第6回

多元環の表現論シンポジウム
報告集

1996年12月

於　千葉県館山国民休暇村

はじめに

この報告集は，1996 年 12 月 15 日から 18 日までの 4 日間，千葉県館山市の館山国民休暇村で開かれました「第 6 回多元環の表現論シンポジウム」での講演の記録です．

多元環（代数）の表現論は，多元環，有限群，可換環などの表現論だけにとどまらず，量子群，代数群の表現論などとも密接な関係があり，互いに刺激を受け合って，大きな発展をしてきていると思われます．今回のプログラムは，そういう意味で上記の分野の方々に講演を御願いしました．講演をして頂いた方々へは，深く感謝致します．

今回の諸費用（講演者の旅費，会場費，報告集出版の経費）は，文部省科学研究費　平成 8 年度科学研究費補助金（基盤研究 (A) 1）数理科学の基幹としての代数学の綜合的研究　課題番号 07304004 代表者　小池正夫（九州大学大学院数理学研究科）と，平成 8 年度科学研究費補助金（基盤研究 (A) 1）環とその表現の研究　課題番号 06302002 代表者　秋葉知温（京都大学綜合人間学部）から援助を受けました．小池正夫先生，秋葉知温先生，ならびに，吉野雄二先生（京都大学綜合人間学部）には本当に心より御礼申し上げます．

最後に，出席者全員の方々へ深く感謝をしたいと思います．

1997 年 2 月

越谷重夫（こしたに，千葉大学理学部）
佐藤眞久（さとう，山梨大学教育学部）

目　次

プログラム

１２月１５日（日）

20:00 ～ 20:50
Dieter Vossieck (UNAM, Mexico) Homogeneous wild matrix problems

１２月１６日（月）

9:00 ～ 9:50	
Dieter Vossieck (UNAM, Mexico)	Critical bimodule matrix problems with postprojective component
10:00 ～ 10:50	
西田康二（千葉大・自然科学研究科）	The theory of multiplicity for arbitrary ideals in local rings
11:00 ～ 11:50	
加藤希理子（立命館大・理工学部）	Cohen-Macaulay approximations
11:50 ～ 14:00	
昼食と自由時間	
14:00 ～ 14:50	
竹内光弘（筑波大・数学系）	$\mathrm{GL}_n(q)$ の表現のカテゴリーについて —Joyal-Street による—
15:00 ～ 15:50	
谷崎俊之（広島大・理学部）	量子群の表現論 (Representation of quantum groups)
16:10 ～ 17:00	
兼田正治（大阪市立大・理学部）	On tilting modules I
17:10 ～ 18:00	
橋本光靖（名古屋大・医療技術短期大学部）	簡約群の tilting module と Buchsbaum-Rim 分解
20:00 ～ 20:50	
星野光男（筑波大・数学系）	全ての有限生成射影加群がＱＦ準同型環を持つ環について

１２月１７日（火）

9:00 ~ 9:50 Dieter Vossieck (UNAM, Mexico)	Matrix-finite bimodules over pairs of local algebras
10:00 ~ 10:50 兼田正治（大阪市立大・理学部）	On tilting modules II
11:00 ~ 11:50 飛田明彦（埼玉大・教育学部）	Some bounded infinite DTr-orbits for Frobenius algebras
11:50 ~ 16:00 昼食と自由時間	
16:00 ~ 16:50 宮地淳一（東京学芸大）	Duality for derived categories and CM-approximation
17:00 ~ 17:40 黄　兆泳（北京師範大）	Homologically finite subcategories
17:50 ~ 18:20 若松隆義（埼玉大・教育学部）	第８回多元環の表現論の国際シンポジウム（ＩＣＲＡ VIII）報告
18:30 ~ 20:30	懇親会

１２月１８日（水）

9:00 ~ 9:50 脇　克志（弘前大・理学部）	About decomposition numbers of $\mathrm{Sp}(4,q)$
10:00 ~ 10:50 Jianbei An (University of Auckland, New Zealand)	The weights for some finite groups
11:00 ~ 11:50 奥山哲郎（北海道教育大旭川）	Some examples of derived equivalent blocks of finite groups

以上です

WEIGHTS FOR SOME FINITE GROUPS

Jianbei An

Department of Mathematics
University of Auckland
Auckland, New Zealand

1. The Alperin Weight Conjecture

Let G be a finite group, p a prime, and $O_p(G)$ the largest normal p-subgroup of G. In addition, let R be a p-subgroup of G, $N(R)$ the normalizer of R in G, and φ an irreducible ordinary character of the normalizer $N(R)$. Then a pair (R, φ) is called a *weight* (character version) for G if R is a subgroup of the kernel of φ and φ has p-defect 0 as a character of the factor group $N(R)/R$, where the p-defect of φ is the largest integer a such that p^a divides $\frac{|G|}{\varphi(1)}$. A weight (R, φ) is always identified with its G-conjugates.

Alperin's Weight Conjecture (1987): *The number of weights for the group G equals the number of irreducible Brauer characters of G.*

A stronger form of this conjecture is also given by Alperin. Let B be a p-block of G. Then a weight (R, φ) is called a *B-weight* if the block $B(\varphi)$ of the normalizer $N(R)$ containing φ induces the given block B (in the sense of Brauer).

The Block Form of the Conjecture: *The number of B-weights equals the number of irreducible Brauer characters in the block B.*

2. Two Equivalence Forms

There are several equivalence forms. Here, we state two of them.

The first form is the *Knörr-Robinson* form.

Let H be a subgroup of a finite group G, and let ψ be an irreducible ordinary character of H. Then ψ lies in a unique p-block $B(\psi)$ of H. Given a p-block B of

G, denote by $\mathrm{k}(H, B)$ the number of irreducible ordinary characters ψ of H such that the block $B(\psi)$ induces the block B.

A p-subgroup chain

$$C : Q_0 < Q_1 < \ldots < Q_n$$

of *length* n is called a *normal* p-chain if each subgroup Q_i is a proper normal subgroup of Q_n for $1 \leq i \leq n-1$. Let $\mathcal{N}$ be the set of all normal p-chains. Then G acts on $\mathcal{N}$ by conjugation, and the stabilizer

$$\cap_{i=1}^{n} N(Q_i)$$

of the chain C in G is called the normalizer $N(C)$ of C. The block form of Alperin's weight conjecture is equivalent to the following.

The Knörr-Robinson Form (1989): *Whenever G is a finite group and B is a p-block, we have*

$$\sum_{C \in \mathcal{N}/G} (-1)^{|C|} \mathrm{k}(N(C), B) = 0,$$

where $|C|$ is the length of C and $\mathcal{N}/G$ is a set of representatives of G-orbits in $\mathcal{N}$.

This form translated Alperin's weight conjecture into one involving only ordinary irreducible characters.

The second form is the *Robinson-Staszewski* form.

Let X be a finite group, Y a normal subgroup of X, and Q a p-subgroup of Y. A p-block b of the quotient group $N_X(Q)/Q$ is called *lying over* a p-block b' of the quotient group $N_Y(Q)/Q$ if there exists an irreducible character ξ in b such that the restriction of ξ to $N_Y(Q)/Q$ has an irreducible constituent in b' (or equivalently we say that b' is *covered* by b).

The Robinson-Staszewski Form (1990): *Whenever X is a finite group, Y a normal subgroup of X, and B a p-block of X, then the number $\ell(B)$ of irreducible Brauer characters of B satisfies the equation*

$$\ell(B) = \sum_{Q} \sum_{b} \ell(b),$$

where Q runs over all p-subgroups of Y (up to X-conjugacy) and b runs over blocks of $N_X(Q)/Q$ in Brauer correspondence to the block B, lying over blocks of $N_Y(Q)/Q$ having defect 0.

This form translated Alperin's weight conjecture into one involving only Brauer irreducible characters.

Using this form Robinson and Staszewski proved that a minimal counterexample to Alperin's weight conjecture has no normal subgroup of index p.

3. Dade's Reduction Theorem

In 1988, E. Dade gave a stronger form of Alperin's weight conjecture and reduced the form to a question about almost-simple groups. Since almost-simple groups have been classified, it is possible to prove the stronger form using case-by-case analysis.

Let K be a finite group having G as a normal subgroup and Z a central subgroup of K contained in G. In addition, let F be an algebraically closed field of characteristic p, and F^* its multiplicative group. Given a p-modular character χ of the group G, denote by $K(\chi)$ the stabilizer of χ in K. Thus there exists a unique element $\alpha(\chi)$ associating to the character χ in the second cohomology group $H^2(K(\chi)/G, \mathsf{F}^*)$ of the factor group $K(\chi)/G$ with coefficients in the group F^*.

Similarly, if (R, φ) is a weight for G, then φ can be viewed as a modular character of the normalizer $N_G(R)$, and its stabilizer in the normalizer $N_K(R)$ is denoted also by $K(\varphi)$. Thus φ associates to an element $\alpha(\varphi)$ in the cohomology group $H^2(K(\varphi)/N_G(R), \mathsf{F}^*)$. Moreover, the two cohomology groups are isomorphic,

$$H^2(K(\varphi)G/G, \mathsf{F}^*) \cong H^2(K(\varphi)/N_G(R), \mathsf{F}^*),$$

so $\alpha(\varphi)$ can be regarded as an element of the cohomology group $H^2(K(\varphi)G/G, \mathsf{F}^*)$.

A Stronger Form (Dade 1988): *Fix a linear character ξ of Z, a subgroup L of K containing G, a p-block B of G and an element β of the cohomology group $H^2(L/G, \mathsf{F}^*)$. Then the number $\ell(B, \xi, L, \beta)$ of irreducible modular characters χ of B satisfying χ lies over ξ, the stabilizer $K(\chi)$ of χ in K is L and the element $\alpha(\chi)$ is β, should be equal to the number $w(B, \xi, L, \beta)$ of G-conjugacy classes of B-weights (R, φ) satisfying φ lies over ξ, the product $K(\varphi)G$ of the stabilizer $K(\varphi)$ and G is L and the element $\alpha(\varphi)$ is β.*

A triple (G, K, Z) is called *almost-simple* if the factor group G/Z is a finite simple group, $G = [G, G]$ is perfect and Z is the centralizer $C_K(G)$ of G in K.

Dade's Reduction Theorem (1988): *The stronger form holds for arbitrary triple* (G, K, Z) *if it holds for almost-simple triple* (G, K, Z).

So this theorem give us a possible way to prove Alperin's weight conjecture.

4. Current Works

The conjecture (block form) has been confirmed for the following cases.

Blacks:

(a) Cyclic and tame blocks (by Dade, Uno).

(b) Abelian defect blocks with small inertial index (by Puig and Usami).

(c) Abelian defect principal 2-blocks (by Fong and Harris).

(d) Abelian defect unipotent blocks of a finite reductive group (by Broué, Malle and Michel).

Groups:

(a) p-solvable groups (by Okuyama, Isaacs, Navarro, Gres, Barker).

(b) Groups of Lie type in the defining characteristic (by Alperin, Cabanes, and reproved by Lehrer and Thévenaz).

(c) S_n (by Alperin and Fong).

(d) Classical groups in non-defining characteristics (by Alperin, Fong, Conder and An). In this case, the numbers of irreducible Brauer characters for blocks of symplectic and even-dimensional orthogonal groups are unknown when $p \neq 2$.

(e) $Sz(2^{2n+1})$, ${}^2G_2(q^2)$, ${}^2F_4(q^2)$, $G_2(q)$, ${}^3D_4(q)$ (by Dade, An).

(f) M_{11}, M_{12}, M_{22}, M_{23}, M_{24}, He, Co_3, J_1 (by Dade, Conder, An).

(g) The covering groups of S_n and A_n ($p \neq 2$) (by Michler and Olsson).

(h) Wrath product groups $G \wr S_n$ provided the conjecture holds for that finite group G (by Ewert)

5. Two Approaches

There are two basic approaches to confirm the conjecture for some finite groups.

(a) First one is an application of Broué's perfect isometry theory. Alperin proved that if a defect group of a block B is abelian, then the number of B-weights is the number $\ell(b)$ of irreducible Brauer characters of the Brauer correspondent b. So the proof of the conjecture for B is equivalent to that of the following equation

$$\ell(B) = \ell(b).$$

If there exists a perfect isometry between B and its Brauer correspondent b, then the above equation holds, so that the conjecture holds for the block B. The papers [BMM], [FH], [PU1], [PU2] and [U1-3] are references of this approach.

(b) Second approach is an approach of direct calculation, either using the definition of weight or an equivalent form of the conjecture. The papers [AF], [A1-10], [AC1-2], [E], [LT] and [MO] are references of this approach.

References

[A] J. L. Alperin, 'Weights for finite groups', in "The Arcata Conference on Representations of Finite Groups" Proc. of Symposia in Pure Math. 47 (1987) 369-379.

[AF] J. L. Alperin and P. Fong, Weights for symmetric and general linear groups, *J. Algebra* **131** (1990), 2-22.

[A1] Jianbei An, 2-weights for general linear groups, *J. Algebra* **149** (1992), 500-527.

[A2] Jianbei An, 2-weights for unitary groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **339** (1993), 251-278.

[A3] Jianbei An, 2-weights for classical groups, *J. reine angew. Math.* **439** (1993), 159-204.

[A4] Jianbei An, Weights for the simple Ree groups ${}^2G_2(q^2)$, *New Zealand J. of Math.* **22** (1993), 1-8.

[A5] Jianbei An, Weights for classical groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **342**(1994), 1-42.

[A6] Jianbei An, Weights for the Chevalley groups $G_2(q)$, *Proc. of London Math. Soc.* **69** (1994), 22-46.

[A7] Jianbei An, Weights for the Steinberg triality group ${}^3D_4(q)$, *Math. Z.* **218** (1995), 273-290.

[A8] Jianbei An, The Alperin and Dade conjectures for the simple Held group, *J. Algebra* (to appear).

[A9] Jianbei An, The Alperin and Dade conjectures for the simple Conway's third group, submitted.

[A10] Jianbei An, Weights for the Ree groups ${}^2F_4(q^2)$, submitted.

[AC1] Jianbei An and Marston Conder, On the numbers of 2-weights, unipotent conjugacy classes, and irreducible Brauer 2-characters of finite classical groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **123** (1995), 2297-2304.

[AC2] Jianbei An and Marston Conder, The Alperin and Dade conjectures for simple Mathieu groups, *Comm. Algebra* **23** (1995), 2797-2823.

[BMM] M. Broué, G. Malle, J. Michel, Generic blocks of finite reductive groups, *Asterisque*, **212** (1993) 1-92.

[D] E. Dade, Counting characters in blocks, I, *Invent. Math.* **109** (1992), 187-210.

[E1] H. Ellers, The defect groups of a clique, p-solvable groups, and Alperin's conjecture, *J. reine angew. Math.* **468** (1995), 1-48.

[E2] H. Ellers, Cliques of irreducible representations of p-solvable groups and a theorem analogous to Alperin's conjecture, *Math. Z* **217** (1994), 607-634.

[Ew] R. Ewert, Die Alperin-Vermuturg für Kranzprodukte der form $GwrS_n$, *J. Algebra* **162** (1993), 225-258.

[FH] P. Fong and M. Harris, On perfect isometries and isotypies in finite groups, *Invent. math.* **114** (1993) 139–191.

[IN] I. M. Isaacs and G. Navarro, Weights and vertices for characters of π-separable groups, *J. Algebra* **177** (1995), 339-366.

[KR] R. Knörr and G. R. Robinson, Some remarks on a conjecture of Alperin, *J. London Math. Soc.* **39**(1989), 48-60.

[RS] G. R. G. R. Robinson and R. Staszewski, More on Alperin's conjecture, *Astérsque* **181-182**(1990), 237-255.

[R] G. R. Robinson, Alperin's conjecture, numbers of characters, and Euler characteristics of quotients of p-group complexes, *J. London Math. Soc.* **52**(1995), 88-96.

[LT] G. Lehrer et J. Thévenaz, Sur la conjecture d'Alperin pour les groupes réductifs finis, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math.* **315** (1992), 1347-1351.

[MO] G. Michler and J. Olsson, Weights for covering groups of symmetric and alternating groups, $p \neq 2$,*Can. J. Math.* **43** (1991) 792-813.

[N] G. Navarro, Weights, vertices and a correspondence of characters in groups of odd order, *Math. Z* **212** (1993), 536-546.

[PU1] L. Puig and Y. Usami, Perfect isometries for blocks with Abelian defect groups and Klein four inertial quotients, *J. Algebra*, **160** (1993), 192-225.

[PU2] L. Puig and Y. Usami, Perfect isometries for blocks with Abelian defect groups and cyclic inertial quotients of order 4, *J. Algebra*, **172** (1995), 205-213.

[T1] J. Thévenaz, Locally determined functions and Alperin's conjecture *J. London Math. Soc* **45** (1992), 446-468.

[T2] J. Thévenaz, Equivariant K-theory and Alperin's conjecture *J. Pure and Appl. Algebra* **85** (1993), 185-202.

[T] Y. Tsushima, Notes on trivial source modules, *Osaka J. Math.* **32**(1995), 475-482.

[U] K. Uno, Dade's conjecture for tame blocks, *Osaka J. Math.* **31** (1994) 747–772.

[U1] Y. Usami, Perfect isometries for blocks with Abelian defect groups and dihedral inertial quotients of order 6, *J. Algebra*, **172** (1995), 113-125.

[U2] Y. Usami, Perfect isometries for blocks with Abelian defect groups and dihedral inertial quotients isomorphic to $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$, *J. Algebra*, **181** (1996), 727-759.

[U3] Y. Usami, Perfect isometries for blocks with Abelian defect groups and dihedral inertial quotients isomorphic to $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, *J. Algebra*, **182** (1996), 140-164.

簡約群の tilting module と Buchsbaum-Rim 複体

名古屋大学医療技術短期大学部　橋本 光靖 (Mitsuyasu Hashimoto)

〒464 名古屋市東区大幸南 1-1-20　hasimoto@math.nagoya-u.ac.jp

0 Buchsbaum-Rim 型の resolution — 問題と背景

R が可換環で, m, n, t は $1 \leq t \leq m \leq n$ を充たす整数, $V = R^m$, $W = R^n$ とする。R 上の対称多元環 $S := \mathrm{Sym}(V \otimes W)$ は, mn 変数多項式環 $R[x_{ij}]_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ と自然に同型である。$I_t := I_t(x_{ij})$ によって, $m \times n$ 行列 (x_{ij}) の全ての t 次の小行列式によって生成される S のイデアルを表す。I_t は行列式イデアル (determinantal ideal) の名で呼ばれ, 可換環論の進歩とともに, 常に興味深いイデアルの例として様々な手法で色々な側面が調べられてきた [8]。

ここでは, S/I_t ないしは I_t の自由分解の問題に焦点をあてて考える。

問題 0.1 S/I_t の S-module としての有限自由分解

$$0 \to F_h \xrightarrow{\partial_h} F_{h-1} \to \cdots \to F_1 \xrightarrow{\partial_1} S \to S/I_t \to 0 \tag{0.2}$$

であって,「良い性質を持つもの」を構成せよ。

この問題に限っても６０年代初頭辺りから様々なアプローチで考えられてきており, 色々な結果が提出されているが, 今だに不明な点も多い。

射影次元と Cohen-Macaulay 性 歴史的な順序を無視して, この問題に関する Hochster と Eagon による重要な結果 [32] をまず述べる。

R が commutative noetherian ring, $M \neq 0$ が有限生成 R 加群とする。

$$\operatorname{grade} M = \operatorname{grade}_R M := \inf\{i \mid \operatorname{Ext}^i_R(M, R) \neq 0\}$$

とおいて, $\operatorname{grade} M$ を M の grade と呼ぶ。$M \neq 0$ ならば, 不等式

$$\operatorname{grade} M \leq \operatorname{codim} M \leq \operatorname{proj.dim}_R M$$

が成立する [49]。ここに, $\operatorname{codim} M := \operatorname{ht} \operatorname{ann} M$ は M の codimension と呼ばれる。$\operatorname{grade} M = \operatorname{proj.dim}_R M$ の時, M は perfect module であるという。

定理 0.3 (Hochster-Eagon) R が noetherian とする。S/I_t は S-module として perfect of codimension $(m - t + 1)(n - t + 1)$ である。

特に, (0.2) において, 必ず $h \geq (m-t+1)(n-t+1)$ となることが分かる。また, perfect module の一般論として, R が Cohen-Macaulay (したがって S も Cohen-Macaulay) であれば, S/I_t もそうである。また, R が normal domain であれば, S/I_t もそうであることが分かる。

また, S/I_t は R 加群として自由加群である。このことは, $\mathbb{F}$ が S/I_t の S-free resolution であれば, 任意の commutative R-algebra R' に対して, $R' \otimes_R \mathbb{F}$ が S'/I'_t の S'-free resolution であることを示す。ここに, $S' = R' \otimes_R S \cong R'[x_{ij}]$, $I'_t = I_t S'$ である。したがって, 有理整数環 $\mathbb{Z}$ 上で resolution (0.2) を作れば, (任意の R は $\mathbb{Z}$-algebra だから), 勝手な R 上での resolution を構成したことになる。但し, $\mathbb{Z}$ 上での問題 0.1 は以下に見るように, 困難を極めているのが実情である。

Graded minimal free resolution 各変数 x_{ij} を次数 1 と定めることにより, S は次数つき多項式環であり, I_t は t 次式で生成される graded ideal である。Resolution (0.2) が graded であるとは, 単に finite free S-resolution であるだけでなく, graded S-modules の category での complex になっている (つまり, 各 F_i が graded で, 各 ∂_i が次数を保つ写像) ことをいう。

変数 x_{ij} 全てで生成される S のイデアルを S_+ で表す (言い替えると, $S_+ = I_1$)。(0.2) が minimal であるとは, 任意の $i \geq 1$ に対して, $\partial_i \otimes S/S_+$ が 0 であることをいう。Minimal という言葉の意味は, 次の良く知られた補題によって説明される。

補題 0.4 R が体であると仮定する。この時, 次が成立する。

1 S/I_t の graded minimal free resolution が, graded S-complexes の同型を無視すれば一意的に存在する。

2 もし $\mathbb{G}$ が S/I_t の graded S-free resolution であれば, $\mathbb{G}$ は graded S-complex として, $\mathbb{F} \oplus \mathbb{G}'$ と直和分解する。ここに, $\mathbb{F}$ は, S/I_t の graded minimal free resolution, $\mathbb{G}'$ は, graded な S-free complex で, exact なものである。

3 $\mathbb{F}$ が S/I_t の graded minimal free resolution であれば, $\operatorname{rank} F_i = \dim_R \operatorname{Tor}_i^S(S/I_t, S/S_+)$ である。特に, $\sup\{i \mid F_i \neq 0\} = (m-t+1)(n-t+1)$ である。

上の $\operatorname{rank} F_i = \dim_R \operatorname{Tor}_i^S(S/I_t, S/S_+)$ は ith Betti number と呼ばれる不変量で, 可換環論では重要なものである。さて, R が一般の noether 環の場合に戻って, $\mathbb{F}$ が R 上での graded minimal free resolution であれば, commutative R-algebra R' に対して, base change $R' \otimes_R \mathbb{F}$ は S'/I'_t の graded minimal free resolution であることは見やすい。そこで, $\mathbb{Z}$ 上での構成が問題になるが, 次のかなり否定的な結果が得られている。

定理 0.5 ([26, 27, 48]) $R = \mathbb{Z}$ の時, S/I_t の graded minimal free resolution が存在することと, $t = 1$ または $m - t \leq 2$ であることは同値である。

Equivariant resolution Reductive R-group scheme $G = GL(V) \times GL(W)$ を考える。$V \otimes W$ は G-module なので, $S = \mathrm{Sym}(V \otimes W)$ には G が R-algebra isomorphism で作用する。I_t は G-ideal (イデアルであって G-submodule) である。このことは, 左右から正則行列を掛けても行列の rank は不変であることから容易に理解できよう。

Finite free S-resolution $\mathbb{F}$ が G-equivariant であるとは, $\mathbb{F}$ が (G, S)-modules の category (定義は 定義 1.11 を参照) での complex でもあることをいう。

次は, equivariant resolution に関して基本的である。

補題 0.6 上の記号の下に, 次が成立する。

0 G-equivariant resolution は graded S-complex の構造を持つ。

1 S/I_t の finite free S-resolution で, G-equivariant なものが存在する。

2 もし R が有理数体を含めば, graded minimal S-free resolution で G-equivariant なものが, (G, S)-complexes の同型を無視すれば一意的に存在する。

3 X が noetherian R-scheme, V と W は X 上の vector bundles で, $\mathrm{rank}\, V = m$, $\mathrm{rank}\, W = n$ とする。$\varphi : V \to W^*$ は bundle map とし, $Z := \mathrm{Zero}(\bigwedge^t \varphi) \neq \emptyset$ とする。さらに, $\mathrm{depth}_X Z = (m - t + 1)(n - t + 1)$ と仮定する。ここに,

$$\mathrm{depth}_X Z := \inf\{\mathrm{grade}_{\mathcal{O}_{X,z}} \mathcal{O}_{Z,z} \mid z \in Z\}$$

である。この時, finite free S-resolution で (G, S)-complex でもある $\mathbb{F}$ が与えられると, canonical な仕方で, $\mathcal{O}_Z$ の bundle resolution

$$0 \to F_h(V, W) \to \cdots \to F_1(V, W) \to \mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Z \to 0$$

が得られる。

主張 **0** は, $t \mapsto (t\mathrm{id}_V, t\mathrm{id}_W)$ によって, $\mathbb{G}_m \hookrightarrow G$ であり, (G, S)-complex は, $(\mathbb{G}_m, S)$-complex, 即ち, graded S-complex となることから分かる。主張 **1** に関しては, [30] を参照。**2** は $R = \mathbb{Q}$ の時を考えれば良く, 完全可約群の作用の一般論である。この主張は単なる存在定理であって, 具体的な構成に関しては何もいっていないが, A. Lascoux [37], Pragacz-Weyman [45] によって, 極めて具体的にこの場合の G-equivariant graded minimal free resolution が構成されており, 特に, この場合の Betti numbers も計算可能な状態になっている。$R \supset \mathbb{Q}$ の場合の問題 0.1 は完全に解決されたといって良いであろう。

3 の正確な意味を記述し出すと長くなるので, ここでは触れるだけにとどめる。重要なことは, 環上での resolution が scheme 上に上がって, 張り合わせがうまくいくためには, G-equivariance が十分となることである。

$R = \mathbb{Z}$ の時の, graded minimal free resolution で, G-equivariant なものは, 次の場合に構成されている。

例 0.7 $t=1$ の時, Koszul complex $\mathrm{Kos}(x_{ij};S)$:

$$0 \to S \otimes \bigwedge^{mn}(V \otimes W) \to \cdots S \otimes \bigwedge^{1}(V \otimes W) \to S \to S/I_1 \to 0$$

は, S/I_1 の G-equivariant graded minimal S-free resolution である。

Koszul complex に関しては, [42] を参照。

例 0.8 $t=m$ の時, Eagon-Northcott [20] によって, S/I_m の graded minimal S-free resolution が具体的に構成された。その後, Buchsbaum [10] によって, Eagon-Northcott resolution が divided power 表現を活用して (G,S)-resolution として詳しく記述された。その具体的な形はここでは述べないが, Buchsbaum の記述により, この resolution は後で述べる $\mathcal{X}^{\mathrm{reg}}_{G,S}(\pi)$-resolution になっている。

上に述べた二つの例では, ともに graded minimal S-free resolution は linear になっている。$\mathbb{Z}$ 上の graded minimal S-free resolution は, $t=m-1, m-2$ の場合にも存在する (定理 0.5)。$t=m-1$ の時には, Akin-Buchsbaum-Weyman [1] によって, かなり具体的な構成がなされているが, これが G-equivariant であるかどうかは不明である。$t=m-1, m-2$ の時に, graded minimal S-free resolution が G-equivariant structure を持つかどうかは今のところ open である。

Buchsbaum-Rim resolution Eagon-Northcott の resolution (例 0.8) が構成されたのと, ほぼ同時に独立に, Buchsbaum は S/I_m の finite free S-resolution で, 次の形を持つ (G,S)-complex を構成した [9]。

$$0 \to F_{n-m+1} \to \cdots \to F_1 \to S \to S/I_m \to 0,$$

ここに, $i \geq 1$ について,

$$F_i = \bigoplus_{1 \leq s(1),\ldots,s(i-1) \leq m} S \otimes \bigwedge^{s(1)} V \otimes \bigwedge^{s(2)} V \otimes \cdots \otimes \bigwedge^{s(i-1)} V \otimes \bigwedge^{m} V \otimes \bigwedge^{m+\sum_j s(j)} W$$

である。この resolution は minimal ではないという点で, Eagon-Northcott complex に劣るが, 各 F_i が V および W の exterior powers の tensor product の直和で記述されてる点が特長である。例えば Grassmann variety の universal quotient $\mathcal{Q}$ と任意の $i \geq 0$ について, $\bigwedge^i \mathcal{Q}$ の higher cohomology は (Kempf's vanishing theorem により) 消滅するなど, exterior power は, divided power の持たない良い性質を持っている。この resolution は generalized Koszul complex, または Buchsbaum-Rim resolution の名で知られている [9, 12, 13]。

このような背景の下に, Buchsbaum と Weyman により, 次のような問題が調べられている [11]。

問題 0.9 任意の t $(1 \leq t \leq m)$ に関して, finite free S-resolution

$$\mathbb{F}: 0 \to F_h \to \cdots \to F_1 \to S \to S/I_t \to 0$$

であって, 次の条件を充たすものを具体的に構成せよ。

1 $\mathbb{F}$ は G-equivariant である。

2 $h = \text{proj.dim}_S S/I_t = (m-t+1)(n-t+1)$ である。

3 全ての $i \geq 1$ について, (G,S)-module として, $F_i \cong S \otimes T(i)$, $T(i)$ は $\bigwedge^i V \otimes \bigwedge^j W$ の形の G-modules の tensor products の direct sum である。

Buchsbaum が $t=m$ の時に構成した複体は上記の条件を充たしている。しかしながら, $R=\mathbb{Q}$ の時の Lascoux-Pragacz-Weyman の resolution は, ほとんどの場合 **3** を充たさない。そこで, 次の条件を考える。

3' 全ての $i \geq 1$ について, (G,S)-module として, $F_i \cong S \otimes T(i)$, $T(i)$ は $\bigwedge^i V \otimes \bigwedge^j W$ の形の G-modules の tensor products の direct sum の direct summand である。

Cohomology の vanishing などの性質は direct summand にも遺伝するから, **3'** にも意味はあると思う。LPW resolution は, **1,2,3'** を充たす。そこで, S/I_t の finite free S-resolution で, **1,2,3'** を充たすものを, Buchsbaum-Rim 型の resolution と定義する。

この問題に関連して, 次の結果が得られた。

定理 0.10 R を 可換環とする時, S/I_t の Buchsbaum-Rim 型の resolution は存在する。さらに R がネータ局所環であれば, さらに, 次の性質を持つ S/I_t の Buchsbaum-Rim 型の resolution $\mathbb{F}$ が, (G,S)-complex の同型を無視すれば, 一意的に存在する。

4 もし $\mathbb{G}$ が S/I_t の S-free resolution で, **1,3'** の条件を充たすならば, (G,S)-complex としての分解 $\mathbb{G} \cong \mathbb{F} \oplus \mathbb{G}'$ で, $\mathbb{G}'$ は **1,3'** を充たす完全列であるものが存在する。

この定理は単なる存在定理であって, 具体的な構成を与えるものではないし, 元の条件 **3** と **3'** の間を埋める方法は今のところ見つかっていない。本稿の残りの部分の目的は, この定理の証明のアウトラインを示すことを目標とする。$\bigwedge^i V \otimes \bigwedge^j W$ の tensor products の direct sum の direct summand であるということは, G の多項式表現であって, かつ tilting であるということに他ならない。体上の簡約群 (reductive group) の tilting 表現は, quasi-hereditary algebra のΔ-good approximation を通して Ringel [47] によって発見され, Donkin [18] によって詳しく調べられた。

Ringel の成果の背景には, Auslander-Buchweitz による $\mathcal{X}$-approximation という考え方がある。定理 0.10 の証明には, 体上の G-module の Δ-good approximation を R 上での (G,S)-module の approximation に引き上げることが必要となる。この approximation は, G-equivariant projective approximation, または relative Ringel's approximation とでも呼ぶべきものである。後で述べる Cohen-Macaulay approximation に比べて単純だが, weight の集合 π の制限についてうまくいっているということが利点である。

Section 1 では, (G,A)-module の操作である Ext_A, Tor^A の構成について, その概略を述べる。(G,A)-module の category が様々な A-module としての homological な操作で閉じていることは, G が split torus の場合に graded ring 上の graded module としての見方で後藤, 渡辺 [22, 23] によって見事に活用され, 今日では理論面はもちろん, 射影幾何学, 組合せ論等

の応用面でも必須の考え方として定着している。現在のところ, Tor^A の構成については, G は勝手な affine flat group scheme というわけにはいかず, G に IFP という制限がついてしまっているが, split reductive group を含むクラスにはなっている。

Section 2 は, 簡約群の good filtration, あるいは highest weight category に関する理論を一般の R 上での coalgebra の設定で再展開する。Schur algebra, tilting module などの構成は, universal coefficient theorem の使える Dedekind 環 (実際には PID まで制限する) の上で行ない, base change によって議論する。勝手な split reductive group は, $\mathbb{Z}$ 上で定義されている [16] ため, この議論が意味を持つ。

Section 3 では, 先に述べた (G, S)-module の category での approximation について, その概略を述べる。Ringel の approximation の素直な持ちあげになっているが, 証明は, たとえ R が体であっても決して trivial ではなく, Mathieu's theorem という good filtration に関する定理が強力な武器となる。

Section 4 では, Section 3 での一般的な reductive group での定理の仮定が定理 0.10 の状況で充たされることを述べる。$A = S/I_t$ の canonical module が good であることの証明が焦点である。証明には Kempf の geometric な construction を用いる。この construction は, determinantal ideal の resolution を調べるのに, しばしば威力を発揮している方法である [37, 48, 30]。

Section 5 では, (G, A)-module の Cohen-Macaulay approximation について, 結果だけを述べる。

今回の講演を実現させて下さった organizers の方々に心から謝意を表します。また, 大変意義のある discussion をして下さった D. A. Buchsbaum, 土井幸雄, 後藤四郎, 若松隆義, 渡辺敬一の各先生に感謝致します。

一般的な notation R は可換環を表し, $\otimes$, Hom はそれぞれ $\otimes_R$, Hom_R を意味する。何も断らない時は, 環 A (または代数群 G) の加群は左加群とし, その圏は${}_A\mathbb{M}$ (または ${}_G\mathbb{M}$) で表す。また, 余代数 C の comodule は right comodule を意味し, その圏は $\mathbb{M}^C$ で表す。C の counit, coproduct はそれぞれ, ε_C, Δ_C で表す。Scheme (または可換環) の射の 'smooth' は locally of finite presentation かつ formally smooth [24, Définition 17.3.1] の意味である。

1 一般の可換環の上の equivariant modules

Universal density of hyperalgebras

定義 1.1 R が体とする。V が R-space, W は V^* の subspace とする。W が *dense* であるとは, 自然な射 $V \to W^*$ $(v \mapsto (w \mapsto \langle w, v\rangle))$ が単射であることをいう。R が一般の可換環で, V, W は R-modules とする。R-module map $f : W \to V^*$ が universally dense であるとは, 任意の R-module U に対して, R-linear map

$$\theta_U : U \otimes V \to \mathrm{Hom}(W, U) \qquad u \otimes v \mapsto (w \mapsto \langle w, v\rangle u)$$

が単射であることをいう。

R が体ならば, dense subspace の inclusion は universally dense である。
上の定義で,

$$\mathrm{Hom}(W, V^*) \cong \mathrm{Hom}(W \otimes V, R)$$

で対応する pairing を $\langle -, - \rangle$ で表している。可換な R-algebra R' に対して base change された pairing も同じ記号で表すと, その pairing $\langle -, - \rangle$ から, $f' : \mathrm{Hom}_{R'}(W', \mathrm{Hom}_{R'}(V', R'))$ の元が induce される。定義に登場する θ_U は U について natural である。

補題 1.2 $f : W \to V^*$ が R-linear map とする。この時, 次の条件を考える。

1 f は universally dense

2 V は R-flat で, 任意の R の素イデアル $\mathfrak{p}$ に対して,

$$f(\mathfrak{p}) : W \otimes \kappa(\mathfrak{p}) \to \mathrm{Hom}_{\kappa(\mathfrak{p})}(V \otimes \kappa(\mathfrak{p}), \kappa(\mathfrak{p}))$$

の像 $f(\mathfrak{p})(W \otimes \kappa(\mathfrak{p}))$ が dense

一般に, **1**$\Rightarrow$**2** である。さらに, R が noether 環であれば, **2**$\Rightarrow$**1** である。

C が R-coalgebra, $A \to C^*$ が universally dense R-algebra map とする (従って C は R-flat である)。
自然な関手 $\mathbb{M}^C \to {}_A\mathbb{M}$ を Φ で表そう。R-module としては, 単に $\Phi(M) = M$ であり, A の $\Phi(M) = M$ への action は,

$$am := \sum_{(m)} \langle a, m_{(1)} \rangle m_{(0)}$$

で与えられる。ここに, $\sum_{(m)} m_{(0)} \otimes m_{(1)}$ は, coaction $\omega_M : M \to M \otimes C$ による m の像 $\omega_M(m)$ である。
V は A-module とし, 作用 $A \otimes V \to V$ を a_V で表す。自然な同型

$$\mathrm{Hom}(A \otimes V, V) \cong \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(A, V))$$

を ρ_V で表す。

$$\theta_V : V \otimes C \to \mathrm{Hom}(A, V)$$

は, 仮定によって単射である。
$\rho_V a_V : V \to \mathrm{Hom}(A, V)$ による $\mathrm{Im}(\theta_V)$ の引き戻し $(\rho_V a_V)^{-1}(\mathrm{Im}(\theta_V))$ を V_{rat} で表し, V の *rational part* と呼ぶ。

補題 1.3 V_{rat} は V の A-submodule である。また, $V_{\mathrm{rat}} \hookrightarrow V \to \mathrm{Hom}(A, V)$ は

$$V_{\mathrm{rat}} \otimes C \hookrightarrow V \otimes C \xrightarrow{\theta_V} \mathrm{Hom}(A, V)$$

を経由し, $\omega_{V_{\mathrm{rat}}} : V_{\mathrm{rat}} \to V_{\mathrm{rat}} \otimes C$ が定まって, V_{rat} は C-comodule となる。この C-comodule structure に関して, $\Phi(V_{\mathrm{rat}})$ は, V-submodule としての構造に一致する。

