamma_{ji}$ となることが同値（各 $g \in G$ と $1 \leq i \leq n$ について）．

(2) さらに φ が *non-degenerate* であるためには，n 個のベクトル ${}^t(\cdots, c(\tilde{g}_1), \cdots)_{g \in G}$，${}^t(\cdots, c(\tilde{g}_2), \cdots)_{g \in G}$，$\cdots$，${}^t(\cdots, c(\tilde{g}_n), \cdots)_{g \in G}$ の一次独立となることが同値．

フロベニウス多元環がどれくらい多く存在しているのかを知るためには，同型となるための条件も調べておかなければならない．φ が条件を満たし $\gamma \in GL(X)$ が対応する自己同型のとき，(φ, γ) は条件を満たす組であるということにする．

定理 7 (φ, γ) が条件を満たす組とし，$s \in GL(X)$，$0 \neq \alpha \in K$ とすれば，

$$(\alpha\varphi \cdot s^{\otimes d}, s^{-1} \cdot \gamma \cdot s)$$

も条件を満たす組である．また，(φ, γ)，(φ', γ') が *non-degenerate* な条件を満たす組であるとき，

$$\Lambda(\varphi) \cong \Lambda(\varphi') \iff (\varphi', \gamma') = (\alpha\varphi \cdot s^{\otimes d}, s^{-1} \cdot \gamma \cdot s)$$

従って，$G \times \{1, \cdots, n\}$ で添え字付けられた $n^{d-1} \times n$ 型行列 $M = (m_{gi})_{g \in G, i}$ について，$M^* = (m_{g'_{i'}})_{g,i}$，$\tilde{g}'_{i'} = (\tilde{g}_i)^*$ とし，

$$V(\gamma) = \{M \in Mat(n^{d-1}, n) \mid M = M^* \cdot (\gamma_{ij})\}$$

と定めるとき，$V(\gamma)$ の各点から (φ, γ) が条件を満たすような φ が決まり，スカラー倍の違いがあっても対応する多元環は同型なので，射影空間 $P(V(\gamma))$ の各点に φ が対応すると思ってよい．これに群 $G(\gamma) = \{s \in GL(n) \mid s \cdot \gamma = \gamma \cdot s\}$ が $\varphi \mapsto \varphi \cdot s^{\otimes d}$ として作用し，各 $G(\gamma)$-orbit ごとに非同型な多元環が対応する．実際にこの方法で次数付きの Frobenius 多元環を分類するときには，行列 (γ_{ij}) は Jordan 標準形としておいて，それの固有値の満たすべき条件をはじめに求めておけば具体的に計算ができる．

以上は原理的な話であるが，行列式を $X^{\otimes n} \to K$ なる写像と考えて（$d = n$），条件を満たす組 $(\det, (-1)^{n-1})$ を変形することにより多くの組を作り出すこともできる．一般に，条件をみたす組 (φ, γ) に対して，$s \in GL(n)$ が上の作用で φ を不変にするとき，$\varphi_s = \varphi \cdot (1 \otimes s \otimes s^2 \otimes \cdots s^{n-1})$ とおけば φ_s も条件を満たしている．これを det に適用すると，det を不変にするもの全体は $SL(n)$ であって，$s \in SL(n)$ について多元環 $\Lambda(det_s)$ が得られる．$det = det_{id}$ に対して，$\Lambda(det)$ は外積代数 $\bigwedge X$ に同型となる．従って，$\Lambda(det_s)$ は外積代数の変形とみられるが，これについては次が成り立つ．

定理 8 $s, t \in SL(n)$ とする．同型性に関しては，

$$\Lambda(det_s) \cong \Lambda(det_t) \Longleftrightarrow t = \omega g^{-1} \cdot s \cdot g \ (g \in GL(n),\ \omega^n = 1)$$

が成立し，また $\Lambda(det_s)$ は常に *Koszul*．

5 例と注意

local の場合に限っても，次数付き Frobenius 多元環の構成法は，$\Lambda(det_s)$ ばかりでなくいろいろと存在する．例えば $X = K^2$ として，その要素を縦ベクトルで表すとき，$\varphi : X^{\otimes 4} \to K$ を

$$\varphi(\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \end{pmatrix}) = det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} + det\begin{pmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & a_1 \\ d_2 & a_2 \end{pmatrix}$$

で定義すれば，Frobenius 多元環 $\Lambda(\varphi)$ が得られ，これは quadratic でないが 3 次のものが relations の生成系となっており，$\Lambda(\varphi)^!$ を quadratic のときと同様に定義できる．興味深いことは，$\Lambda(\varphi)^!$ は Artin-Schelter が注意している 2 次元の regular algebra と同型なことである．この例から，quadratic でなくとも，一定の次数のもので生成される relations をもつ次数付き Frobenius 多元環 Λ の双対 $\Lambda^!$ は面白い対象と考えられる．また，群環のブロックイデアルの中には次数付きとなっているものが存在するので，それらの双対を調べることも興味がもたれる．

これらをさらに一般的に考えて，任意の次数付き Frobenius 多元環の双対がうまく定義できるかといった問題や，もしそれができるものであれば，それらの双対はどのような多元環であるのかなども知りたいところである．

参考文献

[1] M.Artin and W.Schelter, Graded algebras of global dimension 3, advances in Math., 66(1987), 171-216.

[2] M.Artin, J.Tate and van den Bergh, Some algebras related to automorphisms of elliptic curves, The Grothendieck Festschrift, Vol.1, 33-85, Birkhauser, Boston 1990.

[3] M.Artin, J.Tate and van den Bergh, Modules ober regular algebras of dimension 3, Invent. Math., 106(1991), 335-388.

[4] M.Artin and van den Bergh, Twisted homogeneous coordinate rings, J. Alg., 133(1990), 249-271.

[5] A.Beilinson, V.Ginsburg and W.Soergel, Koszul duality patterns in representation theory, preprint, 1992.

[6] A.I.Bondal and A.E.Polishchuk, Homological properties of associative algebras: The method of helices, Russian Acad. Sci. Izv. Math., 42(1994), 219-260.

[7] T.Levasseur, Some properties of non-commutative regular graded rings, Glasgou Math. J., 34(1992), 277-300.

[8] C.Löfwall, On the subalgebra generated by the 1-dimensional elements in the Yoneda Ext-algebra, Springer-Verlag, Lect. Notes in Math., No. 1183(1988), 291-338.

[9] Yu.I.Manin, Some remarks on Koszul algebras and quantum groups, Ann. Inst. Fourier, 37(1987), 191-205.

[10] S.B.Priddy, Koszul resolutions, Trans. Amer. Math. Soc., 152(1970), 39-60.

[11] E.K.Sklyanin, Some algebraic structures connected to the Yang-Baxter equation, Func. Anal. Appl., 16(1982),27-34.

[12] E.K.Sklyanin, Some algebraic structure connected to the Yang-Baxter equation: Representations of quantum algebras, Func. Anal. Appl., 17(1983), 273-284.

[13] S.P.Smith, The four-dimensional Sklyanin algebras, K-Theory, 8(1994),65-80.

[14] S.P.Smith and J.T.Stafford, Regularity of the 4-dimensional algebra, Compos. Math., 83(1992), 259-289.

[15] S.P.Smith, Some finite dimensional algebras related to elliptic curves, preprint, 1994

[16] J.T.Stafford, Auslander-regular algebras and maximal orders, J. London Math. Soc., 50(1994), 276-292.

Sklyanin Algebra に関連した非可換ネーター環

Artin-Tate-Van den Bergh , Smith-Stafford , Levasseur の仕事

岩 永 恭 雄（信州大・教育）

以前から，KdV 方程式やソリトン方程式等の非線型微分方程式系は顕著な代数的構造を持つことが知られていた．Sklyanin は 1982 年に，“Yang-Baxter 行列” と “Quantum Inverse Scattering Method”（量子逆散乱法）の研究から，Yang-Baxter 方程式の解を代数的に考察する目的で，“Sklyanin algebra” を定義し，その構造と表現について研究することを提唱した [Sk1 , 2] . Sklyanin algebra は興味あるホモロジー代数的性質を持っている．我々が現在最も注目している事実は，Sklyanin algebra がいわゆる “Koszul algebra” になっていることで，その (Koszul) dual algebra (Yoneda algebra) を考えるとフロベニウス多元環が登場することである [Sm-Std] . これはもっと一般的な状況にも現れる現象であることが Manin [Ma2] , Zhang [Sm4 参照] 等によって確認され，興味深い問題が派生している．このように，Sklyanin algebra 自身も面白い研究対象であるが，Sklyanin algebra がこれまでに研究されていた非可換ネーター環の重要なクラスに属すことが Smith と Stafford [Sm-Std] によって指摘されたことにより，興味は広範囲に拡大された．そのクラスは Artin と Schelter [A-S] によって導入され，Artin , Tate , Van den Bergh A-T-vB1, 2] によって理論が発展した “regular algebra” と，Auslander によって導入された “非可換 Gorenstein 環” である．

この報告集では，若松による第 1 部に引き続いて第 2 部として，Sklyanin algebra と関連する非可換ネーター環について述べる．可換ネーター環の研究において，“geometric data” と “algebraic data” との密接な関係が重要であったから，まず非可換ネーター環論を発展させる際にこの類似 (non-commutative analogue) がどこまでうまく行くかということに注目する．そして，Sklyanin algebra , Artin-Schelter の regular algebra 及び Auslander-Gorenstein ring の間の関係について述べ，特に，Auslander-Gorenstein ring に関する興味ある性質を幾つか紹介する．

第 1 部で述べられているように，Sklyanin algebra は非可換ネーター環であるが，その代数的構造は楕円曲線の幾何学的な性質と密接に関連している．これまでの代数幾何は可換ネーター環の理論を道具として発展し，逆に可換ネーター環は代数幾何を背景にしてその理論が展開されてきたことから「可換代数幾何」ということにすれば，非可換ネーター環の理論展開には「非可換代数幾何」なるものが導入されることが望まれる．Artin らの仕事においては，3 次元の regular algebra の完全な分類が楕円曲線という geometric data を用いて行われている．Artin はその後も

非可換ネーター環における“non-commutative analogue”の発見に努力しており（例えば，[Ar]，[A-Z]），更には Manin は “non-commutative geometry” なるものを提唱している [Ma2].

可換環と非可換環の本質的な違いはどこにあるのかというのは，面白い話題であると思われる．アルティン環の場合を考えると，可換と非可換は随分違っている．まず，可換アルティン環は有限個の局所環の直積である．表現論的には，可換アルティン環が finite representation type になるのは，それが単列環（ uniserial ring ）の場合に限り，tame representation type になる場合も極めて限られている．しかし，非可換の場合は局所環に限っても単列環でない finite representation type の例があり，局所環でないときは，finite representation type のアルティン環の分類さえいまだ完全とは言えない．しかし，ネーター環の場合を考えると，可換ネーター環についてこれまでに得られた重要な概念及び結果に対して，その意味のある non-commutative analogue または non-commutative version が存在し，さらに豊富な例を提供してくれるように思われる．これはたいへん興味深いことではないだろうか．ここで，可換ネーター環の類似が非可換ネーター環でも取り扱え，かつ興味ある結果を得ることが期待できる概念を考えてみよう：

可換ネーター環		**非可換ネーター環**
regular local ring	$\longrightarrow$	Artin-Schelter's regular algebra
		Auslander-regular ring
Gorenstein ring	$\longrightarrow$	Auslander-Gorenstein ring
Cohen-Macaulay ring	$\longrightarrow$	Cohen-Macaulay property

そして，これら非可換ネーター環に関してこれまでに得られた結果を幾つか掲げてみると，次のようなものがある．

(1) Artin-Tate-Van den Bergh ([A-T-vB1, 2]) は 3 次元の regular algebra を分類するために，それを free algebra $K < X_1, \cdots, X_n >$, $n = 2, 3$ の剰余環として捉え，その relation を楕円曲線の性質を用いて行っている．

(2) 代数多様体の微分作用素環の中に Auslander-regular ring が現れる．例えば，Weyl algebra 等.（ [Iw2] 参照）

(3) アファイン空間 $\mathbb{C}^{(n)}$ の微分作用素環に $GL_n(\mathbb{C})$ が作用し，$SL_n(\mathbb{C})$ の有限部分群による不変部分環として Auslander-Gorenstein ring が現れる.（ [Le1] ）

そこで以下では，このような点を考慮に入れながら，“Auslander-Gorenstein ring” を中心テーマに据えて話を進めていく．この章の内容は以下の通りである：

§1. Notions and Notations ,

§2. Artin-Schelter's regular algebras ,

§3. Auslander-regular and Auslander-Gorenstein rings .

§1. Notions and Notations

最初に種々の概念の定義及び notation を与えよう．考察の対象にする環は主として代数的閉体 K 上の positively graded algebra $A = K \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots$ で，A は K-algebra として A_1 で生成され，各 A_k $(k \geq 1)$ は K 上有限次元のベクトル空間であると仮定する．

このとき特に A_1 が有限次元ベクトル空間だから，A は次数が 1 の有限個の元を生成元とする．即ち，A は affine K-algebra である．そのような algebra は K-ベクトル空間 A_1 上の tensor algebra $T = \mathrm{T}(A_1)$ のあるイデアル I による剰余環であり，イデアル I は homogeneous elements で生成されている：$A \cong T/I$. 更に，augmentation $A \to A/(\bigoplus_{i \geq 1} A_i) \cong K$ により，K は単純左かつ右加群とみなされる．

以下の説明において，環として A を用いたら，常にこのような graded algebra を表し，一般の環について述べるときは，環の記号としては R を用いることにする．

環 R が左右等しい global dimension (resp. self-injective dimension) を持つとき，それを gl.dim R (resp. inj.dim R) で表し，R-加群 M の projective dimension , injective dimension , flat dimension をそれぞれ pd(M) , id(M) 及び fd(M) と表すことにする．

<u>Gelfand-Kirillov Dimension</u>

A を上述の positively graded algebra とし，$V_n(A) = \sum_{k=0}^{n} {A_1}^k$ を A の部分空間とし，A の **growth function** $G_A(n)$ を，$G_A(n) = \dim_K V_n(A)$ と定める．このとき，ある $t > 1$ について，$G_A(n) \geq t^n$ $(\forall\ n \in \mathbb{Z})$ が成り立てば，A は **exponential growth** を持つ，そうでなければ **subexponential growth** を持つと言われる．また，ある自然数 c, t について，$G_A(n) \leq cn^t$ $(\forall\ n \in \mathbb{N})$ が成り立つとき，A は **polynomial growth** を持つと言われる．これはある $\rho \in \mathbb{R}$ について，$\dim_K A_n \leq n^\rho$ $(\forall\ n \geq 1)$ が成り立つことと同じである．

例．(1) $A = K < X_1, \cdots, X_s >$ が free algebra なら，$G_A(n) = \sum_{k=0}^{n} s^k$ だから，A は exponential growth を持つ．

(2) $A = K[X_1, \cdots, X_s]$ が多項式環のとき，$n \geq 1$ なら

$$G_A(n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{s+k-1}{k} = \binom{s+n}{n} = \frac{(n+s)\cdots(n+1)}{s\cdots 1} \leq 2n^s$$

だから，$G_A(n)$ は polynomial growth を持つ．もし，$s \geq 1$，$n \geq 4$ なら，$G_A(n) \leq n^s$ である．

(3) Weyl algebra $A = \mathcal{A}_s(K) = K[X_1, \cdots, X_s; \frac{\partial}{\partial X_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial X_s}]$ については多項式環 $K[X_1, \cdots, X_s]$ と同様で，$G_A(n) \leq 2n^s$.

A の **Gelfand-Kirillov dimension** を

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \log_n(G_A(n)) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\frac{\log_n(G_A(n))}{\log n}\right)$$

と定め，GK-dim(A) で表す．もし，$G_A(n) \leq cn^t$ ならば，

$$\text{GK-dim}(A) \leq \overline{\lim_{n\to\infty}} (\log_n c + t) = t$$

となるから，A が polynomial growth を持てば，A の Gelfand-Kirillov dimension は有限であることがわかる．

例．GK-dim$(K[X_1, \cdots, X_n]) = n$，GK-dim$(\mathcal{A}_n(K)) = 2n$．

更に，有限生成 A-加群 $M = \sum_{i=1}^{r} Ax_i$ について，その Gelfand-Kirillov dimension を

$$\text{GK-dim}(M) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \log_n(\dim_K \sum_{i=1}^{r} V_n(A)x_i)$$

と定める．

また，positively graded algebra A 上の $\mathbb{Z}$-graded な加群 $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ の **Hilbert series** を

$$H_M(t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (\dim_K M_i) t^i$$

と定義する．このとき，$H_M(t) = f(t)(1-t)^{-r}$, $r \geq 0$, $f(t) \in \mathbb{Z}[t,\ t^{-1}]$, $f(1) \neq 0$ と表されれば，GK-dim$(M) = r$ となる．

Gelfand-Kirillov dimension は可換環の場合の Krull dimension の non-commutative version と考えられ，可換の Krull dimension に関する結果の興味ある non-commutative version が得られている．([K-L] 参照)

Artin-Schelter's Regular Algebras

A は次の条件を充たすとき，A を n 次元の **Artin-Schelter regular algebra** (resp. **Artin-Schelter-Gorenstein algebra**) と呼ばれる：

(i) A は polynomial growth を持つ．即ち，ある実数ρにより，$\dim_K A_k \leq k^\rho$ $(\forall\, k \geq 1)$ が成り立つ；

(ii) gl.dim $A = n < \infty$ (resp. inj.dim $A = n < \infty$)；

(iii) $\mathrm{Ext}^i_A(K,\ A) = 0$ $(i \neq n)$，かつ $\mathrm{Ext}^n_A(K, A) \cong K$が${}_AK$及び K_A について成り立つ．

条件 (ii) と (iii) から，gl.dim $A = n < \infty$ ならば，gl.dim $A = \mathrm{pd}({}_AK)$ が得られる．実際，$0 \to {}_AA \to E_0 \to \cdots \to E_n \to 0$ を minimal injective resolution とすると，E_nの任意の部分加群 Mについて，$\mathrm{pd}(M) \geq n$ が成り立つ（[Iw1]）．従って条件 (iii) から，gl.dim $A = \mathrm{pd}({}_AK)$ を得る．

Auslander Condition

環 R上の有限生成加群 Mは，任意の $j \geq 0$ と $\mathrm{Ext}^j_R(M,\ R)$ の任意の部分加群 Nについて，$\mathrm{Ext}^i_R(N,\ R) = 0$ $(\forall\, i < j)$ が成り立つとき，**Auslander condition** を充たすという．

次の定理は，Auslander が可換な Gorenstein ring の non-commutative version を導入した際に証明したもので，categorical な証明が Fossum-Griffith-Reiten [F-G-R] に与えられている．

定理 (Auslander, 1970's) ネーター環 Rについて，次は同値である：

(1) 任意の有限生成左 R-加群が Auslander condition を充たす；

(2) 任意の有限生成右 R-加群が Auslander condition を充たす；

(3) minimal injective resolution $0 \to {}_RR \to E_0 \to \cdots \to E_n \to \cdots$ において，$\mathrm{fd}(E_i) \leq i$ $(\forall\, i \geq 0)$；

(4) minimal injective resolution $0 \to R_R \to E_0{}' \to \cdots \to E_n{}' \to \cdots$ において，$\mathrm{fd}(E_i{}') \leq i$ $(\forall\, i \geq 0)$．

ネーター環 Rが，有限な global dimension (resp. self-injective dimension) n を持ち，全ての有限生成 R-加群が Auslander condition を充たすとき，Rを n 次元の **Auslander-regular** (resp. **Auslander-Gorenstein**) ring と呼ぶ．

Cohen-Macaulay Property

GK-dim$(A) < \infty$，かつ任意の有限生成な A-module $M \neq 0$ について

$$j(M) + \text{GK-dim}(M) = \text{GK-dim}(A)$$

が成り立つとき，A は **Cohen-Macaulay property** を充たすという．ここで，$j(M)$ は Mの **grade** で，

$$j(M) = \min\{j \mid \text{Ext}^j_A(M,\ A) \neq 0\}$$

と定める．

可換ネーター環は有限な self-injective dimension を持てば，Auslander-Gorenstein である．以下に，非可換の場合に Auslander-regular ring の ubiquity を示す例を掲げておこう．

(1) (Roos [Ro]) 標数が 0 の体 K上の Weyl algebra $\mathcal{A}_n(K)$ は Auslander-regular で，gl.dim $\mathcal{A}_n(K) = n$.