命題 1.4 $V \in \mathbb{M}^C$, $W \in {}_A\mathbb{M}$, $f \in \mathrm{Hom}_A(\Phi V, W)$ の時, $f(V) \subset W_{\mathrm{rat}}$ であり, 同型

$$\mathrm{Hom}_A(\Phi V, W) \cong \mathrm{Hom}_C(V, W_{\mathrm{rat}})$$

が得られる。特に, $W' \in {}_A\mathbb{M}$, $g \in \mathrm{Hom}_A(W', W)$ の時, $g(W'_{\mathrm{rat}}) \subset W_{\mathrm{rat}}$ であり, $g_{\mathrm{rat}} = g|_{W'_{\mathrm{rat}}} \in \mathrm{Hom}_C(W'_{\mathrm{rat}}, W_{\mathrm{rat}})$ により, $(?)_{\mathrm{rat}}$ は関手であり, $\mathrm{id}_M : M \cong M = (\Phi M)_{\mathrm{rat}}$ を unit とし, $\Phi(V_{\mathrm{rat}}) = V_{\mathrm{rat}} \hookrightarrow V$ を counit として $(?)_{\mathrm{rat}}$ は Φ の right adjoint である。

系 1.5 $(?)_{\mathrm{rat}}$ は left exact であり, injective object を保つ。Φ は忠実充満である。

例 1.6 G が R 上の affine 代数群, $H := R[G]$ とする。$I := \mathrm{Ker}\,\varepsilon_H$ を counit map の kernel とする。

$$\mathrm{Hy}\,H = U := \varinjlim (H/I^n)^*$$

を, H の hyperalgebra と呼ぶ。U は H^* の R-subalgebra である。実際, $1_{H^*} = \varepsilon \in (H/I)^* \subset U$, $(H/I^n)^*(H/I^m)^* \subset (H/I^{n+m-1})^*$ である。H/I^n がすべての $n \geq 1$ について, finite R-projective である時, H は infinitesimally flat であると称する。これは, 各 $n \geq 1$ について I^n/I^{n+1} が finite R-projective といっても同じである。

H が infinitesimally flat であれば, U は R-projective であり, $(H/I^n)^*(I^n \cdot H + H \cdot I^n) = 0$ と $(H/I^n \otimes H/I^n)^* \cong (H/I^n)^* \otimes (H/I^n)^*$ により, $(H/I^n)^* \to U \otimes U$ が得られ, これから, U は R-coalgebra でもあり, R-Hopf algebra になることが確かめられる。

次は良く知られた事実 [6, VIII.1.3] である。

補題 1.7 R が noether 環で G が affine algebraic R-group scheme の時, G が R-smooth ならば, infinitesimally flat である。

次も Raynaud [46] によって証明された一般的な定理の特別な場合として知られている。

定理 1.8 G が R-smooth で connected geometric fibers を持てば H は R-projective である。

次の補題は多少の改良であり, universal density の十分条件も与える。

補題 1.9 R が noether 環で, $H = R[G]$ が R 上 finitely generated flat かつ infinitesimally flat で, 任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,R$ に対して $G \otimes \kappa(\mathfrak{p})$ が連結ならば, $\mathrm{Hy}\,H \to H^*$ は universally dense であり, H は R-projective である。

Universal density は, R が体の場合は, H が Cohen-Macaulay であることから容易に従う。一般の場合は補題 1.2 からの帰結である。$(\mathrm{Hy}\,H)^*$ は H の I-adic completion に他ならず, ほとんど universal density の定義から, $H \to (\mathrm{Hy}\,H)^*$ は injective で, R-pure submodule になっている。一方, $(\mathrm{Hy}\,H)^*$ は, 補題の条件の下に, R-Mittag-Leffler であることが確かめられ, H は R-Mittag-Leffler of countable type だから, R-projective である。

Ind-finite projective group と Ext_A, Tor^A の構成　以下, R は noether 環, G は connected geometric fibers を持つ affine smooth R-group scheme とする。$H := R[G]$ は G の座標環を表し, $U := \mathrm{Hy}\, G$ とおく。

A は commutative な noetherian G-algebra (つまり, R-algebra であって, G が A に rational に環準同型で作用するもの) とする。A は U-module algebra なので, smash product [44] $\Gamma := A\#U$ が定義される。$A\#U$ は, R-module $A \otimes U$ に, 積を

$$(a \otimes u)(b \otimes v) = \sum_{(u)} a(u_1 b) \otimes u_2 v$$

で入れたものである。自然な射 $A \to \Gamma = A\#U$ $(a \mapsto a \otimes 1)$ によって, (left) Γ-module は A-module である。

補題 1.10 Γ-projective module は A-projective module である。Γ-injective module は A-injective module である。

M, N が Γ-modules, V が U-modules とする。この時, $\mathrm{Hom}_R(M, V)$, $\mathrm{Hom}_R(V, N)$ は自然に Γ-module の構造を持つ。また, $\mathrm{Hom}_A(M, N)$ は Γ-module である。補題 1.10 から容易に,

$$R^i \mathrm{Hom}_A(M, ?)(N) \cong R^i \mathrm{Hom}_A(?, N)(M)$$

であり, 単に A-module としては, これらは $\mathrm{Ext}^i_A(M, N)$ と同型となる。そこで, この Γ-module を単に $\mathrm{Ext}^i_A(M, N)$ で表すことにする。

同様に, $M \otimes_R V$, $V \otimes_R N$ は Γ-module であり, $M \otimes_A N$ も Γ-module である。

$$L_i(M \otimes_A ?)(N) \cong L_i(? \otimes_A N)(M)$$

であり, 両者は単に A-module としては, $\mathrm{Tor}^A_i(M, N)$ と同型である。この Γ-module を単に $\mathrm{Tor}^A_i(M, N)$ で表す。

I が A の G-ideal (つまり, I が A の Γ-submodule) の時, $\Gamma_I(N) := \varinjlim \mathrm{Hom}_A(A/I^n, N)$ とおくと, Γ_I は ${}_\Gamma\mathbb{M}$ の left exact な endofunctor である。$R^i\Gamma_I(N)$ を $H^i_I(N)$ で表し, N の ith local cohomology と呼ぶ。

定義 1.11 M が (G, A)-module であるとは, M が (H, A)-Hopf module であることをいう。いい直すと, M が G-module で, A-module で, A-action $A \otimes M \to M$ が G-homomorphism であることをいう。

(G, A)-module と, (U-module として) rational な Γ-module とは同一概念である。(G, A)-module の全体を ${}_{G,A}\mathbb{M}$ で表すことにすると, ${}_{G,A}\mathbb{M}$ は十分多くの単射的対象を持ち, 完全な filtered inductive limits を持つ。M, N が rational Γ-modules の時, いつ $\mathrm{Ext}^i_A(M, N)$, $\mathrm{Tor}^A_i(M, N)$ は rational であるか, という問いは基本的に思える。

定理 1.12 M が (G, A)-module, I が injective (G, A)-module とする時, $i > 0$ について $\mathrm{Ext}^i_A(M, I) = 0$ である。

このことは, (G,A)-injective module が A-injective であることを意味するものではない。また, 全ての (G,A)-module M について, $\mathrm{Ext}^i_A(M,I)=0$ だからといって, I が (G,A)-injective になるとは限らない (しかしながら, [23, Lemma 1.3.1] では, torus $\mathbb{G}_m$ については正しいことが示されている)。

また, M が A-finite (G,A)-module で, N が (G,A)-module の時, $\mathrm{Hom}_A(M,N)$ は rational である。このことと, 定理とを合わせて, $\mathrm{Ext}^i_A(M,N)$ は (N の (G,A)-injective resolution が $\mathrm{Hom}_A(M,?)$-acyclic resolution だから) rational である。

一般に, M, N が (G,A)-modules の時, $M\otimes_A N$ が rational であることは容易である。

補題 1.13 (Local finiteness) R が noether 環で, C が R-flat coalgebra とする。$M\in\mathbb{M}^C$ で, X は M の R 上有限生成加群とすると, X を含む M の C-subcomodule で R-finite なものが存在する。従って, M は M の R-finite subcomodules の filtered inductive limit である。

上の補題から, 次のことが分かる。

補題 1.14 任意の R-finite G-module V に対して, ある R-finite projective G-module P と全射 $P\to V$ が存在するならば, 任意の (G,A)-modules M, N と $i\geq 0$ に対して, $\mathrm{Tor}^A_i(M,N)$ は rational である。

M が R-module, N が M の R-submodule とする。N が M の pure submodule であるとは, 任意の R-module W に対して, $W\otimes N\to W\otimes M$ が単射であることをいう。

定義 1.15 C が R-coalgebra とする。$D\subset C$ が C の R-subcoalgebra であるとは, D が C の pure submodule であって, $\Delta_C(D)\subset D\otimes D$ が成立することをいう。G が ind-finite projective (IFP) であるとは, $H=R[G]$ が, R-finite projective な R-subcoalgebras の filtered inductive limit であることをいう。

補題 1.16 G が IFP ならば, 任意の R-finite G-module V に対して, ある R-finite projective G-module P と全射 $P\to V$ が存在する。また, commutative R-algebra R' に対して, base change $G_{R'}$ は IFP である。

定理 1.8 を用いて次を導くことはそれほど困難ではない。

命題 1.17 R の大域次元が 1 以下であれば (例えば, R が Dedekind 整域), G は IFP である。

A-finite (G,A)-module M, N に対して, $\mathrm{Ext}^i_A(M,N)$ が再び rational になることの応用として, 次の結果を得た。これは, Matijevic-Roberts theorem [41] およびこの定理の拡張であるいくつかの結果 [3, 40, 23] の一般化である。

定理 1.18 R が noether 環, G が connected geometric fibers を持つ affine smooth R-group scheme, A は noetherian R-algebra で, G が A に R 作用しているとする。もし, A の任意の G-ideal で素イデアルであるもの $\mathfrak{p}$ について, $A_\mathfrak{p}$ が Cohen-Macaulay (resp. Gorenstein, local complete intersection, regular) であれば, A もそうである。

この定理は, [28] で述べられているものより, IFP の仮定が落ちている点で, 改良になっている。また, [23, Theorem 1.3.6] と同様に, 次が成立している。

定理 1.19 定理 1.18 と同様の仮定の下で, G が R 上 relative dimension n を持つとする。この時, M が (G,A)-module であれば, $\mathrm{inj.dim}_A M \leq \mathrm{inj.dim}_{G,A} M + n$ である。ここに, $\mathrm{inj.dim}_{G,A} M$ は, M の ${}_{G,A}\mathbb{M}$ での injective dimension である。

2 可換環上の Ringel's approximation

Split reductive group の Weyl module と induced module R が noether 環,

$$\mathbb{F}: 0 \to F^0 \xrightarrow{\delta^0} F^1 \xrightarrow{\delta^1} F^2 \xrightarrow{\delta^2} \cdots$$

が R-complex とする。

定義 2.1 $\mathbb{F}$ が universally acyclic であるとは, 任意の R-module M に対して, $H^i(\mathbb{F}\otimes M) = 0$ $(i > 0)$ で, canonical map

$$\rho_M : H^0(\mathbb{F}) \otimes M \to H^0(\mathbb{F} \otimes M)$$

が同型となることをいう。

補題 2.2 R の global dimension が 1 以下で, $\mathbb{F}$ は R-flat complex で, F^0 は R-projective とする。この時, 次は同値である。

1 $\mathbb{F}$ は universally acyclic で, $H^0(\mathbb{F})$ は R-finite projective である。

2 任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ について, $H^i(\mathbb{F} \otimes \kappa(\mathfrak{p})) = 0$ $(i > 0)$ で, $\dim_{\kappa(\mathfrak{p})} H^0(\mathbb{F} \otimes \kappa(\mathfrak{p}))$ は有限値をとる $\operatorname{Spec} R$ 上の locally constant function

上で, F^0 が R-projective の条件を外すと, 反例がある。

さて, 以下では, G は R-split reductive group [16] とする。G の split maximal torus で,

$$\operatorname{Lie} G \cong \operatorname{Lie} T \oplus \bigoplus_{\alpha \neq 0} (\operatorname{Lie} G)_\alpha,$$

各 $\alpha \neq 0$ に対して, $(\operatorname{Lie} G)_\alpha$ は R-free で rank が 0 または 1 であるようにとれる。また, root system

$$\{\alpha \in X(T) \mid (\operatorname{Lie} G)_\alpha \neq 0\}$$

の base を我々は固定する。ここに, $X(T)$ は rank one R-free T-modules の同型類全体である。この時, 全ての negative roots に対応する root subgoups で生成される G の部分群を U で, $UT = TU$ を B で表す。さらに, これら (即ち, G, $T \subset G$, $T \cong \mathbb{G}_m^n$, $X(T)$ の base, および U, B) が $\mathbb{Z}$ 上のそれから base change で得られているようにとり [34], 固定する。

$\lambda \in X(T)$ に対して, U を trivial に作用させて, rank one R-free B-module R_λ が得られる (U は B の normal subgroup)。X_G^+ で G の dominant weight の全体を表すことにする。

補題 2.3 $\lambda \in X_G^+$ に対して, $R^i \operatorname{ind}_B^G(R_\lambda) = 0\ (i > 0)$ であり, $\operatorname{ind}_B^G(R_\lambda)$ は R-finite free であり, 任意の commutative R-algebra R' に対して,

$$R' \otimes \operatorname{ind}_B^G(R_\lambda) \cong \operatorname{ind}_{R'\otimes B}^{R'\otimes G}(R'_\lambda)$$

である。

証明のためには, $R = \mathbb{Z}$ として良く, この時は, 定理 1.8, 補題 2.2 および, 体上の Kempf's vanishing, Weyl's character formula [34] から容易である。以下, $\lambda \in X_G^+$ に対して, $\operatorname{ind}_B^G(R_\lambda)$ を $\nabla_G(\lambda)$ で表して, G の induced module (または standard module) of highest weight λ と呼ぶ。G の Weyl 群の最長元を w_0 で表す。$\lambda \in X_G^+$ に対して, $-w_0\lambda$ は X_G^+ の元である。これを λ^* で表す。$\lambda \in X_G^+$ に対して, $\nabla_G(\lambda^*)^*$ を $\Delta_G(\lambda)$ で表し, G の Weyl module of highest weight λ と呼ぶ。

Donkin system ここでは, 上の設定を少し拡張して, 多少の一般論を試みる。X^+ は順序集合で, 任意の $\lambda \in X^+$ に対して,

$$(-\infty, \lambda] := \{\mu \in X^+ \mid \mu \leq \lambda\}$$

が有限集合であるものとする。

定義 2.4 k が体, C が k-coalgebra とする。(X^+, Δ, ∇) が C 上の split highest weight theory であるとは, $\Delta = (\Delta_C(\lambda))_{\lambda \in X^+}$, $\nabla = (\nabla_C(\lambda))_{\lambda \in X^+}$ が finite dimensional C-comodules の族で, 次の条件を充たすことをいう。

1 V が有限次元 C-comodule, $\lambda \in X^+$ で任意の $\mu > \lambda$ について $\operatorname{Hom}_C(\Delta_C(\mu), V) = 0$ ならば, $\operatorname{Ext}_C^i(\Delta_C(\lambda), V) = 0\ (i > 0)$ である。

1* V が有限次元 C-comodule, $\lambda \in X^+$ で任意の $\mu > \lambda$ について $\operatorname{Hom}_C(V, \nabla_C(\mu)) = 0$ ならば, $\operatorname{Ext}_C^i(V, \nabla_C(\lambda)) = 0\ (i > 0)$ である。

2 V が有限次元 C-comodule で, 任意の $\lambda \in X^+$ に対して $\operatorname{Hom}_C(\Delta_C(\lambda), V) = 0$ ならば, $V = 0$ である。

2* V が有限次元 C-comodule で, 任意の $\lambda \in X^+$ に対して $\operatorname{Hom}_C(V, \nabla_C(\lambda)) = 0$ ならば, $V = 0$ である。

3 $\lambda, \mu \in X^+$ に対して, $\lambda \neq \mu$ ならば, $\operatorname{Hom}_C(\Delta_C(\lambda), \nabla_C(\mu)) = 0$ であり,

$$\operatorname{Hom}_C(\Delta_C(\lambda), \nabla_C(\lambda)) \cong k$$

である。

(X^+, Δ, ∇) が C 上の split highest weight theory で X^+ が可算ならば, C-comodules の category は, Cline-Parshall-Scott の highest weight category [14] である。$R = k$ が体の時, X_G^+ は可算で, 各 $(-\infty, \lambda]$ は有限であり, $(X_G^+, \Delta_G, \nabla_G)$ は split highest weight theory over $k[G]$ であることは良く知られた事実である。

定義 2.5 R が noetherian commutative ring, C が R-flat coalgebra とする。V, W は C-comodules とする。W が V に関して u-acyclic であるとは, 任意の R-module M に関して,

1 $\mathrm{Ext}^i_C(V, W \otimes M) = 0$ $(i > 0)$ で,

2 Canonical map $\mathrm{Hom}_C(V, W) \otimes M \to \mathrm{Hom}_C(V, W \otimes M)$ が同型

となることをいう。

一般に, P が順序集合の時, $Q \subset P$ が P の poset ideal であるとは, $\lambda \in Q$, $\mu \in P$, $\mu \leq \lambda$ ならば, $\mu \in Q$ が成立するこという。

補題 2.6 C, X^+ は上の通りとし,

0 $\Delta = (\Delta_C(\lambda))_{\lambda \in X^+}$, $\nabla = (\nabla_C(\lambda))_{\lambda \in X^+}$ がそれぞれ, X^+ で parameterize された R-finite free C-comodules の族で, 任意の $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$ に対して, $(X^+, \Delta \otimes \kappa(\mathfrak{p}), \nabla \otimes \kappa(\mathfrak{p}))$ は $C \otimes \kappa(\mathfrak{p})$ 上の split highest weight theory である

とする。R が体または単項イデアル整域と仮定すると, 次が成立する。

1 $\lambda, \mu \in X^+$ ならば, $\nabla_C(\mu)$ は $\Delta_C(\lambda)$ に関して u-acyclic である。

2 X^+ の各 finite poset ideal π に対して C の subcoalgebra $C(\pi)$ で, 次の条件を充たすもの $(C(\pi))_\pi$ が存在する。

  a $C(\emptyset) = 0$

  b $\pi' \supset \pi$ ならば, $C(\pi') \supset C(\pi)$ である。

  c $\varinjlim C(\pi) = C$ である。

  d π が X^+ の finite poset ideal, λ は π の maximal element とする時, 自然な inclusion $C(\pi \setminus \{\lambda\}) \hookrightarrow C(\pi)$ の cokernel は, (C, C)-bicomodule として $\Delta_C(\lambda)^* \otimes \nabla_C(\lambda)$ に同型である。

3 $\lambda \in X^+$ に対して, $\mathrm{Hom}_C(\Delta_C(\lambda), \nabla_C(\lambda))$ は rank one R-free である。

一般の noetherian ring R 上の R-flat coalgebra C と, $\mathcal{D} = (X^+, \Delta, \nabla, (C(\pi))_\pi)$ で, 補題の **0,1,2,3** をすべて充たすものを, C 上の Donkin system と呼ぶことにしよう。

以下, R は一般の noetherian ring として, $\mathcal{D}$ は C 上の Donkin system とする。各 X^+ の finite poset ideal π に対して, $C(\pi)$ は R-finite free な C の subcoalgebra である。Dual algebra $A(\pi)^*$ を $S(\pi)$ で表し, π に付随する C の Schur algebra と呼ぶ。

さて, π が finite とは限らない X^+ の poset ideal とする時, $C(\pi) := \varinjlim C(\rho)$ とおく。ここに, ρ は π の finite poset ideal を走る。

命題 2.7 π は C の poset ideal とする。M が $C(\pi)$-comodule ならば,

$$R^i \operatorname{ind}_C^{C(\pi)}(\operatorname{res}_C^{C(\pi)}(M)) = 0 \qquad (i > 0)$$

である。したがって特に, 任意の $C(\pi)$-comodules M, N に対して, canonical map

$$\operatorname{Ext}^i_{C(\pi)}(M, N) \to \operatorname{Ext}^i_C(M, N)$$

は同型である。特に, $(\pi, \Delta|_\pi, \nabla|_\pi, (C(\rho))_{\rho\subset\pi})$ は Donkin system である。ここに, $\Delta|_\pi = (\Delta_C(\lambda))_{\lambda\in\pi}$, $\nabla|_\pi = (\nabla_C(\lambda))_{\lambda\in\pi}$ である。

系 2.8 M, N が R-finite な C-comodules の時, $\operatorname{Ext}^i_C(M, N)$ は, $i \geq 0$ について, R-finite である。

命題 2.9 X^+ の finite poset ideal π に対して, $S(\pi)$ は Cline-Parshall-Scott の意味で, quasi-hereditary algebra of split type [15] であり, π の極大元 λ に対して, $S(\pi) \to S(\pi \setminus \{\lambda\})$ の kernel は, heredity ideal である (N.B., R-finite projective modules の間の R-pure injection は, R-split するから, 上の map は surjective である)。

系 2.10 Donkin system の base change は Donkin system である。(X^+, Δ, ∇) が補題 2.6 の **0,1,3** を充たす時, $(X^+, \Delta, \nabla, (C(\pi))_\pi)$ を Donkin system にする $(C(\pi))_\pi$ は一意的である。

有限順序集合 π に対して, π に含まれる全順序部分集合の濃度の最大を r とする時, $r - 1$ を π の rank と呼び, $\operatorname{rank}\pi$ で表す。

系 2.11 π が X^+ の finite poset ideal とする。M が R-finite な $S(\pi)$-module で, M を単に R-module と見て, $\operatorname{proj.dim}_R M \leq r$ であれば, $\operatorname{proj.dim}_{S(\pi)} M \leq r + 2\operatorname{rank}\pi$ である。

Good filtrations, tilting modules R は noether 環, $\mathcal{D} = (X^+, \Delta, \nabla, (C(\pi))_\pi)$ は Donkin system とする。以下では, X^+ は可算であると仮定する。

補題 2.12 P が順序集合とする時, 次は同値である。

1 P は 高々 ω 型の整列された linearlization を持つ。

2 P は可算で, $\lambda \in P$ に対して, $(-\infty, \lambda]$ は finite である。

次は, Donkin-Friedlander の判定法 [18], [21] の一般化である。

命題 2.13 V が C-comodule とする時, 次は同値である。

1 任意の $\lambda \in X^+$ に対して, $\operatorname{Ext}^1_C(\Delta_C(\lambda), V) = 0$

1' 任意の $\lambda \in X^+$ と $i > 0$ に対して, $\operatorname{Ext}^i_C(\Delta_C(\lambda), V) = 0$

2 任意の X^+ の finite poset ideal π に対して, $R^1 \operatorname{ind}_C^{C(\pi)} V = 0$ である。

2' 任意の X^+ の poset ideal π と $i > 0$ に対して, $R^i \operatorname{ind}_C^{C(\pi)} V = 0$ である。

3 V の filtration $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$ で, 次の条件を充たすものが存在する。

a $\varinjlim V_i = V$

b X^+ の高々 ω 型の整列された linearlization $(\lambda(1), \lambda(2), \ldots)$ が存在して, 各 i に対して,

$$V_i/V_{i-1} \cong \nabla_C(\lambda(i)) \otimes \operatorname{Hom}_C(\Delta_C(\lambda(i)), V)$$

である。

上記の同値な条件を充たす時, V は good であると称する。

命題 2.14 C-comodule V に対して, 次は同値である。

1 任意の $\lambda \in X^+$ について, V は $\Delta_C(\lambda)$ に関して u-acyclic である。

2 V の filtration $0 = V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$ で, 次の条件を充たすものが存在する。

a $\varinjlim V_i = V$

b X^+ の高々 ω 型の整列された linearlization $(\lambda(1), \lambda(2), \ldots)$ が存在して, 各 i に対して,

$$V_i/V_{i-1} \cong \nabla_C(\lambda(i)) \otimes \operatorname{Hom}_C(\Delta_C(\lambda(i)), V)$$

である。

c 各 V_i は R-module として, V の pure submodule である。

上記の同値な条件を充たす V を u-good module と呼ぶ。$\lambda \in X^+$ について $\nabla_C(\lambda)$ は u-good である。π が X^+ の poset ideal の時, $C(\pi)$ は u-good である。U-good module の base change は u-good である。V が u-good module, M が R-module ならば, $V \otimes M$ は u-good である。次の系は, C が split reductive 群の座標環の時には既に知っている (定理 1.8) ことである。

系 2.15 π が X^+ の poset ideal の時, $C(\pi)$ は R-projective module である。特に, C は R-projective module である。

次は, Ringel [47] の結果・手法と, universal coefficient theorem から容易に示される。

補題 2.16 R が単項イデアル整域または体とする。V が R-finite free C-comodule で, π は X^+ の finite poset ideal, $\mu \in X^+ \setminus \pi$ に対して V が $\Delta_C(\mu)$ に関して u-acyclic ならば, π の極大元 λ について, $\operatorname{Ext}_C^i(\Delta_C(\lambda), V) = 0$ $(i \geq 2)$ である。また, 完全列

$$0 \to V \to V' \to D \to 0$$

で, D は $\Delta_C(\lambda)$ の有限直和, V' は, $\Delta_C(\mu)$ $(\mu \in X^+ \setminus (\pi \cup \{\lambda\}))$ に関して u-acyclic であるものが存在する。

$\mathcal{C}$ は abelian category, $\mathcal{X}$ は ob($\mathcal{C}$) の subset とする。この時, $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ は, 次の条件を充たす $C \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ を objects に持つ $\mathcal{C}$ の full subcategory とする。

C の finite filtration $0 = C_0 \subset C_1 \subset \cdots \subset C_r = C$ $(r \geq 0)$ で, 各 $1 \leq i \leq r$ に対して, C_i/C_{i-1} は $\mathcal{X}$ の元と同型である。

明らかに, $\mathcal{F}(\mathcal{X})$ は 0 および $\mathcal{X}$ を含み, 同型と extension で閉じている。

補題 2.17 R が単項イデアル環または体とする。任意の $\lambda \in X^+$ に対して, 完全列

$$0 \to \Delta_C(\lambda) \to T \to D \to 0$$

であって, $D \in \mathcal{F}(\{\Delta_C(\mu) \,|\, \mu < \lambda\})$, T は u-good であるようなものが存在する。さらに, R が DVR または体ならば, 任意の $R/\mathfrak{m}$ の拡大体 k に対して, $T \otimes k$ が indecomposable であるようにすることが出来る。ここに $\mathfrak{m}$ は R の極大イデアルである。

この補題の前半の完全列に関する条件は, base change で保たれることに注意しよう。

Ringel's approximation over arbitrary base $\mathcal{C}$ が abelian category, $\mathcal{X}$ は ob($\mathcal{C}$) の subset とする。次の条件を充たす $\mathcal{C}$ の objects C を objects に持つ $\mathcal{C}$ の full subcategory を $\mathrm{add}\,\mathcal{X}$ で表す。

C は $\mathcal{X}$ の元の有限直和の直和因子と同型である。

明らかに, $\mathrm{add}\,\mathcal{X}$ は 0 および $\mathcal{X}$ を含み, 同型と直和と直和因子で閉じている。

また, $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ が $\mathcal{X}$-projective (resp. -injective) であるとは, 任意の $i > 0$ と任意の $X \in \mathcal{X}$ に関して, $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(A, X) = 0$ (resp. $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{C}}(X, A) = 0$) であることをいう。$\mathcal{X}$-projective (resp. -injective) objects の全体を ${}^{\perp}\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{X}^{\perp}$) で表す。

$\mathcal{X}$ が $\mathrm{add}\,\mathcal{X} = \mathcal{X}$ を充たす $\mathcal{C}$ の full subcategory とする。$\hat{\mathcal{X}}$ は, 次の条件を充たす $\mathcal{C}$ の object C を objects に持つ $\mathcal{C}$ の full subcategory とする。

ある長さ有限の完全列

$$0 \to X_h \to \cdots \to X_1 \to X_0 \to C \to 0$$

で $X_i \in \mathrm{ob}(\mathcal{X})$ であるものが存在する。$C \in \hat{\mathcal{X}}$ について, 上の resolution での h となり得る非負整数の最小を $\mathcal{X}$-resol.dim C で表す。$C \notin \hat{\mathcal{X}}$ の時には, $\mathcal{X}\text{-resol.dim}\, C = \infty$ と定義する。

また, $\omega \subset \mathcal{X}$ が $\mathcal{X}$ の cogenerator であるとは, 任意の $X \in \mathcal{X}$ に対して, ある完全列

$$0 \to X \to T \to X' \to 0$$

が存在して, $T \in \omega$, $X' \in \mathcal{X}$ であることをいう。さらに, $\omega \subset \mathcal{X}^{\perp}$ の時, ω は $\mathcal{X}$ の injective cogenerator であるという。

以下では, R は noether 環, C は R-flat coalgebra, $\mathcal{D} = (X^+, \Delta, \nabla, (C(\pi))_\pi)$ は C 上の Donkin system とする。さらに, 我々は, X^+ が可算であることを仮定し, また, 補題 2.17 の前半の結論

任意の $\lambda \in X^+$ に対して, 完全列

$$0 \to \Delta_C(\lambda) \to T \to D \to 0$$

であって, $D \in \mathcal{F}(\{\Delta_C(\mu) \mid \mu < \lambda\})$, T は u-good であるようなものが存在する。

を仮定する。さらに, $(R, \mathfrak{m})$ が局所環の時には, 任意の $R/\mathfrak{m}$ の拡大体 k に対して, $T \otimes k$ が indecomposable にとれることをも仮定する。このような T は, T が u-good なので, $k \otimes \mathrm{End}_C T \cong \mathrm{End}_{k \otimes C}(k \otimes T)$ に注意すると $\mathrm{End}_C T$ は local であると分かり, 後でいうところの left minimal $\mathcal{Y}_C$-approximation になっており, 同型を除いて unique である。この T を $T(\lambda)$ で表し, C の indecomposable partial tilting module of highest weight λ と呼ぶ (Donkin [19] 参照)。

これらの仮定は, $\mathcal{D}$ が単項イデアル整域または体の上の Donkin system の base change として得られる時にはいつでも成立していることに注意する。

$\mathcal{A}_C := \{V \in \mathbb{M}^C \mid V$ は R-finite$\}$ とおく。さらに,

$$\mathcal{Y}_C := \{V \in \mathcal{A}_C \mid V \text{ は good で } \mathrm{proj.dim}_R V < \infty\},$$

$\mathcal{X}_C := \mathrm{add}\, \mathcal{F}(\Delta)$, $\omega_C := \mathcal{X}_C \cap \mathcal{Y}_C$ とおく。

定理 2.18 上の定義の下に,

$$\hat{\mathcal{X}}_C = \{V \in \mathcal{A}_C \mid \mathrm{proj.dim}_R V < \infty\}$$

であり, $\mathcal{X}_C^{\perp} \cap \hat{\mathcal{X}}_C = \mathcal{Y}_C$, ${}^{\perp}\mathcal{Y}_C \cap \hat{\mathcal{X}}_C = \mathcal{X}_C$ であり, ω_C は $\mathcal{X}_C$ の injective cogenerator である。また, ω_C の object は u-good である。

系 2.19 R-finite projective C-comodule V に対して, 次は同値である。

1 V は u-good

2 V は good

3 任意の R の極大イデアル $\mathfrak{m}$ に対して, $V \otimes \kappa(\mathfrak{m})$ は good

R が regular ring の時は, $\mathcal{A}_C = \hat{\mathcal{X}}_C$ である。定理および系の証明には, 次のパラグラフに述べる Auslander-Buchweitz の一般論が適用される。

定義 2.20 ω_C の object を, C の tilting module と呼ぶ。

Tilting の名前の由来については, [29] を御覧下さい。

Auslander-Buchweitz の理論 Auslander たちによる Approximation theory についての準備する。圏 $\mathcal{C},\mathcal{C}'$ と関手 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}'$ と $\mathcal{C}$ の full subcategory $\mathcal{S}$ に対して, ある $S\in\mathcal{S}$ が存在して $F(S)$ と同型になるような $\mathcal{C}'$ の object 全体がなす full subcategory を $F(\mathcal{S})$ で表す。

圏 $\mathcal{C}$ に対して, $\mathcal{C}$ の null object の一つも, null object の全体も 0 で表すが, 混乱はないだろう。

$\mathcal{A}$ は abelian category とする。この時, $\mathcal{A}$ の morphism $p:M\to N$ が right minimal であるとは, 任意の $\varphi\in\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)$ に対して, $p\varphi=p$ ならばφ が同型となることをいう。Left minimal は right minimal の dual notion である。つまり, $\mathcal{A}^{\mathrm{op}}$ で考えて right minimal である $\mathcal{A}$ の morphism は left minimal であるという。$\mathcal{X}$ を $\mathcal{A}$ の full subcategory とする。$\mathcal{A}$ の morphism $f:X\to M$ が M の right $\mathcal{X}$-approximation であるとは, $X\in\mathcal{X}$ であって, 任意の $X'\in\mathcal{X}$ と 任意の $g\in\mathcal{A}(X',M)$ に対して, ある $h\in\mathcal{A}(X',X)$ が存在して $fh=g$ となることをいう。これは, $\mathcal{A}(?,f):\mathcal{A}(?,X)\to\mathcal{A}(?,M)$ が $\mathcal{X}$ 上の functor の間の epimorphism であるといっても同じである。Left $\mathcal{X}$-approximation は dual の概念である。Right (resp. left) minimal な right (resp. left) $\mathcal{X}$-approximation は単に right (resp. left) minimal $\mathcal{X}$-approximation と呼ばれる。M の right minimal $\mathcal{X}$-approximation は, (存在すれば) $\mathcal{A}/M$ の object として同型を除いて unique である。

$\mathcal{B}\subset\mathcal{A}$ が right (resp. left) (minimal) $\mathcal{X}$-approximation を持つとは, 任意の $M\in\mathcal{B}$ に対して, M が right (resp. left) (minimal) $\mathcal{X}$-approximation を持つことをいう。

(Minimal) approximation の存在については次が基本的といえる。Enough projectives でも enough injectives でもないかも知れない $\mathcal{A}$ の $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}$ については, [38] 参照。

補題 2.21

$$0\to Y\xrightarrow{i}X\xrightarrow{p}M\to 0$$

が $\mathcal{A}$ の完全列で, $X\in\mathcal{X}$ で, $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{X},Y)=0$ であれば, p は M の right $\mathcal{X}$-approximation である。

証明 任意の $X'\in\mathcal{X}$ に対して,

$$\mathcal{A}(X',X)\to\mathcal{A}(X',M)\to\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}}(X',Y)=0$$

が完全だから, 主張は明らかである。 □

次は, 宮地 [43, Theorem 3.4] による定理を少し変形したものである。

命題 2.22 $\mathcal{A}$ は abelian category, $p:M\to N$ は $\mathcal{A}$ の morphism とする。$i:K\to M$ を f の kernel とする時, 次の 2 条件を考える。

1 p は right minimal である。

2 i を通して K と M は non-zero な共通の直和因子を持たない。

この時, **1**⇒**2** である。また, $\mathrm{End}_{\mathcal{A}}(M)$ が semiperfect ならば, 直和分解 $M=M_0\oplus M_1$ で, $M_0\subset\mathrm{Im}\,i$, $M_1\to N$ は right minimal となるものが存在する。特にこの時 **2**⇒**1** である。

系 2.23 $\mathcal{X}$ が direct summand で閉じた $\mathcal{A}$ の full subcategory, $\mathcal{X}$ の object の endomorphism ring は semiperfect とする。この時, $M \in \mathcal{A}$ が right (resp. left) $\mathcal{X}$-approximation を持てば, M は right (resp. left) minimal $\mathcal{X}$-approximation を unique に持つ。

次は Auslander-Buchweitz の一連の定理 [4] を本稿で必要な形にまとめたものである。

定理 2.24 (Auslander-Buchweitz) $\mathcal{A}$ が abelian category で, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, ω は $\mathcal{X}$ の full subcategories で, 仮定

AB1 $\mathcal{X}$ は extension と全射の kernel と直和因子で閉じた $\mathcal{A}$ の full subcategory.

AB2 $\mathcal{Y}$ は単射の cokernel と extension と 直和因子で閉じた $\mathcal{A}$ の full subcategory で $\mathcal{Y} \subset \hat{\mathcal{X}}$.

AB3 $\omega = \mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ で, ω は $\mathcal{X}$ の injective cogenerator である。

が満たされているとする。この時, 次が成立する。

1 $\hat{\omega} = \mathcal{Y}$

2 $\omega' \subset \mathcal{X}$ が $\mathcal{X}$ の injective cogenerator ならば, $\operatorname{add} \omega' = \omega$.