(2) (Stafford [St1]) A が FBN graded ring で，gl.dim $A < \infty$ ならば，A は Auslander-regular，かつ Cohen-Macaulay property を充たし，GK-dim$(A) =$ gl.dim$A$ となる．

ここで，ネーター環 Rが **FBN** (fully bounded noether) ring とは，R の任意の素イデアル Pについて，剰余環 R/Pの essential な片側イデアルが常に零でない両側イデアルを含むことをいう．

(3) Majid [Maj] は，量子 Yang-Baxter 方程式の解 $\mathcal{S}$に対して，quadratic algebra $B(\mathcal{S})$ を対応させ，それを **ring of braided matrices** と呼んだ．もし，$\mathcal{S}$が半単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ と対応する古典的な解ならば，$\mathfrak{g}$ の量子包絡環 $U_q(\mathfrak{g})$ は $B(\mathcal{S})$ の準同型像になる．$\mathfrak{g} = sl_2$の最も単純な場合，$B(\mathcal{S})$ は，4 次元 Sklyanin algebra の degeneration になっている．(Majid)

任意の単純 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ に対して，Yang-Baxter 方程式の multiparameter 解 $\mathcal{S}$が存在する．Le Bruyn [LB3] は，このときの braided matrices の環 $B(\mathcal{S})$ は，Auslander-regular domain かつ maximal order で，Cohen-Macaulay property を充たすことを示した．

次の問題は，Auslander-Gorenstein ring の ubiquity を期待するもので，今後取り組むべき問題であると思われる．

問題． A を FBN graded ring で，inj.dim $A < \infty$ と仮定する．このとき，A は Auslander-Gorenstein で，Cohen-Macaulay property を充たし，GK-dim$(A) =$ inj.dim$A$ となるか？

これは，PI algebra の場合（ Stafford-Zhang [S-Z] ）及び local algebra の場合（ Teo [Te] ）に肯定的である．

Regularity of Sklyanin algebras

ここで，Sklyanin algebra，Artin-Schelter regular algebra，Auslander-regular algebra の間の関係を記しておこう：

$$
\begin{array}{c}
3\text{ 次元 Sklyanin algebra} \\
\| \\
\text{"type A" に属する 3 次元 Artin-Schelter regular algebra} \\
\Downarrow \\
\text{Auslander-regular algebra}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
4\text{ 次元 Sklyanin algebra} & \Longrightarrow & \text{Auslander-regular algebra} \\
\Downarrow & & \\
4\text{ 次元 Artin-Schelter regular algebra} & &
\end{array}
$$

これらの関係の詳細については以下で改めて解説する．

§2. 3 次元 Artin-Schelter regular Algebra

Artin-Schelter regular algebra は可換多項式環の非可換類似として導入されたが，これまでに考察された有限な global dimension を持つネーター環の多くのクラスが regular algebra のクラスに属している．Artin-Tate-Van den Bergh [A-T-vB1] は 3 次元の AS-regular algebra の分類を楕円曲線と関連させて完成している．この節では，その概略を紹介しよう．

Artin-Schelter regular algebra の例としては，

global dimension が有限の graded order，

Lie 代数の包絡多元環，

Weyl algebra

がある．最初の例以外は graded algebra としての形を持たないが，特別の変数を導入すれば，grading が入る．例えば，Weyl algebra $\mathcal{A}_1(K)$ は

$$\mathcal{A}_1(K) = K < X,\ Y > /(YX - XY - 1)$$

という形をしているが，

$$A' = K < X,\ Y,\ T > /(YX - XY - T^2,\ TX - XT,\ TY - YT)$$

なる環を考えれば，$\deg X = \deg Y = \deg T = 1$ とすることにより，A' に grading が入る．このとき，A'は Artin-Schelter regular algebra であり，更に$\mathcal{C}$を locally T-torsion な graded A'-modules からなる grad-A'の Serre subcategory とすれば，grad-$A'/\mathcal{C} \cong$ grad-$A'_T \cong \mathrm{mod}(\mathcal{A}_1(K))$ を得る．これは graded $\mathcal{A}_1(K)$-modules の category と $\mathcal{A}_1(K)$-modules の category が密接に関係していることを示すものである．

体 K上の 2 次元 Artin-Schelter regular algebra は

$$K < X,\ Y > /(YX - cXY), \quad 0 \neq c \in K$$

と

$$K < X,\ Y > /(YX - XY - Y^2)$$

の 2 つのタイプになる．3 次元の場合は，その分類はずっと難しく，次の 2 つの可能性がある：

(1) 3 個の生成元と 3 つの 2 次関係式を持つ場合．これは quadratic algebra である．例としては，

$$K < X,\ Y,\ Z > /(YX + XY,\ ZX + XZ,\ ZY + YZ)$$

がある；

(2) 2 個の生成元と 2 つの 3 次関係式を持つ場合．例としては，

$$K < X,\ Y > /(X^2Y + YX^2 + XYX,\ XY^2 + YXY + Y^2X)$$

がある．その分類問題はどちらの場合も類似しており，Artin と Schelter [A-S] は生成元 $\{X_1, \cdots, X_r\}$ と関係式 $f_1 = \cdots = f_r = 0$ の選び方が 2 通りあることを示している．これらの関係式を free associative algebra $T = K < X_1, \cdots, X_r >$の中で，$f_i = \sum_{j=1}^{r} m_{ij}X_j$と表しておけば，元 $g_j = \sum_i X_i m_{ij}$ もまた定義関係式だから，正則行列 $Q = [q_{ij}] \in GL_r(K)$ で，$\sum_{i=1}^{r} x_i m_{ij} = \sum_{l=1}^{r} q_{jl} f_l \ (j = 1, \cdots, r)$ となるものが存在する．この種の多元環を **standard** algebra と呼ぶ．又，(1) の型の全ての Artin-Schelter regular algebras をパラメーターとする variety は 8 個の既約成分を持ち，最も興味深い成分は

$$\begin{gathered} A = K < X,\ Y,\ Z > /(f_1,\ f_2,\ f_3), \\ f_1 = cZ^2 + aXY + bYX, \\ f_2 = cY^2 + aZX + bXZ, \\ f_3 = cX^2 + aYZ + bZY \end{gathered}$$

を含む成分である．ここで，$(a,b,c) \in \mathbb{P}^2(K)-S$で，$S$は有限集合である．有限集合を除外する必要性は，例えば $a=b=c=1$ のとき，A は polynomial growth を持たないからである．そのような多元環は *degenerate* であると言われる．Artin と Schelter は，A には常に

$$C_3 = c(c^3-b^3)Y^3 + b(c^3-a^3)YXZ + a(b^3-c^3)XYZ + c(a^3-c^3)X^3$$

という形の次数 3 の元で A の center に属するものが存在することを示している．

Artin と Schelter が regular algbra を定義した当初から，次の基本的な問題が彼ら自信によって提出されていた．

問題 (Artin and Schelter [A-S])

A を Artin-Sshelter regular algebra とするとき，

(1) A はネーター整域か？

(2) gl.dim A =GK-dim(A)？

部分的解答. (Artin-Tate-Van den Bergh [A-T-vB2], Levasseur [Le2])

A を n 次元の Artin-Schelter regular algebra とする．

(i) $n \leq 3$ ならば，A はネーター整域で，GK-dim(A) =gl.dim $A=n$ が成り立つ．

(ii) A がネーター環で GK-dim$(A)=n \leq 4$ ならば，A は整域である．

<u>3 次元 Artin-Schelter regular algebra の分類</u>

[A-T-vB1] においてなされた 3 次元の Artin-Schelter regular algebra の分類について概説しよう．

$n+1$ 個の生成元を持つ free K-algebra $K<X_0,X_1,\cdots,X_n>$において，次数 d の元 fは

$$\sum a_{i_1\cdots i_d}X_{i_1}X_{i_2}\cdots X_{i_d}$$

と表され，この fから multi-homogeneous form f^*が

$$\sum a_{i_1\cdots i_d}{x_{i_1}}^{(1)}{x_{i_2}}^{(2)}\cdots {x_{i_d}}^{(d)}$$

と定義される．このとき，f^*が multi-homogeneous であることから，f^*は$\underbrace{\mathbb{P}_n(K)\times\cdots\times\mathbb{P}_n(K)}_{d \text{ times}}$における hypersurface を定める．

今，A を 3 次元の Artin-Schelter regular algebra で，上記の (1) のタイプとする，即ち，A は 3 次式 f_1, f_2, f_3 により，$K < X, Y, Z > /(f_1, f_2, f_3)$ という形をしている．このとき，triple $(f_1{}^*, f_2{}^*, f_3{}^*)$ は，$\mathbb{P}_2(K) \times \mathbb{P}_2(K)$ の subvariety Γ を定めて，Γ は $f_i{}^*$ $(i = 1, 2, 3)$ の共通零点の locus である．((2) のタイプの場合は，$\Gamma \subseteq \mathbb{P}_1(K) \times \mathbb{P}_1(K) \times \mathbb{P}_1(K)$ である．)

π_1, π_2 を，自然な射影 $\mathbb{P}_2(K) \times \mathbb{P}_2(K) \to \mathbb{P}_2(K)$ とすると，次の図式が得られる：

$$
\begin{array}{ccc}
 & \Gamma & \\
\pi_{1|\Gamma} \swarrow & & \searrow \pi_{2|\Gamma} \\
\mathbb{P}_2(K) & \underset{i}{\longleftarrow} & \mathbb{P}_2(K)
\end{array}
$$

ここで i は，座標系 (x_2, y_2, z_2) に関する点 (a, b, c) を，座標系 (x_1, y_1, z_1) に関する点 (a, b, c) に写す写像である．

命題． Γ は π_1 と π_2 の間の同型を定め，更に，$(i \cdot \pi_2)(\Gamma) = \pi_1(\Gamma)$ が成り立つ．よって，$(i \cdot \pi_2 \cdot \pi_1{}^{-1})_{|\pi_1(\Gamma)}$ は $\pi_1(\Gamma)$ の自己同型を与える．

楕円曲線 $E = \pi_1(\Gamma)$ は，Γ から得られた自己同型 $\sigma : E \to E$ と，embedding $\alpha : E \hookrightarrow \mathbb{P}_2(K)$ を併せ持って現れているものである．algebra A は，Γ が自己同型 σ のグラフになっているとき，**non-degenerate** と言われる．

定理 (Artin-Tate-Van den Bergh [A-T-vB1])

3 次元の Artin-Schelter regular algebra とは，non-degenerate standard algebra のことである．

以上の考察における基本的な視点は，楕円曲線 E と E の translation による自己同型 σ 及び embedding $\alpha : E \hookrightarrow \mathbb{P}_2(K)$ の triple (E, σ, α) が A の性質に正確に反映しているということで，(E, σ, α) と algebra A とのつながりは，A の何か環論的性質を示そうとするとき，有効な道具である．特に，『3 次元の Artin-Schelter regular algebra がネーター環である』ということの証明がこのことによって可能になっている．

§3. Auslander-Gorenstein rings

Sklyanin algebra のクラス及び 3 次元の Artin-Schelter regular algebra のクラスを含む非可換ネーター環の概念として，Auslander-regular ring または Auslander-Gorenstein ring は研究対象としてたいへん興味あるものと判断できる．この§では，と Auslander-Gorenstein ring に関して，今後の研究において興味を引き起こしてくれると期待される結果及び問題について述べよう．

Artin-Schelter regular algebra と Auslander-regular algebra との関係

Artin-Schelter による 3 次元及び 4 次元の regular algebra と Auslander-regular algebra との関係については，Sklyanin algebra も含めて§1 に記した．一般次元の場合にはまだほとんどわかっていないので，考察するべき問題とその部分的解答を述べておこう．

問題. (1) Artin-Schelter regular algebra は Auslander-regular か？

(2) Artin-Schelter-Gorenstein algebra は Auslander-Gorenstein か？

逆に，

(3) positively graded Auslander-regular (resp. Auslander-Gorenstein) algebra はどんな条件のもとで，Artin-Schelter regular (resp. Artin-Schelter-Gorenstein) になるか？

これに関して，現在までに得られている解答は次の通りである．

部分的解答.

(Artin-Tate-Van den Bergh [A-T-vB1]) 3 次元の Artin-Schelter regular algebra は Auslander-regular である．

(Levasseur [Le2]) (1) A が Auslander-regular algebra で，polynomial growth を持てば，A は Artin-Schelter regular algebra である．

(2) A が n 次元の Auslander-Gorenstein ring ならば，

$$\mathrm{Ext}^i_A(K,\ A) = 0 \text{ if } i \neq n, \text{ かつ } \mathrm{Ext}^n_A(K,\ A) \cong K$$

が成り立つ．更に，A が polynomial growth を持てば，A は Artin-Schelter-Gorenstein algebra である．

Duality over Auslander-Gorenstein Rings

準フロベニウス環 R 上の有限生成左加群と右加群の間には，R-dual $-^* = \mathrm{Hom}_R(-,\ R)$ で与えられる duality が存在する．これを Auslander-Gorenstein ring 上に拡張したものを考察しよう．これについては，可換な Gorenstein ring の場合は，Fossum [F] 及び Reiten-Fossum [R-F] によって，Sklyanin algebra の場合は，Levasseur-Smith [L-S] による結果があり，更に類似の結果として，Miyashita [Mi] がある．

Rをネーター環，Mを有限生成 R-加群とし，Mの **grade** $j(M)$ を

$$j(M) = \min\{j \geq 0 |\ \mathrm{Ext}^j_R(M,\ R) \neq 0\}$$

と定義する．このとき，$j(M) \leq \mathrm{pd}(M)$ が成り立つ．

次の有用な補題から始める．証明はホモロジー群の定義を考えれば得られる．

補題 1． Rをネーター環，Mを有限生成な R-加群とする．$j \geq 1$ に対して，$P_j \xrightarrow{f_j} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$ を各 P_iが有限生成であるような projective resolution とし，X_jを写像 $f_j{}^* : P_{j-1}{}^* \to P_j{}^*$ ($*$は R-dual) の cokernel とする．

もし，$\mathrm{Ext}^i_R(M,\ R) = 0$ ($\forall\ i,\ 0 < i < j$) ならば，

$$0 \to \mathrm{Ext}^j_R(X_j,\ R) \to M \xrightarrow{\epsilon_M} M^{**} \to \mathrm{Ext}^{j+1}_R(X_j,\ R) \to 0$$

となる完全列が存在する．ここで，ϵ_Mは evaluation map である．

この系として，

系 2． ${}_RM$を有限生成左 R-加群で，$j(M) \geq 1$ とする．このとき，有限生成右 R-加群 X_Rで，$M \cong \mathrm{Ext}^{j(M)}_R(X,\ R)$ かつ $\mathrm{pd}(X) \leq j(M)$ となるものが存在する．

次の命題は grade の特質を示している．

命題 3． Rをネーター環，Mを有限生成 R-加群で，$j(M) \geq 1$ のものとする．このとき，Eが injective かつ $\mathrm{fd}(E) < j(M)$ ならば，$\mathrm{Hom}_R(M,\ E) = 0$ となる．

証明． $\forall\, i < n$ に対して，$\mathrm{fd}(E) < j(M)$ だから，系 2 により

$$0 = \mathrm{Tor}^R_{j(M)}(X,\ E) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}^{j(M)}_R(X,\ R),\ E) \cong \mathrm{Hom}_R(M,\ E)$$

となる．∎

ここで，環 Rが Auslander-Gorenstein であれば，

命題 4 (Björk [Bj2]) Rを Auslander-Gorenstein ring，Mを有限生成 R-加群とする．このとき，$j(\mathrm{Ext}_R^{j(M)}(M, R)) = j(M)$ が成り立つ．

証明． Auslander condition によって，

$$\mathrm{Ext}_R^i(\mathrm{Ext}_R^{j(M)}(M, R), R) = 0 \quad (\forall\, i < j(M))$$

が成り立つから，

$$\mathrm{Ext}_R^{j(M)}(\mathrm{Ext}_R^{j(M)}(M, R), R) \neq 0$$

を示せばよい．まず，$j(M) = 0$ のときは，$M^{**} = 0$ から $M^* = 0$ となる．そこで，$j = j(M) \geq 1$ と仮定する．$0 \to K_j \xrightarrow{f} P_{j-1} \to \cdots \to P_0 \to M \to 0$ を完全列で，各 P_iが有限生成かつ projective なものとする．R-dual を取ることにより，完全列

$$0 \to {P_0}^* \to \cdots \to {P_{j-1}}^* \xrightarrow{f^*} {K_j}^* \to \mathrm{Ext}_R^j(M, R) \to 0$$

が得られるから，その部分完全列 $0 \to \mathrm{Im}(f^*) \to {K_j}^* \to \mathrm{Ext}_R^j(M, R) \to 0$ に $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}_R^j(M, R), -)$ を施すと，次の完全列：

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}_R^j(M, R), {K_j}^*) \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}_R^j(M, R), \mathrm{Ext}_R^j(M, R))\\ \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}_R^j(M, R), \mathrm{Im}(f^*))\end{aligned}$$

を得る．今，${K_j}^*$は有限生成かつ torsionless だから，Auslander condition により，$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}_R^j(M, R), {K_j}^*) = 0$ が成り立っている．よって，

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}_R^j(M, R), \mathrm{Ext}_R^j(M, R)) \neq 0$$

から，$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Ext}_R^j(M, R), \mathrm{Im}(f^*)) \neq 0$ を得る．従って，完全列 $0 \to {P_0}^* \to \cdots \to {P_{j-1}}^* \to \mathrm{Im}(f^*) \to 0$ から，

$$0 \neq \mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Ext}_R^j(M, R), \mathrm{Im}(f^*)) \cong \mathrm{Ext}_R^j(\mathrm{Ext}_R^j(M, R), {P_0}^*),$$

即ち，$\mathrm{Ext}_R^j(\mathrm{Ext}_R^j(M, R), R) \neq 0$ となる．∎

以下，Rを Auslander-Gorenstein ring，Mを有限生成 R-加群とする．$j = j(M)$ とおき，$P_j \xrightarrow{f_j} P_{j-1} \xrightarrow{f_{j-1}} \cdots \xrightarrow{f_1} P_0 \xrightarrow{f_0} M \to 0$ を Mの projective resolution で，各 P_iが有限生成なものとする．このとき，次の完全列

$$0 \to {P_0}^* \xrightarrow{{f_1}^*} \cdots \to {P_{j-1}}^* \xrightarrow{{f_j}^*} \mathrm{Im}(f_j)^* \to \mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Im}(f_{j-1}),\ R) \to 0$$

が得られる．ここで，$\mathrm{Ext}^1_R(\mathrm{Im}(f_{j-1}),\ R) \cong \mathrm{Ext}^j_R(M,\ R)$ であって，Auslander condition により，$\mathrm{Ext}^i_R(\mathrm{Ext}^j_R(M,\ R),\ R) = 0$ $(\forall\ i < j)$ が成り立っている．更に，$\mathrm{Im}(f_j)^*$は有限生成かつ torsionless で，$\mathrm{Im}(f^*) \cong {P_0}^*$なので，上の完全列から次の可換図式が得られる：

$$\begin{array}{ccccccc}
P_1 & \xrightarrow{f_1} & P_0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 \\
\cong\big\downarrow & & \cong\big\downarrow & & \sigma_M\big\downarrow & & \\
{P_1}^{**} & \xrightarrow{{f_1}^{**}} & {P_0}^{**} & \longrightarrow & \mathrm{Ext}^j_R(\mathrm{Ext}^j_R(M,\ R),\ R) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

（各行は完全列である）．従って，自然な同型

$$\sigma_M : M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^{j(M)}_R(\mathrm{Ext}^{j(M)}_R(M,\ R),\ R)$$

が得られる．

以上から，次が示された．

定理 5． Rを Auslander-Gorenstein ring，$j \geq 1$ とする．このとき，自然な同型

$$\sigma_M : M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^{j(M)}_R(\mathrm{Ext}^{j(M)}_R(M,\ R),\ R),$$

が存在し，対応 $M \to \mathrm{Ext}^j_R(M,\ R)$ は $j = j(M)$ である有限生成左加群と右加群の間の bijection を与える．

Rは Auslander-Gorenstein ring で，その self-injective dimension が n であるとする．Björk [Bj1] により，有限生成 R-加群 Mは，$j(M) = n$ のとき，**holonomic** であると呼ばれる．$n = 0$ のときは，Rを準フロベニウス環と考えるのが自然であるから，このときは全ての有限生成加群が holonomic であることになる．$n \geq 1$ の場合に，holonomic module の特徴付けを得る．

定理 6． Rを Auslander-Gorenstein ring で，その self-injective dimension を $n \geq 1$ として，$0 \to {}_RR \to E_0 \to \cdots \to E_n \to 0$ を${}_RR$ の minimal injective resolution とする．このとき，有限生成左 R-加群${}_RM \neq 0$ について，次は同値である：

(1) Mは holonomic；

(2) $M \cong \mathrm{Ext}_R^n(\mathrm{Ext}_R^n(M,\ R),\ R)$；

(3) $M \cong \mathrm{Ext}_R^n(X,\ R)$ となる有限生成右 R-加群 X_Rが存在する；

(4) $\mathrm{Hom}_R(M,\ E_0 \oplus \cdots \oplus E_{n-1}) = 0$．

証明．(1)⇒(2) は定理 5，(2)⇒(3) は明か，(3)⇒(4) は命題 3．

(4)⇒(1)：まず，$M^* = \mathrm{Hom}_R(M,\ R) \subseteq \mathrm{Hom}_R(M,\ E_0) = 0$．次に，$\forall\, i\ (1 \leq i < n)$ に対して，完全列 $0 \to K_{i-1} \to E_{i-1} \to K_i \to 0$（但し，$\mathrm{E}(K_{i-1}) = E_{i-1}$）から，完全列 $\mathrm{Hom}_R(M,\ K_i) \to \mathrm{Ext}_R^1(M,\ K_{i-1}) \to 0$ が得られる．ここで，$\mathrm{Hom}_R(M,\ K_i) \subseteq \mathrm{Hom}_R(M,\ E_i) = 0$ だから，$0 = \mathrm{Ext}_R^1(M,\ K_{i-1}) \cong \mathrm{Ext}_R^i(M,\ R)$ となる．よって，$\mathrm{Ext}_R^n(M,\ R) \neq 0$ である．（[C-F, Theorem 2]）∎

この定理と [I-S, Proposition 4] から次を得る．

系 7． holonomic module は有限な組成列を保つ．

$\mathcal{H}_l$ (resp. $\mathcal{H}_r$) を全ての holonomic left (resp. right) R-modules のクラスとすると，上記の定理 6 (3) または系 3 から，$\mathcal{H}_l$は extensions，submodules，factor modules に関して閉じていることがわかる．また，$M \in \mathcal{H}_l$なら，$\mathrm{Ext}_R^n(M,\ R) \in \mathcal{H}_r$が成り立つ．更に，自然な同型

$$\sigma_M : M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_R^n(\mathrm{Ext}_R^n(M,\ R),\ R)$$

があるから，functor $F = \mathrm{Ext}_R^n(-,\ R) : \mathrm{mod}(R) \to \mathrm{mod}(R^{\mathrm{op}})$ は $\mathcal{H}_l$と$\mathcal{H}_r$の間の duality を与え，Fが $\mathcal{H}_l$(or $\mathcal{H}_r$) 上で exact であることも明かである．特に，M の projective dimension は n または ∞ であり（[Iw1, Theorem 2]），もし $\mathrm{pd}(M) = n$ ならば，$\mathrm{pd}(\mathrm{Ext}_R^n(M,\ R)) = n$ となる．

次に，$0 \to {}_RR \to E_0 \to \cdots \to E_n \to 0$ 及び $0 \to R_R \to E_0{}' \to \cdots \to E_n{}' \to 0$ をそれぞれ${}_RR$, R_Rの minimal injective resolutions とするとき，E_n と $E_n{}'$の単純部分加群について考えてみる．E_nの単純部分加群は全て holonomic であり，Sが E_nの単純部分加群なら，$\mathrm{Ext}_R^n(S,\ R)$ は $E_n{}'$の単純部分加群になる．

定理 8．Rを Auslander-Gorenstein ring で，その self-injective dimension を n とする．このとき，holonomic module Mに対して，自然な同型 $M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}_R^n(\mathrm{Ext}_R^n(M,\ R),\ R)$ が存在する．

更に，

(1) 対応 $M \to \mathrm{Ext}_R^n(M,\ R)$ は，left holonomic modules と right holonomic modules の間の bijection を与える；

(2) 特に，projective dimension が n の holonomic modules は 1 対 1 に対応している；

(3) E_nの単純部分加群と $E_n{}'$の単純部分加群は，$S \to \mathrm{Ext}_R^n(S,\ R)$ によって 1 対 1 に対応している．

<u>Auslander-Gorenstein ring に対する Ore の条件</u>

一般に，可換な Gorenstein ring の商環（ full ring of quotients ）は準フロベニウス環になっている，即ち準フロベニウス環の order である．ところが非可換の場合には，ネーター環に対してもその商環が存在するとは限らないが，その存在性まで含めて，可換環の類似がどのようなときに成立するかを考察することは重要な問題である．

まず最も一般的な問題設定をしよう．

問題．(1) Auslander-Gorenstein ring はどのような条件の下で準フロベニウス環の order になるか？

(2) A が noetherian graded algebra で，gl.dim $A < \infty$ ならば，A は整域かつ maximal order か？

特に，Auslander-regular algebra のときは，問題 (2) に対する次の結果があり，可換な regular local ring が整域であるという事実の非可換版とも言える．

定理 (Levasseur [Le2]) Auslander-regular algebra A は整域である．従って，A はネーター整域だから商体を持つ．

注意． この結果において，graded algebra $A = K \oplus A_1 \oplus A_2 \oplus \cdots$ が K-algebra として，A_1で生成されているという仮定ははずせない．例えば，アルティン環としては体上の 3 角行列環，またネーター環としては行列環 $\begin{bmatrix} \mathbb{Z} & (p) \\ \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \end{bmatrix}$（ $\mathbb{Z}$ は整数環，p は素数）が hereditary ring で，Auslander-regular であるが，整域ではない．

関連する結果

1. (Artin-Tate-Van den Bergh [A-T-vB1]) Artin-Schelter regular algebra A がネーター環で， Gk-dim(A) = gl.dim $A = d \leq 4$ ならば，A は整域である．

2. (Stafford [St1]) Rを体上のネーター的多元環で Auslander-regular とする．Rが Cohen-Macaulay property を充たし，更に stably free ならば，Rは整域，かつ極大整環である．

ここで，Rが *stably free* であるとは，任意の有限生成な projective module Pに対して，$P \oplus R^{(m)} \cong R^{(n)}$となる m, n が存在することである．

3. (Sato [Sa]) Rが，1 次元の Auslander-Gorenstein ring，かつ $\mathrm{Soc}(R) = 0$ ならば，Rは準フロベニウス環の order になる．

4. (Levasseur [Le2]) A はネーター環，かつ Cohen-Macaulay property を充たし，inj.dim $A = n < \infty$，GK-dim$(A) < \infty$ と仮定する．このとき，次は同値である：

(1) A は Auslander-Gorenstein ;

(2) 任意の $i < j = j(M)$ と任意の有限生成な A-module Mについて，$\mathrm{Ext}^i_A(\mathrm{Ext}^j_A(M,\ A),\ A) = 0$ が成り立つ．

この同値な条件のもとで，A はアルティン環の order になる．

最後に，graded algebra とは限らない一般の非可換ネーター環の場合についても述べておこう．ネーター環 Rが有限の self-injective dimension を持つとき，R を **Gorenstein** ring と呼ぶ．self-injective dimension が n である Gorenstein ring Rの minimal injective resolution $0 \to {}_RR \to E_0 \to \cdots \to E_n \to 0$ において，E_nが cogenerator になるとき，Rは **injectively homogeneous** であると言われる（[Ha]）．但し，[S-Z] では **injectively smooth** と呼んでいる．このような環の例としては，整数環 $\mathbb{Z}$ や群環 $\mathbb{Z}[G]$ の他，もっと一般に西田 [Ni] が定義した Gorenstein order がある．これに関して，Hajarnavis [Ha] は次の結果を得ている．

(Hajarnavis) Rが injectively homogeneous な Gorenstein ring であり，その center 上で有限生成な加群ならば，Rは準フロベニウス環を商環として持つ．

この結果において，center 上で有限生成という仮定を除くことが問題となるが，ここでは次の問題を提出しておこう．

問題． Rを injectively homogeneous な Auslander-Gorenstein ring とするとき，Rは準フロベニウス環を商環として持つか？

[Ar] M. Artin, *Geometry of quantum planes*, Azumaya algebras, actions and modules, D. Haile and J. Osterburg (ed.s), Contemporary Math. **124** (1992), 1–15, AMS.

[A-T-vB1] M. Artin, J. Tate and M. Van den Bergh, *Some algebras related to automorphisms of elliptic curves*, Grothendieck Festschrift Vol. **1**, 33–85, Birkhäser, Boston, 1990.

[A-T-vB2] ————————, *Modules over regular algebras of dimension 3*, Invent. Math. **106** (1991), 335–388.

[A-S] M. Artin and W. F. Schelter, *Graded algebras of global dimension 3*, Adv. in Math. **66** (1987), 171–216.

[A-vB] M. Artin and M. Van den Bergh, *Twisted homogeneous coordinate rings*, J. of Algebra **133** (1990), 249–271.

[A-Z] M. Artin and J. J. Zhang, *Noncommutative projective schemes*, Adv. in Math. **109** (1994), 228-287.

[A-R] M. Auslander and I. Reiten, *Cohen-Macaulay and Gorenstein Artin algebras*, Progress in Math. **95**, 221–245, Birkhäser, 1991.

[Bj1] J.-E. Björk, *Non-commutative Noetherian rings and the use of homological algebra*, J. of Pure and Appl. Alg. **18** (1985), 111–119.

[Bj2] —————, *The Auslander condition on Noetherian rings*, Séminaire d'Algèbre, P. Dubreil et M.-P. Malliavin, Proceedings, Lect. Notes in Math. **1404**, 137–173, Springer, 1989.

[F] R. M. Fossum, *Duality over Gorenstein rings*, Math. Scand. **26** (1970), 165–176.

[F-G-R] R. Fossum, P. A. Griffith and I. Reiten, "Trivial Extensions of Abelian Categories," Lect. Notes in Math. 456, Springer, 1975.

[Ha] C. R. Hajarnavis, *Homological and Cohen-Macaulay properties in noncommutative Noetherian rings*, Séminaire d'Algèbre, P. Dubreil et M.-P. Malliavin, Proceedings, Lect. Notes in Math..

[Iw1] Y. Iwanaga, *On rings with finite self-injective dimension II*, Tsukuba J. Math. **4** (1980), 107–113.

[Iw2] 岩永恭雄, *Syzygy modules and minimal injective resolutions over Gorenstein rings*, 第 4 回多元環の表現論シンポジウム報告集, pp.8–27, 1993.

[I-S] Y. Iwanaga and H. Sato, *On Auslander's n-Gorenstein rings*, To appear in J. of Pure and Appl. Alg.

[Ko] S. Kobayashi, *On regular algebras*, 京大数理解析研究所講究録 877, pp.41–45, 1994.

[K-L] G. Krause and T. H. Lenagan, "Growth of Algebras and Gelfand-Kirillov Dimension," Research Notes in Math. vol. 116, Putnam, London, 1985.

[Le1] T. Levasseur, *Grade des modules sur certain anneux filtres*, Com. in Alg. **9** (1981), 1519–1532.

[Le2] ———————, *Some properties of non-commutative regular graded rings*, Glasgow Math. J. **34** (1992), 277–300.

[L-S] T. Levasseur and S. P. Smith, *Modules over the Sklyanin algebras*, Bull. Soc. Math. France **121** (1993), 35–90.

[LB1] L. Le Bruyn, *The arithmetic of Sklyanin algebras*, Com. in Alg. **22** (1994), 51–81.

[LB2] ———————, *Sklyanin algebras and their symbols*, to appear in K-Theory.

[LB3] ———————, *Homological properties of braided matrices*, J. of Alg. **170** (1994), 596–607.

[LB-S] L. Le Bruyn and S. P. Smith, *Homogenized* $\mathfrak{sl}(2)$, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 725–730.

[LB-S-vB] L. Le Bruyn, S. P. Smith and M. Van den Bergh, *Central extensions of three dimensional Artin-Schelter regular algebras*, to appear in Math. Z.

[Maj] S. Majid, *Examples of braided groups and braided matrices*, J. Math. Phys. **32** (1991), 3246–3253.

[Ma1] Yu. I. Manin, *Some remarks on Koszul algebras and quantum groups*, Ann. Inst. Fourier **37** (1987), 191–205.

[Ma2] ———————, "Topics in Non-commutative Geometry," Princeton Univ. Press, 1991.

[Mi] Y. Miyashita, *Tilting modules of finite projective dimension*, Math. Z. **193** (1986), 113–146.

[Ni] K. Nishida, *Characterization of Gorenstein orders*, Tsukuba J. Math. **12** (1986), 459–468.

[O-F] A. V. Odesskii and B. I. Feigin, *Sklyanin algebras associated with an elliptic curve*, (in Russian), Preprint.

[O-F] ———————, *Elliptic Sklyanin algebras*, (in Russian), Funktsional Anal. i Prilozhen **23** (1989), 45–54.

[R-F] I. Reiten and R. M. Fossum, *Commutative n-Gorenstein rings*, Math. Scad. **31** (1972), 33–48.

[Ro] J.-E. Roos, *Détermination de la dimension homologique des algèbre de Weyl*, C. R. Acad. Sci. Paris (Ser A) **274** (1972), 23–26.

[Sa] H. Sato, *Remarks on localizations of Noetherian rings with Krull dimension one*, Tsukuba J. Math. **3** (1979), 123–128.

[Si] J. Silverman, "The Arithmetic of Elliptic Curves," GTM vol. 106, Springer, 1986.

[Sk1] E. K. Sklyanin, *Some algebraic structures connected to the Yang-Baxter equation*, Func. Anal. Appl. **16** (1982), 27–34.

[Sk2] ―――――――, *Some algebraic structures connected to the Yang-Baxter equation Representations of quantum algebras*, Func. Anal. Appl. **17** (1983), 237–284.

[Sm1] S. P. Smith, *A class of algebras similar to the enveloping algebra of* $sl(2,\mathbb{C})$, Trans. Amer. Math. Soc. **332** (1990), 285–314.

[Sm2] ―――――――, *The four-dimensional Sklyanin algebras*, K-Theory **8** (1994), 65–80.

[Sm3] ―――――――, *Point modules over Sklyanin algebras*, Math. Z. **215** (1994), 169–177.

[Sm4] ―――――――, *Some finite dimensional algebras related to elliptic curves*, To appear in the Proceedings of ICRA VII, 1994.

[Sm-Std] S. P. Smith and J. T. Stafford, *Regularity of the four dimensional Sklyanin algebra*, Compositio Math. **83** (1992), 259–289.

[Sm-Sts] S. P. Smith and J. M. Staniszkis, *Irreducible representations of the 4-dimensional Sklyanin algebra at points of infinite order*, J. of Alg. **160** (1993), 57–86.

[S-T] S. P. Smith and J. Tate, *The center of the 3-dimensional and 4-dimensional Sklyanin algebras*, K-Theory **8** (1994), 19–63.

[St1] J. T. Stafford, *Auslander-regular algebras and maximal orders*, J. London Math. Soc. **50** (1994), 276–292.

[St2] ―――――――, *Regularity of algebras related to the Sklyanin algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **341** (1994), 895–916.

[S-Z] J. T. Stafford and J. J. Zhang, *Homological properties of (graded) Noetherian PI rings*, J. of Algebra **168** (1994), 988–1026.

[Sts] J. M. Staniszkis, *The 4-dimensional Sklyanin algebra*, J. of Algebra **167** (1994), 104–115.

[T-vB] J. Tate and M. Van den Bergh, *Homological properties of Sklyanin algebras*, Preprint, 1993.

[Te] K.-M. Teo, *Homological properties of fully bounded Noetherian rings*, Preprint, University of Michigan, 1994.

[Zha] J. J. Zhang, *Serre duality for non-commutative algebra*, Preprint, 1994.

II_1型部分因子環のガロア量子群について。

名大　　　　林孝宏

§0　序

共形場理論と並んで量子群論の今後の応用が期待されている分野に、ジョーンズ指数理論がある。大ざっぱに言うと、これは古典的なガロア理論に於ける「体」を「II_1-型因子環」と呼ばれる無限次元の環におきかえたものである。ガロア理論に於けるガロア群に相当するような量子群を捜そうというわけである。このノートでは、ジョーンズ指数理論についての簡単な解説をすると共にガロア量子群へ向けての筆者の試みを紹介したい。

ところで、リンゲルによって発見された遺伝多元環と量子展開環との関係は、ルスティッヒの標準基底の理論のもとになったものでありよく知られている。一方、彼はドゥラプと共にジョーンズ指数理論と遺伝多元環との関係も考察している。我々の量子群とこのような研究との間になにか接点が見つかれば幸せなのであるが．．．．

§1　ジョーンズ指数理論

ヒルベルト空間 H 上の有界線型作用素よりなる環 M は *-演算（共役作用素をとる操作）について閉じており、さらに弱位相について閉じているときフォン・ノイマン環と呼ばれる。さらに M が無限次元で、次の三つの条件を満たすような線型汎関数 tr をちょうどひとつ持つとき M は $\underline{\mathrm{II}_1\text{-型因子環}}$ と呼ばれる。

(1)　　$tr(1) = 1$

(2)　　$tr(xy) = tr(yx) \quad (x, y \in M)$

(3)　　$tr(x^*x) \geqq 0$　　　　$(x \in M)$

大ざっぱに言うと、このような汎関数の存在は、この環がある意味で小さいことを、また一意性は、この環が「単純」であることを意味している。II_1-型因子環 M の部分環 N でそれ自体 II_1-型因子環であるようなものを <u>II_1-型部分因子環</u>と呼ぶ。ジョーンズ指数理論とは II_1-型部分因子環 $N \subseteq M$ を研究する作用素環論の一分野で、ジョーンズによる次の結果をその出発点としている。

<u>定理</u>（ジョーンズ [J]）II_1-型部分作用素環 $N \subseteq M$ に対し、その<u>指数</u>と呼ばれる実数値不変量 $[M:N]$ が定義される。それのとりうる値の全体は次の集合に一致する。

$$\{4\cos^2(\pi/h) \mid h = 3,4,\cdots\} \cup [4,\infty]$$

指数 $[M:N]$ が自然数 n のときには M_N は階数 n の自由加群になる。例えば M が N と有限群 G との接合積（半直積）であるときには $[M:N] = \#(G)$ となる。より一般に $[M:N] = n + n'$ $(n \in \mathbb{Z},\ 0<n'<1)$ と小数部分がオマケについているときには、M_N は階数 n の自由加群に eN と表わされる射影加群を直和したものに同型になる。ここで e は M の射影元（自己共役なべき等元）で $tr(e) = n'$ となるようなものである。

<u>§2</u>　部分因子環の主グラフ

ジョーンズの指数は部分因子環の研究に於てきわめて基本的なものではあるが一般にはそれだけでは部分因子環の構造を決定することはできない。本節ではより強力な不変量である主グラフについて説明したい。

指数有限な II_1-型部分因子環 $N \subseteq M$ に対し $M_2 := \mathrm{End}(M_N)$ は再び II_1-型因子環の構造を持っている。$N \subseteq M$ から新しい II_1-型部分因子環 $M \subseteq M_2$ を構成することをジョーンズの基本構成法と呼ぶ。指数 $[M_2:M]$ はもとの

それ [M:N] に一致しており、特に有限である。そこでこの構成をさらに繰り返していくことにより II_1-型因子環の増大列 $N \subseteq M \subseteq M_2 \subseteq M_3 \subseteq \cdots$ が得られる。

$$V_k = \{x \in M_k \mid xn = nx \ (n \in N)\}$$

とおく。これは有限次元のフォン・ノイマン環、すなわち行列環の有限個の直積になる。つぎに $V_0 \cup V_1 = \{V_k$ の既約表現$\} \cup \{V_{k-1}$の既約表現$\}$ を頂点の全体とする二部グラフ Γ_k を表現の分岐則

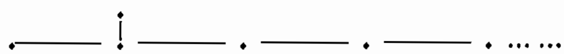
$$K = \bigoplus_{L \in V_1} \#\mathrm{edge}(K,L)L \qquad (K \in V_0)$$

により定義する。すると Γ_k は自然に Γ_{k+1} の部分グラフになるので二部グラフ $\Gamma = \Gamma(N \subseteq M)$ が $\Gamma = \cup_k \Gamma_k$ により定まる。これを $N \subseteq M$ の<u>主グラフ</u>と呼ぶ。Γ が有限グラフのときには Γの隣接行列のペロン-フロベニウス固有値の自乗が指数 [M:N] になる。 このことをペロン-フロベニウス理論と合わせることにより、直ちに次の興味深い事実が導かれる。