3 $M \in \hat{\mathcal{X}}$ とする時, 次が成立する。

i ($\mathcal{X}$-approximation の存在) $\mathcal{A}$ の完全列

$$0 \to Y \to X \xrightarrow{p} M \to 0$$

で, $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$ となるものが存在する。

ii ($\mathcal{Y}$-hull の存在) $\mathcal{A}$ の完全列

$$0 \to M \xrightarrow{\iota} Y \to X \to 0$$

で, $X \in \mathcal{X}$, $Y \in \mathcal{Y}$ となるものが存在する。

4 $M \in \hat{\mathcal{X}}$の時, 次は同値である。

i $M \in \mathcal{X}$ **ii** $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{Y}) = 0$ $(i > 0)$

ii' $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{Y}) = 0$. **iii** $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, \omega) = 0$ $(i > 0)$

よって, **3, i** の完全列の p は M の right $\mathcal{X}$-approximation である。

5 $M \in \hat{\mathcal{X}}$の時, 次は同値である。

i $M \in \mathcal{Y}$ **ii** $\operatorname{Ext}^i_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, M) = 0$ $(i > 0)$ **ii'** $\operatorname{Ext}^1_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, M) = 0$

よって, **3, ii** の完全列の ι は M の left $\mathcal{Y}$-approximation である。

6 $M \in \hat{\mathcal{X}}$ について,

$$\mathcal{X}\text{-resol.dim}(M) = \sup(\{i \mid \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{Y}) \neq 0\} \cup \{0\}) = \sup(\{i \mid \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, \omega) \neq 0\} \cup \{0\})$$

7 $Y \in \mathcal{Y}$ に対して, $\omega\text{-resol.dim}(Y) = \mathcal{X}\text{-resol.dim}(Y)$ である。

8 $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ が $\mathcal{A}$ の完全列で, M_1, M_2, M_3 のうちの 2 つが $\hat{\mathcal{X}}$ に属すれば, 残りの一つも $\hat{\mathcal{X}}$ に属する。

証明は ほとんど [4], [5] に出ている。**2 i** の完全列 ($\mathcal{X}$-approximation と呼ぶ) の minimality は, right $\mathcal{X}$-approximation p の minimality で定義する。**2 ii** の完全列 ($\mathcal{Y}$-hull と呼ぶ) の minimality は, left $\mathcal{Y}$-approximation ι の minimality で定義する。

定理の条件 **AB1–3** が成立する時, $(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \omega)$ は $\mathcal{A}$ の weak Auslander-Buchweitz context であると呼ぶことにする。さらに, $\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{A}$ の時, Auslander-Buchweitz context と呼ぶ。$(\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \omega)$ が $\mathcal{A}$ の Auslander-Buchweitz context の時, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$, ω のどの一つによっても, 残りのものは決まってしまうことに注意する。

3 Relative Ringel's approximation

R は noether 環, G は R 上の split reductive group で, $\mathbb{G}_m \hookrightarrow Z(G)$ が固定されているとする。ここに, $Z(G)$ は G の center である。この仮定により, G-module M は $\mathbb{G}_m$-module となり, 自然に $\mathbb{Z}$-graded となるばかりか, $M = \bigoplus_i M_i$ と直和分解した時, 各 M_i は G-submodule になっている。G-homomorphism は全て次数を保つ。G-module の次数づけは, 全てこの方法により得られる次数づけを指すものとする。与えられた split reductive 群 G_0 に対して, $G := G_0 \times \mathbb{G}_m$ とおいて, 自然な $\mathbb{G}_m \hookrightarrow G$ を考えると, G-modules の category を考察することは, $\mathbb{Z}$-graded な G_0-modules の category を考察することと同じである。

S は R 上 flat of finite type な G-algebra とする。S は上の考察により, $\mathbb{Z}$-graded R-algebra であるが, さらに S は positively graded, つまり $S = \bigoplus_{i \geq 0} S_i$ で, $R \to S_0$ は同型と仮定する。

X_G^+ の saturated subset (即ち, poset ideal) π が t-closed であるとは, $R[G](\pi)$ が $R[G]$ の R-subalgebra (従って, R-subbialgebra) となることをいう。以下, t-closed な π を一つ固定して考える。$R[G](\pi)$-comodules は, tensor product で閉じていることに注意しよう。$R[G](\pi)$-comodule を, π に属する G-module と呼ぶことにする。

$\mathcal{A}_{G,S}(\pi)$ で, S-finite な (G, S)-modules で, G-module として π に属しているもの全体を表す。また,

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}^{\mathrm{reg}}_{G,S}(\pi) &:= \{M \in \mathcal{A}_{G,S}(\pi) \mid M \text{ は } S\text{-projective で } M^* = \mathrm{Hom}_S(M, S) \text{ は good}\} \\
\mathcal{Y}^{\mathrm{reg}}_{G,S}(\pi) &:= \{N \in \mathcal{A}_{G,S}(\pi) \mid N \text{ は good で, } \mathrm{proj.dim}_S N < \infty\}
\end{aligned}$$

とおく。さらに, $\omega^{\mathrm{reg}}_{G,S}(\pi) := \mathcal{X}^{\mathrm{reg}}_{G,S}(\pi) \cap \mathcal{Y}^{\mathrm{reg}}_{G,S}(\pi)$ と定義する。$\pi = X^+$ の時には, (π) は省略して, $\mathcal{A}_{G,S}$, $\mathcal{X}^{\mathrm{reg}}_{G,S}$ などと表すことにする。

命題 3.1 S が good で π に属するならば, $(\mathcal{X}^{\mathrm{reg}}_{G,S}(\pi), \mathcal{Y}^{\mathrm{reg}}_{G,S}(\pi), \omega^{\mathrm{reg}}_{G,S}(\pi))$ は weak Auslander-Buchweitz context である。さらに,

$$
\begin{aligned}
\hat{\mathcal{X}}^{\mathrm{reg}}_{G,S}(\pi) &= \{M \in \mathcal{A}_{G,S}(\pi) \mid \mathrm{proj.dim}_S M < \infty\} \\
\omega^{\mathrm{reg}}_{G,S}(\pi) &= \{T \in \mathcal{A}_{G,S} \mid \text{ある } \pi \text{ に属する tilting } G\text{-module } T_0 \text{ が存在して}, T \cong S \otimes T_0\}
\end{aligned}
$$

である。従って, S が regular ring であれば, さらに Auslander-Buchweitz context である。

以下, この節では, S は good で, π に属する positively graded G-algebra で R-flat of finite type とする。

定理の証明には, 次の表現論の定理が重要である。

定理 3.2 V, W が u-good G-modules ならば, $V \otimes W$ は u-good である。

容易に分かるように, この定理の証明のためには R は体, $V = \nabla_G(\lambda)$, $W = \nabla_G(\mu)$ として構わない。この定理は, S. Donkin によって考えられ [17] 相当良い (標数が 2 でないか, または G が E_7, E_8 型の component を持たない場合) ところまで示され, 最終的には O. Mathieu によって完全に解決された [39]。

さて, $\mathcal{A}_{G,S}(\pi)$ の objects M, N について, $\mathrm{Hom}_{G,S}(M,N)$ は R-finite module である。特に R が Henselian local ならば, $\mathcal{A}_{G,S}(\pi)$ で Krull-Schmidt の定理が成り立ち, $\omega^{\mathrm{reg}}_{G,S}(\pi)$ の object は, 一意的に $S \otimes T_G(\lambda)$ $(\lambda \in \pi)$ の形の (G,S)-modules の直和である。

さて, $(R, \mathfrak{m})$ が noetherian local とし, $\hat{R}$ を R の $\mathfrak{m}$-adic completion とする時, $T_{\hat{R}\otimes G}(\lambda) \cong \hat{R} \otimes T_G(\lambda)$ である。従ってこの場合にも, $\omega^{\mathrm{reg}}_{G,S}(\pi)$ の object は, unique に $S \otimes T_G(\lambda)$ $(\lambda \in \pi)$ の形の (G,S)-modules の直和となることが示される。このことと命題 2.22 を活用して, 次が示される。

命題 3.3 R が local とする。$M \in \hat{\mathcal{X}}^{\mathrm{reg}}_{S,G}(\pi)$ とし,

$$0 \to Y \xrightarrow{i} X \to M \to 0$$

を $\mathcal{X}^{\mathrm{reg}}_{S,G}(\pi)$-approximation とする。この時, 直和分解 $X = X_0 \oplus X_1$ で, $X_0 \subset \mathrm{Im}\, i$, $X_1 \to M$ は right minimal となるものが存在する。特に, M は unique minimal $\mathcal{X}^{\mathrm{reg}}_{S,G}(\pi)$-approximation を持つ。

$\mathcal{Y}^{\mathrm{reg}}_{S,G}(\pi)$-hull に関しても同様の主張が成り立つ。

次は, 定理 2.24 からの帰結に, 上の考察を加味して示される。

定理 3.4 S は命題 3.1 の通りとする。$h \geq 0$, $0 \neq M \in \mathcal{A}_{G,S}$, $\mathrm{codim}\, M \geq h$ とする時, 次は同値である。

1 M は π に属する good module で, M は perfect S-module of codimension h で, $\mathrm{Ext}^h_S(M,S)$ は good である。

2 $\omega^{\mathrm{reg}}_{G,S}(\pi)$-resol.dim$(M) = h$ である。

さらに, R が局所環で, M が上記の条件 **1,2** を充たすとすると, M の長さ h の $\omega_{G,S}^{\mathrm{reg}}(\pi)$-resolution $\mathbb{F}$ で次の条件を充たすものが, (G,S)-complex の同型を無視すれば一意的に存在する。

3 $\mathbb{G}$ が (長さ無限も許す) M の$\omega_{G,S}^{\mathrm{reg}}(\pi)$-resolution であれば, $\mathbb{F}$ は $\mathbb{G}$ の直和因子である。

R が local な場合の定理の $\mathbb{F}$ を, M の minimal $\omega_{G,S}^{\mathrm{reg}}(\pi)$-resolution と呼ぼう。$M$ が R-flat で, $R \to R'$ が local homomorphism であれば, base change $R' \otimes \mathbb{F}$ は $R' \otimes M$ の minimal $\omega_{R'\otimes G, R'\otimes S}^{\mathrm{reg}}(\pi)$-resolution である。

先に述べた定理 0.10 はこの定理の特別な場合である。そのことを示すのが次節の目標となる。

4 Buchsbaum-Rim 型の resolution の存在

Section 0 の状況設定に戻り, R は可換環, $1 \le t \le m \le n$, $V = R^m$, $W = R^n$ で, $S = \mathrm{Sym}(V \otimes W)$, $A = S/I_t$, $G = GL(V) \times GL(W)$ の状況を考える。

定理 0.10 を示すためには, Buchsbaum-Rim 型の resolution の base change は Buchsbaum-Rim 型の resolution であるから, R は noetherian として構わない。まず, $\mathbb{G}_m \hookrightarrow G$ ($t \mapsto (t\mathrm{id}_V, t\mathrm{id}_W)$) により, G は前節の一般的仮定を充たす split reductive group であり, S は多項式環だから, R-flat of finite type で, また明らかに positively graded である。

π として何を選ぶかを詳しく述べるより, $R[G](\pi)$ を何にするかを述べた方が早そうだ (具体的な記述については [29] 参照)。$\bar{G} := \mathrm{End}(V) \times \mathrm{End}(W)$ とおく。$R[\bar{G}]$ は $R[G]$ の subbialgebra (subalgebra で, subcoalgebra) であり, $R[G] = R[\bar{G}][\det_V^{-1}, \det_W^{-1}]$ である。ここに, $\det_V$, $\det_W$ は, $\bigwedge^m V$, $\bigwedge^n W$ にそれぞれ対応した group-like elements である。したがって, $R[\bar{G}]$-comodules の category は, G-modules の category の充満部分圏とみなされるが, この見方をした時, $R[\bar{G}]$-comodule は G の多項式表現と呼ばれる。

$$\pi := \{\lambda \in X_G^+ \mid \mathrm{Hom}_G(\Delta_G(\lambda), R[\bar{G}]) \neq 0\}$$

は, R にはよらず, π に属する G-modules の全体と, G の多項式表現全体は同一となる [29]。π は t-closed であり, V, W は多項式表現で, M が R-projective な多項式表現ならば, $S_i M$, $\bigwedge^i M$, $D_i M := (S_i M^*)^*$ は再び R-projective な多項式表現である。特に, $S = \mathrm{Sym}(V \otimes W)$ は π に属する。また, $A = S/I_t$ は perfect of codimension $h := (m-t+1)(n-t+1)$ であり, したがって $\mathrm{codim}_S A = h$ である。また, A は S の準同型像だから, π に属する。

定理 3.4 により, 次を示せば定理 0.10 が示されることが分かる。

1 π に属する tilting G-modules の全体は, $\bigwedge^i V \otimes \bigwedge^j W$ の形の G-modules の tensor products の direct sum の direct summand の全体と一致する。

2 S と I_t は good である。

3 $\mathrm{Ext}_S^h(A, S)$ は good である。

Good modules は単射の cokernel で閉じているから, **2** から $A = S/I_t$ は good であるが, Buchsbaum-Rim 型の resolution の出だしは S であるとしたので, I_t が good であることまで, 示す必要がある。**2** の主張は, Cauchy's formula, もしくは straightening formula と呼ばれるもので, 古くから何人かの人によって (何度も) 再証明されているが, [2] の証明が表現論的に見て分かりやすいと思う。

1 を示す。まず, $\bigwedge^i V \otimes \bigwedge^j W$ の形の G-modules の tensor products の direct sum の direct summand が tilting であることを見るには, Mathieu's theorem により, $\bigwedge^i V \otimes \bigwedge^j W$ について見れば良い。R-finite projective G-module M が tilting であることと, M と M^* が u-good であることは同値だから, R は体として良く, この場合は, 良く知られているように, $\bigwedge^i V \otimes \bigwedge^j W$ は 0 または既約であり, 後者の時は対応する X_G^+ の元は, X_G^+ の極小元である [33, p.72]。したがって, $\bigwedge^i V \otimes \bigwedge^j W$ は tilting である。π に属するという条件も, $\bigwedge^i V \otimes \bigwedge^j W$ に対して示せば十分で, この場合は自明である。

逆に, $\lambda \in \pi$ に対して, ある $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ と, $\beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots)$ なる partitions (非負整数の弱い意味での減少列) が存在して, $\bigwedge_\alpha V \otimes \bigwedge_\beta W$ は highest weight λ を持ち, $\mathrm{Hom}_G(\Delta_G(\lambda), \bigwedge_\alpha V \otimes \bigwedge_\beta W) \cong R$ であることが確かめられる。ここに,

$$\textstyle\bigwedge_\alpha V := \bigwedge^{\alpha_1} V \otimes \bigwedge^{\alpha_2} V \otimes \cdots,$$
$$\textstyle\bigwedge_\beta W := \bigwedge^{\beta_1} W \otimes \bigwedge^{\beta_2} W \otimes \cdots$$

である。この生成元 (具体的な記述は [2] の coSchur map の定義参照) により, R-split する完全列

$$0 \to \Delta_G(\lambda) \to \textstyle\bigwedge_\alpha V \otimes \bigwedge_\beta W \to D \to 0$$

が得られるが, この完全列が good hull であることは R を体に specialize すれば容易に確かめられる。このことから, $\mathrm{add}(\bigwedge_\alpha V \otimes \bigwedge_\beta W)$ が $\mathcal{X}_{R[\bar{G}]}$ の injective cogenerator であることが確かめられ, 定理 2.24 により, 逆がいえる。

3 が一番厄介である。$K := \mathrm{Ext}_S^h(A, S)$ は, R が有限次元 Gorenstein 環の準同型像の時には, 単に A-module としては, A の canonical module [7, 31, 25] と呼ばれるものである。

補題 4.1 R が有限次元 Gorenstein 環の準同型像であるような環, A が R 上 flat of finite type な positively graded G-algebra とする (ここに, G は $\mathbb{G}_m \subset Z(G)$ を持つ split reductive group)。A が Serre の (S_2)-condition [42] を充たす時 (例えば A が Cohen-Macaulay ならば良い), 次は同値である。

1 ある (G, A)-module K で, K は A-module としては canonical module で, good なものが存在する。

2 (G, A)-module で, A-module としては canonical module であるものは全て good である。

また, 上の補題で, さらに R が regular で, A が Cohen-Macaulay ならば, K は R-projective である。$\mathrm{Ext}_S^h(A, S)$ の構成は base change と可換であり, 一般に K が good であることを確かめるには, $\mathbb{Z}$ 上 u-good であることをいえば十分で, K は R-finite projective な表現の直和であるから, さらに R は体であるとして構わない。したがって, 以下では $R = k$ は体で

あるとして, **3** の証明の概略を述べる。基本的には, Kempf の construction を用いて証明される。

$X := \operatorname{Spec} S$, $Y := \operatorname{Spec} S/I_t$ とおく。$X = \operatorname{Hom}(V, W^*)$ であり, X の generic map を ϕ で表すと, $Y = \operatorname{Zero}(\bigwedge^t \phi)$ である。Γ は V の $(t-1)$-quotients のなす Grassmann variety として,

$$0 \to \mathcal{R} \to V \to \mathcal{Q} \to 0 \tag{4.2}$$

を Γ の tautological exact sequence とする ([36] 参照)。$\tilde{\Gamma} := X \times \Gamma$ とおく。Γ 上の vector bundle $\operatorname{Hom}(\mathcal{Q}, W^*)$ を Z で表す。明らかに

$$0 \to Z \to \tilde{\Gamma} \to \operatorname{Hom}(\mathcal{R}, W^*) \to 0$$

は G-bundles の exact sequence であるから, Z は $\tilde{\Gamma}$ の local complete intersection で, $\operatorname{Zero} s$ と一致する。ここに, cosection $s : \mathcal{R} \otimes W \to \mathcal{O}_{\tilde{\Gamma}}$ は $\operatorname{Hom}(\mathcal{R}, W^*) \cong \operatorname{Hom}(\mathcal{R} \otimes W, \mathcal{O}_\Gamma)$ の generic map である。次の補題は Kempf による ([37] 参照)。

補題 4.3 合成射 $Z \hookrightarrow \tilde{\Gamma} \to X$ は Y を経由し, 誘導された射 $\pi : Z \to Y$ は resolution of singularities である。

補題 4.4 Z の canonical sheaf $\omega_Z = \bigwedge^{\mathrm{top}} \Omega_{Z/k}$ は,

$$(\textstyle\bigwedge^{\mathrm{top}} V)^{\otimes(t-1)} \otimes (\bigwedge^{\mathrm{top}} W)^{\otimes(t-1)} \otimes (\bigwedge^{\mathrm{top}} \mathcal{Q})^{\otimes(n-m)}$$

に G-equivariant sheaf として同型である。

証明 良く知られているように, $\Omega_{\Gamma/k} \cong R \otimes \mathcal{Q}^*$ であり, $Z = \operatorname{Hom}(\mathcal{Q}, W^*)$ だから, $\Omega_{Z/\Gamma} \cong \mathcal{Q} \otimes W$ である。従って, (4.2) に注意すると,

$$\begin{aligned}\omega_Z = \textstyle\bigwedge^{\mathrm{top}} \Omega_{\Gamma/k} \otimes \bigwedge^{\mathrm{top}} \Omega_{Z/\Gamma} &\cong (\textstyle\bigwedge^{\mathrm{top}} \mathcal{R})^{\otimes(t-1)} \otimes (\bigwedge^{\mathrm{top}} \mathcal{Q})^{\otimes(t-m-1)} \otimes (\bigwedge^{\mathrm{top}} \mathcal{Q})^{\otimes n} \otimes (\bigwedge^{\mathrm{top}} W)^{\otimes(t-1)} \\ &\cong (\textstyle\bigwedge^{\mathrm{top}} V)^{\otimes(t-1)} \otimes (\bigwedge^{\mathrm{top}} W)^{\otimes(t-1)} \otimes (\bigwedge^{\mathrm{top}} \mathcal{Q})^{\otimes(n-m)}\end{aligned}$$

となる。 □

この計算を用いると, π は rational resolution [35] であることが示される。したがって, $\pi_* \omega_Z$ が good であることを示せば良いが, その議論は [48] に見るように standard である。

5 Cohen-Macaulay approximation

命題 3.1 は可換環上の Ringel's approximation の素直な relative version であるが, S が regular でないと, Auslander-Buchweitz context にならなかった。もう少し, $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ の環論的条件を (weak Auslander-Buchweitz context になることを崩さずに) 緩めることを考える。

この節では, R は noether 環, G は指定された $\mathbb{G}_m \subset Z(G)$ を持つ R-split reductive group, S は G-algebra で R-flat of finite type で positively graded で G-module として good とする。さらに, S は regular と仮定する。よって, R は regular で, S は (positively graded だか

ら) R-smooth である。また, I は S の G-ideal で, $A := S/I$ は R-flat とする。A は perfect S-module of codimension h と仮定する。$K_A := \mathrm{Ext}^h_S(A, \omega_{S/R})$ とおく。

$M \in \mathcal{A}_{G,A}$ が maximal Cohen-Macaulay (MCM) であるとは, 任意の $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ に対して, $M_{\mathfrak{p}}$ が $A_{\mathfrak{p}}$-module として maximal Cohen-Macaulay (単に Cohen-Macaulay と呼ぶこともある [50]) であることをいう。この条件は $\mathrm{Ext}^i_A(M, K_A) = 0$ $(i > 0)$ と同値である。

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{G,A} &:= \{M \in \mathcal{A}_{G,A} \,|\, M \text{ は MCM で, } \mathrm{Hom}_A(M, K_A) \text{ は good}\} \\ \mathcal{Y}_{G,A} &:= \{N \in \mathcal{A}_{G,A} \,|\, \mathrm{Hom}_A(K_A, N) \text{ は good で, } \forall \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \ \ \mathrm{inj.dim}_{A_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} < \infty\} \end{aligned}$$

とおき, $\omega_{G,A} := \mathcal{X}_{G,A} \cap \mathcal{Y}_{G,A}$ とおく。

定理 5.1 $(\mathcal{X}_{G,A}, \mathcal{Y}_{G,A}, \omega_{G,A})$ は $\mathcal{A}_{G,A}$ の Auslander-Buchweitz context である。

この定理は, $A = S$ の時には, 命題 3.1 の $\pi = X^+_G$ の場合である。特に, $R = A = S$ の時には 本質的には定理 2.18 である。さらに R が体ならば, 本質的には Ringel's approximation である。

一方, $G = \mathbb{G}_m$ の時には, この approximation は, Cohen-Macaulay approximation の graded version になっている。

また, R が regular ring の時に, section 0, section 4 の状況を考えると, 定理の仮定が充たされており, non-trivial な例を与える。その他, 交代行列の Pfaffian ideal もやはり定理の仮定を充たしている。この節の設定の下で, $\mathcal{X}_{G,A}$ を調べることは, Cohen-Macaulay 環の上の maximal Cohen-Macaulay modules を調べることの equivariant version であり, 興味のある問題であるが, 今後の課題である。

参考文献

[1] K. Akin, D. A. Buchsbaum and J. Weyman, Resolutions of determinantal ideals: the submaximal minors, *Adv. in Math.* **39** (1981), 1-30.

[2] K. Akin, D. A. Buchsbaum and J. Weyman, Schur functors and Schur complexes, *Adv. in Math.* **44** (1982), 207–278.

[3] Y. Aoyama and S. Goto, On the type of graded Cohen-Macaulay rings, *J. Math. Kyoto Univ.* **15** (1975), 19–23.

[4] M. Auslander and R. O. Buchweitz, The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations, Soc. Math. de France, Mem **38** (1989), 5-37.

[5] M. Auslander and I. Reiten, Applications of contravariantly finite subcategories, *Adv. Math.* **86** (1991), 111–152.

[6] P. Berthelot, A. Grothendieck, L. Illusie et al., "Theorie des intersections et Théorème de Riemann-Roch, SGA6," *Lect. Notes Math.* **225**, Springer Verlag (1971).

[7] W. Bruns and J. Herzog, "Cohen-Macaulay rings," Cambridge (1993).

[8] W. Bruns and U. Vetter, "Determinantal rings," *Lect. Notes Math.* **1327**, Springer Verlag (1988).

[9] D. A. Buchsbaum, A generalized Koszul complex, I, *Trans. Amer. Math. Soc.* **111** (1964), 183–196.

[10] D. A. Buchsbaum, A New construction of the Eagon-Northcott Complex, *Adv. Math.* **34** (1979), 58–76.

[11] D. A. Buchsbaum, aural communication (1996).

[12] D. A. Buchsbaum and D. S. Rim, A generalized Koszul complex, II, Depth and multiplicity, *Trans. Amer. Math. Soc.* **111** (1964), 197–224.

[13] D. A. Buchsbaum and D. S. Rim, A generalized Koszul complex, III, A remark on generic acyclicity.

[14] E. Cline, B. Parshall and L. Scott, Finite dimensional algebras and highest weight categories, *J. Reine angew. Math.* **391** (1988), 85–99.

[15] E. Cline, B. Parshall and L. Scott, Integral and graded quasi-hereditary algebras, I, *J. Algebra* **131** (1990), 126–160.

[16] M. Demazure, Schémas en groupes réductifs, *Bull. Soc. Math. France* **93** (1965), 365–413.

[17] S. Donkin, "Rational representations of algebraic groups," *Lect. Notes Math.* **1140**, Springer Verlag (1985).

[18] S. Donkin, On Schur algebras and related algebras, I, *J. Alg.* **104** (1986), 310–328.

[19] S. Donkin, On tilting modules for algebraic groups, *Math. Z.* **212** (1993), 39–60.

[20] J. A. Eagon and D. G. Northcott, Ideals defined by matrices and a certain complex associated with them, *Proc. Roy. Soc. London* Ser. A **269** (1962), 188-204.

[21] E. Friedlander, A canonical filtration for certain rational modules, *Math. Z.* **188** (1985), 433–438.

[22] S. Goto and K.-i. Watanabe, On graded rings, I, *J. Math. Soc. Japan,* **30** (1978), 179–213.

[23] S. Goto and K.-i. Watanabe, On graded rings, II ($\mathbb{Z}^n$-graded rings), *Tokyo J. Math.* **1** (1978), 237–261.

[24] A. Grothendieck, "Eléments de Géométrie Algébrique IV," IHES Publ. Math. **20** (1964), **24** (1965), **28** (1966), **32** (1967).

[25] R. Hartshorne, "Residues and Duality," *Lect. Notes Math.* **20**, Springer Verlag, (1966).

[26] M. Hashimoto, Determinantal ideals without minimal free resolutions, *Nagoya Math. J.* **118** (1990), 203–216.

[27] M. Hashimoto, Resolutions of determinantal ideals: t-minors of $(t+2)\times n$ matrices, *J. Algebra* **142** (1991), 456–491.

[28] M. Hashimoto, A generalization of Matijevic-Roberts theorem, to appear in 「第 18 回可換環論シンポジウム報告集」.

[29] 橋本光靖, q-Schur algebra の tilting module, in 数理研講究録 **934**「トーリック多様体の幾何と凸多面体」(1996), 190–211.

[30] M. Hashimoto and K. Kurano, Resolutions of determinantal ideals, in 「1989 代数幾何学シンポジューム記録」, 城崎 (1990), pp.116–133.

[31] J. Herzog und E. Kunz, "Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings," *Lect. Notes Math.* **238**, Springer Verlag (1971).

[32] M. Hochster and J. A. Eagon, Cohen-Macaulay rings, invariant theory, and the generic perfections of determinantal loci, *Amer. J. Math.* **93** (1971), 1020-1059.

[33] J. E. Humphreys, "Introduction to Lie algebras and representation theory," Springer (1972).

[34] J. C. Jantzen, "Representations of algebraic groups," Academic Press (1987).

[35] G. Kempf, F. Knudsen, D. Mumford and B. Saint-Donat, "Toroidal Embeddings I,", *Lect. Notes Math.* **339**, Springer Verlag (1973).

[36] S. L. Kleiman, Geometry on Grassmannians and applications to splitting bundles and smoothing cycles, *Publ. Math. I.H.E.S.* **36** (1969), 281-298.

[37] A. Lascoux, Syzygies des varietiés déterminantales, *Adv. in Math.* **30** (1978), 202-237.

[38] S. Mac Lane, "Homology," Springer (1963).

[39] O. Mathieu, Filtrations of G-modules, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup.* (4) **23** (1990), 625–644.

[40] J. Matijevic, Three local conditions on a graded ring, *Trans. Amer. Math. Soc.* **205** (1975), 275–284.

[41] J. Matijevic and P. Roberts, A conjecture of Nagata on graded Cohen-Macaulay rings, *J. Math. Kyoto Univ.* **14-1** (1974), 125–128.

[42] H. Matsumura, "Commutative Ring Theory," First paperback edition, Cambridge (1989).

[43] J.-i. Miyachi, Duality for derived categories and cotilting bimodules, *J. Alg.* **185** (1996), 583–603.

[44] S. Montgomery, "Hopf algebras and their actions on rings," *AMS CBMS* **82**, AMS (1993).

[45] P. Pragacz and J. Weyman, Complexes associated with trace and evaluation. Another approach to Lascoux's resolution, *Adv. in Math.* **57** (1985), 163-207.

[46] M. Raynaud, Flat modules in algebraic geometry, in "Algebraic Geometry," Oslo 1970, Proc. 5th Nordic Summer School in Math., pp. 255–275.

[47] C. M. Ringel, The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences, *Math. Z.* **208** (1991), 209–223.

[48] J. Roberts and J. Weyman, A short proof of a theorem of M. Hashimoto, *J. Alg.* **134** (1990), 144-156.

[49] P. Roberts, Le théorème d'intersection, *C. R. Acad. Sc. Paris Sér. I no. 7* **304** (1987), 177–180.

[50] Y. Yoshino, "Cohen-Macaulay Modules over Cohen-Macaulay Rings," LMS **146**, Cambridge (1990).

Some bounded infinite $D\mathrm{Tr}$-orbits for Frobenius algebras

飛田明彦 埼玉大学教育学部

1 Introduction

k を代数的閉体, A を有限次元k-algebra とする. Ringel は [4] において次の問題を提起している.

Question([4]) Γ を A の Auslander-Riten quiver の component とすると, 自然数 n に対して $\dim_k M = n$ となる $M \in \Gamma$ は有限個か?

これに対し次の反例が知られている.

Example 1.1([3],[5]) $\alpha(\neq 0) \in k$ に対し,

$$A = k < x, y, z > /(x^2, y^2, z^2, yx - \alpha xy, zy - \alpha yz, xz - \alpha zx)$$

とすると, A は symmetric k-algebra で $\dim_k A = 8$ である. $M = (x+y)A$ とおくと right A-module として $\Omega^i(M) = (x + (-\alpha)^i y)A$, $\dim_k \Omega^i(M) = 4$ であり, α が 1 の巾根でないとき, $i \neq 0$ に対しては $\Omega^i(M)$ と Mは同型ではない. A は symmetric なので Auslander-Riten translation $D\mathrm{Tr} = \Omega^2$ であり, これは Ringel の Question に対する反例となっている.

この example は次の example をもとに作られたものである.

Example 1.2([6],[7])$R = k < x, y > /(x^2, y^2, yx - \alpha xy)$ $(\alpha(\neq 0) \in k)$ とすると R は Frobenius algebra で $\dim_k R = 4$ である. Example 1.1 における A は R の $DR = \mathrm{Hom}_k(R, k)$ による trivial extension となっている. $N = (x+y)R$ とおくと $\Omega^i(N) = (x + (-\alpha)^i y)R$, $\dim_k \Omega^i(N) = 2$ であり α が 1 の巾根ではないとき $i \neq 0$ に対しては $\Omega^i(N)$ と N は同型ではない. しかし, この場合 $D\mathrm{Tr}N = N$ であり, Ringel の問題の反例にはなっていない. 一方 $\mathrm{Ext}^i_R(N, N) = 0 (i > 1)$ であり N は selfinjective algebra 上の加群で selfextension が 0 に近い例となっている.

一方, 幾何学的な data から algebra を構成するという観点から次のことが得られている.

Example 1.3([9, pp.342–343]) $V = k^3, \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}(V^*)$ とする. X を $\mathbf{P}^2$ または $\mathbf{P}^2$ における degree 3 の divisor, $\sigma \in Aut(X)$ とする. $\mathbf{\Delta}(\subseteq \mathbf{P}^2 \times \mathbf{P}^2)$ を σ の graph とし, $R = \{f \in V \otimes V | f_{\mathbf{\Delta}} = 0\}$ とおくと, 少数の例外を除いて $T(V)/(R)$ は quantum polynomial ring になり, $A = T(V^*)/(R^{\perp})$ ($R^{\perp}$ は $V^* \otimes V^*$ における R の直交空間) は graded Frobenius algebra で $\dim_k A = 8$ である. さらに X の閉点で parametrize された cyclic graded A-module $L(p)$ で $\dim_k L(p) = 4$ となるものが存在する. Example 1.1 の algebra も, X, σ を適当にとることにより得られる. また $X = \mathbf{P}^2$ の場合は, A として exterior algebra $\Lambda(k^3)$ の twist $\Lambda(k^3)_\sigma$ (section 2 参照) が現れる.

上の様な構成が一般の次元でどの程度までできるのか, 講演者には分からないが, $\Lambda(k^n)_\sigma$ (section 2 参照) については次が成り立つ.

Theorem 1.4 $A = \Lambda(k^n)$, $\sigma \in GL(A_1) = GL_n(k)$ とする. $x(\neq 0) \in A_1$ に対し $M_i = (x^{\sigma^i})_\sigma A_\sigma$, $M = M_0$ とおく.
(1)A_σ は graded Frobenius algebra で $\dim_k A_\sigma = 2^n$ である.
(2)(graded module ではなく単に A_σ-module として)

$$\dim_k M_i = 2^{n-1},$$

$$\Omega^i(M) \cong M_{-i},$$

$$(D\mathrm{Tr})^i M \cong M_{i(n-2)}.$$

(3) 任意の $i \neq 0$ に対して $x^{\sigma^i} \notin kx$ ならば, M は Ω-periodic ではなく,

$$\dim_k \mathrm{Ext}^i_{A_\sigma}(M, M) = \begin{cases} \binom{n-1}{i} & (0 < i < n) \\ 0 & (i \geq n) \end{cases}$$

となる. 更に $n \geq 3$ ならば M は DTr-periodic ではない.

Theorem 1.4 において $n = 2$, $\sigma = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とした場合が Example 1.2 である. 但し, Example 1.1 の algebra は $\Lambda(k^n)_\sigma$ の形には表せない. 体 k の標数が 2 の場合には $\Lambda(k^n)$ は elementary abelian 2-group の group algebra となる. section 3 ではこの観点から,加群の variety との関連も含めて考えてみたい.

2 Graded algebras

順序は逆になるが, Theorem 1.4 並びに section 3 で現れる graded algebra の twist について説明する ([1, pp.378] 参照). $A = \bigoplus_{i \geq 0} A_i$ を graded k-algebra, σ を graded algebra としての A の automorphism で k の element は動かさないものとする. $A_\sigma = \{a_\sigma | a \in A\}$ を graded k-space として A の copy とし, $a \in A_i$, $b \in A$

に対して積を $a_\sigma \cdot b_\sigma = (a \cdot b^{\sigma^i})_\sigma$ と定義すると A_σ は graded algebra となる．例えば A が exterior algebra $\Lambda(k^3) = k < x_1, x_2, x_3 > /(x_i^2, x_i x_j + x_j x_i)$ の場合，

$$A_\sigma \cong k < x_1, x_2, x_3 > /(x_i x_i^{\sigma^{-1}}, x_i x_j^{\sigma^{-1}} + x_j x_i^{\sigma^{-1}})$$

となる．また，A が有限次元 Frobenius algebra (即ち，$A_A \cong \mathrm{Hom}_k(A,k)_A$) であれば，$A_\sigma$ もそうである．

grmod-A を有限生成 graded right A-module の category とする．$M \in$ grmod-A に対し $M_\sigma = \{m_\sigma | m \in M\}$ とおき $m \in M_i$，$a \in A$ について $m_\sigma \cdot a_\sigma = (m \cdot a^{\sigma^i})_\sigma$ と定めると $M_\sigma \in$ grmod-A_σ である．また，$M[n] \in$ grmod-A を A-module としては $M[n] = M$, 但し $M[n]_i = M_{n+i}$ と定義する．$M, N \in$ grmod-A に対し，

$$\mathrm{Hom}_A(M,N)_i = \{f \in \mathrm{Hom}_A(M,N) | f(M_n) \subseteq N_{n+i} \text{ for any } n\}$$

とおくと $\mathrm{Hom}_A(M,N) = \bigoplus_i \mathrm{Hom}_A(M,N)_i$ である．$f \in \mathrm{Hom}_A(M,N)_0$ に対して $f_\sigma : M_\sigma \longrightarrow N_\sigma$ を $f_\sigma(m_\sigma) = (f(m))_\sigma$ と定義すると $f_\sigma \in \mathrm{Hom}_{A_\sigma}(M_\sigma, N_\sigma)_0$ であり $M \mapsto M_\sigma$ により category equivalence, grmod-$A \cong$ grmod-A_σ が得られる．

一方，$M \in$ grmod-A に対し $M^\sigma \in$ grmod-A を $M^\sigma = M$，$m \cdot a = ma^{\sigma^{-1}}$ $(m \in M, a \in A)$ と定義すると $M_\sigma[-i] \cong (M^{\sigma^i}[-i])_\sigma$ である．

3 The twists of group algebras

以下 $char\ k = p > 0$ とする．$G =< x_1, \ldots, x_r >$ を位数 p^r の elementary abelian p-group (位数 p の巡回群 r 個の直積) とし，A を group algebra kG とする．$x_i - 1 = X_i$ とおくと $A \cong k[X_1, \ldots, X_r]/(X_1^p, \ldots, X_r^p)$ であり，X_i の degree を 1 として A を graded algebra と考えることにする．cohomology 環 $H^*(G,k) = \mathrm{Ext}_A^*(k,k)$ の maximal ideal spectrum を $V_G(k)$ で表す．$p = 2$ のときは，

$$H^*(G,k) = k[\zeta_1, \ldots, \zeta_r],\ \deg \zeta_i = 1$$

であり，$p > 2$ ならば，

$$H^*(G,k) = k[\zeta_1, \ldots, \zeta_r] \bigotimes \Lambda(\eta_1, \ldots, \eta_r),\ \deg \zeta_i = 2,\ \deg \eta_i = 1$$

であるから，$V_G(k) \cong \mathrm{A}^n(k)$ である．有限生成 (right) A-module M に対し J_M を $H^*(G,k)$ における $\mathrm{Ext}_A^*(M,M)$ の annihilator とし，$V_G(M) = V(J_M)$ (J_M によって定まる $V_G(k)$ の closed subset) とおく．

$V = \bigoplus_{n \geq 0} V_n$ を graded k-space で各 n に対して $\dim_k V_n$ は有限であるものとする．V の rate of growth $\gamma(V)$ を，定数 κ があり，全ての n に対して $\dim_k V_n \leq \kappa n^{c-1}$ となる最小の整数 $c(\geq 0)$ と定義する．有限生成 A-module M に対して complexity $c(M)$ を M の minimal projective resolution $P_\bullet$ の rate of growth として定義する．$c(M) = \gamma(\mathrm{Ext}_A^*(M,k))$ でもある．

加群の variety については次が知られている([2, Theorem 5.1.1] 参照).

Theorem 3.1 (1)dim $V_G(M) = c(M) = \gamma(\mathrm{Ext}^*_A(M,M))$.
(2)M が projective であることと $V_G(M) = \{0\}$ となることは同値である.
(3)$V_G(M \otimes N) = V_G(M) \bigcap V_G(N)$, $V_G(M^*) = V_G(M)$ である.
(4)$V_G(M) \bigcap V_G(N) = \{0\}$ ならば $\mathrm{Ext}^n_A(M,N) = 0$ $(n > 0)$ である.

以下 σ を A の graded k-algebra としての automorphism とし, $B = A_\sigma$ とおく. graded B-module に対し, その complexity と cohomology ring の rate of growth について調べることにする.

Proposition 3.2 $M, N \in$ grmod-A とする. $V_G(M^{\sigma^i}) \cap V_G(N) = \{0\}$ $(\forall\, i \neq 0)$ ならば $\mathrm{Ext}^n_B(M_\sigma, N_\sigma) = 0$ $(n \gg 0)$ である.

Proof. Hom の場合と同様に $\mathrm{Ext}^n_A(M,N) = \bigoplus_i \mathrm{Ext}^n_A(M,N)_i$ となっている. また,

$$\mathrm{Ext}^n_B(M_\sigma, N_\sigma)_i \cong \mathrm{Ext}^n_B(M_\sigma[-i], N_\sigma)_0 \cong \mathrm{Ext}^n_A(M_\sigma[-i]_{\sigma^{-1}}, N)_0$$

$$\cong \mathrm{Ext}^n_A(M^{\sigma^i}[-i], N)_0 \cong \mathrm{Ext}^n_A(M^{\sigma^i}, N)_i$$

である. $\mathrm{Ext}^n_A(M^{\sigma^i}, N) = 0$ $(n > 0,\ i \neq 0)$ であるので, $n > 0$ に対しては

$$\mathrm{Ext}^n_B(M_\sigma, N_\sigma)_i \cong \mathrm{Ext}^n_A(M^{\sigma^i}, N)_i \neq 0$$

となる i は $i = 0$ のみである. しかし $\mathrm{Ext}^n_A(M,N)_0 \neq 0$ となる n は有限個しかない.