<u>定理</u> (1) 指数が４未満のII_1-型部分因子環の主グラフは A, D, E いずれかの型のディンキン図形になる。
(2) 指数４のII_1-型部分因子環の主グラフは $A^{(1)}$, $D^{(1)}$, $E^{(1)}$ いずれかの型のディンキン図形か、つぎの三つのグラフのいずれかに一致する。

A_∞

$A_{\infty\infty}$

D_∞ 

前節で述べたジョーンズの定理のうち、４以下の指数が $4\cos(\pi/h)^2$ という

形であるという主張はこの定理から直ちに従う。

注意　実は D_{2n+1} 型及び E_7 型のディンキン図形は II_1-型部分因子環の主グラフとしては現れ得ない事が知られている。これはディンキン図形が現れる他の多くの数学の分野には現れないジョーンズ指数理論特有の現象であるかもしれない。

§3　指数４の II_1-型部分因子環と SU(2) の有限部分群

我々は主グラフの表現論的な意味を考えたいのであるが、これについて大きな示唆を与えるものとしてジョーンズらによる指数４の II_1-型部分因子環の構成がある。それについて説明するためにまず SU(2) の有限部分群に関する McKay's observation について説明したい。

G を有限群とし、L をその複素既約加群とする。$\{L(i) \mid i \in V\}$ を G の複素既約加群の完全代表系とし、テンソル積加群 $L \otimes L(j)$ の既約分解を

$$L \otimes L(j) = \oplus_i m_{ij} L(i) \tag{3.1}$$

とする。V を頂点の全体とし、$i, j \in V$ がそれぞれ始点、終点であるような辺の数が m_{ij} 本であるような有向グラフを $\Gamma(G,L)$ で表し (G,L) の表現グラフという。

G が SU(2) の有限部分群、L がその自然な二次元表現である時には表現グラフ $\Gamma(G,L)$ は拡大ディンキン図形 $A^{(1)}, D^{(1)}, E^{(1)}$ のいずれかになる。これにより SU(2) の有限部分群はこれらの図形と一対一に対応する。そしてこの対応は次の定理によって前節の定理と結びついている。

定理　([GHJ]) G を拡大ディンキン図形 Γ に対応する SU(2) の有限部分群とし、L をその自然な二次元表現とする。と、有限次元フォン-ノイマン環の組

$$\mathrm{End}_G(L^{\otimes r}) \subseteq \mathrm{End}_G(L^{\otimes r+1})$$

の $k\to\infty$ での「極限」は Γ を主グラフにもつ指数4の II_1-型部分因子環になる。

§4　面代数と II_1-型部分因子環

前節で述べたような有限群による II_1-部分因子環の構成は指数が整数の平方数でないときには存在しない。というのは L が有限群 G の忠実な表現なら、その表現グラフに対応する行列のペロン-フロベニウス固有値は $\dim L$ に一致する事がわかるからである。そこで我々は次のような量子群のクラスを導入することにする。

定義　体上の代数 H が余積 Δ と余単位元 ε により余代数にもなっているとする。また V を有限集合とし $\{X_{ij} \mid i,j\in V\}$ を H の元より成る集合とする。組 $(H,\{X_{ij}\})$ が次の条件を満たすときこれを V-面代数と呼ぶ。

$$\Delta(a)\Delta(b) = \Delta(ab)$$

$$X_{ij}X_{mn} = \delta_{im}\delta_{jn}X_{ij},\quad 1 = \Sigma_i X_{ii}$$

$$\Delta(X_{ij}) = \Sigma_k X_{ik}\otimes X_{kj},\quad \varepsilon(X_{ij}) = \delta_{ij}$$

$$\Sigma_{ijk}\,\varepsilon(aX_{ik})\varepsilon(X_{kj}b) = \varepsilon(ab)$$

集合 V がただ一つの元よりなるときには V-面代数は双代数と等価な概念になる。面代数は見かけ上かなり複雑な代数系なのであるが、幸いにしてその例を簡単につくる方法がある。

例　$\Gamma=(V,E)$ を有向グラフとし、$\mathrm{Path}_{i,j}{}^m$ を $i\in V$ を始点、$j\in V$ を終

点とするような長さ m のパスの全体とし、$Path^m = \cup_{i,j} Path_{i,j}{}^m$ とする。$H(\Gamma)$ を記号 $\{X_{pq} \mid p,q \in Path^m,\ m \geqq 0\}$ を基底とする線型空間とする。と、$H(\Gamma)$ は次の演算により V-面代数になる。

$$X_{pq}X_{p'q'} = \delta_{R(p)S(p')}\delta_{R(q)S(q')}X_{p\cdot p',q\cdot q'},$$

$$\Delta(X_{pq}) = \Sigma_r X_{pr} \otimes X_{rq}, \quad \varepsilon(X_{pq}) = \delta_{pq}$$

但し、$S(p)$, $R(p)$ はそれぞれパス p の始点、終点とし、$p \cdot q$ は p と q をつないでできるパスを表すものとする。また Σ_r は p, q と同じ長さのパス r 全体についての和であるとする。

上の例で、$H(\Gamma)$ のイデアル I が同時に余イデアルでもあれば $H(\Gamma)/I$ もまた V-面代数になる。任意の（代数として）有限生成な V-面代数はすべてこのようにして得られることがわかっている。

注(1) 実は、体 K 上の可換分離多元環 R を一つ与えるごとに、R-面代数と言うものが定義される。R が K の ♯(V) 個の直積である場合が、V-面代数である。上の例で現れたグラフの背後には、R 上の双加群がある。
(2) 有向グラフ上のパスを用いて代数を構成するというアイディアは多元環の表現論に現れるものと同一である。但し、後で記するように、ディンキン図形を有向グラフと見なす方法は、多元環論のそれとは異なっている。

群やホップ代数の表現論に於ける表現のテンソル積の類似として、面代数の加群たちに対し次のような演算が定義される。

命題　面代数 $(H,\{X_{ij}\})$ 上の加群 L, M に対し、$L \overline{\otimes} M := \oplus_{ijk} X_{ik}L \otimes X_{kj}M$ は

$$a(\Sigma_m u_m \otimes v_m) = \Sigma_n \Sigma_m b_n u_m \otimes c_n v_m$$

$$(a \in H,\ \Sigma_m u_m \otimes v_m \in L \overline{\otimes} M)$$

により H-加群になる。但し、$\Delta(a) = \Sigma_n b_n \otimes c_n$ とおいた。

これにより、面代数の加群に対してもその表現グラフが前節と同様にして定義される。次が我々の主結果である。

<u>定理</u>　Γ を A_n, D_{2n}, E_6 E_8 いずれかの型のディンキン図形とする。すると面代数 $G(\Gamma)$ とその既約加群 L が存在して $(G(\Gamma),L)$ の表現グラフは Γ に一致する。また Γ を主グラフとする指数4未満の II_1-型部分因子環が $(G(\Gamma),L)$ を用いて前節の定理と同様の方法により構成される。

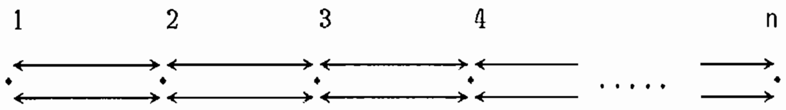
面代数 $G(\Gamma)$ の構成法を述べるには Ocneanu による主グラフ上の平坦接続の理論を説明することが必要なのであるが、これは少々面倒なのでここでは省略させて頂き、$\Gamma = A_n$ の場合の $G(\Gamma)$ の具体的表示式で許して頂くことにする。

<u>命題</u>　面代数 $G(A_n)$ は、前例で $\Gamma = (V,E) = A_n$ として得られる面代数 $H(\Gamma)$ をさらに次の二つの関係式で割ったものとして得られる。

$$\Sigma_s \mu(R(s))^{1/2} X_{p\cdot q,\, s\cdot s^\sim}$$
$$= \delta_{p,q^\sim} (\mu(j)\mu(R(p))/\mu(S(p)))^{1/2} X_{S(p)j}$$
$$\Sigma_s \mu(R(s))^{1/2} X_{s\cdot s^\sim,\, p\cdot q}$$
$$= \delta_{p,q^\sim} (\mu(j)\mu(R(p))/\mu(S(p)))^{1/2} X_{jS(p)}$$

$$(p,q \in E,\ j \in V)$$

但し A_n は次のようにして、有向グラフと見なすものとする。



また Σ_s は j を始点とする有向辺 s 全体についての和とし、s^- は有向辺 s の向きを逆にしたものを意味するものとする。また $\mu(i) = \sin(\pi i/(n+1))$ $(1 \leqq i \leqq n)$ とする。すなわち $[\mu(i)]_i$ はディンキン図形 A_n の隣接行列のペロン-フロベニウス固有ベクトルである。

参考文献

[DR] V. Dlab and C. Ringel, Towers of semi-simple algebras, J. Functional Analysis 102, 35-46 (1991)

[GHJ] F. Goodman, P. de la Harpe and V. Jones, Coxeter graphs and towers of algebras, MSRI publications 14, Springer, (1989)

[H1] T.Hayashi, Quantum group symmetry of partition functions of IRF models and its application to Jones' index theory, Commun. Math. Phys. 157, 331-345 (1993)

[H2] T.Hayashi, Galois quantum groups of II_1-subfactors, preprint

[I] 岩堀長慶、Mckay Observation について、群論六甲シンポジウム報告集、1980

[J] V.Jones, Index for subfactors, Invent. Math. 72 1-15 (1983)

[O1] A.Ocneanu, Quantized groups, string algebras and Goloistheory for algebras. In: Operator algebras and applications 2, Warwick 1987. London Math. Soc. Lecture note series 136, 119-172. Cambridge University Press 1988

[O2] A.Ocneanu, Quantum symmetry, differential geometry of finite graphs and classification of subfactors, University of Tokyo Seminary notes, (Recorded by Y. Kawahigashi) 1990

WILD HEREDITARY ALGEBRAS 1

Tosiko KAITA

The aim of this note is to introduce some results in [6].

1. Wild hereditary algebras

Let K be an algebraically closed field. A quiver $Q=(Q_0, Q_1)$ consists of a set of vertices Q_0 and a set of arrows Q_1. If α is an arrow, $s(\alpha)\in Q_0$ denotes its starting point and $t(\alpha)\in Q_0$ its end. A non empty path of length r from x to y is a sequence $\alpha_r \cdots \alpha_1$ arrows with $s(\alpha_1)=x, t(\alpha_r)=y$ and $s(\alpha_{i+1})=t(\alpha_i)$ for $1\leqq i\leqq r-1$ Additionally there is the empty path e_i (of length 0) for each vertex i.
For a field K and a quiver Q, we define the path algebra KQ as being given by the K-vectorspace with basis the set of all paths in Q. As above the product of two path is the composed path if possible, and 0 else.

Note that the path algebra KQ is finite dimensional if and only if, first of all, Q is finite that is Q_0 and Q_1 are finite, in addition, there is no oriented cycles that is cyclic paths of positive length. Remark that a finite dimensional K-algebra A is Morita equivalent to a finite dimensional path algebra KQ. A is called connected if Q is connected.

Only finite dimensional connected hereditary algebras are considered here. Hence the word quiver always means a finite connected quiver without oriented cycles, and algebra means a finite dimensional connected hereditary K-algebra.

Let A be an algebra. The category of finite dimensional left A-modules is denoted by A-mod. The word module always means a finite dimensional left A-module.

Given a quiver $Q=(Q\ ,Q\ )$, a representation $V=(V_i, V_\alpha ; i\in Q_0, \alpha\in Q_1)$ of Q over K is given by finite dimensional K-vectorspaces V, for all vertices i in Q_0, and linear maps $V_\alpha : V_i \longrightarrow V_j$, for all arrows $\alpha : i \longrightarrow j$. Note that, for each quiver Q, KQ-mod can be identified with the category of representations of Q over K.

Let A be an algebra, let $D=\mathrm{Hom}(-, K)$. The Auslander-Reiten translation $\tau = D\mathrm{Ext}(-, A)$ is a left exact functor on A-mod, $\tau^{-}=\mathrm{Ext}(DA, -)$ is right exact. Let X be an indecomposable module. X is projective if and only if $\tau X=0$. If X is not projective then $\tau^{-}\tau X\simeq X$. Similarly, X is injective if and only if $\tau^{-}X=0$. If X is not injectivge then $\tau\tau^{-}X\simeq X$.

For an indecomposable module X, (1) X is called preprojective if $\tau^m X = 0$ for some $m \geqq 0$, (2) X is preinjective if $\tau^{-m} X = 0$ for some $m \geqq 0$, (3) X is regular if $\tau^m X \neq 0$ for all $m \in Z$.

For an algebra A which is Morita equivalent to a path algebra KQ, A is called wild if a quiver Q is neither of Dynkin type nor of Euclidean type.

Let A be a wild algebra, and Γ_A denotes the translation quiver (its vertices are the isomorphism classes of indecomposable A-modules, its arrows are irreducible maps). Then Γ_A has exactly one preprojective component, exactly one preinjective component, and infinitely many regular components. Remark that all regular components are of type ZA_∞.

Definition: An indecomposable regular module X is called quasi-simple, if the middle term of E of the Auslander-Reiten sequence $0 \longrightarrow \tau X \longrightarrow E \longrightarrow X \longrightarrow 0$ is indecomposable.

Definition: For A-module X,

(1) X is brick if $\mathrm{End}(X) = 0$.

(2) X is stone if X is brick and $\mathrm{Ext}(X, X) = 0$.

(3) X is partial tilting if $\mathrm{Ext}(X, X) = 0$.

(4) X is tilting if $\mathrm{Ext}(X, X) = 0$ and $n(X) = n(A)$,

where $n(X)$ is the number of nonisomorphic indecomposable direct summands of X

Proposition: (1) If X is brick, then X is indecomposable.

(2) If X is indecomposable and $\mathrm{Ext}(X, X) = 0$, then X is stone.

(3) If X is partial tilting, then there exists a module Y, such that $X \oplus Y$ is tilting . In this case, the Y is called a tilting complement of X.

(4) If X is indecomposable and preprojective(or preinjective), then X is stone.

Definition: If $\mathcal{T}$ and $\mathcal{F}$ are full subcategoris of A-mod, the pair $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ is called the torsion pair, if

(1) $\mathrm{Hom}(X, Y) = 0$ for all $X \in \mathcal{T}$ and $Y \in \mathcal{F}$.

(2) $\mathrm{Hom}(X, Y) = 0$ for all $Y \in \mathcal{F}$ implies $X \in \mathcal{T}$.

(3) $\mathrm{Hom}(X, Y) = 0$ for all $X \in \mathcal{T}$ implies $Y \in \mathcal{F}$.

Let T be a partial tilting, let $\mathcal{G}(T)$ denotes $\{A\text{-module } G : G \text{ is generated by } T\}$, $\mathcal{F}(T)$ denotes $\{A\text{-module } F : \mathrm{Hom}(T, F) = 0\}$. Then $(\mathcal{G}(T), \mathcal{F}(T))$ is a torsion pair in A-mod.

2. Elementary modules

Only wild algebras are considered in this section.

Definition: A regular module $E \neq 0$ is called elementary if there is no short exact sequence $0 \longrightarrow U \longrightarrow E \longrightarrow V \longrightarrow 0$ with U, V both nonzero and regular.

Next lemma follows from the definition.

Lemma: (1) Elementary modules are bricks.
(2) If E is elementary, then all the modules $\tau^i E$ with $i \in Z$ are elementary.
(3) Each nonzero regular module M has a filtration

$$M = M_0 > M_1 > \cdots > M_r > M_{r+1} = 0$$

with M_i / M_{i+1} elementary for $i = 0, \cdots, r$

Proposition[F.Lukas]: If an algebra A has at least three simple modules, then there exist elementary stones.

$\mathcal{G}_{reg}(X)$ denotes {regular module Y : Y is generated by X}.
add(X) denotes {the direct summands of X^n, $n \in N$}.

Thorem[6]: Let A be a finite dimensional connected wild hereditary algebra over some algebraically closed field K. For a regular stone E there are equivalent:
(1) E is elementary.
(2) Each short exact sequence $0 \longrightarrow U \longrightarrow E^n \longrightarrow V \longrightarrow 0$ with $n \in N$ and U and V regular, splits.
(3) There exists an integer N with $\mathcal{G}_{reg}(\tau^i E) = \text{add}(\tau^i E)$ for all $i \geq N$.
(4) There exists an integer N such that for all $i \geq N$ the module $\tau^i E$ has a preinjective tilting complement.

Reference

[1] D.Baer: Wild hereditary Artin algebras and linear methods. Manuscripta Math. 55 (1986), 69-82.
[2] K.Bongartz: Tilted algebras. Proc. ICRA Ⅲ (Puebla 1980). Lecture Notes in Math. 903 (1981), 26-38.
[3] M.Hoshino: On splitting torsion theories induced by tilting modules. Com. Algebra

11 (1983), 427-441.

[4] O.Kerner: Tilting wild algebras. J. London Math.Soc. (2) 39 (1987), 29-47.

[5] O.Kerner: Exceptional components of wild hereditary algebras. J.Algebra 152(1992), 184-206.

[6] O.Kerner: Elementary stons. Communications in algebra 22(5) (1994),1794-1806.

[7] O.Kerner: Representations of wild quivers.(To the memory of Maurice Auslander)

[8] O.Kerner and F.Lukas: Regular modules over wild hereditary algebras. CMS Conf. Proc. 11 (1991), 191-208.

[9] F.Lukas: Infinite dimensionsl modules over wild hereditary algebras. J. London Math. Soc. 44 (1991), 401-419.

[10] C.M.Ringel: Finite dimensional hereditary algebras of wild representation type. Math. Z. 161 (1978), 235-255.

[11] C.M.Ringel: Tame aigebras and integral quadratic forms. Lecture Notes in Math. 1099 (1984).

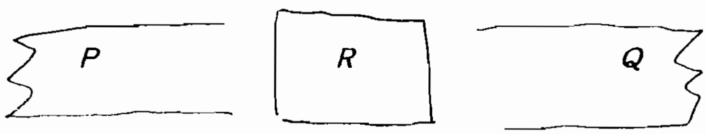
WILD HEREDITARY ALGEBRAS II

Susumu Koya

Throughout in this paper let $A = kQ$ the path algebra of a finite connected quiver Q without oriented cycles over an algebracally closed field k. And A-modules mean left A-modules. A-mod is the category of A-modules. A-reg means the subcategory of A-mod consisting of the regular modules. τ and τ^{-} is the Auslander-Reiten translation. $n(A)$ is the number of the simple modules of A.

0. Introduction

For a hereditary algebra A of infinite representation type, its Auslander-Reiten quiver consists of the preprojective component, the preinjective component, and the infinite many regular components.



Hom(R, P)=0 Hom(Q, R)=0 Hom(Q, P)=0

P : preprojective Q : preinjective
R : the family of regular components.

When A is tame,The regular components are pairwise orthogonal stable tubes,and the forms of the regular components of any two tame hereditary algebras are different from each other if there quivers are not same.

But in wild case,the forms of regular components are all ZA^{∞}[6].

Then there is a bijection preserving Auslander-Reiten translation between the sets of regular components for any two wild hereditary algebras[4].In addition W.Crawley-Boevey and O.Kerner have constracted a functor which induces this bijection[2].In this paper we show this functor.

1.Perpendicular categories

Definition. Let S be a module class of A. $S^{\perp}$:={M$\in$mod-A | $\mathrm{Hom}_A(S,M)$ $=\mathrm{Ext}_A(S,M)=0$} is called the perpendicular category.

Lemma 1-1.(D.happel,J.Rickard and A.Schofield)[3,prop.3]

If $n(A)=m$ and X is a module whose distinct indecomposable direct summands are $X_0, X_1, \cdots, X_n$, where $\mathrm{Ext}_A(X_i, X_i)=0$ and X_i is in $X_j{}^{\perp}$ if $i<j$, then $X^{\perp}$ is equivalent to mod-Λ for some finite-dimensional hereditary algebra Λ with $n(\Lambda)=m-n-1$, and the fully faithfull functor mod-$\Lambda \longrightarrow$ mod-A is exact.▮

Lemma 1-2. (D. Baer)[1](H. Strauss)[8]

With the same notation to above lemma, if X is an indecomposable module and $\mathrm{Ext}(X,X)=0$, then Λ is connected and has the same represent-type as A.▮

In paticular, when $n(A)\geqq 3$, we can choose a quasi-simple regular module X without self-extension, say, $\mathrm{Ext}(X,X)=0$[6]. In this case $X^{\perp}$ is equivalent to a module category C-mod with C connected hereditary and $n(C)=n-1$, moreover if A is wild, so is C. For some projective generator Y of $X^{\perp}$, $C=\mathrm{End}(Y)^{op}$ and a functor $H=Y\otimes_C-: C\text{-mod} \to X^{\perp}$ is an equivalence.