Example 3.3 $s \leq r/2$ とし $\alpha(\neq 0) \in k$ は 1 の巾根ではないとする. $\beta \in k$ に対し $M(\beta) = A/(X_1 + \beta X_2, \ldots, X_{2s-1} + \beta X_{2s})$ とおくと

$$V_G(M(\beta)) = V(\beta'\zeta_1 - \zeta_2, \ldots, \beta'\zeta_{2s-1} - \zeta_{2s}, \zeta_{2s+1}, \ldots, \zeta_r),$$

但し

$$\beta' = \begin{cases} \beta & (p = 2) \\ \beta^p & (p > 2) \end{cases}$$

である. $\sigma \in Aut(A)$ を

$$X_i^\sigma = \begin{cases} \alpha X_i & (i = \text{even},\ 2 \leq i \leq 2s) \\ X_i & (i = \ \text{odd or } i > 2s) \end{cases}$$

と定義する. $M = M(1)$ とおくと $M^{\sigma^i} \cong M(\alpha^i)$ である. $M_\sigma \in$ grmod-B を考えると, $c(M_\sigma) = c(M) = \dim V_G(M) = s$ である. $V_G(M^{\sigma^i}) \cap V_G(M) = \{0\}$ $(\forall\, i \neq 0)$ であるから Proposition 3.2 より $\mathrm{Ext}^n_B(M_\sigma, M_\sigma) = 0$ $(n \gg 0)$ である.

以下 $p=2$ と仮定する.

Theorem 3.4 $M, N \in$ grmod-A, s を整数とする.
(1)$\dim V_G(M^{\sigma^i}) \cap V_G(N) \leq s$ $(\forall i \neq 0)$ ならば $\gamma(\mathrm{Ext}^*_B(M_\sigma, N_\sigma)) \leq s$ である.
(2)i には依存しない定数 m があり, 各 i について $\mathrm{Ext}^*_A(M^{\sigma^i}, N)$ が $H^*(G,k)$-module として $\bigoplus_{j=0}^m \mathrm{Ext}^j_A(M^{\sigma^i}, N)$ で生成されているとする. $\dim V_G(M^{\sigma^i}) \cap V_G(N) \geq s$ $(\forall i \neq 0)$ ならば $\gamma(\mathrm{Ext}^*_B(M_\sigma, N_\sigma)) \geq s$ である.
(3)$\dim V_G(M^{\sigma^i}) \cap V_G(N) = 1 (\forall i \neq 0)$ ならば $\gamma(\mathrm{Ext}^*_B(M_\sigma, N_\sigma)) = 1$ である.

これらは同型 $\mathrm{Ext}^n_B(M_\sigma, N_\sigma)_i \cong \mathrm{Ext}^n_A(M^{\sigma^i}, N)_i$ と Theorem 3.1 を用いて示される. $\dim V_G(M^{\sigma^i}) \cap V_G(N) = 1$ ならば (2) の最初の条件は満たされるので (3) は (1) と (2) から $s=1$ として得られる.

$X \in$ grmod-B は indecomposable で $c(X)=1$ とする. X が Ω-periodic (即ち graded module としてではなく単に B-module として $\Omega^n(X) \cong X (\exists n \neq 0)$) ならば $\mathrm{Ext}^*_B(X,X)$ はNoether 環である. 一方 X が Ω-periodic ではないとすると,
(a)$\mathrm{Ext}^n_B(X,X) = 0$ $(n \gg 0)$
(b)$\mathrm{Ext}^*_B(X,X)$ は Noether 環ではない
のどちらか一方のみが成り立つ([8]). この違いはどこからくるのだろうか. Proposition 3.2, Theorem 3.4(3) は(特殊な algebra と module に対してではあるが) ひとつの判定法を与えている.

Example 3.5 G を位数 8 の elmentary abelian 2-group とし, $\alpha(\neq 0) \in k$ は 1 の巾根ではないとする. $\sigma \in Aut(A)$ を

$$X_i^\sigma = \begin{cases} X_i & (i=1,3) \\ \alpha X_2 & (i=2) \end{cases}$$

と定義する (Example 3.3 参照). この場合,

$$B \cong k < X_1, X_2, X_3 > /(X_1^2, X_2^2, X_3^2, X_1X_2+\alpha X_2X_1, X_2X_3+\alpha^{-1}X_3X_2, X_3X_1+X_1X_3)$$

である.

(1)$M = A/(X_1+X_2)$ とすると (これは Example 3.3 の M と同じである) $c(M)=1$ であり, $V_G(M^{\sigma^i}) = V(\alpha^i\zeta_1+\zeta_2, \zeta_3)$ (原点と $(1,\alpha^i,0)$ を通る直線) となっている. $V_G(M^{\sigma^i}) \cap V_G(M) = \{0\}$ $(\forall i \neq 0)$ なので $\mathrm{Ext}^n_B(M_\sigma, M_\sigma) = 0$ $(n \gg 0)$ となり, これは上の (a) の場合である.

(2)$N = (X_1, 0)A + (X_2+X_3, X_1)A (\subseteq A \bigoplus A)$ とすると

$$N^{\sigma^i} = (X_1, 0)A + (\alpha^i X_2 + X_3, X_1)A (\subseteq A \bigoplus A)$$

である. 任意の i に対して $V_G(N^{\sigma^i}) = V_G(N) = V(\zeta_2, \zeta_3)$ (原点と $(1,0,0)$ を通る直線) であり $c(N_\sigma) = c(N) = 1$ である. $V_G(N^{\sigma^i}) = V_G(N)$ $(\forall i)$ であるので

$\gamma(\mathrm{Ext}^*_B(N_\sigma, N_\sigma)) = 1$ である．一方 $i \neq 0$ に対しては N と N^{σ^i} は同型ではない ($NX_1(X_2+X_3)=0$ だが $N^{\sigma^i}X_1(X_2+X_3) \neq 0$) ことから N_σ は Ω-periodic ではないことがわかり，これは上の (b) の場合である．

(3)$L = A/(X_1+X_2, X_3)$ とすると $V_G(L^{\sigma^i}) = V(\alpha^i\zeta_1+\zeta_2)$ であり $i \neq 0$ ならば $V_G(L) \cap V_G(L^{\sigma^i})$ は原点と $(0,0,1)$ を通る直線である．$c(L_\sigma) = 2$ だが Theorem 3.4 より $\gamma(\mathrm{Ext}^*_B(L_\sigma, L_\sigma)) = 1$ である．また $\mathrm{Ext}^*_B(L_\sigma, L_\sigma)$ は Noether 環ではない．

参考文献

[1] M. Artin, J.Tate and M. van den Bergh *Modules over regular algebras of dimension 3.* Invent. math. 106 (1991), 335-388.

[2] D. J. Benson. *Representations and cohomolody II.* Cambridge studies in advanced mathematics 31, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.

[3] S. Liu and R. Schulz. *The existence of bounded infinite DTr-orbits.* Proc. Amer. Math. Soc. 122 (1994), 1003-1005.

[4] C. M. Ringel. *Representation theory of finite-dimensional algebras.* London Math. Soc. Lectur Note Ser. 116, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1986), 7-79.

[5] C .M. Ringel. *The Liu-Schulz example.* Representation theory of algebras. CMS Conf. Proc. Vol. 18 (1996), 587-600.

[6] R. Schulz. *Boundedness and periodicity of modules over QF rings.* J. Algebra 101 (1986), 450-469.

[7] R. Schulz. *A non-projective module without self-extensions.* Arch. Math. 62 (1994), 497-500.

[8] R. Schulz. *Finite generation of the extension algebra* $Ext^*_R(M,M)$. J. Austral. Math. Soc. (Series A) 59 (1995), 366-374.

[9] S. P. Smith *Some finite dimensional algebras related to elliptic curves.* Representation theory of algebras and related topics. CMS Conf. Proc. Vol. 19 (1996), 315-348.

全ての有限生成射影加群が QF 準同型環を持つ環について

星野光男（筑波大学数学系）

全ての有限生成射影加群が QF 準同型環を持つ環の構造について最近の結果を報告する（[2], [6], [7] の要約を与える）。但し、証明は省略する。

以下に於て、環は結合法則を満たしかつ単位元を持つとし、環準同型写像は単位元を保存するものとする。特に、環は加群の上に単位的に作用するものとする。また記法 ${}_AX$（X_A）は考察している加群 X が左（右）A 加群であることを表わす。

結果を述べるのに必要な定義を幾つか復習する。両側アルティンかつ両側自己入射的な環 A を QF 環（正確には quasi-Frobenius 環）と呼ぶ。環 A が QF 環であるためには片側ネターかつ片側自己入射的であることが必要十分である。雪本 [7] に従い、全ての羃等元 $e \in A$ に対して eAe が QF 環である様な環を SQF 環と呼ぶことにする。特に $e = 1$ として SQF 環 A は QF 環である。QF 環は森田不変、即ち QF 環に森田同値な環は QF 環である。従って SQF 環もまた森田不変である。

右 A 加群 A_A が全ての $\mathrm{End}_A(P_i)$ が局所環である様な直和分解 $A_A \cong \oplus_{i=1}^m P_i$ を持つとき、環 A を semi-perfect と呼ぶ。函手 $\mathrm{Hom}_A(-, {}_AA_A)$ に依りこの定義は左右対称である。また、環 A が semi-perfect であるためには、有限生成射影右 A 加群の圏に於て Krull-Schmidt の定理が成り立つことが必要十分である。Semi-perfect 環 A に対して、非同型な有限生成直既約射影右 A 加群の完全代表系の直和の準同型環 A_0 を環 A の basic 環と呼ぶ（森田同値類の中で極小なものが basic 環であるが、一般の環については良く分からない）。$\{e_1, \cdots, e_n\}$ を直交する原始羃等元の完全代表系とすれば A_0 は $(\sum_{i=1}^n e_i)A(\sum_{i=1}^n e_i)$ で与えられる。自分自身がその basic 環である様な環を basic（正確には self-basic）と呼ぶ。

A を QF 環とし $\{e_1, \cdots, e_n\}$ を直交する原始羃等元の完全代表系とする。このとき、$\mathrm{soc}(e_iA_A) \cong \mathrm{top}(e_{\nu(i)}A_A)$ に依って定義される集合 $I = \{1, \cdots, n\}$ の置換 ν をQF 環 A の中山置換と呼ぶ。中山置換が恒等的なる QF 環を weakly symmetric と呼ぶ。Weakly symmetric 環は SQF 環である。QF 環 A が $\tau(e_i) = e_{\nu(i)}$ for all $i \in I$ なる自己同型 τ を持つとき、τ を A の中山自己同型と呼ぶ。Weakly symmetric 環 A は中山自己同型 id_A を持つ。

主定理を述べるには Kupisch [3] に依って導入された歪行列環の概念を必要とする（大城 [5] も参照せよ）。$n \geq 2$ を自然数とする。Q を環、(σ, c) を条件

(*) $$\sigma(c) = c \text{ and } \sigma(q)c = cq \text{ for all } q \in Q$$

を満たす $\sigma \in \operatorname{Aut} Q$, $c \in Q$ の組とする。このとき、Q の拡大環 $A = \mathrm{M}_n(Q; \sigma, c)$ で ${}_QA \cong {}_QQ^{n^2}$ かつ ${}_AA \cong {}_A\mathrm{Hom}_Q({}_QA_A, {}_QQ)$ なるものが存在する（第3・5節を参照せよ）。特に Q が QF 局所環で $c \in \operatorname{rad} Q$ のときには $\mathrm{M}_n(Q; \sigma, c)$ は中山自己同型を持つ basic な SQF 環で中山置換は巡回置換である（大城 [5] に依る）。

主結果は次の定理である。

定理 A ([2]) Basic な QF 環 A に対して次の3条件は同値である.

(1) A は SQF 環.

(2) 全ての原始冪等元 $e \in A$ に対して $(1 - e)A(1 - e)$ は QF 環.

(3) $A \cong A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_t$, 但し A_0 は weakly symmetric 環で各 A_k $(1 \leq k \leq t)$ は或歪行列環 $\mathrm{M}_n(Q; \sigma, c)$（$Q$ は QF 局所環, $\sigma \in \operatorname{Aut} Q$, $c \in \operatorname{rad} Q$）に同型.

(1) $\Rightarrow$ (2) は自明。(3) $\Rightarrow$ (1) は大城 [5] に依る。また、(1) $\Rightarrow$ (3) は雪本 [7] と大城・林 [6] で殆ど示されている。筆者は (2) $\Rightarrow$ (3) を彼等とは異なる方法で示した。

上に注意した様に weakly symmetric 環および歪行列環 $\mathrm{M}_n(Q; \sigma, c)$（$Q$ は QF 局所環, $\sigma \in \operatorname{Aut} Q$, $c \in \operatorname{rad} Q$）は共に中山自己同型を持つことから次の系を得る。

系 B ([2]) Basic な SQF 環 A は中山自己同型を持つ.

上の定理・系は QF を PF (Pseudo-Frobenius) で置き換えてもそのまま成立することを宇部短期大学の小池氏に依って指摘された。

第1節では冪等元に依る加群の圏の局所化の理論に於ける標準的な事実を復習する。第2節では (2) $\Rightarrow$ (3) の半分、即ち (2) $\Rightarrow$ "$A \cong A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_t$, 但し A_0 は weakly symmetric 環で各 A_k $(1 \leq k \leq t)$ は巡回中山置換を持つ" を示す。第3節では歪行列環 $\mathrm{M}_n(Q; \sigma, c)$ を構成し(3) $\Rightarrow$ (1) を示す。第4節で (2) $\Rightarrow$ (3) の残り半分、即ち各 A_k $(1 \leq k \leq t)$ が或歪行列環 $\mathrm{M}_n(Q; \sigma, c)$ に同型であることを示す。最後に付録として、第5節で一般の設定の下での歪行列環の構成を与える。

1. 冪等元に依る局所化

本節では環 A の冪等元 $e \in A$ に依る A 加群の圏の局所化の理論に於ける標準的な事実を復習する（もちろん、一般のアーベル圏の局所化の場合も同様）。

補題 1.1 $e \in A$ を環 A の冪等元とする. ${}_AS$ を $eS \neq 0$ なる単純加群とすれば ${}_{eAe}eS$ も単純加群.

補題 1.2　$e \in A$ を環 A の冪等元とする．eA_A は入射的加群で $\mathrm{Ker}(-\otimes_A Ae) \cap \mathrm{Ker}\,\mathrm{Hom}_A(-, eA_A) = \{0\}$ を満たすとする．このとき、eAe_{eAe} が入射的であることと ${}_{eAe}eA$ が平坦であることとは同値．

補題 1.3　$e \in A$ を環 A の冪等元とする．${}_AX$ を入射的左 A 加群で $\mathrm{Ker}(eA_A\otimes -) \subset \mathrm{Ker}\,\mathrm{Hom}_A(-, X)$ とする．このとき、自然な準同型写像

$$\delta_X : {}_AX \to {}_A\mathrm{Hom}_{eAe}(eA, eX),\ x \mapsto (a \mapsto ax)$$

は同型で ${}_{eAe}eX$ は入射的．

系 1.4　A を weakly symmetric 環とする．このとき、任意の冪等元 $e \in A$ に対して eAe は weakly symmetric .

2.　SQF 環の分解

本節を通じて、A は basic な QF 環, $J = \mathrm{rad}\,A$ とする。また $1 = e_1 + \cdots + e_n$、但し e_i は直交する原始冪等元、とする。このとき、A の中山置換 ν は

$$\mathrm{soc}(e_iA_A) \cong e_{\nu(i)}A/e_{\nu(i)}J \ \text{ for } \ i \in I$$

に依って定義される集合 $I = \{1, 2, \cdots, n\}$ の置換 ν として与えられる。$\mu = \nu^{-1}$ と置く。また、$(\ )^* = \mathrm{Hom}_A(-, {}_AA_A)$ と置く。

補題 2.1　各 $i \in I$ に対して次が成立．

(1) $\mathrm{soc}({}_AAe_i) \cong Ae_{\mu(i)}/Je_{\mu(i)}$.

(2) $(e_iA/e_iJ)^* \cong Ae_{\mu(i)}/Je_{\mu(i)}$.

(3) $(Ae_i/Je_i)^* \cong e_{\nu(i)}A/e_{\nu(i)}J$.

補題 2.2　$i \neq j$ なる $i, j \in I$ に対して次が成立．

(1) $(1 - e_j)A(1 - e_j)$ は QF 環で $\mathrm{Ext}^1_A(e_iA/e_iJ, e_jA/e_jJ) \neq 0$ とする．このとき、$j \in \{\mu(i), \mu(j)\}$ が成立．特に、$\mu(i) = i$ なら $\mu(j) = j$ である．

(2) $(1 - e_j)A(1 - e_j)$ は QF 環で $\mathrm{Ext}^1_A(Ae_i/Je_i, Ae_j/Je_j) \neq 0$ とする．このとき、$j \in \{\nu(i), \nu(j)\}$ が成立．特に、$\nu(i) = i$ なら $\nu(j) = j$ である．

系 2.3　$i \neq j$ なる $i, j \in I$ に対して $(1 - e_j)A(1 - e_j)$, $(1 - e_{\mu(i)})A(1 - e_{\mu(i)})$ は共に QF 環で $\mathrm{Ext}^1_A(e_iA/e_iJ, e_jA/e_jJ) \neq 0$ とする．このとき、$\nu(j) = j$ と $\nu(i) = i$ とは同値．また、$\nu(j) \neq j$（または $\nu(i) \neq i$）なら $\nu(j) = i$.

次の定理は雪本 [7, Theorem 2] のちょっとした一般化である。

定理 **2.4**　全ての $i \in I$ に対して $(1 - e_i)A(1 - e_i)$ は QF 環とする．$I_0 = \{i \in I \mid \nu(i) = i\}$ と置き、$I_1, \cdots, I_t$ を集合 I の長さ 2 以上の ν-軌道とする．このとき、各 $0 \le k \le t$ に対して $A_k = (\sum_{i \in I_k} e_i)A(\sum_{i \in I_k} e_i)$ と置けば $A \cong A_0 \times A_1 \times \cdots \times A_t$、但し A_0 は weakly symmetric 環で各 $A_k (1 \le k \le t)$ は巡回中山置換を持つ.

3.　歪行列環

本節では大城 [5] に依って与えられた歪行列環の基本性質を復習する。但し、異なる観点から歪行列環を再構成する。どちらかと言えば、大城 [5] よりも Kupisch [3] に近いと思われる（元々は *"quiver with relations"* で定義したのであるが、ワープロで quiver を描くのが難しいと云う理由で以下の様になった）。

$n \ge 2$ を自然数とし

$$\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & 1 & & n-1 \end{pmatrix}$$

を集合 $I = \{1, 2, \cdots, n\}$ の巡回置換とする。写像 $\ell_n : I \times I \to \mathbb{Z}$ を

$$\ell_n(i, j) = \min\{\, k \ge 0 \mid \nu^k(j) = i \,\} = \begin{cases} j - i & (i \le j) \\ n + j - i & (i > j) \end{cases} \text{ for } i, j \in I$$

に依って定義する。Q を環、(σ, c) を条件

$$(*) \qquad \sigma(c) = c \quad \text{and} \quad cq = \sigma(q)c \ \text{ for all } q \in Q$$

を満たす $\sigma \in \operatorname{End} Q$, $c \in Q$ の組とする。

例 1　$k[x, y]$ を体 k 上の 2 変数多項式環とする。$Q = k[x, y]/(x^2, y^2)$ は 0 次元の Gorenstein ring 局所環である。 $a = x \bmod (x^2, y^2)$, $b = y \bmod (x^2, y^2)$, $c = ab$ と置き、Q の k-自己同型 σ を $\sigma(a) = b$, $\sigma(b) = a$ に依って定義すれば条件 (*) が満たされる。

Kupisch [3] に従い、環 Q の拡大環 $\mathrm{M}_n(Q; \sigma, c)$ を以下の様に構成する（[5, 6] も参照せよ）。$\{\alpha_{ij} \mid i, j \in I\}$ を基底に持つ自由左 Q 加群 $\mathrm{M}_n(Q; \sigma, c)$ の上に乗法を次の規則に依って定める:

(M1) $\alpha_{ij}q = \begin{cases} q\alpha_{ij} & (i \le j) \\ \sigma(q)\alpha_{ij} & (i > j) \end{cases}$ for $q \in Q$;

(M2) $\alpha_{ij}\alpha_{kl} = 0$ unless $j = k$; and

(M3) $\alpha_{ij}\alpha_{jk} = \begin{cases} \alpha_{ik} & (\ell_n(i,j)+\ell_n(j,k)<n) \\ c\alpha_{ik} & (\ell_n(i,j)+\ell_n(j,k)\ge n) \end{cases}$.

結合律を確かめるために

$$\omega(i,j) = \begin{cases} 0 & (i \le j) \\ 1 & (i > j) \end{cases} \text{ and } \lambda(i,j,k) = \begin{cases} 0 & (\ell_n(i,j)+\ell_n(j,k)<n) \\ 1 & (\ell_n(i,j)+\ell_n(j,k)\ge n) \end{cases}$$

と置く。このとき、任意の $i, j, k \in I$ に対して

$$\lambda(i,j,k) = \frac{1}{n}\ \{\ \ell_n(i,j) + \ell_n(j,k)\ -\ \ell_n(i,k)\ \} = \omega(i,j) + \omega(j,k)\ -\ \omega(i,k)$$

が成り立ち、従って任意の $i, j, k, l \in I$、$x_{ij}, x_{jk}, x_{kl} \in Q$ に対して

$$\begin{aligned}(x_{ij}\alpha_{ij}\, x_{jk}\, \alpha_{jk})x_{kl}\,\alpha_{kl} &= x_{ij}\sigma^{\omega(i,j)}(x_{jk})\sigma^{\omega(i,k)+\lambda(i,j,k)}(x_{kl})c^{\lambda(i,j,k)+\lambda(i,k,l)}\alpha_{il} \\ &= x_{ij}\sigma^{\omega(i,j)}(x_{jk})\sigma^{\omega(i,j)+\omega(j,k)}(x_{kl})c^{\lambda(i,j,l)+\lambda(j,k,l)}\alpha_{il} \\ &= x_{ij}\alpha_{ij}\ (x_{jk}\ \alpha_{jk}\ x_{kl}\alpha_{kl})\end{aligned}$$

が成り立つ。故に $\mathrm{M}_n(Q;\ \sigma, c)$ は結合法則を満たす。

また、各 α_{ii} は直交冪等元で $1 = \sum_{i\in I}\alpha_{ii}$ が成り立ち、単射環準同型写像

$$Q \to \mathrm{M}_n(Q;\ \sigma, c),\ \ q \mapsto q(\textstyle\sum_{i\in I}\alpha_{ii})$$

を得る。従って、$\mathrm{M}_n(Q;\ \sigma, c)$ は Q の拡大環となる。

以下に於て、$A = \mathrm{M}_n(Q;\sigma, c)$ と置く。また便宜上 $Q = \mathrm{M}_1(Q;\ \sigma, c)$ とする。

$\mathrm{M}_n(Q;\ \sigma, c)$ の構造は $Q, (\sigma, c), \omega$ に依って決定される。ω の定義から次が従う。

補題 3.1 $I' = \{1 \le i_1 < \cdots < i_r \le n\}$ を I の空でない部分集合とし $e = \sum_{i\in I'}\alpha_{ii}$ と置けば $eAe \cong \mathrm{M}_r(Q;\ \sigma, c)$.

右 Q 加群 $\mathrm{Hom}_Q({}_QA_A,\ {}_QQ_Q)$ は自由加群で

$$x = \sum_{i,j}\beta_{ij}(x)\alpha_{ij} \text{ for } x \in A \text{ and } h = \sum_{i,j}\beta_{ij}\,h(\alpha_{ij}) \text{ for } h \in \mathrm{Hom}_Q({}_QA_A,\ {}_QQ_Q).$$

なる基底 $\{\beta_{ij} \mid i, j \in I\}$ を持つ。以下に於て、$\varepsilon = \sum_{i \in I} \beta_{i, \nu(i)} \in \mathrm{Hom}_Q({}_Q A_A, {}_Q Q_Q)$ と置き、準同型写像

$$\varphi: {}_A A \to {}_A\mathrm{Hom}_Q({}_Q A_A, {}_Q Q_Q), x \mapsto x\varepsilon$$

を定義する。

補題 3.2 次が成立.

(1) $q\beta_{ij} = \begin{cases} \beta_{ij} q & (i \leq j) \\ \beta_{ij} \sigma(q) & (i > j) \end{cases}$ *for* $q \in Q$.

(2) $\alpha_{kl} \beta_{ij} = 0$ *unless* $l = j$.

(3) $\alpha_{kj} \beta_{ij} = \begin{cases} \beta_{ik} & (\ell_n(i,k) + \ell_n(k,j) < n) \\ \beta_{ik} c & (\ell_n(i,k) + \ell_n(k,j) \geq n) \end{cases}$.

補題 3.3 任意の $i, j \in I$ に対して $\beta_{ij} = \alpha_{j, \nu(i)} \varepsilon$ が成り立つ.

補題 3.4 $\sigma \in \mathrm{Aut}\, Q$ とする. このとき、φ は同型であり従って

$$\varepsilon q = \tau(q)\varepsilon \quad \text{for all} \quad q \in Q$$

なる環準同型写像 $\tau: Q \to A$ が一意に存在しそれは

$$\tau(q) = \sigma^{-1}(q)(\alpha_{11} + \cdots + \alpha_{n-1, n-1}) + q\alpha_{nn} \quad \text{for} \quad q \in Q$$

に依って与えられる.

両側ネター環 R は flat $\dim_Q I^{\cdot} \leq n$ for all $n \geq 0$ なる入射分解 ${}_R R \to I^{\cdot}$ を持つとき Auslander-Gorenstein 環と呼ばれる（詳しくは [1] を参照せよ）。QF 環 R は inj $\dim_R R = 0$ なる Auslander-Gorenstein 環に他ならない。

inj $\dim_Q Q = 0$ のとき、次の系は Müller [4, Satz 3] の特別の場合である。

系 3.5 $\sigma \in \mathrm{Aut}\, Q$ とし Q は Auslander-Gorenstein 環とする. このとき、A は Auslander-Gorenstein 環で inj $\dim_A A =$ inj $\dim_Q Q$ が成り立つ.

補題 3.6 $\sigma \in \mathrm{Aut}\, Q$ とする. このとき、

$$\varepsilon q = \tau(q)\varepsilon \quad \text{for all} \quad q \in Q \quad \text{and} \quad \tau(\alpha_{ij}) = \alpha_{\nu(i), \nu(j)} \quad \text{for all} \quad i, j \in I$$

なる自己同型 $\tau \in \mathrm{Aut}\,A$ が一意に存在する.

n, Q, σ, c は上の如くとする。大城 [5] は Q 上の n 次の正方行列全体の集合 $(Q)_n$ の上に Q の拡大環の構造を定義した（[5, 6] でこの拡大環は $(Q)_{\sigma, c, n}$ と表わされ、Q 上の n 次の歪行列環と呼ばれている）。実は、Q の拡大環として、同型写像

$$A \to (Q)_{\sigma, c, n}, x \mapsto (\beta_{ij}(x))$$

を得る。大城 [5] は次の定理を $(Q)_{\sigma, c, n}$ に対して証明した（[6, Theorem 1]）。

定理 3.7 ([5]) Q を QF 局所環とし、$\sigma \in \mathrm{Aut}\,Q, c \in \mathrm{rad}\,Q$ とする. このとき、A は中山自己同型を持つ basic な SQF 環でその中山置換は巡回置換である.

4. 巡回中山置換を持つ SQF 環

本節を通じて、A は basic な QF 環でその巡回中山置換を持つとする。このとき A は環として直既約である。$1 = e_1 + \cdots + e_n$、但し e_i は直交する原始冪等元、とする。また $n \geq 2$、即ち A は局所環ではないと仮定する。

必要に応じて添字を付け換えて、A の中山置換は

$$\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ n & 1 & \cdots & n-1 \end{pmatrix}$$

であるとしてよい。$\mu = \nu^{-1}, J = \mathrm{rad}\,A$ と置く。

補題 4.1 $j \in I$ に対して $e = 1 - e_j$ と置く. このとき次は同値.

(1) eAe は QF 環.

(2) ${}_{eAe}eAe_j$ は射影加群.

(3) ${}_AAe_j \cong {}_A\mathrm{Hom}_{eAe}(eA, eAe_{\nu(j)})$.

補題 4.2 $j \in I$ に対して $e = 1 - e_j$ と置き eAe は QF 環と仮定する. このとき、

$${}_{eAe}eAe_{\nu(j)} \to {}_{eAe}eAe_j,\ x \mapsto x\alpha_j$$

が同型写像である様な $\alpha_j \in e_{\nu(j)}Ae_j$ が存在する. 更に、

$$\phi_j(x)\alpha_j = \alpha_j x \ \text{ for all } x \in e_jAe_j$$

なる環同型写像 $\phi_j : e_jAe_j \to e_{\nu(j)}Ae_{\nu(j)}$ が存在する.

次の定理は大城・林 [6, Theorem 2] の一般化である。

定理 **4.3**　全ての $i \in I$ に対して $(1 - e_i)A(1 - e_i)$ は QF 環と仮定する．このとき、$A \cong M_n(Q; \sigma, c)$ となる QF 局所環 Q および

$$\sigma(c) = c \ \text{ and } \ cq = \sigma(q)c \ \text{ for all } \ q \in Q$$

なる $\sigma \in \mathrm{Aut}\, Q, c \in \mathrm{rad}\, Q$ の組 (σ, c) が存在する.

$M_n(Q; \sigma, c)$ はいわば "Q 上の path ring" ともいうべき構造を持つ。これを見るために上の定理の証明のアウトラインを以下に述べる。

各 $j \in I$ に対して補題 4.2 の α_j, ϕ_j を取って固定する。$Q = e_nAe_n$ と置く。また $\sigma = \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_{n-1} \circ \phi_n \in \mathrm{Aut}\, Q$, $c = \alpha_1 \cdots \alpha_{n-1}\alpha_n \in e_nJe_n = \mathrm{rad}\, Q$ と置く。更に、

$$\phi_{ii} = \begin{cases} id_Q & (i = n) \\ \phi_{i+1} \circ \cdots \circ \phi_n & (i \neq n) \end{cases} \text{ for } i \in I,$$

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} e_i & (i = j) \\ \alpha_{\nu^{r-1}(j)} \cdots \alpha_{\nu(j)}\alpha_j, \text{ where } r = \ell_n(i,j) & (i \neq j) \end{cases} \text{ for } i, j \in I$$

と置く。このとき、以下の順序で $A \cong M_n(Q; \sigma, c)$ が示される。

1) 単射環順同型写像 $\phi : Q \to A,\ q \mapsto \sum_{i \in I} \phi_{ii}(q)\alpha_{ii}$ が存在する.

2) 各 $i, j \in I$ に対して加法群の同型写像 $\phi_{ij} : Q \to e_iAe_j,\ q \mapsto \phi_{ii}(q)\alpha_{ij} = \phi(q)\alpha_{ij}$ が存在する.

3) $\phi_{ii}(c) = \alpha_{i+1} \cdots \alpha_n \alpha_1 \cdots \alpha_i$ for $1 \leq i < n$ and $\phi_{nn}(c) = \sigma(c) = c$.

4) $cq = \sigma(q)c$ for all $q \in Q$.

5) Q は QF 局所環.

6) $\alpha_i \phi(q) = \begin{cases} \phi(q)\alpha_i & (i \neq 1) \\ \phi(\sigma(q))\alpha_i & (i = 1) \end{cases}$ for $q \in Q$.

7) $A \cong M_n(Q; \sigma, c)$.

5. 付録

第 3 節に於ける歪行列環の構成は以下の様に一般化できる。但し、意味があるかどうか疑問なので論文 [2] には入れていない。

$n \geq 2$ を自然数とし ν を集合 $I = \{1, 2, \cdots, n\}$ の置換とする。$\omega : I \times I \to \mathbb{Z}$ を条件

(a) $\omega(i,j) + \omega(j,k) - \omega(i,k) \geq 0$ for all $i, j, k \in I$; and
(b) $\omega(i,j) + \omega(j, \nu(i)) - \omega(i, \nu(i)) = 0$ for all $i, j \in I$, so that $\omega(i,i) = 0$ for all $i \in I$

を満たす写像として

$$\lambda(i,j,k) = \omega(i,j) + \omega(j,k) - \omega(i,k) \ \text{ for } \ i,j,k \in I$$

と置く。Q を環、(σ, c) を条件

$$(*) \qquad \sigma(c) = c \ \text{ and } \ cq = \sigma(q)c \ \text{ for all } \ q \in Q$$

を満たす $\sigma \in \operatorname{Aut} Q, c \in Q$ の組とする。$\{\alpha_{ij} \mid i, j \in I\}$ を基底に持つ自由左 Q 加群 A の上に規則

(M1) $\alpha_{ij} q = \sigma^{\omega(i,j)}(q)\alpha_{ij}$ for $q \in Q$;
(M2) $\alpha_{ij}\alpha_{kl} = 0$ unless $j = k$; and
(M3) $\alpha_{ij}\alpha_{jk} = c^{\lambda(i,j,k)}\alpha_{ik}$

に依って乗法を定義すれば、補題 3.1 を除いて第 3 節の結果がそのまま成立する。即ち、次の (1) - (6) が成り立つ:

(1) A は Q の拡大環で $1 = \sum_{i \in I}\alpha_{ii}$, 但し α_{ii} は直交羃等元.

(2) A は $\tau(q) = \sum_{i \in I}\sigma^{-\omega(i,\nu(i))}(q)\alpha_{\nu(i),\nu(i)}$ for $q \in Q$ かつ $\tau(\alpha_{ij}) = \alpha_{\nu(i),\nu(j)}$ for $i, j \in I$ なる自己同型 τ を持つ.

(3) Q が Auslander-Gorenstein 環なら A も Auslander-Gorenstein 環で $\operatorname{inj} \dim {}_A A = \operatorname{inj} \dim {}_Q Q$.

(4) Q が QF 局所環で $c \in \operatorname{rad} Q$ なら A は $\operatorname{soc}(\alpha_{ii}A_A) \cong \operatorname{top}(\alpha_{\nu(i),\nu(i)}A_A)$ for all $i \in I$ なる QF 環で中山自己同型 τ を持つ.

(5) Q が局所環で $c \in \operatorname{rad} Q$ のとき、A が basic であることと写像 $\omega : I \times I \to \mathbb{Z}$ が条件 (c) $\lambda(i,j,i) \geq 1$ for all $i, j \in I$ with $i \neq j$, を満たすこととは同値.

(6) $\nu(i) = i$ なる $i \in I$ が存在すれば A は Q と森田同値.

例 2 $n = 3$ で $\nu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ のとき、写像 $\omega: I \times I \to \mathbb{Z}$ が条件: $\lambda(i,j,k) \geq 0$ for all $i, j, k \in I$; $\lambda(i,j,\nu(i)) = 0$ for all $i, j \in I$; and $\lambda(i,j,i) \geq 1$ for all $i, j \in I$ with $i \neq j$, を満たすための必要十分条件は

$$[\omega(i,j)]_{i,j\in I}=\begin{bmatrix} 0 & a & a+b \\ b+c & 0 & b \\ c & a+c & 0 \end{bmatrix} \text{ with } a+b+c\geq 1.$$

例 3　$n=4$ で $\nu=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ のとき、写像 $\omega: I\times I\to\mathbb{Z}$ が条件: $\lambda(i,j,k)\geq 0$ for all $i,j,k\in I$; $\lambda(i,j,\nu(i))=0$ for all $i,j\in I$; and $\lambda(i,j,i)\geq 1$ for all $i,j\in I$ with $i\neq j$, を満たすための必要十分条件は

$$[\omega(i,j)]_{i,j\in I}=\begin{bmatrix} 0 & a & a+b-x & a+b+c-x \\ b+c+d-x & 0 & b & b+c-x \\ c+d-x & a+c+d-x & 0 & c \\ d & a+d-x & a+b+d-x & 0 \end{bmatrix}$$

with $a+b+c+d\geq 2x+1\geq 1$.

例 4　$n=4$ で $\nu=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ のとき、写像 $\omega: I\times I\to\mathbb{Z}$ が条件: $\lambda(i,j,k)\geq 0$ for all $i,j,k\in I$; $\lambda(i,j,\nu(i))=0$ for all $i,j\in I$; and $\lambda(i,j,i)\geq 1$ for all $i,j\in I$ with $i\neq j$, を満たすための必要十分条件は

$$[\omega(i,j)]_{i,j\in I}=\begin{bmatrix} 0 & a & b & a-d-x \\ c & 0 & c-d & b-x \\ d & a-b & 0 & a-x \\ -b+c+x & d+x & c+x & 0 \end{bmatrix} \text{ with } a+c\geq b+d+1\geq 2.$$

参考文献

[1] J.-E. Björk and E. K. Ekström, *Filtered Auslander-Gorenstein rings*, Progress in Math. 92, 425-447, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1990.

[2] M. Hoshino, *Strongly quasi-Frobenius rings*, preprint

[3] H. Kupisch, *Über eine Klasse von Artin-Ringen II*, Arch. Math. **26**(1975), 23-35.

[4] B. J. Müller, *Quasi-Frobenius-Erweiterungen*, Math. Z. **85**(1964), 345-368.

[5] K. Oshiro, *Structure of Nakayama rings*, Proc. 20th Symposium on Ring Theory, 109-133, Okayama Univ., Okayama, Japan, 1987.

[6] K. Oshiro and S. H. Rim, *On QF rings with cyclic Nakayama permutations*, to appear

[7] Y. Yukimoto, *On decomposition of strongly quasi-Frobenius rings*, preprint

HOMOLOGICALLY FINITE SUBCATEGORIES

HUANG ZHAOYONG

Department of Mathematics, Beijing Normal University

Let Λ be an artin algebra and mod Λ the category of all finitely generated Λ-modules. A subcategory $\mathcal{C}$ of a category we mean a full subcategory of an additive category, closed under isomorphisms and direct summands. It is known to us that almost split sequences is an important researched object in representation theory of artin algebras, so it is necessary to know which subcategories of mod Λ have almost split sequences. In order to prove the existence of almost split sequences in certain subcategories of mod Λ as well as the existence of preprojective and preinjective partitions (which play a significant role in representation theory of tensor artin algebras) for mod Λ, Auslander and Smalo (see [5] and [6]) introduced the notion of homologically finite subcategories——contravariantly finite subcategories, covariantly finite subcategories, functorially finite subcategories of mod Λ (or a subcategories of mod Λ), which are defined as follows.

Definition. Let $\mathcal{C} \supset \mathcal{D}$ be subcategories of mod Λ and let $C \in \mathcal{C}$, $D \in add\mathcal{D}$, where $add\mathcal{D}$ is the subcategory of mod Λ consisting of all Λ-modules isomorphic to summands of finite sums of modules in $\mathcal{D}$. The morphism $D \to C$ is said to be a right $\mathcal{D}$-approximation of C if $Hom_\Lambda(X,D) \to Hom_\Lambda(X,C) \to 0$ is exact for all $X \in add\mathcal{D}$. The subcategory $\mathcal{D}$ is said to be contravariantly finite in $\mathcal{C}$ if every C in $\mathcal{C}$ has a right $\mathcal{D}$-approximation. Dually, The morphism $C \to D$ is said to be a left $\mathcal{D}$-approximation of C if $Hom_\Lambda(D,X) \to Hom_\Lambda(C,X) \to 0$ is exact forall $X \in add\mathcal{D}$. The subcategory $\mathcal{D}$ is said to be covariantly finite in $\mathcal{C}$ if every C in $\mathcal{C}$ has a left $\mathcal{D}$-approximation. The subcategory $\mathcal{D}$ is said to be functorially finite in $\mathcal{C}$ if it is both contravariantly finite and covariantly finite in $\mathcal{C}$.

For the basic properties of homologically finite subcategories, we may refer to [5] and [6]. The importance of determining the homologically finite subcategories of mod Λ was first pointed out by Auslander, Smalo and Reiten in the following theorem 1 — theorem 3.

Theorem 1. *(Auslander and Smalo [5]) (the existence theorem for preprojective and preinjective partitions) Let $\mathcal{C}$ be an additive category.*

(1) If $\mathcal{C}$ is covariantly finite in mod Λ, then $\mathcal{C}$ has a preprojective partition. In particular mod Λ has preprojective partition.

(2) If $\mathcal{C}$ is contravariantly finite in mod Λ, then $\mathcal{C}$ has a preinjective partition. In particular mod Λ has preinjective partition.

Theorem 2. *(Auslander and Smalo [6]) (the existence theorem for an additive category to have almost split sequences) Let $\mathcal{C}$ be an additive functorially finite subcategory of mod Λ closed under extensions, i.e., $0 \to A \to B \to C \to 0$ is an exact sequence with A and C in $\mathcal{C}$, then B in $\mathcal{C}$. Then $\mathcal{C}$ has almost split sequences.*

We know that the representation type of an artin algebra is another important problem in representation theory of artin algebras. The following criterion indicates that it is close related to homologically finite subcategories.

Theorem 3. *(Auslander and Reiten [1]) The following statements are equivalent.*

(1) Λ is of finite representation type.

(2) every subcategory of mod Λ is contravariantly finite.

(3) every subcategory of mod Λ is covariantly finite.

As a theoretical basis of representation theory of artin algebras — tilting theory, its basic point is two elementary concepts, tilting modules and cotilting modules. The following theorem shows that there is a one-one correspondence between isomorphism classes of basic cotilting modules and contravariantly finite resolving subcategories $\mathcal{C}$ such that each module admits a finite resolution by objects in $\mathcal{C}$. The methods developed in a paper by Auslander and Buchweitz [7] are used. Before stating this result, we first recall some notions from [1].

For a subcategory $\mathcal{X}$ of mod Λ we denote by $\widehat{\mathcal{X}}$ the subcategory of mod Λ whose objects are the C for which there is an exact sequence $0 \to X_n \to \cdots \to X_0 \to C \to 0$ with each X_i in $\mathcal{X}$. A selforthogonal module T, i.e., $Ext^i_\Lambda(T,T) = 0$ for all $i \geq 1$, is a cotilting module if $id_\Lambda T < \infty$ and all injective modules are in $\widehat{add\, T}$. A cotilting module T is said to be basic if in a direct sum decomposition of T no indecomposable module appears more than once. A subcategory $\mathcal{X}$ of mod Λ is said to be a resolving subcategory if it satisfies the following three conditions: (1) closed under extensions; (2) closed under kernels of surjections; and (3) contains all the projective modules. Dually, A subcategory $\mathcal{X}$ of mod Λ is said to be a coresolving subcategory if it satisfies the following three conditions: (1) closed under extensions; (2) closed under cokernels of injections; and (3) contains all the injective modules.

For each nonnegative integer k we denote the subcategory consisting of all modules M with $pd_\Lambda M \leq k$ by $\mathcal{P}^k(\Lambda)$, and the subcategory consisting of all modules M with $id_\Lambda M \leq k$ by $\mathcal{I}^k(\Lambda)$. We denote by $\mathcal{P}^\infty(\Lambda)$ the subcategory of all modules of finite projective dimension, and by $\mathcal{I}^\infty(\Lambda)$ the subcategory of all modules of finite injective dimension.

Now we may relate the following theorem.

Theorem 4. *(Auslander and Reiten [1]) Let T be a selforthogonal Λ-module.*

(1) $T \longmapsto {}^\perp T$, where ${}^\perp T$ is the subcategory of mod Λ consisting of those X such that $Ext^i_\Lambda(X,T) = 0$ for all $i \geq 1$, gives a one-one correspondence between isomorphism classes of basic cotilting modules and contravariantly finite resolving subcategories $\mathcal{X}$ with $\widehat{\mathcal{X}}$=mod Λ.

(2) $T \longmapsto \widehat{add T}$ gives a one-one correspondence between isomorphism classes of basic cotilting modules and covariantly finite coresolving subcategories of $\mathcal{I}^\infty(\Lambda)$.

As a consequence of theorem 4, we can describe all contravariantly finite resolving subcategories for hereditary algebras as those subcategories which are the form Sub T (the subcategory of modules cogenerated by T) for a cotilting module M with $id_\Lambda M \leq 1$, it follows from Happel and Ringel [9] that ${}^\perp T$=Sub T. Since the injective dimension of every module over a hereditary algebra is less or equal to one, we obtain from theorem 4 the following result.

Corollary 5. *Let Λ be a hereditary algebra. Then $T \longmapsto Sub\ T$ gives a one-one correspondence between isomorphism classes of basic cotilting modules and contravariantly finite resolving subcategories of mod Λ.*

Remark. There are of course dual results about tilting modules and homologically finite subcategories.

For the concrete subcategories of mod Λ, $\mathcal{P}^k(\Lambda)$ and $\mathcal{P}^\infty(\Lambda)$ (dually $\mathcal{I}^k(\Lambda)$ and $\mathcal{I}^\infty(\Lambda)$) are interesting. It is easy to see that $\mathcal{P}^0(\Lambda)$ and $\mathcal{I}^0(\Lambda)$ are functorially finite in mod Λ (the facts are true even when Λ is a Noetherian algebra). $\mathcal{P}^1(\Lambda)$ is covariantly finite in mod Λ. When Λ is of finite representation type, all the $\mathcal{P}^k(\Lambda)$ and $\mathcal{I}^k(\Lambda)$ are functorially finite in mod Λ (see theorem 3). In [10] Igusa, Smalo and Todorov gave the following example. Let k be an algebraically closed field and let Λ be given by the path algebra of the quiver

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, shift left=2, "\beta"] \arrow[r, "\alpha"] & 2 \arrow[l, shift left=2, "\gamma"] \end{tikzcd}$$

modulo the ideal generated by the paths $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$ and $\gamma\alpha$. They showed that $\mathcal{P}^1(\Lambda)= \mathcal{P}^\infty(\Lambda)$ and $\mathcal{P}^1(\Lambda)$ is not contravariantly finite.

From the above argument, it is natural to ask the following question.

Problem 1. *When are $\mathcal{P}^k(\Lambda)$ and $\mathcal{P}^\infty(\Lambda)$ contravariantly finite? or dually, When are $\mathcal{I}^k(\Lambda)$ and $\mathcal{I}^\infty(\Lambda)$ covariantly finite?*

Remark. Auslander and Reiten [1] proved that if $\mathcal{P}^\infty(\Lambda)$is contravariantly finite, then the finitistic dimension conjective (FDC) holds, and hence the generalized Nakayama conjecture (GNC) and the Nakayama conjecture (NC) hold. Therefore determining when $\mathcal{P}^k(\Lambda)$ and $\mathcal{P}^\infty(\Lambda)$ are contravariantly finite may be useful for comprehending these conjectures.

The following theorem was proved by Auslander and Reiten [1], Deng [8], Igusa, Smalo and Todorov [10].

Theorem 6. *(1) (Auslander and Reiten [1], Deng [8]) Suppose that Λ is stably equivalent to a hereditary algebra. Then $\mathcal{P}^i(\Lambda)$ is contravariantly finite in mod Λ for all $i \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.*

(2) (Igusa, Smalo and Todorov [10]) Suppose $pd_\Lambda(I_0(\Lambda)) \leq 1$, where $I_0(\Lambda)$ is the injective envelope of Λ. Then $\mathcal{P}^1(\Lambda)$ is contravariantly finite in mod Λ.

Theorem 7. *Let $0 \to \Lambda \to I_0(\Lambda) \to I_1(\Lambda) \to \cdots \to I_i(\Lambda) \to \dots$ be a minimal injective resolution of Λ and let n be a positive integer. If $pd_\Lambda(I_i(\Lambda)) \leq i+1$ for $0 \leq i \leq n$, then $\mathcal{P}^n(\Lambda)$ is functorially finite in mod Λ and $\mathcal{P}^n(\Lambda)$ has almost split sequences.*

Remark. It is clear that n-Gorenstein algebras (see [3] for the definition) satisfy the assumptions in theorem 7. Then we conclude that FDC holds over n-Gorenstein algebras.

Theorem 8. *Under the same assumptions in theorem 7, the subcategory $\mathcal{W}^n=\{C \in \text{mod } \Lambda | Ext^i_\Lambda(C,\Lambda) = 0 \text{ for } 1 \leq i \leq n\}$ is contravariantly finite in mod Λ.*

About theorem 3, the following questions are interesting.

Problem 2. *(1) (symmetry?) If every contravariantly finite subcategory is covariantly finite, whether every covariantly finite subcategory is contravariantly finite or not. Dually, If every covariantly finite subcategory* *is contravariantly finite, whether every contravariantly finite subcategory is covariantly finite or not.*

(2) (converse?) If contravariantly finite is equivalent to covariantly finite in mod Λ, whether Λ is of finite representation type or not.

REFERENCES

1. Auslander M. and Reiten I., *Applications of contravariantly finite subcategories*, Advances in Math. **86** (1991), 111–152.
2. ———, *Homologically finite subcategories*, London Math .Soc. Lecture Note Series **168** (1992), Cambridge university Press, 1–42.
3. ———, *k-Gorenstein algebras and syzygy modules*, Jour.Prue and Appl.Algebra **92** (1994), 1–27.
4. ———, *Sygyzy modules for Noetherian rings*, Jour.Algebra **183** (1996), 167–185.
5. Auslander M. and Smalo S. O., *Preprojective modules over artin algebras*, Jour .Algebra **66** (1980), 61–122.
6. ———, *Almost split sequences in subcategories*, Jour.Algebra **69** (1981), 426–454.
7. Auslander M. and Buchweitz R. O., *Maximal Cohen-Macaulay approximations*, Soc.Math .France **38** (1989), 5–37.
8. Deng B. M., *On contravariant finite of subcategories of modules of projective dimension* ≤ 1, Proc.Amer.Math.Soc. **124** (1996), 1673–1677.
9. Happel D. and Ringel C. M., *Tilted algebras*, Trans.Amer.Math.Soc. **274** (1982), 399–433.
10. Igusa K., Smalo S. O. and Todorov G., *Finite projectivity and contravariant finite*, Proc.Amer.Math.Soc. **109** (1990), 937–941.

Tilting modules in algebraic groups

KANEDA Masaharu and TAKASHIMA Shinsuke
Department of Mathematics, Faculty of Science
Osaka City University
558 Osaka Sumiyoshi-ku Sugimoto
e-mail addresses: kaneda@sci.osaka-cu.ac.jp and shinchan@moe.sci.osaka-cu.ac.jp

February 5, 1997

Our objective is to explain after Donkin [D93] how C.M. Ringel's results [R] on tilting modules for a quasi-hereditary algebra A yields the classification of indecomposable partially tilting modules for a reductive algebraic group G over an algebraically closed field k of positive characteristic. To transfer from the category of G-modules that has infinitely many nonisomorphic simples to the category of A-modules, we make use of Schur algebras [D86], that are the dual algebras of finite dimensional subcogebras of the coordinate algebra of the reductive group, and a theorem of Cline-Parshall-Scott that if a finite dimensional k-algebra forms a highest weight category, then A is quasi-hereditary.

Throughout the paper k will denote an algebraically closed field of positive characteristic. All tensor products are taken over k and dim refers to the k-linear dimension. If M is a k-linear space, M^* will denote the k-linear dual space of M.

After the symposium Hashimoto M. kindly sent us his survey [H] on the same subject, the emphasis of which appears different from our present exposition. We are grateful to Sumioka T. and Tsushima Y. for some helpful suggestions.

There seems much going on recently toward determing the characters of indecomposable partially tilting modules for G, see Soergel [S], Andersen [A].

1 Standard modules in reductive algebraic groups

(1.1) Let G be a reductive algebraic group over k and G**mod** (resp. $'G$**mod**) the category of (resp. finite dimensional) G-modules. The simples of G**mod** are parametrized by POset $(X^+, \geq)$ callled the set of dominant weights of G, written

$$X^+ \in \lambda \longmapsto L(\lambda) \quad \text{simple of } G\mathbf{mod}. \tag{1}$$

To each $\lambda \in X^+$ there is also associated G-module $\nabla(\lambda)$, called a standard module, such that

$$\mathrm{soc}_G \nabla(\lambda) = L(\lambda) \quad \text{and} \quad [\nabla(\lambda)/L(\lambda) : L(\mu)] = 0 \quad \text{unless } \mu < \lambda. \tag{2}$$

Hence if Gr(G**mod**) denotes the Grothendieck group of the category G**mod**, then

(3) $$\mathrm{Gr}(G\mathbf{mod}) = \coprod_{\lambda\in X^+} \mathbb{Z}[L(\lambda)] = \coprod_{\lambda\in X^+} \mathbb{Z}[\nabla(\lambda)].$$

As the name suggests the standard modules (in the basic refernce [J] the standard module $\nabla(\lambda)$ is denoted $\mathrm{ind}_B^G\lambda$ or $H^0(\lambda)$) are finite dimensional and well-understood while the simples are not yet completely known. Thus a fundamental problem in the theory of G**Mod** is to find the transition matrix between two bases $([L(\lambda)])_\lambda$ and $([\nabla(\lambda)])_\lambda$, on which there is a celebrated conjecture by G. Lusztig and there has very recentry been much progress toward the solution of the conjecture due to [AJS], [KL], [L], [KT].

(1.2) We say a G-module M admits a good filtration iff M has a filtration in G**Mod** whose subquotients are all standard modules. We will denote by $\mathcal{F}(\nabla)$ the collection of G-modules that admit good filtraltions. If $M \in \mathcal{F}(\nabla)$, the number of times each $\nabla(\lambda)$, $\lambda \in X^+$, appears in a good filtration of M is by (1.1.3) independent of the choice of the filtrations, which we will denote by $(M : \nabla(\lambda))$.

The group G admits an antiinvolution τ that fixes elementwise a maximal torus of G. If M is a finite dimenstional G-module, we define a new G-module ${}^\tau M$ to be M^* as k-linear space with the G-action given by $xf = f(\tau(x)?), x \in G, f \in M^*$. Then τ induces an involutive contravariant functor on G**mod** such that (if we take τ to fix the maximal torus defining X^+)

(1) $${}^\tau L(\lambda) \simeq L(\lambda) \quad \forall \in X^+.$$

If we set $\Delta(\lambda) ={}^\tau \nabla(\lambda)$, called a Weyl module, then

(2) $$[\Delta(\lambda)] = [{}^\tau\nabla(\lambda)] \quad \text{in } \mathrm{Gr}(G\mathbf{mod}).$$

(1.3) **Theorem (Cline-Parshall-Scott-van der Kallen [J, II.4.13])** *For $\lambda, \mu \in X^+$ and $i \in \mathbb{N}$,*

$$\mathrm{Ext}^i_G(\Delta(\lambda), \nabla(\lambda)) \simeq \begin{cases} k & \text{if } i = 0 \text{ and } \lambda = \mu \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(1.4) **Corollary** *Let $\lambda, \mu \in X^+$. If $\mathrm{Ext}^1_G(\nabla(\lambda), \nabla(\mu)) \neq 0$, then $\mu < \lambda$.*

Proof. If $\mathrm{Ext}^1_G(\nabla(\lambda), \nabla(\mu)) \neq 0$, then there is a composition factor $L(\nu)$ of $\nabla(\lambda)$ such that $\mathrm{Ext}^1_G(L(\nu), \nabla(\mu)) \neq 0$. As $\mathrm{hd}_G(\Delta(\nu)) = L(\nu)$ by (1.1.2), if $M = \mathrm{rad}_G(\Delta(\nu))$, then $G\mathbf{Mod}(M, \nabla(\mu)) \neq 0$ by (1.3). As $\mathrm{soc}_G(\nabla(\mu)) = L(\mu)$, $[M : L(\mu)] \neq 0$. Hence $\mu < \nu \leq \lambda$ from (1.1.2).

(1.5) **Theorem (Donkin [J, II.4.16])** *Let $M \in G$***Mod**.

(i) *If $M \in \mathcal{F}(\nabla)$, then $(M : \nabla(\lambda)) = \dim G\mathbf{Mod}(\Delta(\lambda), M)$. for any $\lambda \in X^+$.*

(ii) *Assume* $\dim G\mathbf{Mod}(\Delta(\lambda), M) < \infty \quad \forall\lambda \in X^+$. *The following are equivalent:*

(a) $M \in \mathcal{F}(\nabla)$

(b) $\mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\lambda), M) = 0 \quad \forall \in X^+$.

(c) $\mathrm{Ext}^i_G(\Delta(\lambda), M) = 0 \quad \forall \in X^+$ *and* $i \in \mathbb{N}$.

(1.6) Let $E(\lambda)$ be the injective hull of $L(\lambda)$, $\lambda \in X^+$, in G**Mod**. Although $E(\lambda)$ is infinite dimensional,

(1) $$\dim G\mathbf{Mod}(\Delta(\mu), E(\lambda)) = [\Delta(\mu) : L(\lambda)] < \infty \quad \forall \mu \in X^+.$$

Hence by Donkin's criterion

(2) $$E(\lambda) \in \mathcal{F}(\nabla),$$

and one obtains the Brauer-Humphreys reciprocity

(3) $$(E(\lambda) : \nabla(\mu)) = [\nabla(\mu) : L(\lambda)].$$

(1.7) **Theorem (Mathieu, Paradowski, Lusztig)** *Let* $M \in \mathcal{F}(\nabla)$.

(i) *If* G' *is the subgroup of* G *associated to a subsystem of the simple root system of* G *and if we define* $\mathcal{F}(\nabla)$*for* G' *likewise, denoted* $\mathcal{F}(\nabla')$, *then* $\mathrm{res}^G_{G'} M \in \mathcal{F}(\nabla')$.

(ii) *If* $M, M' \in \mathcal{F}(\nabla)$, *then* $M \otimes M' \in \mathcal{F}(\nabla)$.

(1.8) The theorem was conjectured by Donkin and, after the initial efforts by Wang J.-P. [W] and Donkin [D85], was solved by O. Mathieu using the Frobenius splitting of the flag scheme [M], and then by J. Paradowski using Lusztig's canonical basis [P]. There is yet another proof due essentially to Lusztig using Kashiwara's crystal base [K]. The last proof is free of Donkin's cohomological criterion (1.5).

2 Tilting modules in reductive groups

(2.1) Define $\mathcal{F}(\Delta)$ likewise with Δ in place of ∇. We call a finite dimensional G-module belonginig to $\mathcal{F}(\nabla) \cap \mathcal{F}(\Delta)$ a partially tilting module. The basic theorem on tilting modules is

Theorem [D] *There is a bijection between* X^+ *and the set of isomorphism classes of indecomposable partially tilting modules, written* $\lambda \mapsto T(\lambda)$, *such that* $\forall \mu \in X^+$, $(T(\lambda) : \nabla(\lambda)) = 0$ *unless* $\mu \leq \lambda$, *with* $(T(\lambda) : \nabla(\lambda)) = 1$.

(2.2) We will first give a direct proof from [P, 5.2], that is an adaptation of arguments in [R]. The proof that uses the general theory of quasi-hereditary algebras is postponed till the end of the exposition.

Lemma *Let* A *be a* k*-algebra and* $L_1, L_2 \in A$**Mod** *with* $\mathrm{Ext}^1_A(L_2, L_2) = 0$. *If* $\dim \mathrm{Ext}^1_A(L_2, L_1) = d$, $d \in \mathbb{N}^+$, *there is an extension* $0 \to L_1 \to E \to L_2^{\oplus d} \to 0$ *in such that* $\mathrm{Ext}^1_A(L_2, E) = 0$.

Proof. Write $\mathrm{Ext}^1_A(L_2, L_1) = \coprod_{i=1}^d k\xi_i$ with ξ_i an extension $0 \to L_1 \xrightarrow{f_i} E_i \xrightarrow{g_i} L_2^{\oplus d} \to 0$. Define an extension $\xi : 0 \to L_1 \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} L_2^{\oplus d} \to 0$ by the pushout [Rot, Lem. 7.18, p. 204]

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L_1^{\oplus d} \arrow[r, "\coprod f_i"] \arrow[d, "\sigma"'] & \coprod E_i \arrow[r, "\coprod g_i"] \arrow[d] & L_2^{\oplus d} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L_1 \arrow[r, "f"'] & E \arrow[r, "g"'] & L_2^{\oplus d} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

where $\sigma : (x_i) \mapsto \sum x_i$, $E = L_1 \oplus (\coprod E_i)/\{(\sigma((x_i)_i), (-f_i(x_i))_i) \mid (x_i)_i \in L_1^{\oplus d}\}$, $f : x \mapsto [x, 0]$, $g : [x, (y_i)] \mapsto (g_i(y_i))_i$, and the middle vertical map $\coprod E_i \to E$ given by $(y_i) \mapsto [0, (y_i)]$. We claim

(4) $$\xi \text{ induces an epi } A\mathbf{Mod}(L_2, L_2^{\oplus d}) \to \mathrm{Ext}^1_A(L_2, L_1).$$

Then the long exact sequence induced by ξ yields, as $\mathrm{Ext}^1_A(L_2, L_2) = 0$, $\mathrm{Ext}^1_A(L_2, E) = 0$. If $i_s : L_2 \to L_2^{\oplus d}$ is the imbedding to the i-th component, one has a commutative diagram of short exact sequences

(5) $$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & L_1 \arrow[r, "f_s"] \arrow[d, equal] & E_s \arrow[r, "g_s"] \arrow[d] & L_2 \arrow[r] \arrow[d, "i_s"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & L_1 \arrow[r, "f"'] & E \arrow[r, "g"'] & L_2^{\oplus d} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

with $E_s \to E$ given by $y \mapsto [0, (0, \cdots, 0, y_s, 0, \cdots, 0)]$. The right square of (2) is cocartesian (cf. [Rot, a remark after Lem. 7.18, p.204]) and (cf. [Rot, Ex. 7.21/22, p. 210]) $i_s \mapsto \xi_s$ under (1).

(2.3) *Proof of* (2.1). Let $\mathcal{T} = \mathcal{F}(\nabla) \cap \mathcal{F}(\Delta)$. Note that from (1.4)

(1) $$\mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\lambda), \Delta(\mu)) \simeq \mathrm{Ext}^1_G(\nabla(\mu), \nabla(\lambda)) = 0 \quad \text{unless } \lambda < \mu.$$

Fix $\lambda \in X^+$. If $\mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\mu), \Delta(\lambda)) = 0$ $\forall \mu \in X^+$, then $\Delta(\lambda) \in \mathcal{T}$ by Donkin's criterion (1.5). If $\mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\mu), \Delta(\lambda)) \neq 0$, then $\mu < \lambda$ by (1), hence one can write

(2) $$\{\lambda_{11}, \cdots, \lambda_{1n_1}\} = \max\{\mu \in X^+ \mid \mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\mu), \Delta(\lambda)) \neq 0\}.$$

By (2.2) there is an extention

$$0 \to \Delta(\lambda) \to E_{11} \to \Delta(\lambda_{11})^{\oplus d_{11}} \to 0$$

with $d_{11} = \dim \mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\lambda_{11}), \Delta(\lambda))$ and $\mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\lambda_{11}), E_{11}) = 0$. As $\mathrm{hd}_G\Delta(\mu) = L(\mu)$, from (1)/(2)/(1.1.2)

$$\mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\lambda_{12}), E_{11}) \simeq \mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\lambda_{12}), \Delta(\lambda)),$$

hence there is an extension

$$0 \to E_{11} \to E_{12} \to \Delta(\lambda_{12})^{\oplus d_{12}} \to 0$$

with $d_{12} = \dim \mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\lambda_{12}), E_{12})$ and $\mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\lambda_{12}), E_{12}) = 0$. Note also $\mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\lambda_{11}), E_{12}) = 0$.

Repeat the procedure to obtain an extension for each $j \in [1, n_1]$

$$0 \to E_{1,j-1} \to E_{1,j} \to \Delta(\lambda_{1j})^{\oplus d_{1j}} \to 0$$

with $d_{1j} = \dim \mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\lambda_{1j}), E_{1,j-1}) = \dim \mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\lambda_{1j}), \Delta(\lambda))$ and $\mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\lambda_{1i}), E_{1j}) = 0\ \forall i \in [1, j]$, where $E_{10} = \Delta(\lambda)$. Then we have in $G\mathbf{Mod}$.

(3) $$\Delta(\lambda) \leq E_{1n_1} \quad \text{and} \quad E_{1n_1}/\Delta(\lambda) \simeq \coprod_{i=1}^{n_1} \Delta(\lambda_{1i})^{\oplus d_{1i}}$$

with

(4) $$\mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\lambda_{1i}), E_{1n_1}) = 0 \quad \forall i.$$

If $\mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\mu), E_{1n_1}) = 0\ \forall \mu \in X^+$, then $E_{1n_1} \in \mathcal{T}$. Otherwise $\mu < \lambda_{1i} \exists i \in [1, n_1]$ from(1)/(4), hence one can write

(5) $$\{\lambda_{21}, \cdots, \lambda_{2n_2}\} = \max\{\mu \in X^+ \mid \mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\mu), E_{1n_1}) \neq 0\}$$

with $\forall i \in [1, n_2]$, there is $j \in [1, n_i]$ such that

(6) $$\lambda_{2i} < \lambda_{1j}.$$

Construct extensions inductively in $G\mathbf{Mod}$ with $E_{20} = E_{1n_1}$.

(7) $$0 \to E_{2,j-1} \to E_{2j} \to \Delta(\lambda_{2j})^{\oplus d_{2j}} \to 0$$

such that $\forall j \in [1, n_2]$,

(8) $$d_{2j} = \dim \mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\lambda_{2j}), E_{2,j-1}) = \dim \mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\lambda_{2j}), E_{2n_1})$$

and $\mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\lambda_{2i}), E_{2j}) = 0\ \forall i \in [1, j]$. Then we have in $G\mathbf{Mod}$

$$E_{1n_1} \leq E_{2n_2}, E_{2n_2}/E_{1n_1} \simeq \coprod_{j=1}^{n_2} \Delta(\lambda_{2j})^{\oplus d_{2j}} \quad \text{with} \quad \mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\lambda_{ij}), E_{2n_2}) = 0$$
$$\forall i \leq 2, j \in [1, n_{in_i}].$$

Repeat the construction of (7) with $E_{30} = E_{2n_2}$. By (6) the procedure ends in a finite number of steps to yield $E_{rn_r} \in \mathcal{T}$ for some $r \in \mathbb{N}$. Let $T(\lambda)$ be the indecomposable direct summand of E_{rn_r} in $G\mathbf{Mod}$ such that $(T(\lambda) : \nabla(\lambda)) \neq 0$. Then $T(\lambda)$ satisfies the requirement of (2.1). Let $T'(\lambda)$ be another such. As λ is highest in $\{\mu \in X^+ \mid (T(\lambda) : \nabla(\mu)) \neq 0\}$, there is by (1) a short exact sequence $0 \to \Delta(\lambda) \xrightarrow{i} T(\lambda) \to N \to 0$ in $G\mathbf{Mod}$ with $N \in \mathcal{F}(\Delta)$, and likewise $0 \to \Delta(\lambda) \xrightarrow{i'} T'(\lambda) \to N' \to 0$. By (1.3) one has an epi $G\mathbf{Mod}(T(\lambda), T'(\lambda)) \to G\mathbf{Mod}(\Delta(\lambda), T'(\lambda))$. Let $f \in G\mathbf{Mod}(T(\lambda), T'(\lambda))$ such that. $f \circ i = i'$ and $f' \in G\mathbf{Mod}(T'(\lambda), T(\lambda))$ such that $f' \circ i' = i$. Then

$$f' \circ f \circ i = f' \circ i' = i,$$

hence $f' \circ f \in G\mathbf{Mod}(T(\lambda), T(\lambda))$ is not nilpotent. Then $f' \circ f$ is invertible as $T(\lambda)$ is finite dimensional and indecomposable. Likewise $f \circ f'$ is inverible, hence $T(\lambda) \simeq T'(\lambda)$.

3 Quasi-hereditary algebras

In this section A will denote a finite dimensional k-algebra with $\{e_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ a complete set of representatives of the equivalence classes of the primitive idempotents of A. If A' is a ring, $A'\mathbf{Mod}$ (resp. $A'\mathbf{mod}$) will denote the category of left A'-modules (resp. of finite type). We will let $J(A')$ be the Jacobson radical of A'.

(3.1) We start with a preliminary

Lemma *Let $I \trianglelefteq A$ and $J = J(A)$.*

(i) *If $\bar{e}_\lambda, \lambda \in \Lambda$, is the image of e_λ in A/I, then $\{\bar{e}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ exhausts the equivalence classes of the primitive idempotents of A/I.*

(ii) *If $\lambda \neq \mu$ in Λ, then $e_\lambda A e_\mu \subseteq J$.*

(iii) *$(e_\lambda A/e_\lambda J)^* \simeq Ae_\lambda/Je_\lambda$ in $A\mathbf{Mod}$, hence $(e_\lambda A)^*$ is the injective hull of Ae_λ/Je_λ.*

(iv) *If $M \in A\mathbf{mod}$, for each $\lambda \in \Lambda$*

$$\dim A\mathbf{Mod}(Ae_\lambda, M) = [M : Ae_\lambda/Je_\lambda] = \dim A\mathbf{Mod}(M, (e_\lambda A)^*).$$

(v) *If e is an idempotent of A, then $AeA = \sum_{f \in A\mathbf{Mod}(Ae,A)} \operatorname{im} f$. In particular, if e' is another idempotent of A with $Ae \simeq Ae'$, then $Ae'A = AeA$.*

(vi) *If $M \in A\mathbf{Mod}$ (resp. $M' \in A/I\mathbf{Mod}$), let $\operatorname{Ann}_M(I) = \{m \in M \mid Im = 0\} \simeq A\mathbf{Mod}(A/I, M)$ (resp. $\inf^A_{A/I}(M') = M'$ regarded as A-module by the quotient $A \to A/I$). Then $\operatorname{Ann}_?(I)$ defines a functor $A\mathbf{Mod} \to A/I\mathbf{Mod}$ right adjoint to $\inf^A_{A/I}$. In particular, $\operatorname{Ann}_?(I)$ is left exact and sends an injective to an injective.*

(3.2) **Definition** *We say A is (left) quasi-hereditary iff there is a chain of ideals $A = I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_n \supset I_{n+1} = 0$ such that $\forall j \in [1, n]$,*

(QH1) *I_j/I_{j+1} is projective in $A/I_{j+1}\mathbf{Mod}$,*

(QH2) $(I_j/I_{j+1})J(A/I_{j+1})(I_j/I_{j+1}) = 0$,

(QH3) $A\mathbf{Mod}(I_j/I_{j+1}, (A/I_{j+1})/(I_j/I_{j+1})) = 0$.

(3.3) **Proposition** *If $(A, (I_j)_j)$ is quasi-hereditary, then there is a chain $\Lambda = \Lambda_0 \supset \Lambda_1 \supset \cdots \supset \Lambda_n \supset \Lambda_{n+1} = \emptyset$ of subsets of Λ such that $I_j = \sum_{\lambda \in \Lambda_j} Ae_\lambda A$ with $I_j/I_{j+1} = \coprod_{\lambda \in \Lambda_j \setminus \Lambda_{j+1}} (A/I_{j+1})\overline{e_\lambda}(A/I_{j+1})$, where $\overline{e_\lambda}$ is the image of e_λ in A/I_{j+1}. Hence refining the chain of subsets $(\Lambda_j)_j$ one obtains a refinement of the chain of ideals $(I_{ji})_{j, 0 \leq i \leq |\Lambda_j \setminus \Lambda_{j+1}|-1}$ with $I_j = I_{j0} \supset I_{j1} \supset \cdots \supset I_{j,|\Lambda_j \setminus \Lambda_{j+1}|-1}$ such that $(A, (I_{ji})_{ji})$ is quasi-hereditary.*

Proof. Suppose $0 = I_{n+1} \subset I_n$. As I_n is projective, one can write in $A\mathbf{Mod}$

$$I_n \simeq \coprod_{\lambda \in \Lambda_n} (Ae_\lambda)^{\oplus n_\lambda} \quad \text{with } \Lambda_n \subset \Lambda \text{ and } n_\lambda \in \mathbf{N}^+. \tag{1}$$

If $\phi_{\lambda i} : Ae_\lambda \to I_n, \lambda \in \Lambda_n, 1 \leq i \leq n_\lambda$, is the natural imbedding, $I_n = \coprod_{\lambda,i} Ae_\lambda\phi_{\lambda i}(e_\lambda)$, hence $I_n \subseteq \sum_{\lambda\in\Lambda_n} Ae_\lambda A$. If $I_n \subset \sum_{\lambda\in\Lambda_n} Ae_\lambda A$, there would be $f \in A\mathbf{Mod}(Ae_\lambda, A), \lambda \in \Lambda_n$, with $\mathrm{im} f \not\subseteq I_n$ by (3.1.v). If $p_\lambda : I_n \to Ae_\lambda$ is the natural projeciton along (1), then $f \circ p_\lambda \in A\mathbf{Mod}(I_n, A/I_n) \neq 0$, absurd. Hence

(2) $$I_n = \sum_{\lambda_n} Ae_\lambda A.$$

If $\lambda \neq \mu$ in Λ, then by (3.1.ii) and (QH2)

(3) $$e_\lambda Ae_\mu = e_\lambda Je_\mu \subseteq I_n JI_n = 0,$$

hence $A\mathbf{Mod}(Ae_\lambda, Ae_\mu A) \simeq e_\lambda Ae_\mu A = 0$. As Ae_λ is projective, $A\mathbf{Mod}(Ae_\lambda, \sum_{\mu\in\Lambda_n\setminus\{\lambda\}} Ae_\mu A)$ is a quotient of $A\mathbf{Mod}(Ae_\lambda, \coprod_{\mu\in\Lambda_n\setminus\{\lambda\}} Ae_\mu A)$, hence

(4) $$A\mathbf{Mod}(Ae_\lambda, \sum_{\mu\in\Lambda\setminus\{\lambda\}} Ae_\mu A) = 0.$$

If $ae_\lambda b \in (\sum_{\mu\in\Lambda_n\setminus\{\lambda\}} Ae_\mu A) \setminus 0$ with $a, b \in A$, then $\rho_b \in A\mathbf{Mod}(Ae_\lambda, \sum_{\mu\in\Lambda\setminus\{\lambda\}} Ae_\mu A) \setminus 0$ with ρ_b the right multiplication by b, absurd. Hence the sum in (2) is direct:

(5) $$I_n = \coprod_{\lambda\in\Lambda} Ae_\lambda A.$$

If $e_\mu \in I_n$, $\mu \in \Lambda \setminus \Lambda_n$, then $e_\mu = e_\mu^2 \in e_\mu \sum_{\lambda\in\Lambda_n} Ae_\lambda A \subseteq J$ by (3.1.ii), contradicting the nilpotency of J, hence for each $\mu \in \Lambda$

(6) $$e_\mu \in I_n \quad \text{iff} \quad \mu \in \Lambda_n.$$

Then by (3.1.i) $\{\overline{e_\lambda} \mid \lambda \in \Lambda\setminus\Lambda_n\}$ forms a complete set of representatives of the equivalence classes of the primitive idempotents of the quasi-hereditary algebra $(A/I_n, (I_j/I_n)_j)$, where $\overline{e_\lambda}$ is the image of e_λ in A/I_n. By (5) there is $\Lambda'_{n-1} \subseteq \Lambda \setminus \Lambda_n$ such that

(7) $$I_{n-1}/I_n = \coprod_{\lambda\in\lambda'_{n-1}} (A/I_n)\overline{e_\lambda}(A/I_n).$$

Then $I_{n-1} = \sum_{\lambda\in\Lambda_{n-1}} Ae_\lambda A$ with $\Lambda_{n-1} = \Lambda_n \cup \Lambda'_{n-1}$. Repeat the argument.

(3.4) For a ring A' let $\mathbf{Mod}A'$ denote the category of right A'-modules.

Lemma *Assume $(A, (I_j)_j)$ is quasi-hereditary with $0 = I_{n+1} \subset I_n$. If $e_\lambda \in I_n$, then $Ae_\lambda A$ is projective as right A-module.*

Proof. By (3.3) there is $\Lambda_n \subseteq \Lambda$ such that

$$\coprod_{\mu\in\Lambda_n} Ae_\mu A = I_n \simeq \coprod_{\mu\in\Lambda_n} (Ae_\mu)^{\oplus n_\mu}, \quad n_\mu \in \mathrm{N}^+.$$

As $Ae_\mu A = \sum_{f\in A\mathbf{Mod}(Ae_\mu, A)} \mathrm{im} f$, if $\phi_i : Ae_\lambda \to I_n$ is the natural imbedding, $1 \leq i \leq n_\lambda$, then

(1) $$Ae_\lambda A = \coprod_{i=1}^{n_\lambda} \mathrm{im}\phi_i.$$

On the other hand, if $J = J(A)$, $e_\lambda J e_\lambda \subseteq I_n J I_n = 0$ by (QH2). Then

$$e_\lambda A e_\lambda \simeq A\mathbf{Mod}(Ae_\lambda, Ae_\lambda) \simeq A\mathbf{Mod}(Ae_\lambda, Ae_\lambda/Je_\lambda)$$

as Ae_λ is projective. But $\dim A\mathbf{Mod}(Ae_\lambda, Ae_\lambda/Je_\lambda) = [Ae_\lambda/Je_\lambda : Ae_\lambda/Je_\lambda] = 1$, hence

(2) $$e_\lambda A e_\lambda = k e_\lambda$$

If $a_i = \phi_i(e_\lambda)$, $Ae_\lambda A = \coprod_{i=1}^{n_\lambda} Aa_i$ from (1). We clain

(3) $$(a_i)_i \quad \text{forms a } k\text{-basis of } e_\lambda A.$$

To see that put $\phi_\lambda = \coprod_{i=1}^{n_\lambda} \phi_i : (Ae_\lambda)^{\oplus n_\lambda} \to Ae_\lambda A$. If $\sum_i \xi_i a_i = 0$, $\xi \in k$, then $0 = \phi_\lambda(\xi_1 e_\lambda, \cdots, \xi_{n_\lambda} e_\lambda)$, hence all $\xi_i e_\lambda = 0$. Then all $\xi_i = 0$. If $a \in A$, we can write $e_\lambda a = \phi_\lambda(a'_1, \cdots, a'_{n_\lambda})$, $a'_i \in Ae_\lambda$. Then

$$\phi_\lambda(a'_1, \cdots, a'_{n_\lambda}) = e_\lambda^2 a = e_\lambda \phi_\lambda(a'_1, \cdots, a'_{n_\lambda}) = \phi_\lambda(e_\lambda a'_1, \cdots, e_\lambda a'_{n_\lambda}),$$

hence $a'_i = e_\lambda a'_i \in e_\lambda A e_\lambda$. Then $a'_i = \eta_i e_\lambda$ for some $\eta_i \in k$ by (2), hence

$$e_\lambda a = \phi_\lambda(\eta_1 e_\lambda, \cdots, \eta_{n_\lambda} e_\lambda) = \sum_i \eta_i a_i,$$

and (3) follows.