2. Some functors

In this section we assume A is wild with $n(A)\geqq 3$ and keep above notations. Then we identify C-mod with $X^{\perp}$ by the functor H.

Let $0\to\tau_A X\to Z\to X\to 0$ be the Auslander-Reiten sequence ending X.

Then it is clear that $Z\in X^{\perp}$ and Z is quasi-simple regular as C-module.

Moreover $T:=X\oplus Y$ is a tilting module, so it induces a torsion theory

$(\mathcal{F},\mathcal{G})$ with $\mathcal{G}$=gen(T) and $\mathcal{F}=\{M|\mathrm{Hom}_A(T,M)=0$, and torsion radical g_T.

Note that there are natural embedding functors

$$C\text{-mod}(X^{\perp}) \;\to\; \mathcal{G}\ (\mathrm{gen}(T)) \;\to\; A\text{-mod} .$$

Next we define a functor $\underline{\tau_{\mathcal{G}}}$: $\mathcal{G}\to\mathcal{G}$ as $\tau_{\mathcal{G}}M=g_T\tau_A M$.

We have a natural map $\theta=\tau_A\tau_C^{-}$: $M\to\tau_A\tau_C^{-}M$, for $M\in X^{\perp}$.

This follows from $\mathrm{Hom}_C(N,M)=D\mathrm{Ext}_C(\tau_C^{-}M,N)=D\mathrm{Ext}_A(\tau_C^{-}M,N)=\mathrm{Hom}_A(N,\tau_A\tau_C^{-}M)$.

Lemma2-1.

If $M\in X^{\perp}$ then the natural map $\theta:\tau_C M\to\tau_A M$ has image $\tau_{\mathcal{G}}M$ and kernel

isomorphic to $(\tau_A X)^s$, where $s=\dim_k\mathrm{Ext}(M,X)$. There is a short exact sequence

$0\to(\tau_A X)^s\to\tau_C M\to\tau_{\mathcal{G}}M\to 0$. ∎

Lemma2-2.

For $M \in X^{\perp}$ and $n \gg 0$, there is an isomorphism $\tau_G{}^n \tau_C{}^{-n} M \to \tau_G{}^{n+1} \tau_C{}^{-(n+1)} M$

which is induced by θ.∎

Definition2-1.

So we can define a functor $\underline{\Psi}: X^{\perp} \to \mathcal{G}$ by

$$\Psi(M) = \lim_{n\to\infty}(M \to \tau_G{}^n \tau_C{}^{-n} M).\blacksquare$$

Let U be non-injective indecomposable in $\mathcal{G}$ but , then there is a universal exact sequence $0 \to \tau_A{}^- U \to \tau_G{}^- U \to X^r \to 0$, $r = \dim_k \mathrm{Ext}(X, \tau_A{}^- U)$. Here $\tau_G{}^- U \in \mathcal{G}$, but $\tau_G{}^-$ is not a functor. However $\tau_G{}^{-m} \tau_G{}^m U = U$, for $m \gg 0$ and $U \in \mathcal{G}$.

Now let N be indecomposable with $\tau_G{}^{l+1} N \neq 0$, then there is a short exact sequence $0 \to \tau_A{}^- \tau_G{}^{l+1} N \to \tau_G{}^l U \to X^r \to 0$, $r = \dim_k \mathrm{Ext}(\tau_G{}^l N, X)$ by previous statements.

Definition2-2.

By application of $\tau_A{}^{-l}$, we define a functor $\Phi: \mathcal{G} \to$ A-mod by

$$\Phi(N) = \lim_{l\to\infty}(\tau_A{}^{-l} \tau_G{}^l N \to N).\blacksquare$$

Lemma2-3.

For $U \in C$-reg, $\Phi\Psi H(U)$ is a regular A-module.∎

Definition2-3.

$F=\Phi\Psi H: C\text{-reg}\to A\text{-reg}$ ∎

Because $\Psi H(U)$ is a factor module of $H(U)$ and $\Phi\Psi H(U)$ is a submodule of $\Psi H(U)$, the next statement holds.

Theorem.

There exists a full and dence functor $F: C\text{-reg}\to A\text{-reg}$ with the following properties.

(a) $F\tau_C=\tau_A F$

(b) The kernel of F are the maps factoring through $\mathrm{add}(\tau^i Z \mid i \in \mathbb{Z})$

(c) $F(U)$ is a subquotient of $H(U)$.∎

3. Example

In the last section we show that there is a functor which we want between the regular parts of any algebra having $n(\geqq 3)$ simple modules and another algebra having n-1 ones. To make it be generalized, we give an important example.

Let kQ^3 be the path albebra over k, where Q^3 is the quiver

$$\overset{1}{\cdot} \rightarrow \overset{2}{\cdot} \rightrightarrows \overset{3}{\cdot}$$

and $X_r (r \geqq 1)$ is a module with $\underline{\dim}_k X_r = (0, r+1, r)$. It can be easily shown that X_r is a quasi-simple regular module without self-extension, seeing A is a one point extension algebra of the Kronecker algebra.

Then $Y = X_{r+1} \oplus \bar{P}_{r1}$, where $0 \to P_{r1} \to \bar{P}_{r1} \to (X_r)^{r+2} \to 0$ is a non-split exact sequence, and $\underline{\dim}_k \bar{P}_{r1} = (1, (r+2)^2, (r+1)(r+2))$. [Since the quadratic form $q(\bar{P}_{r1}) = 1$, $\bar{P}_{r1}$ is indecomposable.] And $\underline{\dim}_k Z = (r+3, 2(r+2), 2(r+1))$.

$H(X_r^{\perp}) = C_r$-mod, $C_r = kQ_r$ where Q_r is the quiver

$$\cdot \underset{r+2 \text{ arrows}}{\overset{\rightarrow}{\underset{\vdots}{\rightarrow}}} \cdot$$

4. A functor between regular modules

Lemma. [5]

Let A and B be hereditary. A-reg $\sim$ B-reg holds if and only if B is concealed of tape A.(in other words $B=\mathrm{End}(T)^{op}$, for some tilting preprojective A-module T.)∎

From this lemma for any path algebra A with $n(A)=3$, A-reg $\sim kQ^3$-reg.

For any path algebra A with $n(A)>3$, using repeatly the functor F. of the theorem, there exists a full and dence functor from kQ^3-reg to A-reg whose kernel factors through some τ-orbits. This induces an equivalent functor $F_A: kQ^3\text{-reg}/\langle V\rangle \to A\text{-reg}$, where $kQ^3\text{-reg}/\langle V\rangle$ is the factor category of kQ^3-reg, and $\langle V\rangle$ consisits of modules on some τ-orbits.

Moreover for any path algebra $C_r (r\geqq 1)$ of section 3, there exists an equivalent functor $F_{Cr}: C_r\text{-reg}/\mathrm{add}(\tau^i Z \mid i\in Z) \to kQ^3\text{-reg}$

Corollary.

For any two finite dimensional connected hereditary algebras, there is an equivalent functor between their regular modules except modules on finite many τ-orbits.∎

References

[1]D.Baer:A note on wild quiver algebras and tilting modules.Comm.Algebra 17(1989),751-757.

[2]W.Crawley-Boevey and O.Kerner:A functor between categories of regular modules for wild hereditary algebras.Math Ann.298(1994)481-487.

[3]D.Happel,J.Rickard and A.Schofield:Piecewise hereditary algebras, Bull.London Math.Soc.20(1988)23-28

[4]O.Kerner:Stable component of wild tilted algebras,J.Algebra 142(1991) 37-57.

[5]O.Kerner:Representations of Wild Quivers,preprint.

[6]C.M.Ringel:Finite dimensional hereditary algebras of wild representation type,Math Z.161(1978),235-255.

[7]C.M.Ringel:The regular components of the Auslander-Reiten quiver of a tilted algebra.Chinese Ann.Math.Ser.139(1988),1-18.

[8]H.Strauss:On the perpendicular category of a partial tilting module. J.Algebra 144(1991),43-46.

Auslander-Reiten quiver の成分の形について

山形邦夫
筑波大学数学系

有限次元多元環上のAuslander-Reiten quiverがどのような形の成分をもつのか、またどのようなquiverがAuslander-Reiten quiverの成分として現われるのか。これは現在の表現論における基本的な問題の一つである。1970年頃はRojter, Gabriel, Auslanderによる重要な論文があいついで発表された。興味ある事実はこれ等すべてがそれまでの研究と違って、加群のカテゴリーを一つの代数的対象として考察していることであり、現在の表現論はこれ等70年前後に発表された研究成果を礎として発展してきたのである。加群そのものよりmorphismの性質を重視し、加群のなすカテゴリーの代数的構造を解明しようとする方向を目指すようになった。加群のカテゴリーはmorphismsを元とする"環"の構造をもち、従って代数的構造はその根基によって決定される。この根基の極小生成系がAuslander-Reiten quiverにほかならない。

本稿ではAuslander-Reiten quiverの成分の形について重要な結果を紹介するのであるが、[3]においてすでにいくつか紹介しているので[3]を補うつもりで(しかし改訂版として)紹介する。以下、環は体上の有限次元多元環で単位元をもち、

加群は有限次元左加群とする。

1. Quiverについての復習

有効グラフの点集合を Q_0, 矢の集合を Q_1 とし、有効グラフ $Q=(Q_0, Q_1)$ を quiver という. 写像 $a: Q_1 \to N\times N$ ($N=\{1,2,3,\cdots\}$) によって、各矢 $\alpha: x\to y \in Q_1$ に数の組 $a(\alpha)=(a_\alpha, a'_\alpha)$ を付加した quiver を valued quiver といい, $Q=(Q_0, Q_1, a)$ と表わす。このとき $x \xrightarrow{(a_\alpha, a'_\alpha)} y$ と表わすが、$a(\alpha)=(1,1)$ のときは $a(\alpha)$ を省いて単に矢 $x\to y$ のみを記す. valued quiver (Γ_0, Γ_1, a) に次のような写像 $\tau: \Gamma'_0 \to \Gamma_0$ ($\Gamma'_0 \subset \Gamma_0$) が定義されるとき、$\Gamma=(\Gamma_0, \Gamma_1, \tau, a)$ を valued translation quiver とよぶ: $x\in\Gamma'_0$ に対し矢 $\alpha: \tau x\to y$ が存在するのは、矢 $\beta: y\to x$ が存在する場合、しかもその場合に限る。さらにこの場合、$a(\alpha)=(a'_\beta, a_\beta)$ となる。

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & y \arrow[dr, "{(a_\beta, a'_\beta)}"] & \\ \tau x \arrow[ur, "{(a'_\beta, a_\beta)}"] & & x \end{tikzcd}$$

τ を Γ の translation, $\Gamma\setminus\Gamma'_0$ および $\Gamma_0\setminus\tau(\Gamma'_0)$ に属する点をそれぞれ射影的, 入射的であるという。

多元環 A の Auslander-Reiten quiver を Γ_A と表わす. これは valued translation quiver $\Gamma_A=(\Gamma_0, \Gamma_1, \tau, a)$ で、直既約加群の同型類の集合を点集合 Γ_0 とし、矢 $\alpha: [X]\to[Y]$ は直既約加群 X から Y への既約写像が存在することを表わす. translation τ と value a は次のように定義する. まず translation τ は非射影加群 X に対して定義され、

て $[X] = [DTrX]$ とする．ここで Tr は transpose を表わし D は duality $\mathrm{Hom}(-, k)$ を表わす．また value a は矢 $\alpha : [X] \to [Y]$ に対し、
$$a_\alpha = \mathrm{length}(\mathrm{Irr}(X, Y)_{\mathrm{End}(Y)})$$
$$a'_\alpha = \mathrm{length}({}_{\mathrm{End}(X)}\mathrm{Irr}(X, Y))$$
とする．ここで $\mathrm{Irr}(X, Y) := \mathrm{rad}(X, Y)/\mathrm{rad}^2(X, Y)$ は $(\mathrm{End}(X), \mathrm{End}(Y))$-両側加群である。

$\Delta = (\Delta_0, \Delta_1, a)$ を valued quiver とする．valued translation quiver $\mathbb{Z}\Delta = (\Gamma_0, \Gamma_1, \tau, a)$ を次のように定義する：

$\Gamma_0 = \mathbb{Z} \times \Delta_0$ （カルテシアン積），

$\tau(n, q) = (n+1, q) \qquad ((n, q) \in \Gamma_0)$，

矢 $\alpha : x \to y \in \Delta$，$n \in \mathbb{Z}$ に対し、$\mathbb{Z}\Delta$ における次のような矢
$$(n, \alpha) : (n, x) \to (n, y) \quad , \quad \sigma(n, \alpha) : (n+1, y) \to (n, x)$$
は $a_{(n,\alpha)} = a_\alpha = a'_{\sigma(n,\alpha)}$ ，$a'_{(n,\alpha)} = a'_\alpha = a_{\sigma(n,\alpha)}$ をみたす．

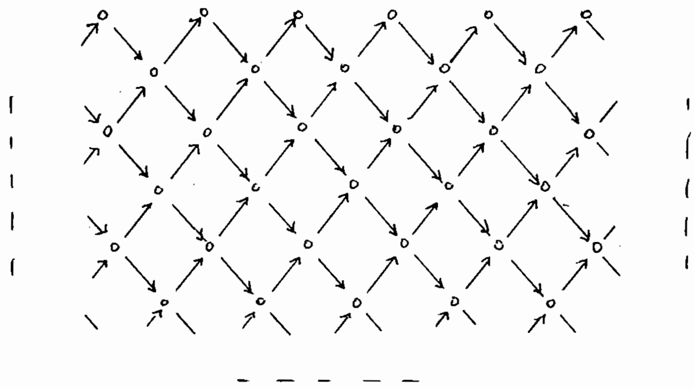
例えば、
$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & & y \\ \Delta : & x \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"'] & \\ & & z \end{tikzcd}$$
に対し．

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] \mathbb{Z}\Delta : & & & (n+1, y) \arrow[dr, "(a'_\alpha, a_\alpha)"] & & (n, y) \arrow[dr, "(a'_\alpha, a_\alpha)"] & & \\ & \cdots \arrow[r] & (n+1, x) \arrow[ur, "(a_\alpha, a'_\alpha)"] \arrow[dr, "(a_\beta, a'_\beta)"'] & & (n, x) \arrow[ur, "(a_\alpha, a'_\alpha)"] \arrow[dr, "(a_\beta, a'_\beta)"'] & & (n-1, x) \arrow[r] & \cdots \\ & & & (n+1, z) \arrow[ur, "(a'_\beta, a_\beta)"'] & & (n, z) \arrow[ur, "(a'_\beta, a_\beta)"'] & & \end{tikzcd}$$

となる。

$\Delta = A_\infty$:　$\circ \longrightarrow \circ \longrightarrow \circ \longrightarrow \circ \longrightarrow \circ \longrightarrow - - -$　のとき、

$\mathbb{Z}A_\infty$:



nを自然数とし、各点 $x \in (\mathbb{Z}A_\infty)_0$ と $\tau^n x$ を同一視し、各矢 $\alpha : x \to y$ と $\tau^n \alpha : \tau^n x \to \tau^n y$ を同一視して得られる valuled translation quiver を安定チューブ(stable tube)といい、nをその階数という。この quiver を $\mathbb{Z}A_\infty/n$ で表わす。とくに階数1のものを同次チューブ(homogeneous tube)という。

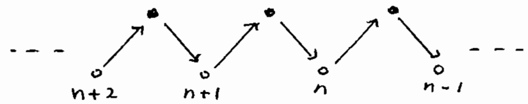
valued translation quiver Γ に対し、τの作用に係わる点の性質によってさらにいくつかの定義が必要である。Γの点 x について、どんな整数 $n \geq 0$ に対しても $\tau^n x$ が定義されるとき左安定的(left stable)、どんな $n \leq 0$ に対しても $\tau^n x$ が定義されるとき x を右安定的(right stable)とよび、どんな整数 n に対しても $\tau^n x$ が定義されるとき x を安定的(stable)であるという。また安定的な点全部から成る部分(valued translation)quiver を ${}_s\Gamma$ と表わし、左安定点、右安定点から成る部分quiverをそれぞれ ${}_l\Gamma$, ${}_r\Gamma$ とおく。${}_s\Gamma$ は射影的な点も入射的な点も含まない最大の部分quiverであり、${}_l\Gamma$, ${}_s\Gamma$ はそれぞれ射影的なτ-軌道、入射的なτ-軌道を

Γ から除いて得られるものである。${}_s\Gamma$, ${}_l\Gamma$, ${}_r\Gamma$ の (valued translation quiver としての) 連結成分をそれぞれ Γ の安定成分、左安定成分、右安定成分という。とくに左安定で右安定な成分を半安定成分 (semi-stable component) とよぶ。

(注) 安定成分などは translation quiver としての連結成分を考えるので、必ずしもグラフとしての連結成分とは同じではない。

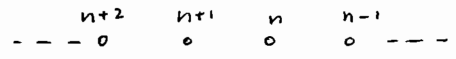
例えば:

$\Gamma = (\Gamma_0, \Gamma_1, \tau, a)$:



を考えてみる。ただし、$\Gamma_0 = \mathbb{Z}$ で $\tau(n) = n+1$ $(\forall n \in \mathbb{Z})$ とし、a は自明 (trivial value) とする (ie $a(\alpha) = (1,1)$ $\forall \alpha \in \Gamma_1$)。また • は射影的かつ入射的とする。このとき

${}_s\Gamma$:



であり、translation $\tau(n) = n+1$ $(n \in \mathbb{Z})$ をもつので、${}_s\Gamma$ は translation quiver として連結であるが、単なる有向グラフとしては連結ではない。

2 Auslander-Reiten quiver

以下、A は無限表現型多元環とし、Γ_A の連結成分について考える。

A が遺伝的の場合は早くから知られている:

(I) A が遺伝的であるとする。このとき

(a) A がテイムのとき ${}_s\Gamma_A$ はチューブから成り、多くとも3つの成分を除けばすべて同次チューブである。また残りの3つのチューブについてもその階数は A の quiver によって決まる。

(b)　A がワイルドのとき、${}_s\Gamma_A$ は $\mathbb{Z}A_\infty$ から成る。

(ロ)　有限群 G の群環 kG （k は代数的閉体で $(\mathrm{char}\,k) \mid |G|$）のブロック B については、多くの人の研究成果と Erdmann による最近の結果により、B がワイルドである必要十分条件として、${}_s\Gamma_B$ が $\mathbb{Z}A_\infty$ の成分をもつことが分った。またこれにより、このような B の存在する群 G も決定されたことになった。つまり G は、巡回群、2面体群、半2面体群、一般4元数群のいずれでもない。

一般に Auslander-Reiten quiver の成分がどのような形なのかはほとんど知られていないが、上述の(ロ)に関連して一般の準フロベニウス環では $\mathbb{Z}A_\infty$ の現われないようなものの存在することが知られている。例えば、すべての安定成分が階数6のチューブである例（ほとんどはワイルド型）がある（Ringel-Schofield）。

問題 (a)　$\mathbb{Z}A_\infty$ を成分にもつ多元環はどのようなものか。とくに $\mathbb{Z}A_\infty$ を安定成分にもつ準フロベニウス環はワイルドか。（逆は成立しない。）

(b)　すべての安定成分がチューブとなる準フロベニウス環はどのようなものか。またこのときチューブの階数は有界であるか。

3 安定成分

Auslander-Reiten quiver の成分の一般的な形をきめるものとして知られているいくつかの結果がある．しかも現在のところそれ以上の「一般的な」結果は知られていない．

まず次の Happel-Preiser-Ringel の定理はそれ以降の研究の出発となった．

(1) Happel-Preiser-Ringel の定理．

安定的な valued translation quiver Γ が τ-periodic な点を含むとする．このとき，

(イ) Γ が有限なら $\Gamma \cong \mathbb{Z}\Delta/G$ となる．ここで Δ は有限な valued quiver で G は $\mathbb{Z}\Delta$ の自己同型から成る群である．

(ロ) Γ が無限なら Γ は安定チューブである．

これにより，群環上の Auslander-Reiten quiver の形の研究が Webb によって行われ，奥山さんや他の多くの人達の研究を経て，Erdmann によって前節 (ロ) で紹介したような定理が得られた．

(2) Y. Zhang の定理

安定的な valued translation quiver Γ が τ-periodic な点を含まないとすると，$\Gamma \cong \mathbb{Z}\Delta$ となる．ここで Δ は oriented cycle を含まない valued translation quiver である．

(1) と (2) で安定的な translation quiver の形がきまる．これを Auslander-Reiten quiver に適用して次がわかる．

(3) Γ_A の正則成分(射影的な点も入射的な点も含まない成分)は安定チューブか $\mathbb{Z}\Delta$ (Δ は valued quiver) である.

次に安定的でないものについて考える. この場合は、一つの連結成分について左安定的な τ-orbit と右安定的な τ-orbit を同時に含み、しかも成分自体が安定的でないような場合も考慮しなければならない. 従って安定成分のみを考えるわけにはいかない. そこで Γ_A の成分についてさらに左(あるいは右)安定成分というものを考える.

(4) S. Liu の定理

多元環 A の Auslander-Reiten quiver Γ_A の左安定成分 Γ について次の場合が成立する.

(a) Γ は oriented cycle を含まないとする.

このとき、oriented cycle を含まない quiver Δ によって決まる $\mathbb{Z}\Delta$ への埋め込み $\varphi : \Gamma \hookrightarrow \mathbb{Z}\Delta$ が存在する. ただし、Δ は oriented cycle を含まない quiver で $\varphi(\Gamma)$ は predicessor で閉じている.

(注) $\mathbb{Z}\Delta$ における path $y \to \cdots \to x$ に対し、$x \in \varphi(\Gamma)$ なら $y \in \varphi(\Gamma)$ となるとき、$\varphi(\Gamma)$ は predecessor で閉じているという.

(b) Γ は oriented cycle を含むとする.

Γ が τ-periodic な点を含まないなら

(i) Γ は安定的ではなく、$x \in \Gamma$ に対し $y \to x$ となる点 y は2個以下である. または

(ii) 自明な value (すなわち、各矢 α について $a(\alpha) = (1, 1)$

となる)をもち次のような形の無限切断経路(sectional path)が存在する: $1 \leq s < r$ で

$$\cdots \longrightarrow \tau^{2r}x_1 \longrightarrow \tau^{r}x_s \longrightarrow \cdots \longrightarrow \tau^{r}x_1 \longrightarrow x_s \longrightarrow \cdots \longrightarrow x_1 ,$$

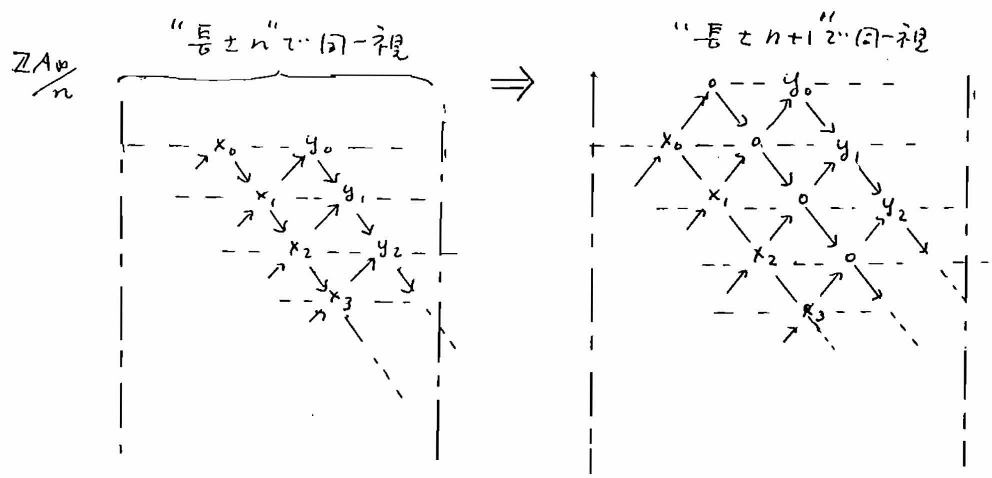
ここで、経路 $\cdots \rightarrow y_{n+2} \rightarrow y_{n+1} \rightarrow y_n \rightarrow \cdots$ が切断的とは、各点 y_n について $\tau(y_n) \neq y_{n+2}$ をみたしていることである。

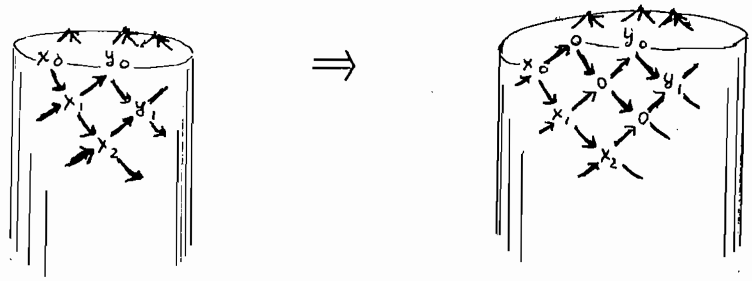
τ-periodic な点を含む左安定的な連結 translation quiver は安定的なので、(1) (4) によりすべての場合がつくされている。また (2) は (4-a) の特別な場合である。

射影的な点と入射的な点とを同時には含まない成分を半正則成分(semi-regular)ということにすると、(4-b) から次のことがわかる。

(c) Γが半正則成分のとき、Γが oriented cycle を含めばΓは断層チューブ(ray tube のことだが図よりの造語)か安定チューブ、反断層チューブ(coray tube のことだが これも図よりの造語)のいずれかである。

ここで断層チューブというのは、次図のように安定チューブ $\mathbb{Z}A_\infty/n$ の一つの無限切断経路の間に A_∞ を差し込んで断層を生じさせることを何回かくり返して得られる valued translation quiver (value は自明)のことである。





4 Translation quiver の実現問題

前節までは valued translation quiver が Auslander-Reiten quiver の成分であるための必要条件を与えたものである。そこで、どれほどのものが本当に存在し得るのかという問題を考えなければならない。多くの場合、A_∞^∞ あるいは A_∞, B_∞, C_∞, D_∞ などが、前節における Δ として現われてくる。ところが、例えば3節4-bの場合などは左安定な（あるいは右安定な）translation quiver について述べてありグラフ的な面からは左安定なものと右安定なものを同時に含むような連結 translation quiver は自由につくれるのだが、それらが Γ_A の成分として実現できるのかどうかは分からない。

一方、安定的なものについては、かなり自由に実現できることが示されている（Ringel）。この実現問題について2つの主な結果を紹介する。

(1) Ringelの定理

quiver Δ が3点以上の点をもちワイルドであるとすると、正則成分 $\mathbb{Z}\Delta$ をもつ多元環が存在する。

実際、この多元環として傾斜多元環（tilted algebra）であるものが存在する。

(2) Crawley-Boevey, Ringelの定理

連結な無限 quiver Δ が局所有限で oriented cycle をもたないとし、次の2つの条件をみたしているとする；

(i) 各矢 $\alpha : x \to y$ に対し、$a_\alpha = a'_\alpha$ となる value $a(\alpha) = (a_\alpha, a'_\alpha)$ をもち、

(ii) $\cdot \xrightarrow{(1,1)} x \xrightarrow{(1,1)} \cdot$ となる点 x の個数は有限である。

このとき、ある（代数的閉体でない）体上の多元環 A で Γ_A の正則成分が $\mathbb{Z}\Delta$ となるものが存在する。

（注）(2)については[1]においてもっと一般的な形で示されているが、ここでは分りやすい条件で述べておいた。

参考文献

[1] W. Crawley-Boevey and C. M. Ringel : Algebras whose Auslander-Reiten quivers have large regular components, J. Algebra 153. (1992), 494-516.

[2] S. Liu : Semi-stable components of an Auslander-Reiten quiver, Math, NO. 12/1991, TRONDHEIM, NORWAY.

(3) 山形 : Auslander-Reiten quiverの一般標準成分について, 第38回代数学シンポジウム報告集, 東北大学, 1993年7月, 1-8.

(4) Y. Zhang : The structure of stable components, Can. J. Math.

ON THE RECENT RESULTS ON THE DIMENSION SUBGROUP PROBLEM

Ken-Ichi Tahara (田原 賢一)

Aichi Univ. Educ., Integr. Arts & Sci. (愛知教育大学、総合科学)

The third International Conference on Theory of Groups was held at Pusan in Korea for 8 days from August 18th, in 1994, and there Narain Gupta gave a complete solution for the dimension subgroup problem. So I will here give a summary on the solutions for this problem.

§ 1. The Problem

Let G be a group with the lower central series $G = \gamma_1(G) \supsetneqq \gamma_2(G) \supsetneqq \cdots \gamma_n(G) \supsetneqq \cdots$, and ZG be the group ring of G over Z, the ring of all rational integers. We denote by $\triangle(G)$ the augmentation ideal of ZG, namely, $\triangle(G)$ is the kernel of the augmentation map $\varepsilon : ZG \to Z$ defined by $\varepsilon(\Sigma a_g g) = \Sigma a_g$, and so $\triangle(G)$ is a free Z-module with basis $\{g-1 \mid 1 \neq g \in G\}$.

Now, we consider important ideals

$$\triangle^n(G) = \triangle(G) \cdot\cdot\cdot \triangle(G) \text{ (n times)}, \ n \geqq 1$$

and we define the nth dimension subgroup of the group G by

$$D_n(G) = G \cap (1+\triangle^n(G)) = \{g \in G \mid g-1 \in \triangle^n(G)\}$$

Then firstly we have $D_1(G) = \gamma_1(G) = G$, and secondly $D_2(G) = \gamma_2(G)$ by using the isomorphism $\phi : \gamma_1(G)/\gamma_2(G) \to \triangle(G)/\triangle^2(G)$ defined by

$$\phi(g\gamma_2(G)) = g-1+\triangle^2(G) \in \triangle(G)/\triangle^2(G), \ g \in \gamma_1(G) = G.$$

Generally we have $\gamma_n(G) \subseteqq D_n(G)$ for all $n \geqq 1$.

Thus the Dimension Subgroup Problem is, to identify the structure of $D_n(G)/\gamma_n(G)$ for all $n \geqq 1$.

§ 2. History (50-60 years)

1) In 1937, W.Magnus [11], O.Grun [1] and E.Witt [24] proved independently the following called Magnus-Grun-Witt theorem, by using free derivations; If F is a free group, then $D_n(F)=\gamma_n(F)$ for all $n\geq 1$.

   Free derivation is the first method to contribute for this problem, and this fundamental theorem is now generalized as follows; If $\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G)$ is torsion-free for any $n\geq 1$, then $D_n(G)=\gamma_n(G)$ for any $n\geq 1$ (cf.[18]).

2) In 1955, G.Higman [8] and D.Rees proved

$$D_3(G)=\gamma_3(G) \text{ for any group } G.$$

3) In 1968, I.B.S.Passi [13, 14, 15] gave a light outlook for this problem by using $H^2(G, Q/Z)$ at that time, and proved that if G is any p-group, $p\neq 2$, then $D_4(G)=\gamma_4(G)$. This is the second method to contribute for this problem, and could make us go up one step to the degree 4 from the degree 3.

4) In 1970, S.Moran [12] proved $D_n(G)=\gamma_n(G)$ for any p-group G and for any n with $1\leq n\leq p-2$. This result was extended to $D_n(G)=\gamma_n(G)$ for any n with $1\leq n\leq p-1$ by J.A.Sjogren [19] and further $D_n(G)=\gamma_n(G)$ for any with $1\leq n\leq p+2$, $p\neq 2$, by N.Gupta and K.Tahara [6].

5) Untill 1970, many people had conjectured $D_n(G)=\gamma_n(G)$ for any group G and for any $n\geq 1$, which is called the <u>Dimension Subgroup</u> <u>Conjecture</u>.

6) On the other hand, in 1972, E.Rips [16] gave a counter-example for the conjecture, namely, he constructed a 2-group G such that $D_4(G)\neq\gamma_4(G)$, and K.Tahara [21] also constructed infinitely many counter-examples to $D_4(G)=\gamma_4(G)$ containing the Rips' counter-example as the smallest one.

7) In 1974, G.Losey [10] proved $\exp(D_4(G)/\gamma_4(G))\mid 2$ for any finitely generated group G, and the result was reproved by K.Tahara [20], I.B.S.Passi [15] and J.A.Sjogren [19].

8) In 1977, K.Tahara [20] determined the structure of $D_4(G)$ itself for any finitely generated group G.

9) In 1979, J.A.Sjogren [19] proved that there exist integers $c(n)$ such that $\exp(D_n(G)/\gamma_n(G)) \mid c(n)$, here

$$c(n)=b(1)^{\binom{n-2}{1}}\, b(2)^{\binom{n-2}{2}} \cdots b(n-2)^{\binom{n-2}{n-2}}$$

with $b(k)=\ell.c.m.\{1, 2, \cdots, k\}$.

10) In 1981, K.Tahara [22] improved the above resulte for $n=5$; $\exp(D_5(G)/\gamma_5(G)) \mid 3\,!$, where $c(5)=2^4\cdot 3$, and 7) and 8) and this result gave the third method to contribute for this problem, namely, to consider the relations between $\triangle^n(G)/\triangle^{n+1}(G)$ and $W_n(G)=$ $\Sigma \bigoplus \bigotimes_{i=1}^{n} Sp^{a_i}(\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G))$, where Σ runs over $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ with $\sum_{i=1}^{n} ia_i=n$, $a_i \geqq 0$. This method could make us go up one more step to the degree 5 from the degree 4.

11) In 1984, N.Gupta, A.W.Hales and I.B.S.Passi [5] proved that, if G is any finitely generated metabelian group, there exists an integer $n_0=n_0(G/\gamma(G))$ such that $D(G)=\gamma(G)$ for any $n\geqq n+1$. In particular, if G is finitely generated metabelian and $G/\gamma_2(G)$ is elementary abelian, then $D_n(G)=\gamma_n(G)$ for any $n\geqq 1$.

12) In 1990, N.Gupta [3] gave counter-examples for all $n\geqq 4$ in the conjecture, namely, for any $n\geqq 4$, he constructed a 2-group G_n such that $D_n(G_n) \neq \gamma_n(G_n)$.

13) N.Gupta [4] opened that, if G is any finitely generated group, then $\exp(D_n(G)/\gamma_n(G)) \mid 2$ for all $n\geqq 4$ in the 3rd International Conference on Theory of Groups in Korea in 1994. In particular, if G is a p-group with $p\neq 2$, then $D_n(G)=\gamma_n(G)$ for all $n\geqq 1$.

Thus we have the following complete solutions for the dimension subgroup problem:

If G is any group, then

$$\begin{cases} D_n(G)/\gamma_n(G) \text{ for any } n \text{ with } 1\leqq n\leqq 3 \\ \exp(D_n(G)/\gamma_n(G)) \mid 2 \quad \text{for all } n\geqq 4. \end{cases}$$

Moreover for any $n\geqq 4$, there exists a 2-group G_n such that $\exp(D_n(G_n)/\gamma_n(G_n)) = 2$.

Therefore we might say that the prime numer 2 is not a prime number, and a limit of all odd prime numbers p.

§ 3. Outline of Proof of the Gupta's theorem

Let $R \rightarrowtail F \twoheadrightarrow G$ be a free presentation of a group G. Then we have easily

$$D_n(G) = RD(n,R)/R, \qquad \gamma_n(G) = R\gamma_n(F)/R, \quad n\geqq 1,$$

where $D(n,R) = F\cap(1+\triangle^n(F)+ZF\triangle(R))$.

Now, assume that G is a finitely generated group of class $n-1\geqq 2$, and of solvability length ℓ. Then, for $k\geqq 1$, the k-th derived subgroup $\delta_k(G)$ admits a pre-abelian presentation of the form

$$\delta_k(G) = F_k/R_k$$

where $F_k = [F_{k-1}, F_{k-1}] = \langle x_{k1}, x_{k2}, \cdots, x_{km(k)}\rangle$ is a free group of rank $m(k)$ and $R_k = \langle x_{k1}^{e(k1)}\xi_{k1}, x_{k2}^{e(k2)}\xi_{k2}, \cdots, x_{km(k)}^{e(km(k))}\xi_{km(k)}, R_{k+1}\rangle$ with $e(ki)\geqq 0$, $e(ki)\mid e(kj)$ or $e(kj)\mid e(ki)$ for each pair (i,j), $\xi_{ki}\in [F_k, F_k]$, and $R_{k+1} = R\cap[F_k, F_k]$.

Then we have

$$ZF_k\triangle(R_k)=\triangle(R_k)+\triangle(F_k)\triangle(R_k)+ZF_{k+1}\triangle(R_{k+1}).$$

Now,

$$D(n,R_k)=F_k\cap(1+\triangle(R_k)+\triangle^2(F_k)\cap\triangle^n(F))$$

$$=F_k\cap(1+\triangle(R_k)+\triangle(F_k)\triangle(R_k)+ZF_{k+1}\triangle(R_{k+1})+\triangle^2(F_k)\cap\triangle^n(F))$$

$$=R_k\cdot \underset{\substack{\cap\!\!\parallel\\ \triangle^2(F_k)}}{F_k\cap(1+\triangle(F_k)\triangle(R_k)+ZF_{k+1}\triangle(R_{k+1})+\triangle^2(F_k)\cap\triangle^n(F))}$$

$$=R_k\cdot \underset{\substack{\parallel\\ G(n,R_k)}}{([F_k,\ F_k]\cap(1+\triangle(F_k)\triangle(R_k)+ZF_{k+1}\triangle(R_{k+1})+\triangle^2(F_k)\cap\triangle^n(F))}.$$

On the other hand, since

$$D(n,R)=D(n,R_1)\supsetneqq D(n,R_2)\supsetneqq\cdots\supsetneqq D(n,R_{\ell+1})=1,$$

so any element $w\in D(n,R)$ can be written as follows:

$$w=r_1g_1\cdot r_2g_2\cdots r_\ell g_\ell$$

$$=r\,g_1g_2\cdots g_\ell,\quad r\in R,\ g_k\in G(n,R_k).$$

We have

Theorem. 1 Any element $u\in\triangle(F_k)\triangle(R_k)$ has the form

$$u\equiv u_2+u_3$$

modulo $ZF_k\triangle(R_k)\triangle([F_k,\ F_k])+\triangle(F_k)\triangle(R_{k+1})+ZF_{k+1}\triangle(R_{k+1})+\triangle^2(F_k)\cap\triangle^n(F)$

where

$$u_2 = \sum_{1 \leqq i < j \leqq m(k)} a_{kij}(\bar{x}_{ki}-1)(x_{kj}-1) - b_{kij}(x_{ki}-1)(\bar{x}_{kj}-1), \quad \bar{x}_{ki} = x_{ki}^{e(ki)} \xi_{ki}$$

$$u_3 = \sum a(x_{k1}-1)^{c(1)}(x_{k2}-1)^{c(2)} \cdots (x_{kp}-1)^{c(p)-1}(\bar{x}_{kp}-1) \cdots (x_{km(k)}-1)^{c(m(k))}$$

with $c(i) \geqq 0$, $c(p) \geqq 1$, $c(1)+c(2)+ \cdots + c(m(k)) \geqq 3$.

Theorem 2. Any element $v \in \Delta^2(F_k) \cap \Delta^n(F)$ has the form

$$v = \sum b\{(g_k-1)+(x_{k1}-1)^{f(1)}(x_{k2}-1)^{f(2)} \cdots (x_{km(k)}-1)^{f(m(k))}\}$$

modulo $\Delta(F_k)\Delta([F_k, F_k])$, where $g_k \in [F_k, F_k] \cap \gamma_n(F)$, $f(1)\kappa(k1)+ f(k2)\kappa(k2)+\cdots+f(km(k))\kappa(km(k)) \geqq n$, with $\kappa(ki)=\max\{q \mid x_{ki} \in \gamma_q(F)\}$.