Now let $(b_j)_{1 \le j \le r}$ be a k-linear basis of Ae_λ. Then

(4) $$(b_j a_i)_{i,j} \quad \text{forms a } k\text{-basis of } Ae_\lambda A.$$

For $Ae_\lambda A = (Ae_\lambda)(e_\lambda A) = \sum_{j,i} k b_j a_i$. If $\sum_{i,j} \xi_{ji} b_j a_i = 0$, $\xi_{ji} \in k$, then $0 = \phi_\lambda(\sum_j \xi_{ji} b_j, \cdots, \sum_j \xi_{jn_\lambda} b_j)$ hence $\sum_j \xi_{ji} b_j = 0$ for all i. Then $\xi_{ji} = 0$ for all i, j, hence (4).

Define finally $\psi \in \mathbf{Mod}A((\phi_\lambda A)^{\oplus r}, Ae_\lambda A)$ by $(c_1, \ldots, c_r) \mapsto \sum_{j=1}^r b_j c_j$. Then ψ is bijective by (3)/(4), hence the assertion.

(3.5) Together with (3.3) we have obtained

Proposition *If we say $(A, (I_j)_j)$ with a chain of ideals $(I_j)_j$ in A right quasi-hereditary iff $(I_j)_j$ satisfies (QH1-3) with (QH1) holding in $\mathbf{Mod}A/I_{j+1}$, then $(A, (I_j)_j)$ is quasi-hereditary iff it is right quasi-hereditary.*

(3.6) For each $\lambda \in \Lambda$ let $L(\lambda) = Ae_\lambda/Je_\lambda$, $J = J(A)$, and let $E(\lambda) = (e_\lambda A)^*$ the injective hull of $L(\lambda)$ in $A\mathbf{mod}$ (3.1.iii).

Definition *We say $A\mathbf{mod}$ is a highest weight category iff there is a PO $\geq$ on Λ such that*

(HW1) $\forall \lambda \in \Lambda$, $\exists \tilde{\nabla}(\lambda) \in A\mathbf{mod}$, *called the standard module of highest weight λ with $L(\lambda) \leq \tilde{\nabla}(\lambda)$ such that $\forall \mu \in \Lambda, [\tilde{\nabla}(\lambda)/L(\lambda) : L(\mu)] = 0$ unless $\mu < \lambda$.*

(HW2) $\forall \lambda \in \Lambda$, *$E(\lambda)$ admits a filtration $\tilde{\nabla}(\lambda) = F_1 < F_2 < \cdots < F_r = E(\lambda)$ in $A\mathbf{mod}$ such that $\forall i \geq 2$ $\exists \lambda_i \in \Lambda$ with*
$\lambda_i > \lambda$ such that $F_i/F_{i-1} \simeq \tilde{\nabla}(\lambda_i)$.

Note that by (HW2)

(1) $$\text{each } \tilde{\nabla}(\lambda) \text{ has simple socle } L(\lambda),$$

and that by (HW1)

(2) $$\mathrm{Gr}(A\mathbf{Mod}) = \coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{Z}[L(\lambda)] = \coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{Z}[\tilde{\nabla}(\lambda)].$$

Then the number of times each $\tilde{\nabla}(\mu)$ appears in a filtration of $E(\lambda)$ in (HW2) is independent of the choice of the filtrations, which we will denote by $(E(\lambda) : \tilde{\nabla}(\mu))$. By (HW2) we have also

(3) $$\mathrm{Gr}(A\mathbf{mod}) = \coprod_{\lambda\in\Lambda} \mathbb{Z}[E(\lambda)].$$

(3.7) **Lemma** *Assume* $(A\mathbf{mod}, (\Lambda, \geq))$ *is a highest weight category. Let* $\lambda, \mu \in \Lambda$. *If* $\mathrm{Ext}^1_A(\tilde{\nabla}(\lambda), \tilde{\nabla}(\mu)) \neq 0$, *then* $\lambda > \mu$. *Hence the filtration of* $E(\lambda)$ *in (HW2) can be arranged such that* $\lambda_i \not> \lambda_j$ *if* $i < j$ *with* $\lambda_1 = \lambda$.

Proof. If $\mathrm{Ext}^1_a(\tilde{\nabla}(\lambda), \tilde{\nabla}(\mu)) \neq 0$, from (HW1) there is $\nu \in \Lambda$ with $\nu \leq \lambda$ such that $\mathrm{Ext}^1_A(L(\lambda), \tilde{\nabla}(\mu)) \neq 0$. Then the short exact sequence

$$0 \to \tilde{\nabla}(\mu) \to E(\mu) \to E(\mu)/\tilde{\nabla}(\mu) \to 0$$

yields $A\mathbf{Mod}(L(\nu), E(\mu)/\tilde{\nabla}(\mu)) \neq 0$, hence $A\mathbf{Mod}(L(\nu), \tilde{\nabla}(\eta)) \neq 0$ for some $\eta > \mu$ by (HW2). Then $\lambda \geq \nu = \eta > \mu$ by (3.6.1).

(3.8) **Prposition** *Let* $(A\mathbf{mod}, (\Lambda, \geq))$ *be a highest weight category. Then for each* $\lambda \in \Lambda$

$$\tilde{\nabla}(\lambda) = \bigcap_{f\in A\mathbf{Mod}(E(\lambda), \coprod_{\mu\in\Lambda, \mu\not\leq\lambda} E(\mu))} \ker f = \bigcap_{f\in A\mathbf{Mod}(E(\lambda), \coprod_{\mu\in\Lambda, \mu>\lambda} E(\mu))} \ker f.$$

Proof. Enumerate $\Lambda = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ such that

(1) $$\text{if } i < j,\ \lambda_i \not> \lambda_j.$$

By (3.7) each $E(\lambda_i)$ admits a filtration in $A\mathbf{mod}$

(2) $$E(\lambda_i) = F_{n-i+1}(i) \geq \cdots \geq F_2(i) \geq F_1(i) = \tilde{\nabla}(\lambda_i)$$

such that $\forall j \geq 1$,

(3) $$F_{j+1}(i)/F_j(i) \simeq \tilde{\nabla}(\lambda_{i+j})^{\oplus n(i,j)} \quad \text{with } n(i,j) = (E(\lambda_i) : \tilde{\nabla}(\lambda_{i+j})).$$

¿From (3.1.iv) and (HW1)

(4) $$A\mathbf{Mod}(\tilde{\nabla}(\lambda_i), E(\lambda_j)) = 0 \quad \text{unless } \lambda_j \leq \lambda_i,$$

hence $\forall f \in A\mathbf{Mod}(E(\lambda_i), \coprod_{\lambda_j\not\leq\lambda_i} E(\lambda_j))$, $\tilde{\nabla}(\lambda_i) \leq \ker f$. Likewise

$$\begin{aligned} A\mathbf{Mod}(E(\lambda_i), E(\lambda_n)) &\simeq A\mathbf{Mod}(E(\lambda_i)/F_{n-i}(i), E(\lambda_n)) \\ &\simeq A\mathbf{Mod}(\tilde{\nabla}(\lambda_n)^{\oplus n(i,n-i)}, E(\lambda_n)), \end{aligned}$$

hence

$$(5) \qquad \bigcap_{f \in A\mathbf{Mod}(E(\lambda_i),E(\lambda_n))} \ker f = F_{n-i}(i).$$

By the injectivity of $E(\lambda_{n-1})$ any $g \in A\mathbf{Mod}(\tilde{\nabla}(\lambda_{n-1})^{\oplus n(i,n-i+1)}, E(\lambda_{n-1}))$ lifts to $E(\lambda_i)$, i.e., $A\mathbf{Mod}(E(\lambda_i)/F_{n-i}(\lambda_i), E(\lambda_{n-1}) \to A\mathbf{Mod}(\tilde{\nabla}(\lambda_i)^{\oplus n(i,n-i+1)}, E(\lambda_{n-1})$ is surjective. Hence together with (6) one obtains

$$\bigcap_{f \in A\mathbf{Mod}(E(\lambda_i),E(\lambda_n)\oplus E(\lambda_{n-1}))} \ker f = F_{n-i}(\lambda_i).$$

Repeating the argument yields

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}(\lambda_i) &= \bigcap_{f \in A\mathbf{Mod}(E(\lambda_i),\coprod_{j>i} E(\lambda_j))} \ker f \\ &= \bigcap_{f \in A\mathbf{Mod}(E(\lambda_i),\coprod_{\lambda_j \not< \lambda_i} E(\lambda_j))} \ker f \quad \text{by (5)} \end{aligned}$$

On the other hand, from (HW2)

$$n(i,j) = 0 \quad \text{unless } \lambda_{i+j} \geq \lambda_i,$$

hence also

$$\tilde{\nabla}(\lambda_i) = \bigcap_{f \in A\mathbf{Mod}(E(\lambda_i),\coprod_{\lambda_j > \lambda_i} E(\lambda_j))} \ker f.$$

(3.9) **Theorem [CPS, Th. 3.6]** *Let $(A, (I_j)_j)$ be a quasi-hereditary algebra. Define a PO on Λ such that $\lambda > \mu$ iff $\lambda \in \Lambda_s$ and $\mu \in \Lambda_t$ with $s > t$. Then $(A\mathbf{mod}, (\Lambda, \geq))$ forms a highest weight category. Conversely, assume $(A\mathbf{mod}, (\Lambda, \geq'))$ is a highest category. If we enumerate $\Lambda = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$ such that $\lambda_i \not> \lambda_j$ if $i < j$, then $(A, (I'_j)_j)$ with $I'_j = \sum_{i \geq j} Ae_{\lambda_i}A$ is quasi-hereditary.*

Proof. Supose $(A, (I_j)_j)$ is quasi-hereditary with $0 = I_{n+1} \subset I_n$. By (3.3/(3.5) there is a chain $\Lambda = \Lambda_0 \supset \Lambda_1 \supset \cdots \supset \Lambda_n \supset \Lambda_{n+1} = \emptyset$ such that

$$(1) \quad I_j = \sum_{\lambda \in \Lambda_j} Ae_\lambda A \text{ with } I_j/I_{j+1} \simeq \coprod_{\lambda \in \Lambda_j \setminus \Lambda_{j+1}} \overline{e_\lambda}(A/I_{j+1})^{\oplus n_\lambda} \text{ in } \mathbf{Mod}(A/I_{j+1}),$$

$$n_\lambda \in \mathbf{N}^+.$$

We will argue by induction on n. If $n = 0$, $J = J(A) = 0$ by (QH2), hence A is semisimple and we have only to define $\tilde{\nabla}(\lambda) = E(\lambda) = L(\lambda)$ for each $\lambda \in \Lambda$. Suppose $n \geq 1$. As $(A/I_n, (I_j/I_n)_j)$ is quasi-hereditary, by the induction hypothesis and by the remark before (3.3.7), there are $\nabla'(\lambda)$, $\lambda \in \Lambda' = \Lambda \setminus \Lambda_n$, satisfying (HW1, 2). For each $\lambda \in \Lambda$ set

$$(2) \qquad \tilde{\nabla}(\lambda) = \begin{cases} \inf^A_{A/I_n}(\nabla'(\lambda)) & \text{if } \lambda \in \Lambda' \\ (e_\lambda A)^* & \text{if } \lambda \in \Lambda_n. \end{cases}$$

To verify (HW1, 2), suppose first $\lambda \in \Lambda_n$. As $\tilde{\nabla}(\lambda) = E(\lambda)$, (HW2) holds. By (3.1.iii)

(3) $$L(\lambda) = Ae_\lambda/Je_\lambda \simeq (e_\lambda A/e_\lambda J)^* \leq (e_\lambda A)^* = \tilde{\nabla}(\lambda).$$

If $[\tilde{\nabla}(\lambda)/L(\lambda) : L(\mu)] \neq 0$, then by (3.1.iv)

$$\begin{aligned} 0 \neq \dim A\mathbf{Mod}(Ae_\mu, \tilde{\nabla}(\lambda)/L(\lambda)) &= \dim A\mathbf{Mod}(Ae_\mu, (e_\lambda J)^*) \\ &= \dim \mathbf{Mod}_k(e_\lambda J \otimes_A Ae_\mu, k). \end{aligned}$$

If $\mu \in \Lambda_n$, then $e_\lambda J e_\mu = 0$ by (QH2), hence $\mu \notin \Lambda_n$. Then $\mu < \lambda$ and (HW1) holds. Suppose next $\lambda \in \Lambda' = \Lambda \setminus \Lambda_n$. As $\nabla'(\lambda) \geq L'(\lambda) \simeq (A/I_n)\overline{e_\lambda}/J(A/I_n)\overline{e_\lambda} \simeq Ae_\lambda/Je_\lambda$,

$$\tilde{\nabla}(\lambda) = \inf_{A/I_n}^{A}(\nabla'(\lambda)) \geq Ae_\lambda/Je_\lambda \simeq L(\lambda).$$

If $[\tilde{\nabla}(\lambda)/L(\lambda) : L(\mu)] \neq 0$, then

$$\begin{aligned} 0 \neq \dim A\mathbf{Mod}(Ae_\mu, \tilde{\nabla}(\lambda)/L(\lambda)) &= \dim A\mathbf{Mod}(Ae_\mu, \inf_{A/I_n}^{A}(\nabla'(\lambda)/L'(\lambda)) \\ &= \dim(A/I_n)\mathbf{Mod}((A/I_n) \otimes_A Ae_\mu, \nabla'(\lambda)/L'(\lambda)), \end{aligned}$$

hence $e_\mu \in I_n$. Then $\mu \notin \Lambda_n$ by (3.3.6), hence $\mu \in \Lambda'$. Then $\mu < \lambda$ the induction hypothesis, and (HW1) holds. There is a filtration of $(\overline{e_\lambda}(A/I_n))^*$

$$\nabla'(\lambda) = F'_1 < F'_2 < \cdots < F'_r = (\overline{e_\lambda}(A/I_n))^*$$

satisfying (HW2) in $(A/I_n)\mathbf{Mod}$. Set $F_i = \inf^{A}_{A/I_n}(F'_i), 1 \leq i \leq r$. Then

$$E(\lambda)/F_r \simeq (e_r A)^*/(\overline{e_\lambda}(A/I_n))^* \simeq (e_\lambda I_n)^*$$

with $e_\lambda I_n$ a direct summand of $(e_\lambda + (1 - e_\lambda))I_n = I_n \simeq \coprod_{\mu \in \Lambda_n}(e_\mu A)^{\oplus n_\mu}$ by (3.3)/(3.5). Then by Krull-Schmidt $e_\lambda I_n \simeq \coprod_{\mu \in \Lambda_n}(e_\mu A)^{\oplus m_\mu}$ for some $m_\mu \leq n_\mu$, hence $E_i(\lambda)/F_r \simeq \coprod_\mu \tilde{\nabla}(\mu)^{\oplus m_\mu}$ with $\mu > \lambda$, as desired.

Assume next $(A\mathbf{mod}, (\Lambda, \geq'))$ is a highest weight category. We will show A admits a structure of right quasi-hereditary algebra, hence quasi-hereditary by (3.5). Choose λ maximal in Λ. We claim

(4) $Ae_\lambda A$ is projective in $\mathbf{Mod}A$, $(Ae_\lambda A)J(Ae_\lambda A) = 0$, and that
$$\mathbf{Mod}A(Ae_\lambda A, A/Ae_\lambda A) = 0.$$

Note first from (HW2)

(5) $$\tilde{\nabla}(\lambda) = E(\lambda) = (e_\lambda A)^*,$$

hence

(6) $$\tilde{\nabla}(\lambda)^* \simeq e_\lambda A \quad \text{in } \mathbf{Mod}A.$$

If $\mu \in \Lambda$, there is from (3.8.2) a short exact sequence in $A\mathbf{Mod}$

(7) $$0 \to F \to E(\mu) \to \tilde{\nabla}(\lambda)^{\oplus n(\mu,\lambda)} \to 0$$

with $n(\mu,\lambda) = (E(\mu) : \tilde{\nabla}(\lambda))$ and with F baving filtration such that the subquotients are all of the form $\tilde{\nabla}(\nu), \mu \leq \nu \neq \lambda$. Dualizeing (6) one obtains a short exact sequence in $\mathbf{Mod}A$

$$(8) \qquad 0 \leftarrow F^* \leftarrow E(\mu)^* \leftarrow (e_\lambda A)^{\oplus n(\mu,\lambda)} \leftarrow 0.$$

By (3.1.iv) and by (HW1)

$$\begin{aligned}\dim \mathbf{Mod}A(e_\lambda A, F^*) &= [F^* : e_\lambda A/e_\lambda J] = [F : L(\lambda)] \\ &= \sum_{\nu\in\Lambda, \mu\leq\nu\neq\lambda} (F : \tilde{\nabla}(\nu))[\tilde{\nabla}(\nu) : L(\lambda)] = 0\end{aligned}$$

while from (6) and (HW1)

$$\dim \mathbf{Mod}A(e_\lambda A, e_\lambda A) = [\tilde{\nabla}(\lambda)^* : e_\lambda A/e_\lambda J] = [\nabla(\lambda) : L(\lambda)] = 1,$$

hence

$$(9) \qquad \mathbf{Mod}A(e_\lambda A, e_\lambda A) = k\mathrm{id}_{e_\lambda A}.$$

Then

$$\begin{aligned}e_\mu A e_\lambda &\simeq \mathbf{Mod}A(e_\lambda A, e_\mu A) \simeq \mathbf{Mod}A(e_\lambda A, E(\mu)^*) \\ &\simeq \mathbf{Mod}A(e_\lambda A, (e_\lambda A)^{\oplus n(\mu,\lambda)}) \simeq (k\mathrm{id}_{e_\lambda A})^{\oplus n(\mu,\lambda)}.\end{aligned}$$

If we write $A = \coprod_{\mu\in\Lambda}(e_\mu A)^{\oplus n_\mu}$, then

$$\begin{aligned}Ae_\lambda A &= \sum_{\mu\in\Lambda}(e_\mu Ae_\lambda A)^{\oplus n_\mu} = \coprod_{\mu\in\Lambda}(e_\mu Ae_\lambda A)^{\oplus n_\mu} \quad \text{as } Ae_\lambda \subseteq A \\ &= \coprod_{\mu\in\Lambda}((e_\mu Ae_\lambda)e_\lambda A)^{\oplus n_\mu} \simeq \coprod_{\mu\in\Lambda}((k\mathrm{id}_{e_\lambda A})^{\oplus n(\mu,\lambda)}e_\lambda A)^{\oplus n_\mu} = \coprod_{\mu\in\Lambda}(e_\lambda A)^{\oplus n(\mu,\lambda)n_\mu},\end{aligned}$$

hence $Ae_\lambda A$ is projective in $\mathbf{Mod}A$. Moreover,

$$\begin{aligned}(Ae_\lambda A)J(Ae_\lambda A) &= Ae_\lambda Je_\lambda A = AJ(e_\lambda Ae_\lambda)A = AJ(k)A \quad \text{by (9)} \\ &= 0.\end{aligned}$$

If $f \in \mathbf{Mod}A(Ae_\lambda A, A/Ae_\lambda A)$, then for each a and $b \in A$, $f(ae_\lambda b) = f(ae_\lambda)e_\lambda b = 0$, hence $\mathbf{Mod}A(Ae_\lambda A, A/Ae_\lambda A) = 0$, and (4) holds.

Let $I = Ae_\lambda A$ and $\overline{A} = A/I$. We show $(\overline{A}, (\Lambda \setminus \{\lambda\}, \geq'))$ forms a highest weight category. Then we can repeat the argument to make A into a right quasi-hereditary algebra. If $M \in \mathbf{Mod}A$, put $M^0 = \mathrm{Ann}_M(I)$. We claim

(10) $\quad L(\mu)^0 = (1-\delta_{\lambda\mu})L(\mu)$, $\tilde{\nabla}(\mu)^0 = (1-\delta_{\lambda\mu})\nabla(\mu)$, and that
if we arrange the filtration of $E(\mu)$ as in (7), then $E(\mu)^0 = F$.

As $L(\mu)^0 \leq L(\mu)$ and as $L(\mu)$ is simple, $L(\mu)^0 = L(\mu)$ if $L(\mu) \neq 0$. We have

$$\tilde{\nabla}(\lambda)^0 \simeq A\mathbf{Mod}(\overline{A}, \tilde{\nabla}(\lambda)) \simeq A\mathbf{Mod}(\overline{A}, (e_\lambda A)^*) \simeq \mathbf{Mod}_k(e_\lambda A \otimes_A \overline{A}, k) = 0,$$

hence from (6)

$$E(\lambda)^0 = \tilde{\nabla}(\lambda)^0 = 0. \tag{11}$$

As $L(\lambda) \leq \tilde{\nabla}(\lambda)$, also $L(\lambda)^0 = 0$. If $\mu \neq \lambda$, then

$$\begin{aligned} e_\lambda L(\mu) &\simeq e_\lambda(e_\mu A/e_\mu J)^* \quad \text{by (3.1.iii)} \\ &= ((e_\mu A/e_\mu J)e_\lambda)^* = 0 \quad \text{as } e_m uA/e_m uJ)e_\lambda \subseteq e_\mu J \text{ by (3.1.ii)}, \end{aligned}$$

hence $L(\mu)^0 = L(\mu)$. Also

$$\tilde{\nabla}(\mu)^0 = \tilde{\nabla}(\mu) \tag{12}$$

as the composition factors of $\tilde{\nabla}(\mu)$ are among $L(\nu), \nu \leq' \mu$, by (HW1). Finally, from the short exact sequence (6) one obtains an exact sequence

$$0 \to F^0 \to E(\mu)^0 \to (\tilde{\nabla}(\lambda)^{\oplus n(\mu,\lambda)})^0$$

with $((\tilde{\nabla}(\lambda)^{\oplus n(\mu,\lambda)})^0 = (\tilde{\nabla}(\lambda)^0)^{\oplus n(\mu,\lambda)} = 0$ by , hence $E(\mu)^0 = F^0 = F$ by (11), and (10) holds.

As $\inf_{\overline{A}}^{A}$ is an imbedding, $\{L(\mu)^0 \mid \mu \in \Lambda, L(\mu)^0 \neq 0\}$ is a complete set of representatives of the isomorphism classes of the simples of $\overline{A}$. Also $\mathrm{Ann}_?(I)$ preserves injectives. Hence $(\overline{A}, (\Lambda\backslash\{\lambda\} \geq'))$ forms a highest weight category with the simples $L(\mu)^0 = L(\mu)$, the standards $\tilde{\nabla}(\mu)^0 = \tilde{\nabla}(\mu)$ and the indecomposable injectives $E(\mu)^0, \mu \in \Lambda\backslash\{\lambda\}$, as desired.

(3.10) If $M \in A\mathbf{mod}$, let $\mathrm{add}(M)$ be the full subcategory of $A\mathbf{mod}$ consisting of the direct sums of direct summands of M. We say M is basic iff M has no direct summands in $A\mathbf{mod}$ of the form $N \oplus N$ with $N \neq 0$.

Definition *We say M is tilting iff*

(T1) $\mathrm{projdim}_A M < \infty$,

(T2) $\mathrm{Ext}^i_A(M, M) = 0 \quad \forall i \geq 1$,

(T3) $\forall$ *projective P of $A\mathbf{mod}$, there is an exact sequence*

$$0 \to P \to M^0 \to M^1 \to \cdots \to M^r \to 0 \quad \textit{in } A\mathbf{Mod}$$

with all $M^i \in \mathrm{add}(M)$.

Dualizing the conditions (T1-3) *we obtain cotilting modules.*

(3.11) Assume $(A, (I_j)_j)$ is quasi-hereditary. Define a PO on Λ such that $\lambda > \mu$ iff $\lambda \in \Lambda_s$ and $\mu \in \Lambda_t$ with $s > t$. For each $\lambda \in \Lambda$ let $E(\lambda) = (e_\lambda A)^*$ the injective hull of Ae_λ/Je_λ, and let

$$\tilde{\nabla}(\lambda) = \bigcap_{f \in A\mathbf{Mod}(E(\lambda), \coprod_{\mu\in\Lambda,\mu\nleq\lambda} E(\mu))} \ker f, \tag{1}$$

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = Ae_\lambda / \sum_{g \in A\mathbf{Mod}(\coprod_{\mu\in\Lambda,\mu\leq\lambda}(Ae_\mu),(Ae_\lambda)} \mathrm{im} f. \tag{2}$$

By (3.9)/(3.8) one can define a highest weight category $(A\mathbf{Mod}, (\Lambda, \geq))$ such that the standards are given by the $\tilde{\nabla}(\lambda), \lambda \in \Lambda$. Also from (3.8)

$$\tilde{\nabla}(\lambda) = \bigcap_{f \in A\mathbf{Mod}(E(\lambda), \coprod_{\mu > \lambda} E(\mu))} \ker f. \tag{3}$$

On the other hand, if $\nabla'(\lambda) = \bigcap_{g \in A\mathbf{Mod}((Ae_\lambda)^*, \coprod_{\mu \not\leq \lambda}(Ae_\mu)^*)} \ker g$, there is an exact sequence

$$0 \to \nabla'(\lambda) \to (Ae_\lambda)^* \to \prod_{g \in \mathbf{Mod}A((Ae_\lambda)^*, (Ae_mu)^*), \mu \not\leq \lambda} ((Ae_\lambda)^* / \ker g). \tag{4}$$

As $(Ae_\lambda)^*/\ker g \simeq \mathrm{im} g \leq (Ae_\mu)^*$, the sequence (4) induces another exact sequence

$$0 \to \nabla'(\lambda) \to (Ae_\lambda)^* \to \prod_g (Ae_\mu)^* \tag{5}$$

sending $x \in (Ae_\lambda)^*$ to $(g(x))_g$. As $\dim \mathbf{Mod}A((Ae_\lambda)*, (Ae_\mu)*) < \infty$, we may assume the product in (5) is finite. Then taking the k-dual of (5) yields an exact sequence

$$0 \leftarrow \nabla'(\lambda)^* \leftarrow Ae_\lambda \leftarrow \coprod_g (Ae_\mu)*,$$

hence

$$\Big(\bigcap_{g \in \mathbf{Mod}A((Ae_\lambda)^*, \coprod_{\mu \not\leq \lambda}(Ae_\mu)^*)} \ker g\Big)^* = \nabla'(\lambda)^* \simeq Ae_\lambda / \sum_{g \in \mathbf{Mod}A((Ae_\mu)^*, (Ae_\lambda)^*), \mu \not\leq \lambda} \mathrm{im} g$$
$$= Ae_\lambda / \sum_{g \in \mathbf{Mod}A(\coprod_{\mu \not\leq \lambda}(Ae_\mu)^*, (Ae_\lambda)^*)} \mathrm{im} g = \tilde{\Delta}(\lambda).$$

Then by (3.9)/(3.8) again

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = Ae_\lambda / \sum_{g \in \mathbf{Mod}A(\coprod_{\mu > \lambda}(Ae_\mu)^*, (Ae_\lambda)^*)} \mathrm{im} g. \tag{6}$$

Let $\mathcal{F}(\tilde{\nabla})$ (resp. $\mathcal{F}(\tilde{\Delta})$) be the set of finite dimensional left A-modules that admit a filtration whose subquotients are all isomorphic to some $\tilde{\nabla}(\lambda)$ (resp. $\tilde{\Delta}(\lambda)$), $\lambda \in \Lambda$, and let $\mathcal{T}(A)$ be the full subcategory of $A\mathbf{mod}$ whose objects are $\mathcal{F}(\tilde{\nabla}) \cap \mathcal{F}(\tilde{\Delta})$. We can now state a theorem of Ringel.

(3.12) **Theorem [R, Th. 5.5/Cor. 5.5/ Prop. 5.2]** *Let $(A, (I_j)_j)$ be a quasi-hereditary algebra.*

(i) *There is basic A-module T that is both tilting and cotilting such that $\mathcal{T}(A) = \mathrm{add}(T)$.*

(ii) *The indecomposables of $\mathcal{T}(A)$ are parameterized by Λ, written $\lambda \mapsto T(\lambda)$, such that $(T(\lambda) : \tilde{\nabla}(\lambda)) = 1$ and that $(T(\lambda) : \tilde{\nabla}(\mu)) = 0$ unless $\mu \leq \lambda$.*

(3.13) Recall from (1.1)/(1.6)/(1.2) that $(G\mathbf{Mod}, (X^+, \geq), \tau)$ satisfies both (HW1) and (HW2) with $\tilde{\nabla}(\lambda) = \nabla(\lambda)$, $\lambda \in X^+$, except that X^+ is infinite and that the filtration of $E(\lambda)$ has infinite length. We will show in §4 that X^+ admits a filtration by finite subsets $\pi_1 \subset \pi_2 \subset \cdots$ with $X^+ = \cup_i \pi_i$ and that there are finite dimentional k-algebras $S(\pi_i)$, called Schur algebras of G, such that $S(\pi_j)$ is a quotient of $S(\pi_i)$ if $j < i$; $(S(\pi_j)\mathbf{mod}, (\pi_j, \geq)) \leq (S(\pi_i)\mathbf{mod}, (\pi_i, \geq))$ as highest weight categories if $j < i$; $\varinjlim_i (S(\pi_j)\mathbf{mod}, (\pi_j, \geq)) = (G\mathbf{Mod}, (X^+, \geq))$; and that the contravariant duality τ induces an involutory contravariant exact functor on each $S(\pi_j)\mathbf{mod}$ fixing the simples. That motivates us to introduce

Definition *We call a highest weight category $(A\mathbf{Mod}, (\Lambda, \geq))$ a highest weight category with duality iff there is an exact contravariant k-linear functor $\tau : A\mathbf{mod} \to A\mathbf{mod}$ with $\tau^2 = \mathrm{id}_{A\mathbf{mod}}$, written $M \mapsto {}^\tau M$ such that ${}^\tau L(\lambda) \simeq L(\lambda)$ for each $\lambda \in \Lambda$.*

(3.14) **Remark** The involutive contravariant functor $\tau : A\mathbf{mod} \to A\mathbf{mod}$ induces a k-algebra isomorphism $\bar{\tau} : A \to A^{\mathrm{op}}$, as mentioned in [CPS89], such that

(1) $$\tau \simeq ({}_{\bar{\tau}}?)^*,$$

where ${}_{\bar{\tau}}M$, $M \in A\mathbf{mod}$, is an A^{op}-module that is M as k-linear space with A^{op} acting through $\bar{\tau}$. Hence if we regard $\bar{\tau}$ as antiautomorphism of A, then

(2) $$(af)(m) = f(\bar{\tau}(a)m) \quad \forall f \in ({}_{\bar{\tau}}M)^*, m \in_{\bar{\tau}} M, a \in A.$$

Let us write down an argument, sketch of which was communicated to us from Sumioka. We begin with

(i) **claim** *Let B, B' be two finite dimensional k-algebras, both basic. If there is an equivalence of categories $\Phi : B\mathbf{mod} \to B'\mathbf{mod}$, then there is $\phi \in k\mathbf{Alg}(B', B$ such that $\Phi \simeq_\phi ?$.*

By the Morita theory (cf. [Jac, Morita II, p. 178]) there is a progenerator P of $B'\mathbf{mod}$ and $\gamma \in k\mathbf{Alg}(B, B'\mathbf{Mod}(P, P))$ making P into a (B', B)-bimodule such that $\Phi \simeq P \otimes_B ?$. But $P \simeq B'$ in $B'\mathbf{mod}$ as B is basic, hence γ induces an isomorphism $\phi \in k\mathbf{Alg}(B, B')$ such that $\phi(b) = \gamma(b)1_{B'}$. Then $\Phi \simeq B' \otimes_B ? \simeq_\phi ?$.

(ii) **claim** *Let R be a finite dimensional k-algebra with $(e_i)_{1 \leq i \leq n}$ a complete set of the equivalences classes of the primitive idempotents of R. Let $e = \sum_i e_i$ and $B = eRe$. If $\phi \in k\mathbf{Alg}(B^{\mathrm{op}}, B)^\times$ with $\phi(e_i) = e_i$, there is $\hat{\phi} \in k\mathbf{Alg}(A^{\mathrm{op}}, A)^\times$ with $\hat{\phi}|_{B^{\mathrm{op}}} = \phi$.*

Let $1 = \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^{n_i} e_{is}$ be a decomposition into primitive idempotents with $e_{i1} = e_i$ for each i and $Re_{is} \simeq Re_i$ for each s. As $e_{is}Re_{jt} \simeq R\mathbf{Mod}(Re_{is}, Re_{jt}) \simeq R\mathbf{Mod}(Re_i, Re_j)$, for each i and s ther is $u_{is} \in e_iRe_{is}$ and $v_{is} \in e_{is}Re_i$ such that $u_{is}v_{is} = e_i$ and $v_{is}u_{is} = e_{is}$. One can moreover choose $u_{i1} = e_i = v_{i1}$. Then

(3) $$eu_{is} = u_{is}, \qquad v_{jt}e = v_{jt}$$

(4) $$u_{is}v_{jt} = \delta_{ij}\delta_{st}e_i, \qquad v_{jt}u_{is} = \delta_{ij}\delta_{st}e_{is}.$$

to ease the notation, we will regard ϕ as an antiautomorphism of B and show ϕ extends to an antiautomorphism $\hat{\phi}$ of R. Define $\hat{\phi} : R \to R$ via

(5) $$a \longmapsto \sum_{i,j,s,t} v_{js}\phi(u_{is}av_{jt})u_{is}.$$

If $a' \in R$, then

$$
\begin{aligned}
\hat{\phi} &= \sum_{i,j,s,t} v_{jt}\phi(u_{is}a \sum_{\alpha,\beta,\mu,\nu} v_{\beta\nu}u_{\alpha\mu}a'v_{jt})u_{is} \\
&= \sum v_{jt}\phi(u_{is}av_{\beta\nu}u_{\alpha\mu}a'v_{jt})u_{is}\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu} \quad \text{by (3)/(4)} \\
&= \sum v_{jt}\phi(u_{\alpha\mu}a'v_{jt})\phi(u_{is}av_{\beta\nu})u_{is} = \sum v_{jt}\phi(e_\alpha u_{\alpha\mu}a'v_{jt})\phi(u_{is}av_{\beta\nu})u_{is} \\
&= \sum v_{jt}\phi(u_{\alpha\mu}a'v_{jt})e_\alpha\phi(u_{is}av_{\beta\nu})u_{is} \quad \text{by the hypothesis} \\
&= \sum v_{jt}\phi(u_{\alpha\mu}a'v_{jt})\delta_{\alpha\beta}\delta_{\mu\nu}e_\alpha\phi(u_{is}av_{\beta\nu})u_{is} \quad \text{from the second equality} \\
&= \sum v_{jt}\phi(u_{\alpha\mu}a'v_{jt})u_{\alpha\mu}v_{\beta\nu}\phi(u_{is}av_{\beta\nu})u_{is} = \hat{\phi}(a')\hat{\phi}(a).
\end{aligned}
$$

If $b \in B$, then

$$
\begin{aligned}
\hat{\phi}(b) &= \sum v_{jt}\phi(\delta_{s1}\delta_{t1}u_{is}bv_{jt})u_{is} = \sum_{i,j} e_j\phi(e_ibe_j)e_i \\
&= \sum_{i,j} e_j\phi(e_j)\phi(b)\phi(e_i)e_i = \sum_{i,j} e_j\phi(b)e_i \quad \text{by the hypothesis} \\
&= e\phi(b)c = \phi(b).
\end{aligned}
$$

Regarding $v_{jt} \in R\mathbf{mod}(Re_{jt}, Re_j)$, $b \in R\mathbf{mod}(Re, Re)$, and $u_{is} \in R\mathbf{mod}(Re_i, Re_{is})$ by the right multiplication, one obtains a commutative diagram

$$
\begin{tikzcd}
Re_{jt} \arrow[r, "v_{jt}bu_{is}"] \arrow[d, "v_{jt}"'] & Re_{is} \\
Re_j \arrow[d] & Re_i \arrow[u, "u_{is}"'] \\
Re \arrow[r, "b"'] & Re, \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

where $Re_j \to Re$ (resp. $Re \to Re_i$) is the natural map associated to the direct sum decomposition $Re = \coprod Re_i$. As v_{jt} and u_{is} are both invertible, $v_{jt}R\mathbf{mod}(Re, Re)u_{is} = R\mathbf{mod}(Re_{jt}, Re_{is})$, i.e., $v_{jt}Bu_{is} = e_{jt}Re_{is}$, hence $\hat{\phi}$ is surjecive. Then $\hat{\phi}$ is bijective by dimension.

Keeping the notations we show next

(iii) *If there is an equivalence of categories $\Phi : R\mathbf{mod} \to R^{\mathrm{op}}\mathbf{mod}$ such that $\Phi(Re/J(R)e) \simeq eR/eJ(R)$ for each primitive idempotent e of R, then there is $\psi \in k\mathbf{Alg}(R^{\mathrm{op}}, R)^\times$ such that $\Phi \simeq_\psi ?$.*

Note that B is basic. We will denote the elements of R (resp. B) with $'$ when regarded as in R^{op} (resp. B^{op}). If $P = Re$, $P' = R'e'$, $Q = eR$, and $Q' = e'R'$ with $R' = R^{\mathrm{op}}$, then the multiplication $P \otimes_B P' \to R$ (resp. $P' \otimes_R P \to B$) is bijective wth inverse $a \mapsto \sum_{i,j,s,t} v_{jt} \otimes u_{is}a$ (resp. $b \mapsto e \otimes b$), hence $\tilde{P} = P \otimes_B ? : B\mathbf{mod} \to R\mathbf{mod}$ (resp.

$\tilde{P}' = P'\otimes_{B'}? : B'\mathbf{mod} \to R'\mathbf{mod}$) is an equivalence of categories with quasi-inverse $\tilde{Q} = Q\otimes_R ?$ (resp. $\tilde{Q}' = Q'\otimes_{R'}?$). As $\tilde{Q}' \circ \Phi \circ \tilde{P} : B\mathbf{mod} \to B^{\mathrm{op}}\mathbf{mod}$ is an equivalence of categories, by (i) there is $\theta \in k\mathbf{Alg}(B^{\mathrm{op}}, B)^\times$ such that

(6) $$\tilde{Q}' \circ \Phi \circ P \simeq_\theta ?.$$

On the other hand, $\tilde{P}(Be_i/J(B)e_i) \simeq Re_i/J(R)e_i$ as $J(B) = eJ(R)e$ and likewise $\tilde{Q}'(R'e_i'/J(R')e_i') \simeq B'e_i'/J(B')e_i'$. Then $\tilde{Q}' \circ \Phi \circ \tilde{P}(Be_i/J(B)e_i) \simeq B'e_i'/J(B')e_i'$, hence

(7) $$\theta(e_i') \text{ and } e_i \text{ are equivalent.}$$

As $\sum_i \theta(e_i') = e = \sum_i e_i$ are two decompositions of 1 ino primitive idempotents in B, there is $u \in B^\times$ and a permutation σ of the e_i such that $\forall i$, $\sigma(e_i) = u\theta(e_i')u^{-1}$. Then $B\sigma(e_i) = B\theta(e_i')u^{-1} \simeq B\theta(e_i') \simeq Be_i$ by (7), hence $\sigma = \mathrm{id}$, and thus replacing θ by $u\theta u^{-1}$ we may assume $\theta(e_i') = e_i$ for each i. Then by (ii) we can lift θ to $\hat{\theta} \in k\mathbf{Alg}(A^{\mathrm{op}}, A)$ to obtain

$$\begin{aligned}\Phi &\simeq \tilde{P}' \circ \tilde{Q}' \circ \Phi \circ P \circ Q \simeq \tilde{P}' \circ_\theta ? \circ Q \quad \text{by (6)}\\ &\simeq R'e' \otimes_{B'} {}_\theta(eR\otimes_B ?) \simeq_{\hat{\theta}} ?,\end{aligned}$$

as desired.

Now apply (iii) to the composite equivalence

$$A\mathbf{mod} \xrightarrow{\tau} A\mathbf{mod} \xrightarrow{\bullet} \mathbf{mod}A \xrightarrow{\sim} A^{\mathrm{op}}\mathbf{mod}$$

to obtain $\bar{\tau} \in k\mathbf{Alg}(A^{\mathrm{op}}, A)^\times$.

(3.15) **Corollary** *Assume* $(A\mathbf{Mod}, (\Lambda, \geq)), \tau)$ *is a highest weight category with duality. If we enumerate* Λ *as in* (3.9), *then* $(A, (I_j)_j)$ *with* $I_j = \sum_{j\geq i} Ae_{\lambda_j}A$ *is quasi-hereditary with* ${}^\tau\tilde{\nabla}(\lambda) \simeq \tilde{\Delta}(\lambda)$ *in* $A\mathbf{mod}$ $\forall\lambda \in \Lambda$ *in the notation of* (3.11) .

(3.16) **Remark** In the presense of duality τ we could prove (3.15) entirely in $A\mathbf{mod}$ instead of going frst to $\mathbf{mod}A$ and coming back via (3.5).

4 Schur algebras

(4.1) To relate $G\mathbf{Mod}$ to the category of modules over a finite dimensional k-algebra, we have first to recall that an affine k-group $\mathfrak{G}$ is a functor from the category of commutative k-algebras $\mathbf{Alg}_k$ to the category of groups $\mathbf{Grp}$ represented by a k-algebra $k[\mathfrak{G}]$. Our reductive group G is an affine k-group. The group structure is encoded in $k[\mathfrak{G}]$, making $k[\mathfrak{G}]$ a Hopf algebra with comultiplication $\Delta_{\mathfrak{G}}$, counit $\epsilon_{\mathfrak{G}}$, and the antipole $\sigma_{\mathfrak{G}}$. If $\mathbf{Fnc}_k$ denotes the category of functors from $\mathbf{Alg}_k$ to $\mathbf{Set}$, then $\Delta_{\mathfrak{G}}$ (resp. $\epsilon_{\mathfrak{G}}$) is induced from the multiplication (resp. the neutral element) under the isomorphism

(1) $$\begin{aligned}\mathbf{Fnc}_k(\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}, \mathfrak{G}) &\simeq \mathbf{Fnc}_k(\mathbf{Alg}_k(k[\mathfrak{G}] \otimes k[\mathfrak{G}], ?), \mathfrak{G})\\ &\simeq \mathfrak{G}(k[\mathfrak{G}] \otimes k[\mathfrak{G}]) \quad \text{by Yoneda's lemma}\\ &\simeq \mathbf{Alg}_k(k[\mathfrak{G}], k[\mathfrak{G}] \otimes k[\mathfrak{G}])\end{aligned}$$

(resp. $\mathbf{Fnc}_k(\mathfrak{e}_k, \mathfrak{G}) \simeq \mathfrak{G}(k) = \mathbf{Alg}_k(k[\mathfrak{G}], k)$, where $\mathfrak{e}_k$ is the trivial algebraic group represented by k). Thus

$$(2) \qquad (k[\mathfrak{G}] \otimes \Delta_{\mathfrak{G}}) \circ \Delta_{\mathfrak{G}} = (\Delta_{\mathfrak{G}} \otimes k[\mathfrak{G}]) \circ \Delta_{\mathfrak{G}}$$

$$(3) \qquad (k[\mathfrak{G}] \otimes \epsilon_{\mathfrak{G}}) \circ \Delta_{\mathfrak{G}} = id_{k[\mathfrak{G}]} = (\epsilon_{\mathfrak{G}} \otimes k[\mathfrak{G}]) \circ \Delta_{\mathfrak{G}}.$$

Let $\mathbf{Grp}_k$ be the category of affine k-groups. A $\mathfrak{G}$-module is really a pair (M, f) of a k-linear space M and $f \in \mathbf{Grp}_k(\mathfrak{G}, \mathrm{GL}(M))$ with $\mathrm{GL}(M) \in \mathbf{Grp}_k$ such that $\mathrm{GL}(M)(A) = \mathbf{Mod}_A(M \otimes A, M \otimes A)^\times \ \forall A \in \mathbf{Alg}_k$. If (M, f) is a $\mathfrak{G}$-module, define $\Delta_M \in \mathbf{Mod}_k(M, M \otimes k[\mathfrak{G}])$ via $m \mapsto f(k[\mathfrak{G}])(\mathrm{id}_{k[\mathfrak{G}]})(m \otimes 1)$. Then

$$(4) \qquad (M \otimes \Delta_{\mathfrak{G}}) \circ \Delta_M = (\Delta_M) \otimes k[\mathfrak{G}]) \circ \Delta_M$$

$$(5) \qquad (M \otimes \epsilon_{\mathfrak{G}}) \circ \Delta_M = \mathrm{id}_M.$$

In turn, we call a pair (M, Δ_M) of k-linear space M and k-linear map $\Delta_M : M \to M \otimes k[\mathfrak{G}]$ a $k[\mathfrak{G}]$-comodule iff (4) and (5) are satisfied. Let $k[\mathfrak{G}]\mathbf{coM}$ denote the category of $k[\mathfrak{G}]$-comodules. If $(M, \Delta_M) \in k[G]\mathbf{coM}$, define $f \in \mathbf{Grp}_k(\mathfrak{G}, \mathrm{GL}(M))$ by setting for each $A \in \mathbf{Alg}_k, x \in \mathfrak{G}(A), m \in M$ and $a \in A$

$$(6) \qquad f(A)(x)(m \otimes a) = ((M \otimes x) \circ \Delta_M)(m)a.$$

One thus obtains an equivalence of categories

$$(7) \qquad \mathfrak{G}\mathbf{Mod} \simeq k[\mathfrak{G}]\mathbf{coM}.$$

(4.2) A k-cogebra is a triple $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ of a k-linear space C, $\Delta_C \in \mathbf{Mod}_k(C, C \otimes C)$ and $\epsilon_C \in \mathbf{Mod}_k(C, k)$ satisfying (4.1.2/3). If $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ is a k-cogebra, a C-comodule is a pair (M, Δ_M) of a k-linear space M and $\Delta_M \in \mathbf{Mod}_k(M, M \otimes C)$ satisfying (4.1.4/5). Let $C\mathbf{coM}$ be the category of C-comodules. If $C^* = \mathbf{Mod}_k(C, k)$, C^* is naturally a k-algebra with multiplication given by the commutative diagram

$$(1) \qquad \begin{array}{ccc} C^* \otimes C^* & \longrightarrow & C^* \\ \downarrow & & \| \\ \mathbf{Mod}_k(C \otimes C, k) & \xrightarrow[\mathbf{Mod}_k(\Delta_C, k)]{} & \mathbf{Mod}_k(C, k), \end{array}$$

where the left vertical map is given by

$$(2) \qquad f \otimes f' \longmapsto \text{“} c \otimes c' \mapsto f(c)f(c') \text{”}.$$

Then a C-comodule M is made into a C^*-module via the commutative diagram

$$(3) \qquad \begin{array}{ccc} C^* \otimes M & \longrightarrow & M \\ {\scriptstyle C^* \otimes \Delta_M}\downarrow & & \uparrow{\scriptstyle \langle\ ,\ \rangle \otimes M} \\ C^* \otimes M \otimes C & \xrightarrow[C^* \otimes P]{} & C^* \otimes C \otimes M, \end{array}$$

where P is the transposition and $\langle\ ,\ \rangle$ is the evalutation.

In turn, if S is a finite dimensional k-algebra, then (2) with C replaced by S is bijective. Hence S^* comes equipped with a structure of k-cogebra by the commutative diagram

$$\text{(4)} \qquad \begin{array}{ccc} S^* & \longrightarrow & S^* \otimes S^* \\ \| & & \uparrow \wr \\ \mathbf{Mod}_k(S,k) & \xrightarrow[\mathbf{Mod}_k(m_S,k)]{} & \mathbf{Mod}_k(S\otimes S,k), \end{array}$$

where m_S is the multiplication on S. If N is an S-module, then N is made into an S^*-comodule with Δ_N defined by the composite of the isomorphism $N \otimes S^* \simeq \mathbf{Mod}_k(S,N)$ and the map $N \to \mathbf{Mod}_k(S,N)$ via $n \mapsto$ "$s \mapsto sn$". Thus the category of finite dimensional k-cogebras is equivalent to the category of finite dimensional k-algebras, and if C is a finite dimensional k-cogebra, one obtains an equivalence of categories

$$\text{(5)} \qquad C\mathbf{coM} \simeq C^*\mathbf{Mod}.$$

While any simple of $C^*\mathbf{Mod}$ is a quotient of C^*, note that

(6) any simple of $C\mathbf{coM}$ is a subcomodule of C.

For let $(L, \Delta_L) \in C\mathbf{coM}$. If $f \in L^* \setminus 0$, we obtains a commutative diagram

$$\text{(7)} \qquad \begin{array}{ccccc} L & \xrightarrow{\Delta_L} & L\otimes C & \xrightarrow{f\otimes C} & C \\ {\scriptstyle\Delta_L}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L\otimes\Delta_C} & & \downarrow{\scriptstyle\Delta_C} \\ L\otimes C & \xrightarrow[\Delta_L\otimes C]{} & L\otimes C\otimes C & \xrightarrow[f\otimes C\otimes C]{} & C\otimes C. \end{array}$$

As $(L \otimes \epsilon_C) \circ \Delta_L = \mathrm{id}_L$, $(f \otimes C) \circ \Delta_L \in C\mathbf{coM} \setminus 0$. Hence if L is simple, $L \leq C$ under $(f \otimes C) \circ \Delta_L$.

(4.3) Back to $G\mathbf{Mod}$, let $\pi \subseteq X^+$. We say $M \in G\mathbf{Mod}$ belongs to π iff $[M : L(\lambda)] = 0$ unless $\lambda \in \pi$ $\forall \lambda \in X^+$. Let $\mathcal{M}(\pi)$ be the full subcategory of $G\mathbf{Mod}$ consisting of the G-modules belonging to π. If $M \in G\mathbf{Mod}$, we let $\mathcal{O}_\pi(M)$ be the sum of all G-submodules of M belonging to π. Then we obtain a functor $\mathcal{O}_\pi : G\mathbf{Mod} \to \mathcal{M}(\pi)$, that is right adjoint to the imbedding $\mathcal{M}(\pi) \to G\mathbf{Mod}$, hence

(1) $\mathcal{O}_\pi$ is left exact and sends an injective to an injective.

Lemma *Given a family of G-modules $M_i, i \in I$,*

$$\mathcal{O}_\pi(\coprod_i M_i) \simeq \coprod_i \mathcal{O}_\pi(M_i).$$

Proof. If $\mathcal{O}_\pi(\coprod_i M_i) > \coprod_i \mathcal{O}_\pi(M_i)$, let $L(\lambda) \leq \mathcal{O}_\pi(\coprod_i M_i)/\coprod_i \mathcal{O}_\pi(M_i)$. Then

$$\begin{aligned} 0 &\neq \mathbf{GMod}(L(\lambda), \mathcal{O}_\pi(\coprod_i M_i)/\coprod_i \mathcal{O}_\pi(M_i)) \\ &\leq \mathbf{GMod}(L(\lambda), (\coprod_i M_i)/\coprod_i \mathcal{O}_\pi(M_i)) \\ &\simeq \mathbf{GMod}(L(\lambda), \coprod_i (M_i/\mathcal{O}_\pi(M_i))) \\ &\simeq \coprod_i \mathbf{GMod}(L(\lambda), M_i/\mathcal{O}_\pi(M_i)) \quad \text{as } L(\lambda) \text{ is finite dimensional,} \end{aligned}$$

hence $L(\lambda) \leq M_i/\mathcal{O}_\pi(M_i)$ for some i. But $\lambda \in \pi$, absurd.

(4.4) Define a structure of $G \times G^{\mathrm{op}}$-module on $k[G]$ by

$$xay = a(y?x), \quad a \in k[G]; x, y \in G. \tag{1}$$

Precisely, if $A \in \mathbf{Alg}_k$, let $A[t]$ be the polynomial algebra in t over A, $\mathbb{A}^1_A = \mathbf{Alg}_A(A[t], ?)$, $G_A = \mathbf{Alg}_A(k[G] \otimes A, ?)$, and identify $k[G] \otimes A$ with $\mathbf{Fnc}_A(G_A, \mathbb{A}^1_A)$. We let $(x, y) \in (G \times G^{\mathrm{op}})(A) = G(A) \times G(A)^{\mathrm{op}}$ act on $a \in \mathbf{Fnc}_A(G_A, \mathbb{A}^1_A)$ via

$$((x, y)a)(A') = a(A')(G(\gamma)(y)?G(\gamma)(x)) \quad \text{on} \quad G_A(A') = G(A'), \tag{2}$$

where $A' \in \mathbf{Alg}_A$ with structure map $\gamma : A \to A'$. Let $k[G]_l$ (resp. $k[G]_r$) be the G (resp. G^{op})-module structure on $k[G]$. The corresponding $k[G]$-comodule structure on $k[G]_l$ is given by Δ_G :

$$\Delta_{k[G]_l} = \Delta_G : k[G]_l \to k[G]_l \otimes k[G]. \tag{3}$$

The $k[G]^{\mathrm{op}}$-comodule structure, i.e. left $k[G]$-comodule structure, on $k[G]_r$ is also given by Δ_G :

$$\Delta_{k[G]_r} = \Delta_G : k[G]_r \to k[G] \otimes k[G]_r. \tag{4}$$

We set $O_\pi = \mathcal{O}_\pi(k[G]_l)$. We will show that O_π is a finite dimensional k-subcogebra of $k[G]$ if π is finite.

Lemma *O_π is a subcogebra of $k[G]$.*

Proof. As O_π is a G-submodule of $k[G]_l$, from (3) one obtains a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} k[G]_l & \xrightarrow{\Delta_G} & k[G]_l \otimes k[G] \\ \uparrow & & \uparrow \\ O_\pi & \longrightarrow & O_\pi \otimes k[G]. \end{array} \tag{5}$$

The action of each $y \in G^{\mathrm{op}}$ on $k[G]_l$ is G-equivariant, hence sends O_π to O_π. Then O_π is also a G^{op}-submodule of $k[G]_r$, hence (4) induces a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} k[G]_r & \xrightarrow{\Delta_G} & k[G] \otimes k[G]_r \\ \uparrow & & \uparrow \\ O_\pi & \longrightarrow & k[G] \otimes O_\pi. \end{array} \tag{6}$$

Hence $\Delta_G(O_\pi) \subseteq O_\pi \otimes O_\pi$.

(4.5) We say $\pi \subseteq X^+$ is saturated iff $\forall \mu \in \pi$, $\{\lambda \in X^+ \mid \lambda \leq \pi\} \subseteq \pi$.

Proposition [**D85, 12.1.6**] *Let $M \in \mathcal{F}(\nabla)$. Assume $\pi \subseteq X^+$ is saturated and that* $\dim G\mathbf{Mod}(\Delta(\lambda), M) < \infty \quad \forall \lambda \in X^+$. *Then both $\mathcal{O}_\pi(M)$ and $M/\mathcal{O}_\pi(M) \in \mathcal{F}(\nabla)$ with* $(M/\mathcal{O}_\pi(M) : \nabla(\lambda)) = 0 \quad \forall \lambda \in \pi$.

Proof. Assume first M is finite dimensional. Just suppose $\mathcal{O}_\pi(M) \notin \mathcal{F}(\nabla)$ and let M' be a maximal submodule of $\mathcal{O}_\pi(M)$ such that $M' \in \mathcal{F}(\nabla)$. Let $L(\lambda) \leq \mathcal{O}_\pi(M)/M'$. By Donkin's criterion (1.5) $M/M' \in \mathcal{F}(\nabla)$. As $G\mathbf{Mod}(L(\lambda), \nabla(\mu)) = \delta_{\lambda\mu}k \quad \forall \mu \in X^+$, $(M/M' : \nabla(\lambda)) \neq 0$. As $\lambda \in \pi$, however, $\nabla(\lambda)$ cannot appear at the bottom of any good filtration of M/M'. On the other hand, a good filtration of M/M' can be so arranged by (1.4) that if we write $0 = F^0 < F^1 < \dots$ with $F^i/F^{i-1} \simeq \nabla(\lambda_i)$ and if $F^r/F^{r-1} \simeq \nabla(\lambda)$, then $\lambda_i < \lambda \quad \forall i < r$. As π is saturated, $\lambda_1 \in \pi$, absurd again, hence $\mathcal{O}_\pi(M) \in \mathcal{F}(\nabla)$. Then $M/\mathcal{O}_\pi(M) \in \mathcal{F}(\nabla)$ by Donkin's criterion. Also from the argument to obtain $\lambda_1 \in \pi$, $(M/\mathcal{O}_\pi(M) : \nabla(\nu)) = 0 \quad \forall \nu \in \pi$. This concludes the proof in the case M is finite dimensional.

In general, let $O = F^0 < F^1 < \dots$ be a good filtration of M. Then $\mathcal{O}_\pi(M) = \bigcup_i \mathcal{O}_\pi(F^i)$. As $F^i \in \mathcal{F}(\nabla)$ of finite dimension, $\mathcal{O}_\pi(F^i) \in \mathcal{F}(\nabla) \quad \forall i$. Then $\forall \mu \in X^+$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\mu), \mathcal{O}_\pi(M)) &= \mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\mu), \varinjlim_i \mathcal{O}_\pi(F^i)) \\ &= \varinjlim_i \mathrm{Ext}^1_G(\Delta(\mu), \mathcal{O}(F^i)) \quad \text{[J, I.4.17] as } \Delta(\mu) \text{ is finite dimensional} \\ &= 0,\end{aligned}$$

hence $\mathcal{O}_\pi(M) \in \mathcal{F}(\nabla)$. The rest follows as in the case of finite dimension.

(4.6) To describe the injectives of $G\mathbf{Mod}$, let us recall the induction functors for an affine k-group $\mathfrak{G}$. If $\mathfrak{H}$ is a k-subgroup of $\mathfrak{G}$, the induction functor $\mathrm{ind}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}} : \mathfrak{H}\mathbf{Mod} \to \mathfrak{G}\mathbf{Mod}$ is defined by $M \mapsto (M \otimes k[\mathfrak{G}])^{\mathfrak{H}}$ the fixed points of $M \otimes k[\mathfrak{G}]$ under the action of $\mathfrak{H}$ such that $h(m \otimes a) = (hm) \otimes a(?h)$ Then the $\mathfrak{G}$-module structure on $\mathrm{ind}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}} M$ is induced from the $\mathfrak{G}$-action on $M \otimes k[\mathfrak{G}]$ such that $g(m \otimes a) = m \otimes a(g^{-1}?)$. If $\epsilon_M \in \mathfrak{H}\mathbf{Mod}(\mathrm{ind}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}} M, M)$ is the composite of $M \otimes \epsilon_{\mathfrak{G}} : M \otimes k[G] \to M$ and inclusion $(M \otimes k[\mathfrak{G}])^{\mathfrak{G}} \to M \otimes k[\mathfrak{G}]$, then $\forall N \in \mathfrak{G}\mathbf{Mod}$, one has an isomorphism of k-linear spaces

(1) $$\mathfrak{G}\mathbf{Mod}(N, \mathrm{ind}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}} M) \longrightarrow \mathfrak{H}\mathbf{Mod}(\mathrm{res}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}} N, M) \quad \text{via} \quad f \longmapsto \epsilon \circ f,$$

called the Frobenius resprocity, where $\mathrm{res}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}}$ is the forgetful functor $\mathfrak{G}\mathbf{Mod} \to \mathfrak{H}\mathbf{Mod}$. Hence $\mathrm{ind}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}}$ is right adjoint to $\mathrm{res}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}}$. In particular,

(2) $\mathrm{ind}_{\mathfrak{H}}^{\mathfrak{G}}$ is left exact and sends an injective to an injective.

If $\mathfrak{H} = \mathfrak{e}_k$ is the trivial group, any $\mathfrak{G}$-module M is injective in $\mathfrak{e}_k\mathbf{Mod} = \mathbf{Mod}_k$. If $\widehat{\mathrm{id}_M} \in \mathfrak{G}\mathbf{Mod}(M, \mathrm{ind}_{\mathfrak{e}_k}^{\mathfrak{G}} M)$ such that $\epsilon_M \circ \widehat{\mathrm{id}_M} = \mathrm{id}_M$ under the Frobenius reciprocity (1), then $\widehat{\mathrm{id}_M}$ imbeds M into $\mathrm{ind}_{\mathfrak{e}_k}^{\mathfrak{G}} M$, that is injective in $\mathfrak{G}\mathbf{Mod}$ by (2). Hence

(3) $\mathfrak{G}\mathbf{Mod}$ has enough injectives.

(4.7) Let $E(\lambda)$ be the injective hull of $L(\lambda)$ in $G\mathbf{Mod}$. Recall from (1.6) that

(1) $$E(\lambda) \in \mathcal{F}(\nabla) \quad \text{and} \quad (E(\lambda) : \nabla(\mu)) = [\nabla(\mu) : L(\lambda)] \quad \forall \mu \in X^+.$$

Proposition *Assume $\pi \subseteq X^+$ is saturated. Let $\lambda \in X^+$.*

(i) $\mathcal{O}_\pi(E(\lambda)) = 0$ *unless* $\lambda \in \pi$.

(ii) *If π is finite,* $\dim \mathcal{O}_\pi(E(\lambda)) = \sum_{\mu \in \pi} [\nabla(\mu) : L(\lambda)] \dim \nabla(\mu)$.

Proof. By (1) and (4.5) one has $\mathcal{O}_\pi(E(\lambda)) \in \mathcal{F}(\nabla)$. If $\mathcal{O}_\pi(E(\lambda)) \neq 0$, then $\exists \mu \in \pi$:

$$0 \neq (\mathcal{O}_\pi(E(\lambda)) : \nabla(\mu)) \leq (E(\lambda) : \nabla(\mu)) = [\nabla(\mu) : L(\lambda)],$$

hence $\lambda \leq \mu$. As π is saturated, $\lambda \in \pi$.

Suppose $\lambda \in \pi$. One can so arrange a good filtration of $E(\lambda)$ that $\nabla(\mu)$'s, $\mu \in \pi$, appear at the bottom. Then

$$\dim \mathcal{O}_\pi(E(\lambda)) = \sum_{\mu \in \pi} (E(\lambda) : \nabla(\mu)) \dim \nabla(\mu) = \sum_{\mu \in \pi} [\nabla(\mu) : L(\lambda)] \dim \nabla(\mu).$$

(4.8) **Corollary** *If $\pi \in X^+$ is finite and saturated, then*

$$\dim O_\pi = \sum_{\lambda \in \pi} (\dim \nabla(\lambda))^2.$$

Proof. In $G\mathbf{Mod}$ there is an isomorphism $k[G]_l \to \operatorname{ind}_{\epsilon_k}^G(k)$ via $a \mapsto a \circ \operatorname{inv}$, hence

$$\begin{aligned} \operatorname{soc}_G(k[G]_l) &\simeq \coprod_{\lambda \in X^+} L(\lambda)^{\oplus \dim G\mathbf{Mod}(L(\lambda), \operatorname{ind}_{\epsilon_k}^G(k))} \\ &\simeq \coprod_{\lambda \in X^+} L(\lambda)^{\dim L(\lambda)} \quad \text{by the Frobenius reciprocity.} \end{aligned}$$

As $\operatorname{ind}_{\epsilon_k}^G(k)$ is injective in $G\mathbf{Mod}$, $k[G]_l \simeq \coprod_{\lambda \in X^+} E(\lambda)^{\oplus \dim L(\lambda)}$. Then

$$\begin{aligned} O_\pi = \mathcal{O}_\pi(k[G]_l) &\simeq \coprod_{\lambda \in X^+} \mathcal{O}_\pi(E(\lambda))^{\oplus \dim L(\lambda)} \quad \text{by (4.3)} \\ &\simeq \coprod_{\lambda \in \pi} \mathcal{O}_\pi(E(\lambda))^{\oplus \dim L(\lambda)} \quad \text{by (4.7)} \end{aligned}$$

hence

$$\begin{aligned} \dim O_\pi &= \sum_{\lambda \in \pi} \dim \mathcal{O}_\pi(E(\lambda)) \dim L(\lambda) \\ &= \sum_{\lambda \in \pi} \sum_{\mu \in \pi} [\nabla(\mu) : L(\lambda)] \dim \nabla(\mu) \dim L(\lambda) = \sum_{\mu \in \pi} (\dim \nabla(\mu))^2. \end{aligned}$$

(4.9) If $\pi \subseteq X^+$ is finite, there is finite and saturated π' containing π. Hence (4.4) and (4.8) together with (4.2.5) yield

Proposition *If $\pi \subseteq X^+$ is finite, then O_π is a finite dimensional k-subcogebra of $k[G]$, hence O_π***coM** $\simeq O_\pi^*$**Mod.**

(4.10) Assume $\pi \in X^+$ is finite. We set $S(\pi) = O_\pi^*$ and call it the Schur algebra of G associated to π. From (4.2.5) one has an equivalence of categories

$$S(\pi)\mathbf{Mod} \simeq O_\pi\mathbf{coM}. \tag{1}$$

Recall the subcategory $\mathcal{M}(\pi)$ of $G\mathbf{Mod}$ from (4.3). If $M \in \mathcal{M}(\pi)$ with the structure homomorphism $\Delta_M : M \to M \otimes k[G]$, one has a commutative diagram

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Delta_M"] \arrow[d, "\Delta_M"'] & M \otimes k[G] \arrow[d, "M\otimes\Delta_G"] \\ M \otimes k[G] \arrow[r, "\Delta_M\otimes k[G]"'] & M \otimes k[G] \otimes k[G]. \end{tikzcd} \tag{2}$$

If we make $M \otimes k[G]$ into a $k[G]$-comodule by letting $\Delta_{M\otimes k[G]} = M \otimes \Delta_G$, i.e., letting G act on $M \otimes k[G]$ by $g(m \otimes a) = m \otimes a(?g)$, then (2)reads $\Delta_M \in k[G]\mathbf{coM}$, i.e., $\Delta_M \in G\mathbf{Mod}$. As such apply $\mathcal{O}_\pi$ to Δ_M to abtain a commutative diagram in $\mathbf{Mod}_k$

$$\begin{tikzcd} & M \otimes O_\pi \arrow[d, equal] \\ \mathcal{O}_\pi(M) \arrow[r, "\mathcal{O}_\pi(\Delta_M)"] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}_\pi(M \otimes k[G]) \arrow[d] \\ M \arrow[r, "\Delta_M"'] & M \otimes k[G], \end{tikzcd} \tag{3}$$

where $\mathcal{O}_\pi(M \otimes k[G]) = M \otimes O_\pi$ as G is acting trivially on M. Hence $(M, \mathcal{O}_\pi(\Delta_M)) \in O_\pi\mathbf{coM}$. Converselly, if $M' \in O_\pi\mathbf{coM}$, then M' is naturally a $k[G]$-comodule by composing $\Delta_{M'}$ with inclusion $M' \otimes O_\pi \to M' \otimes k[G]$, hence a G-module. If L is a simple subquotient of M' in $G\mathbf{Mod}$, then Δ_L factors through $L \otimes O_\pi$ to induce $\Delta'_L : L \to L \otimes O_\pi$ so that (L, Δ'_L) is a simple O_π-comodule. Then $L \leq O_\pi$ in $O_\pi\mathbf{coM}$ by (4.2.6), hence $L \leq O_\pi$ in $G\mathbf{Mod}$. It follows that $M' \in \mathcal{M}(\pi)$.

Together with (4.5) we have proved

(4.11) **Theorem** *Assume $\pi \subseteq X^+$ is finite.*

(i) *There are equivalence of categories $\mathcal{M}(\pi) \simeq \mathcal{O}_\pi\mathbf{coM} \simeq S(\pi)\mathbf{Mod}$ such that*

$$(M, \Delta_M) \longmapsto (M, (\langle\ ,\ \rangle \otimes M) \circ (S(\pi) \otimes P) \circ (S(\pi) \otimes \Delta_M)),$$

where $P : M \otimes O_\pi \to O_\pi \otimes M$ is the transposition.

(ii) *If π is saturated, then $(S(\pi)\mathbf{mod}, (\pi, \leq), \tau\,|_{\mathcal{M}(\pi)})$ is a highest weight category with duality with the injective hull of $L(\lambda)$, $\lambda \in \pi$, given by $\mathcal{O}_\pi(E(\lambda))$.*

(4.12) *Proof of classification.* Let $\lambda \in X^+$. If $\pi = \{\mu \in X^+ \mid \mu \leq \lambda\}$, π is finite and saturated, hence $(S(\pi)\mathbf{mod}, (\pi, \leq), \tau\mid_{\mathcal{M}(\pi)})$ forms a highest weight category with duality by (4.11). Then by (3.10) there is for each $\mu \in \pi$ a unique indecomposable partially tilting module $T(\mu)$ in $S(\pi)\mathbf{mod}$ such that

(1) $\quad (T(\mu) : \nabla(\mu)) = 1$ and that $(T(\mu) : \nabla(\nu)) = 0$ for each $\nu \in \pi$ unless $\nu \leq \mu$.

Then in $G\mathbf{Mod}$

(2) $$(T(\mu) : \nabla(\nu)) = 0 \text{ for each } \nu \in X^+ \text{ unless } \nu \leq \mu.$$

If $T'(\lambda)$ is another indecomposable partially tilting module satisfying (1)/(2), then $T'(\lambda)$ belongs to $\mathcal{M}(\pi)$, hence $T'(\lambda) \simeq T(\lambda)$ by the unicity in $\mathcal{M}(\pi)$.

References

[A] Andersen, H.H., *A sum formula for tilting filtrations*, to appear

[AJS] Andersen, H.H., Jantzen, J.C. and Soergel, W. Representations of quantum groups at a p-th root of unity and of semisimple groups in characteristic p : independence of p, Astérisque **220**, 1994 (SMF)

[CPS] Cline, E., Parshall, B. and Scott, L., *Finite dimensional algebras and highest weight categories*, J. reine angew. Math. **391** (1988), 89–102

[D85] Donkin, S., *Rational Representations of Algebraic Groups*, LNM **1140** Berlin (Springer-Verlag)

[D86] Donkin, S., *On Schur algebras and related algebras I*, J. Alg. **104** (1986), 310–328

[D93] Donkin, S., *On tilting modules for algebraic groups*, Math. Z. **212** (1993), 39–60

[H] Hashimoto, M., *q-Schur algebra no tilting module*, RIMS Koukyuuroku 934 (1995), 190–211

[Jac] Jacobson, N., Basic lgebra II, 1989 (W.H. Freeman)

[J] Jantzen, J.C., Representations of Algebraic Groups, Pure and Appl. Math. **131** 1987 (Academic Press)

[K] Kaneda M., *A note on good filtrations in algebraic groups*, to appear

[KL] Kazhdan, D. and Lusztig, G., *Tensor structures arising from affine Lie algebras I, II*, J. AMS **6** (1993), 905-1011; *III, IV*, J. AMS **7** (1994), 335-453

[KT] Kashiwara M. and Tanisaki T., *Kazhdan-Lusztig conjecture for affine Lie algebras II. Non-integral case*,

[LF] Lusztig, G., *Finite dimensional Hopf algebras arising from quantized universal enveloping algebras*, J. AMS **3** (1990), 257–296

[LR] Lusztig, G., *Quantum groups at roots of* 1, Geom. Ded. **35** (1990), 89–114

[L] Lusztig, G., *Monodromic systems on affine flag manifolds*, Proc. R. S. London A **445** (1994), 231-246; Corrections, Proc. R. S. London A **450** (1995)

[M] Mathieu, O., *Filtrations of G-modules*, Ann. Sci. ENS **23** (1990), 625–644

[P] Paradowski, J., *Filtrations of modules over the quantum algebra*, Proc. Symp. Pure Math. **56-2**, 93–108 1994 (AMS)

[R] Ringel, C.M., *The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences*, Math. Z. **208** (1991), 209–223

[Rot] Rotman, J.J., An Introduction to Homological Algebra, 1979 (Academic Press)

[S] Soergel, W., *Kazhdan-Lusztig- Polynome und eine Kombinatorik für kipp-Moduln*, to appear

[W] Wang, J.-P., *Sheaf cohomology of G/B and tensor products of Weyl modules*, J. Alg. **77** (1982), 162-185

Cohen-Macaulay approximations

立命館大学理工学部　加藤 希理子
〒567-77 草津市野路東 1-1-1 立命館大学理工学部数学教室
tel:0775-61-2656 e-mail: kiriko@kurims.kyoto-u.ac.jp

1 Introduction.

Auslander と Buchweitz によって導入された Cohen-Macaulay 近似は、各方面での応用が進んでいる。Gorenstein 環上の極大 Cohen-Macaulay 加群の持つ著しい反射性を, 一般の Noether 環上の加群に関して考察する試みが, 近年行なわれている [4]. こうした問題意識そのものは古典的ともいえるが, (例えば [2] にも, 関連する記述が見られる.) 現代の研究は, Cohen-Macaulay 近似理論を踏まえて, 新たな展開を期するもののようである.

本稿では, Cohen-Macaulay 近似に付随する δ- 不変量について, Noether 環上の加群に拡張定義した, Martsinkovsky の最近の結果を紹介する [8, 9]. 導入された ξ- 不変量は, 一般化された Tate コホモロジー (Tate-Vogel コホモロジー) を経て, Cohen-Macaulay 近似のような理論を用いることなく定義される. そのため構造的には, かなり捉えやすくなっている. ξ- 不変量は, Gorenstein 環上で, δ- 不変量と一致するのだが, Cohen-Macaulay 環上でこれらの不変量が一致するかどうかは, 判っていない. 今後, 当面の課題は, δ- 不変量の研究が, ξ- 不変量に関わる形で問題提起, 解決されてゆくことであろう.

以下, 環は全て可換な完備局所環とし, 加群とは, その上の有限生成加群を表すものとする. 環 R 上の加群 M に対し, R- 双対加群を $M^* := \mathrm{Hom}_R(M, R)$ で表す. 同様に R- 加群の線型写像 f に対して, $h^* := \mathrm{Hom}_R(f, R)$ と書く. 自由加群を直和因子として含まない加群を stable な加群と呼ぶ. R- 加群の複体 C を,

$$C : \cdots \overset{d_{C\,i+1}}{\to} C_i \overset{d_{C\,i}}{\to} C_{i-1} \overset{d_{C\,i-1}}{\to} \cdots$$

と表す. 複体 C と $n \in \mathbf{Z}$ に対し, 複体 $\tau_n C$ を,

$$\tau_n C : \cdots \overset{d_{C\,n+2}}{\to} C_{n+1} \overset{d_{C\,n+1}}{\to} C_n \to 0 \to 0 \cdots$$

で定義する.

2 δ-invariants

Cohen-Macaulay 環 $(R, \mathfrak{m}, k)$ 上の有限生成加群 M について, 以下のような完全列の存在が知られている。

$$0 \to Y_M \to X_M \to M \to 0 \tag{2.1}$$

(但し、$pd_R Y_M < \infty$ かつ X_M は 極大 Cohen-Macaulay 加群で X_M と Y_M は共通の 直和因子 をもたないものとする。) 環 R は Cohen-Macaulay 環であるから, X_M は自由因子を含む可能性がある. X_M の 自由因子の 階数 を $\delta_R(M)$ (δ-invariant) と表す。また M の i-th syzygy $\Omega_R^i(M)$ によって, 高次 デルタ不変量 を 定義する: $\delta_R^i(M) := \delta_R(\Omega_R^i(M))$.

注意 2.1 極大 *Cohen-Macaulay* 加群 のデルタ不変量は, 自由因子の最大階数である. 特に $i > \dim R$ ならば, $\Omega_R^i(M)$ は 自由因子を含まない極大 *Cohen-Macaulay* 加群になるので,

$$\delta_R^i(M) = 0 \quad (i > \dim R).$$

補題 2.2 ([7] 参照) 次の公式が成り立つ.

$$\begin{aligned}\delta_R(M) &= \min\{\dim_k(\mathrm{Coker}\,(f) \otimes_R k) \mid f : C \to M, \\ &\qquad C : \text{stable な極大 Cohen-Macaulay 加群}\} \\ &= \max\{\mathrm{rank}_k\,(g \otimes_R k) \mid g : M \to E, \mathrm{pd}E < \infty\}.\end{aligned}$$

系 2.3 ([1]) R-加群の全射準同型 $N \to M$ があれば,

$$\delta_R(N) \geq \delta_R(M).$$

特に

$$\delta_R^i(M) \leq \beta_R^i(M) := \dim_k\ (\mathrm{Tor}_i^R(M, k) \otimes k).$$

補題 2.4 R 上の加群 M について次は同値である.

1) $\mathrm{pd}(M) < \infty$.

2) $\delta_R^i(M) = \beta_R^i(M) \quad (i \geq 0)$.

R が *Gorenstein* 環なら, 次の条件も同値である.

1) $\delta_R^r(M) = \beta_R^r(M), \quad r := \dim R - \mathrm{depth}(M)$.