Theorem 3. For $w_k \in F_k$, $w_k - 1 \in \Delta(F_k)\Delta(R_k)+\Delta(R_{k+1})+\Delta^2(F_k) \cap \Delta^n(F)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{there exist } r_k \in R_{k+1} \text{ and } h_k \in [F_k, F_k] \cap \gamma_n(F) \text{ such that} \\ w_k r_k h_k - 1 \equiv (g_k - 1) + \sum_{1 \leqq p \leqq m(k)} (x_{kp}-1)(y_{kp}-1) \\ \quad \bmod \ \Delta(R_k)\Delta([F_k, F_k]) + \Delta(F_k)\Delta(R_k) + \Delta(F_k)\Delta([F_k, F_k]) \quad \Delta^n(F) \\ \text{where } g_k = \prod_{1 \leqq i < j \leqq m(k)} [\xi_{ki}, x_{kj}]^{a_{kij}}, \quad y_{kp} = \prod_{i<p} \xi_{ki}^{a_{kip}} \prod_{p<j} \xi_{kj}^{-b_{kpj}} \end{cases}$$

Theorem 4.

$$[\xi_{ki}^{a_{kij}}, x_{kj}] \equiv [x_{ki}, \xi_{kj}^{b_{kij}}] \bmod R_{k+1}([F_k, F_k] \quad \gamma_n(F)).$$

Now, for $w = r g_1 g_2 \cdots g_\ell \in D(n, R)$, we have

$$w^2 = g_1^2 g_2^2 \cdots g_\ell^2 \mod R\gamma_n(F)$$

and

$$g_k^2 = \prod_{i<j} [\xi_{ki}, x_{kj}]^{a_{kij}} \prod_{i<j} [\xi_{ki}, x_{kj}]^{a_{kij}}$$

$$= \prod_{i<j} [\xi_{ki}, x_{kj}]^{a_{kij}} \prod_{i<j} [x_{ki}, \xi_{kj}]^{b_{kij}} \quad \text{(by Theorem 4)}$$

$$= \prod_{i<j} [x_{kj}, \xi_{ki}]^{-a_{kij}} \prod_{i<j} [x_{ki}, \xi_{kj}]^{b_{kij}}$$

$$= \prod_p [x_{kp}, \prod_{i<p} \xi_{ki}^{-a_{kip}} \prod_{p<j} \xi_{kj}^{-b_{kpj}}]$$

$$= \prod_p [x_{kp}, y_{kp}]^{-1} \in \gamma_n(F),$$

and hence

$$g_k^2 \in R\gamma_n(F).$$

Thus

$$w^2 \in R\gamma_n(F).$$

Main Theorem.

$$\exp(D_n(G))/\gamma_n(G)) \mid 2$$

We wish consider some useful applications of these solutions for the dimension subgroup problem in the field of low dimensional topology.

§ 4. Lie dimension subgroup problem

The Gupta's solution on $\exp(D_n(G)/\gamma_n(G))$ contributes for solutions of another Lie dimension subgroup problem. We define Lie powers of $\triangle(G)$ as $\triangle^{(1)}(G)=\triangle(G)$ and inductively $\triangle^{(n)}(G)=ZG(\triangle^{(n-1)}(G), \triangle(G))$, where $(\triangle^{(n-1)}(G), \triangle(G))$ is the Lie bracket defined by

$$(\alpha, \beta)=\alpha\beta-\beta\alpha, \quad \alpha\in\triangle^{(n-1)}(G), \quad \beta\in\triangle(G),$$

and define the <u>nth Lie dimension subgroup of $D_{(n)}(G)$ of G</u> by

$$D_{(n)}(G)= G\cap(1+\triangle^{(n)}(G))=\{g\in G \mid g-1\in\triangle^{(n)}(G)\}.$$

Then we have easily

$$\gamma_n(G)\subseteqq D_{(n)}(G)\subseteqq D_n(G) \text{ for all } n\geqq 1.$$

The <u>Lie Dimension Subgroup Problem</u> is to consider the structure of $D_{(n)}(G)/\gamma_n(G)$ for all $n\geqq 1$. We review the solutions for the Lie dimension subgroup problem.

1) In 1972, R.Sandling [17] got the first result for the Lie dimension subgroup problem, namely, he proved that $D_{(n)}(G)=\gamma_n(G)$ for all n with $1\leqq n\leqq 6$, and if G is metabelian group, then $D_{(n)}(G)=\gamma_n(G)$ for all $n\geqq 1$.

2) In 1991, T.C.Hurley and S.K.Sehgal [9] constructed a 2-group H_n such that $D_{(n)}(H_n)\neq\gamma_{(n)}(H_n)$ for any $n\geqq 9$ by modifying the Gupta's counter-examples for the dimension subgroup problem, and so the problem remains open for $n=7$ and 8 only.

3) In 1992, K.Tahara and J.Xiao [23] proved that, if G is any finitely generated group, then $\exp(D_{(7)}(G)/\gamma_7(G)) \mid 2$.

4) In 1993, N.Gupta and K.Tahara [7] proved that, if G is any finitely generated group, then

$$D_{(n)}(G)=\gamma_n(G) \text{ for } n=7 \text{ and } 8.$$

Thus, we have, for any group G,

$$D_{(n)}(G) = \gamma_n(G) \text{ for any } n \text{ with } 1 \leq n \leq 8$$

$$\exp(D_{(n)}(G)/\gamma_n(G)) \mid 2 \quad \text{for any } n \geq 9.$$

Furthermore for all $n \geq 9$, there exist 2-groups H_n such that $\exp(D_{(n)}(H_n)/\gamma_n(H_n)) = 2$.

References

1. O. Grun, Uber die Faktorgruppen ferier Gruppenn I, Deutsche Math. 6(1936), 772-782.

2. Narain Gupta, Free Group Rings, Contempopary Math. 66, Amer. Math. Soc., 1987.

3. Narain Gupta, The dimension subgroup conjecture, Bull. London Math. Soc. 22 (1990), 453-456.

4. Narain Gupta, Dimension quotients of finitely generated groups, to appear.

5. Narain Gupta, A.W. Hales and I.B.S. Passi, Dimension subgroups of metabelian groups, J. reine angew. Math. 346(1984), 194-198.

6. Narain Gupta and K-I. Tahara, Dimension and lower central subgroups of metabelian p-groups, Nagoya Math. J. 100(1985), 129-133.

7. Narain Gupta and K-I. Tahara, The seventh and eighth Lie dimension subgroups, J. Pure Appl. Algebra 88(1993), 107-117.

8. G. Higman, Finite groups having isomorphic images in every finite group of which they are homomorphic images, Quart. J. Math. Oxford (Ser. 2) 6 (1955), 250-254.

9. T.C. Hurley and S.K. Sehgal, The Lie dimension subgroup conjecture, J. Algebra 143(1991), 46-56.

10. G. Losey, On the structure of $Q_2(G)$ for finitely generated groups, Canad. J. Math. 25(1973), 353-359.

11. W. Magnus, Uber Beiziehungen zwishen hoheren Kommutatoren, J. reine angew. Math. 177(1937), 105-115.

12. S. Moran, Dimension subgroups mod n, Proc. Camb. Philos. Soc. 68(1970), 579-582.

13. I. B. S. Passi, Polynomial maps on groups, J. Algebra 9(1968), 121-151.

14. I. B. S. Passi, Dimension subgroups, J. Algebra 9(1968), 152-182.

15. I. B. S. Passi, Group Rings and Their Augmentation Ideals, Lecture Notes in Math. 715, 1979, Springer-Verlag.

16. E. Rips, On the fourth integer dimension subgroup, Israel J. Math. 12(1972), 342-346.

17. R. Sandling, The dimension subgroup problem, J. Algebra 21(1972), 216-231.

18. R. Sandling and K-I. Tahara, Augmentation quotients of group rings and symmetric powers, Math. Proc. Camb. Philos. Soc. 85(1979), 247-252.

19. J. A. Sjogren, The dimension and lower central series, J. Pure Appl. Algebra 14(1979), 175-194.

20. K-I. Tahara, On the structure of $Q_3(G)$ and the fourth dimension subgroups, Japan. J. Math. 3(1977), 381-394.

21. K-I. Tahara, The fourth dimension subgroups and polynomial maps II, Nagoya Math. J. 69(1978), 1-7.

22. K-I. Tahara, The augmentation quotients of group rings and the fifth dimension subgroups, J. Algebra 71(1981), 141-173.

23. K-I. Tahara and J. Xiao, On the seventh Lie dimension subgroups, Japan. J. Math. 20(1994), 189-212.

24. E. Witt, Treue Darstellung Lieshce Ringe, J. reine angew. Math. 177(1937), 152-160.

群環の Auslander-Reiten components
(Erdmann の結果の紹介)

河田成人（大阪市立大学 理学部）

G を有限群，k を標数 p の体とし，$kG = B \oplus B_2 \oplus \cdots \oplus B_n$ を群環 kG のブロック分解とする．$\Gamma_s(B)$ で B の stable Auslander-Reiten quiver を表す．Θ を $\Gamma_s(B)$ の AR-component とすると，(tree class と呼ばれる)グラフ T が存在して，Θ はグラフの形としては $\mathbb{Z}T$ または $\mathbb{Z}T/\pi$ ($\exists \pi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}T)$) となる．Erdmann は [E3] で，

群環のブロック B が wild であれば tree class T は A_∞ である

ことを示した．本稿ではその証明の概略を述べることを主目的とする．

ただ，筆者には，Erdmann の preprint [E3] を読む限り，体 k が代数的閉体かもしくはそれに帰着できる体(例えば完全体，[Bn1, 2.33]参照)の場合しか理解できなかった([E3] には，[Bn1] により体の拡大を考えれば，一般の体でも成立すると書かれている)．それゆえにここでは，Erdmann の結果について述べるときには，体 k は代数的閉体(もしくは完全体)と仮定した．

1．これまでの結果

以下，考える kG-加群はすべて有限生成右加群とする．群環 kG の各ブロック B に対して不足群と呼ばれる G の p-部分群が定まるが，これを $\delta(B)$ と書くことにする．ブロック B とその不足群 $\delta(B)$ は密接な関係があり，例えば直既約 kG-加群 M がブロック B に属していれば，ある $k\delta(B)$-加群 N が存在して M は $N \otimes_{k\delta(B)} kG$ の直和因子として現れる（有限群のモジュラー表現については [N-T] 参照)．特に表現型については次の事実 (1.1) が知られている([E1] 等参照)：

(**1.1**) B: finite representation type $\Leftrightarrow$ $\delta(B)$: cyclic ;

B: tame representation type $\Leftrightarrow$ $p=2$ で $\delta(B)\in\{$dihedral, semidihedral, generalized quaternion$\}$;

B: wild representation type $\Leftrightarrow$ $\delta(B)\notin\{$cyclic, dihedral, semidihedral, generalized quaternion$\}$.

射影的でない直既約 kG-加群 M に対して，M の Auslander-Reiten sequence (AR-列) : $0\to\tau M\to m(M)\to M\to 0$ を $\mathcal{A}(M)$ で表す．ここで，τ は Auslander-Reiten translation $D\mathrm{Tr}$ を表すが，群環 kG は対称多元環なので $\tau=\Omega^2$ (Ω は Heller operator) である．

Θ を$\Gamma_s(B)$ の AR-component とする．[H-P-R] によると，いわゆる subadditive function $d:\Theta_0\to\mathbb{N}$ (ここで Θ_0 は Θ の点の集合)が存在すれば，Θ の tree class T は，Dynkin か Euclidean か又は infinite Dynkin A_∞, A_∞^∞, D_∞, B_∞, C_∞ のどれかに制限される．ところで，写像 $d:\Theta_0\to\mathbb{N}$ が subadditive function とは次の条件 (i), (ii) を充たすものである：

(i) $d(\Omega^2M)=d(M)$;

(ii) Θ の中で

$$\begin{array}{ccccc} & \nearrow & N_1 & \searrow & \\ \Omega^2M & \rightarrow & N_2 & \rightarrow & M \\ & \searrow & \vdots & \nearrow & \\ & & N_t & & \end{array}$$

が AR-列 $\mathcal{A}(M)$ に対応していれば，$d(\Omega^2M)+d(M)\geqq\sum_{i=1}^{t}a_id(N_i)$.
(ここで a_i は，$\mathcal{A}(M)$ の中間項 $m(M)$ における N_i の重複度)

Webb は cohomology の理論を使って，また Okuyama, Bessenrodt, Erdmann-Skowroński らは (1.2), (1.2’) のようにして群環の AR-component 上に additive function を構成したが，それから AR-component の形についての結果 (1.3) を得た．

(**1.2**)[O1, Bs, E-S] Θ を $\Gamma_s(B)$ の AR-component で tube ではないとする．V を $V\cong\tau V$ ($=\Omega^2V$) なる kG-加群とする．Θ に属するある直既約加群 M に対して $\underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(M,V)=\mathrm{Hom}_{kG}(M,V)/\mathcal{P}(M,V)\neq 0$ であるとする．(ここで，$\mathcal{P}(M,V)$ は射影加群を通過する kG-hom. 全体がなす部分空間を表す．)

このとき Θ 上の写像 d を

$$d(X) := \dim_k \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(X, V) \quad (= \dim_k \mathrm{Ext}^1_{kG}(X, \Omega^{-1}V))$$

で定めれば，d は Θ 上の subadditive function となる．

(1.2')[O1, Bs, E-S]　(1.2) において，Θ に属する直既約加群 M をひとつ固定する．G の部分群 P を，M_P (M を kP-加群とみなした制限加群) が射影的にならないような位数最小の群とする．Y を M_P の直和因子で射影的でないものとし，$V := Y^G$ ($= Y \otimes_{kP} kG$, 誘導加群) とおく．このとき，kG-加群 V は (1.2) の仮定を満たす．特に，(1.2) の仮定を満たすような V は存在する．

(1.3)[W, O1, Bs, E-S]　B を群環 kG のブロックとし，Θ を $\Gamma_s(B)$ の AR-component とする．このとき Θ の tree class T は，次のどれかに限る：

(i) A_n ($\delta(B)$ が cyclic のとき，かつそのときに限り現われる) ;

(ii) $\tilde{A}_{1,2}$, $\tilde{B}_3$ ($\delta(B)$ が Cline four group のとき，かつそのときに限り現われる) ;

(iii) A_∞^∞ ($\delta(B)$ が dihedral または semidihedral のときに現われる) ;

(iv) D_∞ ($\delta(B)$ が semidihedral のときに現われる) ;

(v) B_∞, C_∞ ;

(vi) A_∞.

(1.4)注意　*(i)* k が代数的閉体であれば，tree class T は $\tilde{B}_3$, B_∞, C_∞ ではない．

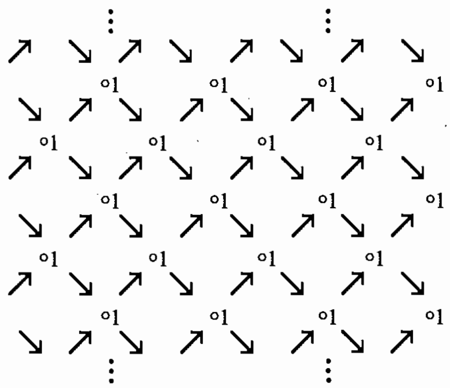
(ii) B が infinite representation type で Θ が τ–periodic kG-加群を含めば，Θ は $\mathbb{Z}A_\infty/(n)$ (tube) である([H-P-R]).

(iii) Θ の形が $\mathbb{Z}A_\infty^\infty/\pi$ であれば，$\delta(B)$ は Cline four group である([E-S]).

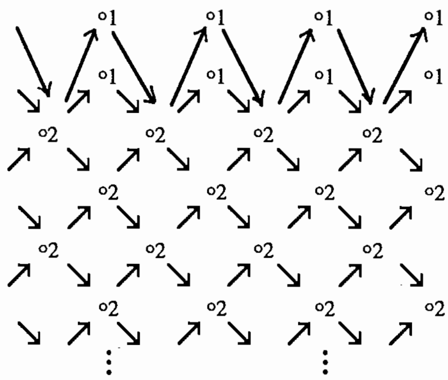
以上のことから k が代数的閉体でブロック B が wild であれば $\Gamma_s(B)$ の AR-component の形は $\mathbb{Z}A_\infty$, $\mathbb{Z}A_\infty/(n)$ (tube), $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$, $\mathbb{Z}D_\infty$ のどれかである．Erdmann の結果を証明するには tree class として A_∞^∞, D_∞ は現われないことが云えればよい．（もしくは，もし $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ か $\mathbb{Z}D_\infty$ の形をした AR-component が存在すれば，$\delta(B)$ は dihedral かまたは semidihedral であることが示せればよい．）

2．　$\mathbb{Z}A_\infty^\infty$, $\mathbb{Z}D_\infty$ について

$\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ の形をした AR-component ：



$\mathbb{Z}D_\infty$ の形をした AR-component ：



ここで，点の右横に書いた数字は‘典型的な’ additive function の値であり，一般にはこれの定数倍となる．即ち，$\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ の形をした AR-component 上では additive function は constant であり，また $\mathbb{Z}D_\infty$ の形をした AR-component 上では additive function は “端” にある点を除いて constant である([Bn1] 等参照)．特に次が成り立つ．

(2.1)　　B を群環 kG のブロックとし，Θ は $\Gamma_s(B)$ のAR-component で $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ または$\mathbb{Z}D_\infty$の形をしているとする．B, C を Θ に属する直既約 kG-加群で，Θ が $\mathbb{Z}D_\infty$の形をしているときには B, C 共に端には位置していないとする．このとき (1.2) で見つけた kG-加群 V に対して次の等式が成り立つ：

$$\dim_k \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(B, V) = \dim_k \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(C, V)\ ;$$
$$\dim_k \mathrm{Ext}^1_{kG}(M, \Omega^{-1} V) = \dim_k \mathrm{Ext}^1_{kG}(M, \Omega^{-1} V)\ .$$

$g : B \to C$ を irreducible map とする．g は単射かまたは全射である．次の事実 (2.2) は AR-component の形を判定するときに使われる．(2.2) では g は全射と仮定するが，単射のときは “k - dual” を考えればよい．

(2.2) [E3, Prop.1.5]　　B を群環 kG のブロックとし，Θ は $\Gamma_s(B)$ の AR-component で $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ または $\mathbb{Z}D_\infty$ の形をしているとする．B, C を Θ に属する直既約 kG-加群で，

irreducible map $g: B \to C$ で全射なものが存在するが，次の完全列

$$(*):\ 0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0 \qquad (\text{ここで } A = \mathrm{Ker}\, g)$$

は AR-列ではないとする．(即ち Θ が $\mathbb{Z}D_\infty$ の形をしているときには B, C 共に端には位置していないとする.) このとき次の条件☆(I), (II-1, 2) を満足するような kG-加群 V は存在<u>しない</u>：

☆ (I)　$V \cong \tau V\ (= \Omega^2 V)$；

☆ (II-1)　A から V への任意の kG-hom. は単射ではない；

(II-2)　A から $\Omega^{-1}V\ (\cong \Omega V)$ への kG-hom. ϕ で，単射でなくかつ射影加群を通過しないものが存在する．

(2.2 の証明) 条件☆ を満たすような kG-加群 V が存在すると仮定する．(II-2) と (1.2) より，Θ 上の写像 d を

$$d(X) := \dim_k \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(X, \Omega V) \quad (= \dim_k \mathrm{Ext}^1_{kG}(X, V))$$

で定めれば，d は Θ 上の subadditive function となる．特に (2.1) から (Θ が $\mathbb{Z}D_\infty$ の形をしているときには B, C 共に端には位置していないから)

$$(**) \quad d(B) = d(C), \qquad \text{即ち} \quad \dim_k \mathrm{Ext}^1_{kG}(B, V) = \dim_k \mathrm{Ext}^1_{kG}(C, V)$$

が成り立つ．

完全列 (*) から導かれる次の long exact sequence を考える：

$$0 \to \mathrm{Hom}_{kG}(C,V) \to \mathrm{Hom}_{kG}(B,V) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{kG}(A,V) \to \mathrm{Ext}^1_{kG}(C,V) \to \mathrm{Ext}^1_{kG}(B,V) \xrightarrow{f^\wedge} \mathrm{Ext}^1_{kG}(A,V) \cdots$$

いま $g: B \to C$ は irreducible map なので，(II-1) より f^* は全射である．よって (**) から $f^\wedge$ は 0 - map となってしまう．

ところで $[0] \neq [\phi] \in \mathrm{Ext}^1_{kG}(A, V)$ について，ϕ は単射ではない．$g: B \to C$ は irreducible map なので，$\exists \gamma \in \mathrm{Hom}_{kG}(B, \Omega^{-1}V)$ が存在して $\phi = f\gamma$ となる：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\phi"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[dl, "\gamma"] \arrow[dl, phantom, bend right, "\curvearrowright"] & C \\ \Omega^{-1}V & & \end{tikzcd}$$

これは $[\phi] \in \mathrm{Im}\, f^\wedge$ を意味するが，$f^\wedge$ は 0 - map なので $[0] = [\phi]$ となり，矛盾．▌

群環の場合には k が代数的閉体でブロック B が wild であれば $\Gamma_s(B)$ の AR-component の形は $\mathbb{Z}A_\infty$, $\mathbb{Z}A_\infty/(n)$ (tube), $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$, $\mathbb{Z}D_\infty$ のどれかである．よって

(2.2) の対偶をとると次のことが云える．

(2.2') k が代数的閉体で群環のブロック B が wild であるとする．$\Gamma_s(B)$ の AR-component Θ について，(2.2) の条件☆ (I), (II-1, 2) を満たす kG-加群 V が存在すれば，Θ の tree class は A_∞ である．

3．　p-群の場合

この節は，群 G が p-群の場合の Erdmann の結果 (3.1) の証明の概略を述べることに充てる．G が p-群ならば，群環 kG は local でそれ自身でブロックとなっており，その不足群 $\delta(kG)$ は G である．また，k は代数的閉体とする．

(3.1) [E3, Chapter 3]　k は代数的閉体とする．G は p-群とし，kG は wild とする (即ち，$G \notin$ {cyclic, dihedral, semidihedral, generalized quaternion})．このとき $\Gamma_s(kG)$ の任意の AR-component Θ の tree class は A_∞ である．

(3.1 の**証明**の概略)　Θ が τ-periodic kG-加群を含めば，Θ は tube なので(1.4(*ii*)) Θ は τ-periodic kG-加群を含まないとしてよい．また Θ の形の可能性としては $\mathbb{Z}A_\infty$, $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$, $\mathbb{Z}D_\infty$ のどれかである．

Θ に属する直既約加群 B, C を次のようにとる：

i) 全射な irreducible map $g : B \to C$ が存在する(単射の場合は "k-dual" を考えればよい)；

ii) (*): $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$（ここで $A = \mathrm{Ker}\, g$）はAR-列でない．

このとき完全列 (*) は分裂していないので A は入射的（= 射影的）ではない．よって Dade, Carlson の結果 (ここで variety の議論を使うので k は代数的閉体である必要がある．[Bn2, II, Cor. 5.8.4] 参照) から (3.2) が得られる：

(3.2)([Dade, Carlson], [Bn2, II, p189]参照)　$\exists\, E$ (G の基本可換 p-部分群) と，$\exists\, H$ (E の shifted subgroup) が存在して，A_H (A をkH-加群とみなした制限加群) は射影的ではない．

注意：$E = < x_1, x_2, \cdots, x_n >$ のとき，$\alpha = 1 + a_1(x_1 - 1) + a_2(x_2 - 1) + \cdots + a_n(x_n - 1)$ (各 a_i は k の元) とおくと，k の標数が p だから $\alpha^p = 1$ となる．$< \alpha >$ は位数 p の群となるが(一般には $< \alpha > \not\subseteq G$)，この $< \alpha >$ を E の shifted subgroup と呼ぶ．

(3.2) で存在が保証された shifted subgroup H (この H に対して A_H は射影的ではない) に注目する．k を自明な kH-加群(即ち，H が k に自明に作用している)とする．$V := k \otimes_{kH} kG$ とおく．この kG-加群 V は (2.2) の条件☆ (I), (II-2) を満たすことは容易に確かめられる．よって，V が条件☆ (II-1) を満たせば(即ち，A から V への任意の kG-hom. は単射ではないならば)，Θ の tree class は A_∞ と結論づけられる．以下の Claims 1, 2 から，ある例外 "$p = 2$ かつ $A \cong V$ $(= k \otimes_{kH} kG)$" を除いて，この V が (2.2) の条件☆ (II-1) も満たすことが示される．

Claim 1.　ある整数 n について $\dim_k \Omega^n A > |G|/2$ ならば，Θ の tree class は A_∞.

∵概略)　B, C の代りに $\Omega^n B, \Omega^n C$ をとっても，i), ii) が云える：

i)　irreducible map $g' : \Omega^n B \to \Omega^n C$ は全射；

ii)　$0 \to \Omega^n A \xrightarrow{f'} \Omega^n B \xrightarrow{g'} \Omega^n C \to 0$ (ここで $\Omega^n A = \mathrm{Ker}\, g'$) は AR-列ではない．

さて，$\dim_k \Omega^n A > |G|/2 \geqq |G|/p = \dim_k V$ より，$\Omega^n A$ から V への任意の kG-hom. は単射ではない．よって V が (2.2) の条件☆ (II-1) をも満たす．▎

Claim 2.　"$p = 2$ かつ $A \cong V (= k \otimes_{kH} kG)$" でないならば，$\Theta$ の tree class は A_∞.

∵)　ある整数 n について $\dim_k \Omega^n A > |G|/2$ ならば，Claim 1 より Θ の tree class は A_∞ である．任意の整数 n について $\dim_k \Omega^n A \leqq |G|/2$ とする．A の minimal projective resolution を考えれば $\dim_k \Omega^n A = |G|/2 = \dim_k V$ ($\forall$n) で，$p = 2$ となる．よって $\Omega^n A$ から V への kG-hom. が単射ならば同型写像となる．しかし $A \not\cong V$ なので A から V への任意の kG-hom. は単射ではない．▎

以上のことから，"$p = 2$ かつ $A \cong V$ $(= k \otimes_{kH} kG)$" でないならば，V が (2.2) の条件☆ (I), (II-1,2) を満たし Θ の tree class は A_∞ であるとわかる (2.2')．よって次の (3.3) が示せれば，(3.1) の証明は完了する：

(3.3) 3節で使ってきた記号を続ていくことにする．もし $p=2$ でかつ，ある shifted subgroup H が存在して $A \cong V$ $(= k \otimes_{kH} kG)$ となっていれば，G は dihedral かまたは semidihedral である．

(3.3 の**証明**) 最初に Θ は $\mathbb{Z}A_\infty$ ではないことを示す：もし $\mathbb{Z}A_\infty$ であれば $\mathrm{Ker}\, g = A \cong V \cong \Omega V$ は $\mathbb{Z}A_\infty$ の端に位置することになるが，これは Θ が periodic を含むことになり，矛盾．よって Θ の形は $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ か $\mathbb{Z}D_\infty$ となる．

さて，(1.2) から V $(=A)$ は Θ の subadditive function を引き起こす．即ち，Θ 上の写像 d を

$$d(X) := \dim_k \underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(X, A) \quad (= \dim_k \mathrm{Ext}^1_{kG}(X, A))$$

で定めれば，d は Θ 上のsubadditive function となる．特に (2.1) から (Θ が $\mathbb{Z}D_\infty$ の形をしているときには B, C 共に端には位置していないから)

$$(\#) \quad d(B) = d(C), \qquad \text{即ち} \quad \dim_k \mathrm{Ext}^1_{kG}(B,A) = \dim_k \mathrm{Ext}^1_{kG}(C,A)$$

が成り立つ．

完全列 (*): $0 \to A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \to 0$ から次の long exact sequence が導かれる：

$$0 \to \mathrm{Hom}_{kG}(C,A) \to \mathrm{Hom}_{kG}(B,A) \xrightarrow{f^*} \mathrm{Hom}_{kG}(A,A) \to \mathrm{Ext}^1_{kG}(C,A) \to \mathrm{Ext}^1_{kG}(B,A) \xrightarrow{f^\wedge} \mathrm{Ext}^1_{kG}(A,A) \cdots$$

いま $g: B \to C$ は irreducible map なので，$\mathrm{Im}\, f^* = \mathrm{Rad}(\mathrm{Hom}_{kG}(A,A))$ である．(#) から $\dim_k \mathrm{Im}\, f^\wedge = 1$ となる．よって $\mathrm{Im}\, f^\wedge = <[\mu]>$ とおくと，$[\mu] \in \mathrm{Ext}^1_{kG}(A,A)$ は A の AR-列 $\mathcal{A}(A): 0 \to A \to m(A) \to A \to 0$ に対応している．

Claim 1. kG-hom. $\varphi: A \to A$ が単射でなければ，$[\varphi] = [0]$ かもしくは $[\varphi]$ は AR-列 $\mathcal{A}(A)$ に対応している．

∵) $g: B \to C$ は irreducible map なので，$\exists \gamma \in \mathrm{Hom}_{kG}(A, A)$ が存在して $\varphi = f\gamma$ となる．よって，$[\varphi] \in \mathrm{Im}\, f^\wedge = <[\mu]>$．▎

Claim 2. $\dim_k (\mathrm{Ext}^1_{kG}(A,A)/<[\mu]>) = 1$，$\dim_k \mathrm{Ext}^1_{kG}(A,A) = 2$．

∵) $\mathrm{Soc}(A) = \mathrm{Soc}(k \otimes_{kH} kG)$ は simple である．よって $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Ext}^1_{kG}(A,A)$ に対して $\exists c \in k$ が存在して $\varphi_1 - c\varphi_2$ は単射ではない．よって Claim 1 より $\varphi_1 - c\varphi_2 \in <[\mu]>$．▎

さて，Frobenius の相互律より

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(A,A)=\underline{\mathrm{Hom}}_{kG}(k\otimes_{kH}kG,\ k\otimes_{kH}kG)\cong\underline{\mathrm{Hom}}_{kH}(k,(k\otimes_{kH}kG)_H)$$

であるが，Claim 2 より

$$\text{(\#\#)}\qquad (k\otimes_{kH}kG)_H\cong 2k\oplus(\text{projective})$$

を得る．一方，Mackey の分解定理より

$$\text{(\#\#\#)}\qquad (k\otimes_{kH}kG)_H\cong\bigoplus_{x\in E\backslash G/E}((k\otimes_{kH}kE)^x_{E^x\cap E})_H$$

であるが，(##) と (###) を比較して，次の i), ii) が従う：

i) $|E|=4$； ii) $x\in \mathbf{C}_G(E)$ ならば $x\in E$.

よって，G は dihedral かまたは semidihedral である ([G2, p41], [G1, 5.4.5])．▮

4． p-群についてのある注意

この節では，群 G は p-群とし，体 k は (代数的閉体とは限らない) 完全体とする．(3.1) の対偶と，体の拡大の考察 ([Bn1, 2.33]) から，次 (4.1) が云える：

(4.1)([E3]) G は p-群とし，k は完全体とする．もし $\Gamma_s(kG)$ が $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$, $\mathbb{Z}D_\infty$, $\mathbb{Z}B_\infty$ かまたは $\mathbb{Z}C_\infty$ であるような形をした AR-component を持てば，G は dihedral かまたは semidihedral である．

ところで，G が dihedral, semidihedral のとき，直既約 kG-加群はそれぞれ Ringel, Crawley-Boevey により分類されている ([R], [C])．この分類に頼れば，いわゆる string module M は素体上で定義されるので，$\dim_k \mathrm{End}_{kG}(M)/\mathrm{Rad}(\mathrm{End}_{kG}(M))=1$ となり([O-U2])，それゆえに $\mathbb{Z}B_\infty$, $\mathbb{Z}C_\infty$ は $\Gamma_s(kG)$ の AR-component として現われることはない．従って；

(4.2) G は p-群とし，k は完全体とする．このとき群環 kG は $\mathbb{Z}B_\infty$ または $\mathbb{Z}C_\infty$ の形をした AR-component を持たない．

5．　一般の有限群の場合

この節では，一般の有限群 G の場合の Erdmann の結果 (5.1) の証明の概略を述べる．ただし，k は完全体とする．

(5.1) [E3, Th.1]　k は完全体とする．群環 kG のブロック B は wild とする (即ち，$\delta(B) \notin$ { cyclic, dihedral, semidihedral, generalized quaternion })．このとき $\Gamma_s(B)$ の任意の AR-component Θ の tree class は A_∞ である．

(5.1 の**証明**の概略)　　Θ が periodic 加群を含めば tube なので (1.4 (*ii*)), Θ は periodic 加群を含まないとしてよい．体の拡大の考察 ([Bn1, 2.33]) から，k は代数的閉体としてもよい．よって Θ の形は $\mathbb{Z}A_\infty$, $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$, $\mathbb{Z}D_\infty$ のどれかとなるが，$\Theta \cong \mathbb{Z}A_\infty^\infty$ または $\mathbb{Z}D_\infty$ と仮定して矛盾を導く．

[O-U1, Th.] より次の条件 i), ii) を満たすような Θ の無限部分グラフ T' がとれる：

i) $\mathbb{Z}T' \cong \mathbb{Z}A_\infty \subset \Theta$；

ii) $T' : M_1 - M_2 - M_3 - \cdots - M_n - \cdots$ において，すべての $\mathrm{vx}(M_i)$ が等しい．
（ここで，$\mathrm{vx}(M_i)$ は M_i の "vertex" と呼ばれる G の p-部分群を表す）

上の ii) で見つけた G の p-部分群を Q とおく．$N := \mathbf{N}_G(Q)$ (Q の正規化群) とし "(G, Q, N) に関する Green 対応" を f とおく．このとき M_i の Green 対応子達 fM_i ($i = 1, 2, 3, \cdots$) は $\Gamma_s(kN)$ のあるひとつの AR-component Δ に含まれている．$\Theta \cong \mathbb{Z}A_\infty^\infty$ または $\mathbb{Z}D_\infty$ なので $\Delta \cong \mathbb{Z}A_\infty^\infty$ または $\mathbb{Z}D_\infty$ となる．fM_i 達の属する kN のブロックを B' とおくと，$\delta(B) \notin$ { cyclic, dihedral, semidihedral, generalized quaternion} より，$\delta(B') \notin$ {cyclic, dihedral, semidihedral, generalized quaternion} であることが云える．

一方，M_i の "Q-source" S_i ($i = 1, 2, 3, \cdots$) をうまくとれば，S_i 達は $\Gamma_s(kQ)$ のあるひとつの AR-component Λ に含まれ，$T'' : S_1 - S_2 - S_3 - \cdots - S_n - \cdots$ が Λ の無限部分グラフで，$\mathbb{Z}T'' \subset \Lambda$ となっている．$\Theta \cong \mathbb{Z}A_\infty^\infty$ または $\mathbb{Z}D_\infty$ なので $\Lambda \cong \mathbb{Z}A_\infty^\infty$ または $\mathbb{Z}D_\infty$ となるが，Q は p-群なので，$p = 2$ で Q は dihedral かまたは semidihedral である(4.1).

次に N の正規部分群 $Q\mathbf{C}_G(Q)$ を考える．$H := Q\mathbf{C}_G(Q)$ とおく($\mathbf{C}_G(Q)$ は Q の中

心化群). kH-加群 $S_i \otimes_{kQ} kH$ の直既約因子 L_i ($i = 1, 2, 3, \cdots$)をうまくとれば，L_i 達は $\Gamma_s(kH)$ のあるひとつの AR-component Ξ に含まれている．L_i 達の属する kH のブロックを b とおくと，$\delta(b) = Q$ で b と kQ は Morita同値とる([E3, Lemma 4.1]).

$$
\begin{array}{llll}
G & B & T' : M_1 - M_2 - M_3 - \cdots - M_n - \cdots & \subset \Theta \cong \mathbb{Z}A_\infty^\infty \text{ 又は } \mathbb{Z}D_\infty \\
N & B' & fM_1 - fM_2 - fM_3 - \cdots - fM_n - \cdots & \subset \Delta \cong \mathbb{Z}A_\infty^\infty \text{ 又は } \mathbb{Z}D_\infty \\
H & b & L_1 - L_2 - L_3 - \cdots - L_n - \cdots & \subset \Xi \cong \mathbb{Z}A_\infty^\infty \text{ 又は } \mathbb{Z}D_\infty \\
Q & kQ & T'' : S_1 - S_2 - S_3 - \cdots - S_n - \cdots & \subset \Lambda \cong \mathbb{Z}A_\infty^\infty \text{ 又は } \mathbb{Z}D_\infty
\end{array}
$$

今，Q は dihedral かまたは semidihedral なので N/H は 2-群であり，B' は b を "cover" しているので，B' と $k\delta(B')$ は Morita 同値となっている．しかし $k\delta(B')$ は $\mathbb{Z}A_\infty^\infty$ または $\mathbb{Z}D_\infty$ の形をした AR-component を持たない (3.1) ので，Δ の存在に矛盾．▎

また $\Gamma_s(B)$ の AR-component の個数について次が知られている：

(5.2)([E2]) 群環 kG のブロック B は wild とする．このとき $\Gamma_s(B)$ は tube 及び $\mathbb{Z}A_\infty$ の形をした AR-component を無限個持つ.

6． $\mathbb{Z}B_\infty$, $\mathbb{Z}C_\infty$ について

tree class としてinfinite Dynkin A_∞，A_∞^∞，D_∞，B_∞，C_∞ を持つような多元環は存在する ([C-R, Introduction])．ところで群環 kG (のブロック B) の場合には，tree class として A_∞, A_∞^∞, D_∞を持つものは存在し (1.3)，Erdmann の結果により (体 k が完全体ならば) ブロックの不足群で特徴づけられた([E3])．また B_∞ についても存在して [O2] にその例が述べられている．しかし；

(6.1) G は有限群とし，体 k は完全体とする．このとき群環 kG は $\mathbb{Z}C_\infty$ の形をした AR-component は持たない.

(6.1 の証明の概略)　$\Gamma_s(kG)$ の AR-component Θ の形が $\mathbb{Z}C_\infty$ と仮定する．

$$T: \quad M_0 \overset{(2,1)}{=} M_1 - M_2 - M_3 - \cdots - M_n - \cdots$$

を Θ の tree class とすると，$\Theta = \mathbb{Z}T$. よって [O-U1, Th.] より Θ に属する直既約 kG-加群の vertex はすべて等しい．それを Q とおく．M_iの Q-source S_i ($i = 1, 2, \cdots$) と M_0 の Q-sources S_0, S_0' をうまくとれば，S_i 達は $\Gamma_s(kQ)$ のあるひとつの AR-component Λ に含まれて，

$$\begin{array}{l} T' : S_0 - S_1 - S_2 - S_3 - \cdots - S_n - \cdots \\ \qquad\qquad\;\; | \\ \qquad\qquad\; S_0' \end{array}$$

とおくと，$\Lambda = \mathbb{Z}T'$ とできる．いま Q は p-群なので，semidihedral である．ところが，kQ-加群 S_i 達が $\mathbb{Z}D_\infty$ の形をした AR-component に属していることを考慮に入れて $\dim_k S_i$ を計算すると，$\dim_k S_0 \neq \dim_k S_0'$ となり([O-U2])，矛盾．▎

参考文献

[Bn1] D. J. Benson, Modular Representation Theory: New Trends and Methods, Lecture Notes in Math. 1081, Springer, 1984.

[Bn2] D. J. Benson, Representations and cohomology I, II, Cambridge Studies in Advanced Math. 30, 31, Cambridge, 1991.

[Bs] C. Bessenrodt, The Auslander-Reiten quiver of a modular group algebra revisited, Math. Z. 206 (1991), 25–34.

[C] W. Crawley-Boevey, Functorial filtrations III: Semidihedral algebras, J. London Math. Soc.(2) 40 (1989), 31- 39.

[C-R] W. Crawley-Boevey and C. M. Ringel, Algebras whose Auslander-Reiten quivers have large components, J. Algebra 153 (1992), 494 – 516.

[E1] K. Erdmann, Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras, Lecture Notes in Math. 1428, Springer, 1990.

[E2] K. Erdmann, On Auslander-Reiten components for wild blocks, in "Representation Theory of Finite Groups and Finite-Dimensional Algebra," Progress in Math.95, 371–387, Birkhäuser, 1991.

[E3] K. Erdmann, On Auslander-Reiten components for group algebras, preprint.

[E-S] K. Erdmann and A. Skowroński, On Auslander-Reiten components of blocks and self-injective biserial algebras, Trans. A. M. S. 330 (1992), 165 -189.

[G1] D. Gorenstein, Finite groups, Harper & Row, 1968.

[G2] D. Gorenstein, Finite simple groups: An introduction to their classification, Plenum, 1982.

[H-P-R] D. Happel, U. Preiser and C. M. Ringel, Vinber's characterization of Dynkin diagrams using subadditive functions with applications DTr-periodic modules, in "Representation Theory II, Proceedings of the second International Conference on Representations of Algebras (Ottawa 1979)," Lecture Notes in Math. 832, pp. 280-294, Springer, 1980.

[N-T] 永尾汎・津島行男，有限群の表現，裳華房，1987.

[O1] T. Okuyama, On the Auslander-Reiten quiver of a finite group, J. Algebra 110 (1987), 425-430.

[O2] 奥山哲郎，群環の Auslander-Reiten 列と部分群，第 3 回多元環の表現論シンポジュウム報告集，1989.

[O-U1] T. Okuyama and K. Uno, On the vertices of modules in the Auslander-Reiten quiver II, Math. Z. 217(1994), 121-141.

[O-U2] T. Okuyama and K. Uno, Private communication.

[R] C. M. Ringel, The indecomposable representations of the dihedral 2-groups, Math. Ann. 214 (1975), 19 - 34.

[W] P. J. Webb, The Auslander-Reiten quiver of a finite group, Math. Z. 179 (1982), 97-121.