命題 2.5 ([3]) 完備局所 *Gorenstein* 環 R が非正則であるための必要十分条件は, 以下の等式で与えられる.

$$\delta_R^i(k) = 0 \quad (i \geq 0).$$

3 Tate-Vogel cohomology

本節では, $(R, \mathfrak{m}, k)$ を Noether 局所環, M, N を R- 加群の複体とする. 複体 (M,N), 差分写像 ∂ を,

$$
\begin{aligned}
(M,N)_n &:= \prod_i \mathrm{Hom}_R\,(M_i, N_{i+n}) \\
\partial f &= f d_M + d_N f
\end{aligned}
$$

によって定義する. (M,N) の コホモロジー類は, 鎖準同型写像のホモトピー類である.

有界写像からなる (M,N) の部分複体を $(M,N)_b$, $(M,N)_b$ による剰余複体を $\overline{(M,N)}$ と書く.

$$(M,N)_{bn} := \{f \in (M,N)_n | \text{有限個の}i\text{を除いて}f_i = 0\}.$$

$$0 \to (M,N)_b \to (M,N) \to \overline{(M,N)} \to 0.$$

M, N を R- 加群の有界な複体, $P_M \twoheadrightarrow M$, $P_N \twoheadrightarrow N$ を各々極小射影分解とする. もとより $\mathrm{Ext}^i_R\,(M,N) = \mathrm{H}_{-i}((P_M, P_N))\quad (i \geq 0)$ であるが,

$$\overline{\mathrm{Ext}^i_R}\,(M,N) := \mathrm{H}_{-i}(\overline{(P_M, P_N)})\quad (i \in \mathbf{Z})$$

を M, N の Tate-Vogel コホモロジーと呼ぶ.

定義 3.1 ([4] 参照) *$(R, \mathfrak{m}, k)$ を Noether 局所環, M を R- 加群の有界な複体, $P_M \twoheadrightarrow M$ を極小射影分解とする. 射影加群の複体 C_M が, 次の (CR1),(CR2),(CR3) を充たすとき, C_M は, M の完全分解であるという.*

(CR1) C_M は 上にも下にも非有界な, 自由加群の完全列である.
(CR2) (C_M, R) は 上にも下にも非有界な, 自由加群の完全列である.
(CR3) ある $p \geq 0$ があって, $\tau_p C_M \cong \tau_p P_M$.

完全分解は, 一般には存在するとは限らない. 群環上で剰余環の完全分解がよく知られている例である. また後述するように Gorenstein 環上の加群は, 完全分解を持つ.

定理 3.2 (Vogel, [8, 5]) *$(R, \mathfrak{m}, k)$ を Noether 局所環, M, N を R- 加群の有界な複体, $P_M \twoheadrightarrow M$, $P_N \twoheadrightarrow N$ を各々極小射影分解とする. 更に M は, 完全分解を持つものとする. 次が成り立つ.*

$$\overline{\mathrm{Ext}^i_R}\,(M,N) = \mathrm{H}_i(\overline{P_M, P_N}) \cong \mathrm{H}_i(C_M, P_N).$$

証明） 以下の図式において全ての行, 列は完全である.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & (P_M, P_N)_b & \to & (P_M, P_N) & \to & \overline{(P_M, P_N)} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & (C_M, P_N)_b & \to & (C_M, P_N) & \xrightarrow{r} & \overline{(C_M, P_N)} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & (L_M, P_N)_b & \to & (L_M, P_N) & \to & \overline{(L_M, P_N)} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}
$$

L_M は左有界, P_N は右有界ゆえ, $(L_M, P_N)_b = 0$ である. そこで r が quasi-isomorphism であることを示せば良い. いま, 鎖準同型写像 $f \in (C_M, P_N)$ が, $f_i = 0\,(i \geq n)$ を充たすとする. このとき, $f = d_{P_N} s + s d_{C_M}$ なる $s \in (C_M, P_N)_b$ が存在することを示す. 我々の主張は, 任意の $i \in \mathbf{Z}$ に対して, 写像族 $(s_i)_{j \geq i} \in \oplus_{j \geq i} (C_{Mj}, P_N)$ が存在して, $f_{j+1} = s_j d_{C_{M\,j+1}} + d_{P_N} s_{j+1}$ が成り立つことである. これを i に関する帰納法で示す. $i \geq n$ については $s_j = 0\,(j \geq n)$ とすれば良い. i について主張が成り立つとする. R- 双対 $f^* : {P_N}^* \to {C_M}^*$ を考える. 帰納法の仮定より, ${d_{C_{M\,i+1}}}^*(f_i^* - s_i^* {d_{P_N}}^*) = {d_{C_{M\,i+1}}}^* f_i^* - (f_{i+1}^* - s_{i+1}^* {d_{P_N}}^*) {d_{P_N}}^* = 0$. ${C_M}^*$ は完全列ゆえ, $t : P_N \to C_{M\,i-1}^*$ で, $f_i^* - s_i^* {d_{P_N}}^* = {d_{C_{M\,i}}}^* t$ なるものが存在するから, $s_{i-1} := t^*$ とおけば良い. こうして得られた s が, 求める $(C_M, P_N)_b$ の元である. （証明終.）

4 ξ-invariants.

$(R, \mathfrak{m}, k)$ は Noether 局所環, M を R- 加群とする.

定義 4.1 *[8]*

$$\xi_R^i(M) := \dim_k(\mathrm{Ker}\ \mathrm{H}_{-i}(P_M, P_k) \to \mathrm{H}_{-i}(\overline{P_M, P_k})).$$

注意 4.2

$V(M) := \{f \in \mathrm{Hom}_R\,(M, k) | f_\bullet \in (P_M, P_k), \mathrm{H}_0(f_\bullet) = f$ なる鎖準同型で有界なものが存在する.$\}$

とおけば,

$$\xi_R^0(M) = \dim_k(V(M)), \quad \xi_R^i(M) = \xi_R^0(\Omega_R^i(M))$$

が成り立つことは簡単に判る.

δ- 不変量と同様の性質は, 簡単に確かめられる.

命題 4.3 *[8]*

(1) $0 \leq \xi^i_R(M) \leq \beta^i_R(M)\,(i \geq 0)$.

(2) $\mathrm{pd}(M) < \infty$ なら, $\xi^i_R(M) = \beta^i_R(M)\,(i \geq 0)$.

(3) 全射準同型 $M \twoheadrightarrow N$ があれば, $\xi^0_R(M) \geq \xi^0_R(N)$.

定理 4.4 *[9]* 完備局所 *Noether* 環 R が非正則であるための必要十分条件は, 以下の等式で与えられる.

$$\xi^i_R(k) = 0 \quad (i \geq 0).$$

上記定理は, 本質的には, 次の定理による.

命題 4.5 *[6]* *Noether* 局所環 R が非正則なら, $\Omega^i_R(k)$ $(i \geq 0)$ は自由因子を含まない.

5 When ξ-invariants are δ-invariants?

我々の目的は, ξ- 不変量, 言い換えれば Tate-Vogel コホモロジー をデルタ不変量と関係づけることである. そこで, Gorenstein 環の場合の Cohen-Macaulay 近似の構成法を復習してみよう.

再び $(R, \mathfrak{m}, k)$ は Gorenstein 環とする. R- 加群 M の極小射影分解 $P_M \twoheadrightarrow M$ を取る. 既に注意したように, $\Omega^{r+1}_R(M)$ $(r := \dim R - \mathrm{depth}(M))$ は自由因子を含まない極小 Cohen-Macaulay 加群であるから, 射影余分解 $0 \to \Omega^{r+1}_R(M) \to Q_{M_r} \to Q_{M_{r-1}} \to \cdots$ を持つ. Q_M と $\tau_{r+1}P_{M\bullet}$ とを繋げて得られる複体 C_M は, 定義 3.1の条件 (CR1)-(CR3) を充たす. つまり, C_M は, M の完全分解である. 更に, Q_M を極小にとることにより, Coker d_{C_M} は, 自由因子を含まない極大 Cohen-Macaulay 加群とすることができる. ${Q_M}^*$ は $\Omega^{r+1}_R(M)^*$ の射影分解を与えるので, 複体 $\cdots \to P_{M^*_{r-1}} \to P_{M^*_r} \to \Omega^{r+1}_R(M)^* \to 0$ からの鎖準同型写像が導かれる. つまり $\Omega^{r+1}_R(M)^*$ の恒等写像は, 鎖準同型写像 ${P_M}^* \to {C_M}^*$ を導く. R- 双対を取って, 鎖準同型写像 $q : C_M \to P_M$ を得る. (下図参照.)

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
C_M & : & \cdots \to & P_{M r+1} & \to & Q_{M_r} & \to & Q_{M_{r-1}} & \cdots \to & Q_{M0} & \to & Q_{M-1} & \to \\
\downarrow{\scriptstyle q} & & & \| & & \downarrow{\scriptstyle q_r} & & \downarrow{\scriptstyle q_{r-1}} & & \downarrow{\scriptstyle q_0} & & \downarrow & \\
P_M & : & \cdots \to & P_{M r+1} & \to & P_{M_r} & \to & P_{M_{r-1}} & \cdots \to & P_{M0} & \to & 0 & \to
\end{array}$$

C_M に, 自由加群の自明な複体を付け加えた $\widetilde{C_M}$ によって, 次の完全列を得る.

$$0 \to L_M \to \widetilde{C_M} \to P_M \to 0. \tag{5.2}$$

$q_i\,(i \geq r)$ は分裂単射写像 ($q_i\,(i \geq r+1)$ は恒等写像) ゆえ, $L_{Mi} = 0\,(i \geq r)$. 従って, pdCoker $d_{L_M j} < \infty\,(j \geq 0)$. ここから 極小 Cohen-Macaulay 近似

$$0 \to \text{Coker } d_{L_M j} \to \text{Coker } d_{\widetilde{C_M} j} \to \Omega^j_R(M) \to 0$$

が得られた．デルタ不変量が

$$\delta_R^i = \dim_k(\text{Coker } (q_i \otimes k))$$

で与えられることは容易に判る．

k の極小射影分解 P_k を取り，(5.2) に $(-, P_k)$ を施すと，次は完全列である．

$$\mathrm{H}_{-i+1}((L_M, P_k)) \to \mathrm{H}_{-i}((P_M, P_k)) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{H}_{-i}((\widetilde{C_M}, P_k)) \to \mathrm{H}_{-i}((L_M, P_k)).$$

同型 $\mathrm{H}_{-i}((P_M, P_k)) \cong \mathrm{Ext}_R^i\ (M, k) \cong \mathrm{H}_{-i}((P_M, k)) \cong (P_{M\,i}, k)$, $\mathrm{H}_{-i}((\widetilde{C_M}, P_k)) \cong \mathrm{H}_{-i}((C_M, P_k)) \cong \mathrm{H}_{-i}((\tau_{i-1}\, C_M, P_k)) \cong \mathrm{Ext}_R^i\ (\text{Coker } (d_{C_M\,i}), k) \cong \mathrm{H}_{-i}((\tau_{i-1}\, C_M, k)) \cong \mathrm{H}_{-i}((C_M, k)) \cong (C_{M\,i}, k)$ を通じて，$\varphi \cong \mathrm{Hom}_R\ (q_i, k)$ が判る．デルタ不変量との関係は，$\delta_R^i(M) = \dim_k(\text{Coker } (q_i \otimes k)) = \dim_k(\text{Ker } (q_i^* \otimes k)) = \dim_k(\text{Ker } \mathrm{Hom}_R\ (q_i, k))$ となり，次が示された．

命題 5.1

$$\delta_R^i(M) = \dim_k\ (\text{Ker } (\mathrm{H}_{-i}(P_M, P_k) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{H}_{-i}((\widetilde{C_M}, P_k))).$$

定理 3.2と併せて，求める命題を得る．

命題 5.2 R が *Gorenstein* 環のとき，

$$\xi_R^i(M) = \delta_R^i(M) \quad (i \geq 0).$$

References

[1] M.Auslander and R.O.Buchweitz, *The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations,* Soc. Math. de France, Mem **38**(1989), 5-37.

[2] M.Auslander and M.Bridger, "Stable Module Theory," Mem.AMS, 1969.

[3] M.Auslander, S.Ding, and Ø.Solberg, *Liftings and weak liftings of modules,* J.Algebra **156** (1993), 273-317.

[4] L.Avramov, *Gorenstein dimension and complete resolutions,* 名古屋数理フォーラム (1996 年 8 月).

[5] F.Goichot, *Homologie de Tate-Vogel equivariante,* J. Pure Appl. Alg. **82** (1992), 39-64.

[6] S.P.Dutta, *Syzygies and homological conjectures,* in: M.Hochster, C.Hunecke and J.D.Sally eds. Commutative Algebra (MSRI Publications, New York, 1989), 139-156.

[7] K.Kato, *Vanishing of free summands in Cohen-Macaulay approximations,* Comm.Algebra. **23** (1995), 2697-2718.

[8] A.Martsinkovsky, *New homological invariants for modules over local rings, I,* J. Pure Appl. Alg. **110** (1996), 1-8.

[9] A.Martsinkovsky, *A remarkable property of the (co)syzygy of the residue fiels of a nonregular local ring,* J. Pure Appl. Alg. **110** (1996), 9-13.

[10] Y.Yoshino, " Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings," London Math.Soc., Lecture Note Series vol.146, Cambridge U.P., 1990.

[11] Y.Yoshino, *Cohen-Macaulay approximations,* 多元環の表現論シンポジウム報告集, 伊豆 (1993).

Duality for Derived Categories and CM-Approximations

JUN-ICHI MIYACHI

Department of Mathematics, Tokyo Gakugei University, Koganei-shi, Tokyo, 184, Japan

Introduction

Let $\mathcal{A}$ be an abelian category, $\mathcal{B}$, $\mathcal{X}$ and $\mathcal{W}$ additive full subcategories of $\mathcal{A}$ which are closed under finite direct sums and isomorphic objects.
$\mathrm{fres}(\mathcal{B}) := \{M \in \mathcal{A} \mid$ there exist some integer n and $X_i \in \mathcal{B}$ $(0 \le i \le n)$ such that $0 \to X_n \to \dots \to X_0 \to M \to 0$ is exact in $\mathcal{A}\}$
$\mathrm{cores}(\mathcal{B}) := \{M \in \mathcal{A} \mid$ there exist $X^i \in \mathcal{B}$ $(i \ge 0)$ such that $0 \to M \to X^0 \to \dots \to X^n \to \dots$ is exact in $\mathcal{A}\}$
$\mathrm{rac}(\mathcal{W}) := \{M \in \mathcal{A} \mid \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(M, \mathcal{W}) = 0$ for all $i > 0\}$

Let $\mathcal{X} \supset \mathcal{W}$ be full subcategories of $\mathcal{A}$ satisfying the following:
(A1) $\mathcal{X}$ is closed under direct summands, extensions and kernels of epimorphisms.
(A2) $\mathcal{W}$ is closed under direct summands, $\mathcal{X} \subset \mathrm{rac}(\mathcal{W})$.
(A3) For every $X \in \mathcal{X}$, there exist $W \in \mathcal{W}$ and $X' \in \mathcal{X}$ such that $0 \to X \to W \to X' \to 0$ is exact in $\mathcal{A}$.
((A4) $\mathcal{A} = \mathrm{fres}(\mathcal{X})$.)

<u>Auslander-Buchweitz CM-approximation theorem [AB]</u>

(a) *For every* $X \in \mathrm{fres}(\mathcal{X})$, *there exist exact sequences* $0 \to Y_C \to X_C \to C \to 0$ *and* $0 \to C \to Y^C \to X^C \to 0$ *with* $X_C, X^C \in \mathcal{X}$ *and* $Y_C, Y^C \in \mathrm{fres}(\mathcal{W})$.

(b) For the above sequences, we have the following exact sequences:

$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, Y_C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, X_C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\mathcal{X}, C) \to 0,$$
$$0 \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(Y^C, \mathrm{fres}\mathcal{W}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X^C, \mathrm{fres}\mathcal{W}) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(C, \mathrm{fres}\mathcal{W}) \to 0.$$

(c) *For another exact sequences* $0 \to Y_C' \to X_C' \to C \to 0$ *and* $0 \to C \to Y^{C'} \to X^{C'} \to 0$ *which satisfy the condition* (a), *there exist morphisms between exact sequences* :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Y_C & \to & X_C & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow\beta & & \downarrow\alpha & & \| & & \\ 0 & \to & Y_C' & \to & X_C' & \to & C & \to & 0, \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & C & \to & Y^C & \to & X^C & \to & 0 \\ & & \| & & \downarrow\delta & & \downarrow\gamma & & \\ 0 & \to & C & \to & Y^{C'} & \to & X^{C'} & \to & 0, \end{array}$$

such that $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(\gamma)$ and $\Pi(\delta)$ *are isomorphisms in* $\mathcal{A}/\mathcal{W}$, where the stable category $\mathcal{A}/\mathcal{W}$ has the same objects as $\mathcal{A}$, its homomorphisms are $\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}/\mathcal{W}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)/\{f : X \to Y \mid f$ factors through an object in $\mathcal{W}\}$ for $X, Y \in \mathcal{A}/\mathcal{W}$, and where $\Pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{W}$ is a natural functor.

Auslander and Buchweitz called sequences of (a) in the above an $\mathcal{X}$-approximation and a fres($\mathcal{W}$)-hull, respectively.

1. Preliminaries

Let $\mathcal{A}$ be an abelian category, $\mathcal{B}$ an additive full subcategory of $\mathcal{A}$, and $\mathcal{C}$ a thick abelian subcategory of $\mathcal{A}$.

$K(\mathcal{B})$: a homotopy category of $\mathcal{B}$

$K^{+}(\mathcal{B})$, $K^{-}(\mathcal{B})$ and $K^{b}(\mathcal{B})$: full subcategories of $K(\mathcal{B})$ generated by the bounded below complexes, the bounded above complexes, the bounded complexes, respectively.

$K^{*,b}(\mathcal{B})$: a full subcategory of $K^{*}(\mathcal{B})$ generated by complexes which have bounded homologies.

$K^{*}(\mathcal{B})_{\mathrm{Qis}}$: a quotient category of $K^{*}(\mathcal{B})$ by the multiplicative set of quasi-isomorphisms, where $* = +, -$ or b.

$D^{*}(\mathcal{A}) := K^{*}(\mathcal{A})_{\mathrm{Qis}}$

$D^{*}_{\mathcal{C}}(\mathcal{A})$: a full subcategory of $D^{*}(\mathcal{A})$ generated by complexes of which all homologies belong to $\mathcal{C}$.

Let $\mathrm{F} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ be a contravariant left exact additive functor between abelian categories. If $\mathcal{A}$ has enough projectives, and F has finite right homological dimension on $\mathcal{A}$, then $\boldsymbol{R}\mathrm{F}$, $\boldsymbol{R}^{-}\mathrm{F}$, and $\boldsymbol{R}^{b}\mathrm{F}$ exist, $\boldsymbol{R}\mathrm{F}\,|_{D^{\#}(\mathcal{A})} \cong \boldsymbol{R}^{*}\mathrm{F}$, and moreover, $\boldsymbol{R}^{*}\mathrm{F}$ has image in $D^{\#}(\mathcal{A}')$, where $(*,\#) = (+,-), (-,+)$ or (b, b) (see [Hr] for details).

2. Dualities for Derived Categories

Mod$A$ (resp., A-Mod) : the category of right (resp., left) A-modules.

mod$A$ (resp., A-mod) : the category of finitely presented right (resp., left) A-modules.

$\mathcal{P}_A$ (resp., ${}_A\mathcal{P}$) : the category of finitely generated projective right (resp., left) modules.

add U_A : the category of right A-modules which are direct summands of finite direct sums of copies of U_A.

fres(U_A) := fres(addU_A), cores(U_A) := cores(add U_A), rac(U_A) := rac(addU_A).

If A is a right coherent ring, then mod$A$ is an thick abelian subcategory of Mod$A$, and then D^{*}(mod$A$) is equivalent to $K^{-,*}(\mathcal{P}_A)$. Moreover, D^{*}(mod$A$) is equivalent to $D^{*}_{\mathrm{mod}A}$(Mod$A$), where $* = -$ or b (see [Hr]).

Let A and B be rings, ${}_BU_A$ a B-A-bimodule. We will call ${}_BU_A$ a cotilting B-A-bimodule provided that it satisfies the following (see [Ms]):

(C1) ${}_BU_A$ is finitely presented as both a right A-module and a left B-module;
(C2r) idim $U_A < \infty$; (C2l) idim ${}_BU < \infty$;
(C3r) $\mathrm{Ext}^i_A(U,U) = 0$ for all $i > 0$; (C3l) $\mathrm{Ext}^i_B(U,U) = 0$ for all $i > 0$;
(C4r) the natural ring morphism $B \to \mathrm{Hom}_A(U,U)$ is an isomorphism;
(C4l) the natural ring morphism $A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Hom}_B(U,U)$ is an isomorphism.

In case of $B = A$, we will call a cotilting A-A-bimodule a dualizing A-bimodule.

Proposition 2.1. *Let A be a right coherent ring, B a left coherent ring, and ${}_BU_A$ a B-A-bimodule which satisfies the condition* (C1). *If $\boldsymbol{R}^+\mathrm{Hom}_A(-, {}_BU_A)$ and $\boldsymbol{R}^-\mathrm{Hom}_B(-, {}_BU_A)$ induce the duality between $D^+_{\mathrm{mod}\,A}(\mathrm{Mod}A)$ and $D^-_{B\text{-mod}}(B\text{-Mod})$, then $K^+(\mathrm{add}U_A)$ is equivalent to $D^+_{\mathrm{mod}\,A}(\mathrm{Mod}A)$.*

Proposition 2.2. *Let A be a right coherent ring, B a left coherent ring, and ${}_BU_A$ a B-A-bimodule which satisfies the condition* (C1) *such that $\boldsymbol{R}^b\mathrm{Hom}_A(-, {}_BU_A)$ and $\boldsymbol{R}^b\mathrm{Hom}_B(-, {}_BU_A)$ induce the duality between $D^b_{\mathrm{mod}\,A}(\mathrm{Mod}A)$ and $D^b_{B\text{-mod}}(B\text{-Mod})$. If $\mathrm{rac}(U_A) = \mathrm{cores}(U_A)$, then $K^{+,b}(\mathrm{add}U_A)$ is equivalent to $D^b_{\mathrm{mod}\,A}(\mathrm{Mod}A)$.*

Theorem 2.3 [Mc2]. *Let A be a right coherent ring, B a left coherent ring, and ${}_BU_A$ a B-A-bimodule which satisfies the conditions* (C1), (C2r), (C3r), and (C4r). *Then the following are equivalent.*

(a) *$\boldsymbol{R}^+\mathrm{Hom}_A(-, {}_BU_A) : D^+(\mathrm{mod}A) \to D^-(B\text{-mod})$ is a duality;*

(b) $\mathrm{rac}(U_A) = \mathrm{cores}(U_A)$;

(c) *For every $X \in \mathrm{rac}(U_A)$, there is an exact sequence $0 \to X \to V \to W \to 0$ in* mod$A$, *with $V \in \mathrm{add}U_A$ and $W \in \mathrm{rac}(U_A)$.*

In this case, ${}_BU_A$ satisfies the conditions (C3l) *and* (C4l).

Corollary 2.4 [Mc2]. *Let A be a right coherent ring, B a left coherent ring, and ${}_BU_A$ a cotilting B-A-bimodule. Then $\boldsymbol{R}^*\mathrm{Hom}_A(-, {}_BU_A) : D^*(\mathrm{mod}A) \to D^\#(B\text{-mod})$ is a duality, where $(*,\#) = $ (nothing, nothing), $(+,-)$, $(-,+)$ or (b, b).*

Example 2.5. (1) *Let A and B be finite dimensional k-algebras over a field k, ${}_AT_B$ a tilting A-B-bimodule of finite projective dimension. Then $\mathrm{D}({}_AT_B)$ is a cotilting B-A-bimodule.*

(2) *Let A be a ring $\begin{pmatrix} F & V \\ 0 & G \end{pmatrix}$, where F, G are division rings, and V is an F-G-bimodule such that $\dim_F V = \dim V_G = \infty$. Then A is a coherent ring and also a dualizing A-bimodule.*

Let R be a commutative Cohen-Macaulay ring with a dualizing R-module ω. A finitely generated R-module M is called a maximal Cohen-Macaulay R-module if $\mathrm{depth}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}$ is equal to Krull dimension of $R_{\mathfrak{p}}$ for all $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$, or equivalently if $\mathrm{Ext}^i_R(M, \omega) = 0$ for all $i > 0$ (see [AB]). We call a finite R-algebra A a CM R-algebra which is a finitely generated maximal Cohen-Macaulay R-module. A commutative Noetherian ring R is called a Cohen-Macaulay ring with a pointwise dualizing module ω provided that R_p is a Cohen-Macaulay local ring with a dualing module ω_p for every prime ideal p of R.

According to [Go], we have the following examples of infinite injective dimension which satisfy the condition of Proposition 2.2.

EXAMPLE 2.6. (1) *Let R be a commutative Cohen-Macaulay ring with a pointwise dualizing module ω, A a CM R-algebra, and $U = \mathrm{Hom}_R(A,\omega)$. Then $\mathbf{R}^b\mathrm{Hom}_A(-, U_A)$ and $\mathbf{R}^b\mathrm{Hom}_A(-, {}_AU)$ induce the duality between $D^b(\mathrm{mod}A)$ and $D^b(A\text{-mod})$.*

(2) *Let R be a commutative locally Gorenstein ring, A a non-commutative ring which is a Frobenius extension of R. Then $\mathbf{R}^b\mathrm{Hom}_A(-, A_A)$ and $\mathbf{R}^b\mathrm{Hom}_A(-, {}_AA)$ induce the duality between $D^b(\mathrm{mod}A)$ and $D^b(A\text{-mod})$.*

3. APPLICATIONS TO CM-APPROXIMATIONS

THEOREM 3.1 [Mc2]. *Let A be a right coherent ring, B a left coherent ring, and ${}_BU_A$ a B-A-bimodule satisfying the conditions of Proposition 2.2 or Theorem 2.3. For a finitely presented right A-module C, the following hold.*

(a) *There exist exact sequences $0 \to Y_C \to X_C \to C \to 0$ and $0 \to C \to Y^C \to X^C \to 0$ with $X_C, X^C \in \mathrm{rac}(U_A)$ and $Y_C, Y^C \in \mathrm{fres}(U_A)$.*

(b) *For another exact sequences $0 \to Y_C' \to X_C' \to C \to 0$ and $0 \to C \to Y^{C}{}' \to X^{C}{}' \to 0$ which satisfy the condition (a), there exist morphisms between exact sequences:*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & Y_C & \to & X_C & \to & C & \to 0 \\ & \downarrow\beta & & \downarrow\alpha & & \| & \\ 0 \to & Y_C' & \to & X_C' & \to & C & \to 0, \end{array} \qquad \begin{array}{ccccccc} 0 \to & C & \to & Y^C & \to & X^C & \to 0 \\ & \| & & \downarrow\delta & & \downarrow\gamma & \\ 0 \to & C & \to & Y^{C}{}' & \to & X^{C}{}' & \to 0, \end{array}$$

such that $\Pi(\alpha)$, $\Pi(\beta)$, $\Pi(\gamma)$ and $\Pi(\delta)$ are isomorphisms in $\mathrm{mod}A/\mathrm{add}U_A$.

Proof. (a) Since $D^b(B\text{-mod})$ is equivalent to $K^{-,b}({}_B\mathcal{P})$, for every finitely presented left A-module C, there exists a complex $P^\bullet$ in $K^{-,b}({}_B\mathcal{P})$ such that $\mathrm{Hom}_B(P^\bullet, {}_BU_A)$ is isomorphic to C in $D^b(\mathrm{mod}A)$. Then $\mathrm{Hom}_B(P^\bullet, {}_BU_A)$ is the following form:

$$0 \to U^{-s} \to \dots \to U^{-1} \xrightarrow{d_{-1}} U^0 \xrightarrow{d_0} U^1 \to U^2 \to \dots \to U^i \to \dots,$$

where $U^i \in \mathrm{add}U_A$ $(-s \le i)$. Then we have the following exact sequences:

$$0 \to \mathrm{Im}d_{-1} \to \mathrm{Ker}d_0 \to C \to 0,$$
$$0 \to C \to \mathrm{Cok}d_{-1} \to \mathrm{Im}d_0 \to 0.$$

Furthermore, $\mathrm{Ker}d_0$ and $\mathrm{Im}d_0$ belong to $\mathrm{cores}(U_A)$, and $\mathrm{Cok}d_{-1}$ and $\mathrm{Im}d_{-1}$ belong to $\mathrm{fres}(U_A)$.

(b) For $0 \to Y_C \to X_C \to C \to 0$, we get the following resolution and coresolution:

$$0 \to U^{-n} \to \dots \to U^{-2} \to U^{-1} \to Y_C \to 0,\ 0 \to X_C \to U^0 \to U^1 \to \dots \to U^i \to \dots,$$

where $U^i \in \operatorname{add} U_A$ for all i. Then we get the complex $U^\bullet$: $\dots \to 0 \to U^{-n} \to \dots \to U^{-2} \to U^{-1} \to U^0 \to U^1 \to \dots \to U^i \to \dots \in K^+(\operatorname{add} U_A)$. Similarly, for $0 \to Y_C' \to X_C' \to C \to 0$, we get a complex $V^\bullet$: $\dots \to 0 \to V^{-n} \to \dots \to V^{-2} \to V^{-1} \to V^0 \to V^1 \to \dots \to V^i \to \dots \in K^+(\operatorname{add} U_A)$. By Proposition 2.2, there exists a quasi-isomorphism $f : U^\bullet \to V^\bullet$ in $K^+(\operatorname{add} U_A)$. The we have the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & Y_C & \to & X_C & \to & C & \to & 0 \\ & & \downarrow\beta & & \downarrow\alpha & & \| & & \\ 0 & \to & Y_C' & \to & X_C' & \to & C & \to & 0. \end{array}$$

Since $f : U^\bullet \to V^\bullet$ is a quasi-isomorphism, $\Pi(\alpha)$ and $\Pi(\beta)$ are isomorphisms $\operatorname{mod} A / \operatorname{add} U_A$.

For a CM R-algebra A, we denote by CM(A_A) the category of finitely generated right A-modules which are maximal Cohen-Macaulay R-modules.

Proposition 3.2. *Let A be a ring satifying the condition of Example* 2.6 (1). *Then the following hold.*

(a) $\operatorname{rac}(U_A) = \operatorname{cores}(U_A) = \operatorname{CM}(A_A)$.

(b) *Every finitely generated right A-module has a* CM(A_A)*-approximation and a* fres(A_A)*-hull.*

4. Minimality of CM-Approximations

A map $g : X \to C$ is called right minimal provided that f is an isomorphism for all $f : X \to X$ which satisfy $g \circ f = g$. A left minimal maps defined dually. A right minimal rac(U_A)-approximation is called a minimal rac(U_A)-approximation. A left minimal fresol(U_A)-hull is called a minimal fresol(U_A)-hull (see [AR] for details). For an additive category $\mathcal{A}$, we will call $\mathcal{A}$ semiperfect if $\operatorname{End}_{\mathcal{A}}(X)$ is a semiperfect ring for every object $X \in \mathcal{A}$.

Theorem 4.1 [Mc2]. *Let A be a right coherent ring , B a left coherent ring, and* ${}_BU_A$ *a B-A-bimodule satisfying the conditions of Proposition* 2.2.

(a) *If* rac(U_A) *is semiperfect, then there exists a unique minimal* rac(U_A)*-approximation in* mod$A$.

(b) *If* fres(U_A) *is semiperfect, then there exists a unique minimal* fres(U_A)*-hull in* mod$A$.

Theorem 4.2. *Let R be a commutative Noetherian local ring, A and B finite R-algebras,* *and U a cotilting B-A-bimodule. If B is a semipefect ring, then every finitely generated right A-module has a minimal* rac(U_A)*-approximation and a minimal* fres(U_A)*-hull.*

Corollary 4.3. *Let R be a commutative local Cohen-Macaulay ring with a dualizing module ω, A a semiperfect* CM *R-algebra, and* $U := \mathrm{Hom}_R(A, \omega)$. *Then every finitely generated right A-module has a minimal* CM(A_A)*-approximation and a minimal* fres(U_A)*-hull.*

5. Finitely Embedding Cogenerators

Let $\mathscr{A}$ be an abelian category, $\mathscr{B}$ a full subcategory of $\mathscr{A}$. We call an object $X \in \mathscr{A}$ a finitely embedding cogenerator for $\mathscr{B}$ provided that every object in $\mathscr{B}$ admits an injection to some finite direct sum of copies of X in $\mathscr{A}$.

Theorem 5.1 [Mc2]. *Let A be a right coherent ring, B a left coherent ring, ${}_BU_A$ a B-A-bimodule which satisfies the condition* (C1), *and let* $0 \to {}_BU \to E^0 \to E^1 \to \dots$ *be an injective coresolution of* ${}_BU$ in B-Mod. *If the image of* $\mathbf{R}^{-}\mathrm{Hom}_A(-,{}_BU_A) : D^{-}(\mathrm{mod}A) \to D^{+}(B\text{-mod})$ *contains* B-mod, *then* $\bigoplus_{k\geq 0} E^k$ *is a finitely embedding cogenerator for* B-mod, *and* $\prod_{k\geq 0} E^k$ *is a finitely embedding injective cogenerator for* B-mod.

Proposition 5.2 [Mc2]. *Let A be a right coherent ring, B a left Noetherian ring, and ${}_BU_A$ a B-A-bimodule which satisfies the conditions* (C1), (C2r), (C2l), (C3r) and (C4r). *Let* $0 \to {}_BU \to E^0 \to E^1 \to \dots$ *be an injective coresolution of* ${}_BU$ in B-Mod. *Then every injective indecomposable left B-module is isomorphic to a direct summand of some E^k.*

Corollary 5.3 [Mc2]. *Let A be a ring, and* $0 \to {}_AA \to E^0 \to E^1 \to \dots$ *an injective coresolution of* ${}_AA$ in A-Mod. *If A satisfies the condition of (a) or (b), then every injective indecomposable left A-module is isomorphic to a direct summand of some E^k.*

(*a*) *A is a right coherent and left Noetherian ring such that* idim_AA *and* $\mathrm{idim}A_A$ *are finite.*
(*b*) *A is a ring satisfies the condition of Example* 2.6 (2).

Example 5.4. (1) *Example* 2.6 (1) *satisfies the condition of Theorem* 5.1. *Furthermore,* $\bigoplus_{k\geq 0} E^k$ *contains all indecomposable injective A-modules as summands.*

(2) *Let A be a ring* $\begin{pmatrix} F & V \\ 0 & G \end{pmatrix}$, *where F, G are division rings, and V is a F-G-bimodule such that* $\dim_F V < \infty$ and $\dim V_G = \infty$. *Then A is a right coherent and left Artinian ring, and A satisfies the conditions of Corollary* 5.3 (*a*).

References

[A] M. Auslander, On the dimension of modules and algebras III, Nagoya Math. J. 9

(1955), 67-77.

[AB] M. Auslander and R. O. Buchweitz, The homological theory of maximal Cohen-Macaulay approximations, Soc. Math. de France, Mem. 38 (1989), 5-37.

[AR1] M. Auslander and I. Reiten, Cohen-Macaulay and Gorenstein artin algebras, Progress in Math. Vol. 95 (1991), 221-245.

[AR2] M. Auslander and I. Reiten, Applications of contravariiantly finite categories, Advances in Math. 86 (1991), 111-152.

[B] H. Bass, On the ubiquity of Gorenstein rings, Math. Z. 82 (1963), 8-28.

[CPS] E. Cline, B. Parshall, and L. Scott, Derived categories and Morita theory, J. Algebra 104 (1986), 397-409.

[Go] S. Goto, Vanishing of $\mathrm{Ext}^i_A(M,A)$, J. Math. Kyoto Univ. (1982), 481-484.

[Gr] A. Grothendieck, "Groupes de classes des catégories abéliennes et triangulees", pp. 351-371, Lecture Notes in Math., Vol. 589, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[Hp] D. Happel, "Triangulated categories in the representation theory of finite-dimensional algebras", London Math. Soc. Lecture Notes 119, University Press, Cambridge, 1988.

[Hr] R. Hartshorne, "Residues and Duality", Lecture Notes in Math., Vol. 20, Springer-Verlag, Berlin, 1966.

[HS] M. Hashimoto and A. Shida, Some remarks on index and generalized Loewy length of Gorenstein local ring, to appear in J. Algebra.

[Ho] M. Hoshino, Noetherian rings of self-injective dimension two, Comm. in Alg. 21 (1993), 1071-1094.

[I1] Y. Iwanaga, On rings with finite self-injective dimension, Comm. in Alg. 7 (1979), 394-414.

[I2] Y. Iwanaga, On rings with finite self-injective dimension II, Tsukuba J. Math. 4 (1980), 107-113.

[LV] G. Levin and W. V. Vasconcelos, Homological dimensions and Macaulay rings, Pacific J. Math. 25 (1968), 315-325.

[Ma] E. Matlis, Injective modules over Noetherian rings, Pacific J. Math. 8 (1958), 511-528.

[Mc1] J. Miyachi, Localization of triangulated categories and derived categories, J. Algebra 141 (1991), 463-483.

[Mc2] J. Miyachi, Duality for derived categories and cotilting bimodules, J. Algebra 185 (1996), 583-603.

[Mc3] J. Miyachi, Derived categories and Morita duality theory, to appear in J. Pure and Appl. Math.

[Ms] Y. Miyashita, Tilting modules of finite projective dimension, Math. Z. 193 (1986), 113-146.

[S] R. Y. Sharp, Finitely generated modules of finite injective dimension over certain Cohen-Macaulay rings, Proc. London Math. Soc. (3) 25 (1972), 303-328.

[V] J. Verdier, "Catégories dérivées, état 0", pp. 262-311, Lecture Notes in Math., Vol. 569, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

The theory of multiplicity for arbitrary ideals in local rings

Koji Nishida

Graduate School of Science and Technology
Chiba University

1 Introduction

The purpose of this report is to establish the theory of Hilbert-Samuel function taking values in a Grothendieck group and to introduce a generalized notion of multiplicity for arbitrary ideals in local rings.

Let A be a Noetherian local ring with the maximal ideal $\mathfrak{m}$ such that $A/\mathfrak{m}$ is infinite and let I be a proper ideal. We denote by A-mod the category of finitely generated A-modules. Let $\mathrm{K}_0(A/I)$ the Grothendieck group of A/I-mod. For $L \in A$-mod with $I \subseteq \sqrt{\mathrm{ann}_A L}$, we can consider the class $[L] \in \mathrm{K}_0(A/I)$ by setting $[L] = \sum_{i\geq 0}[I^iL/I^{i+1}L]$, where $[I^iL/I^{i+1}L]$ denotes the class of A/I-module $I^iL/I^{i+1}L$ in $\mathrm{K}_0(A/I)$. Thus we derive, for $M \in A$-mod, the Hilbert-Samuel function $\chi_I^M : \boldsymbol{Z} \to \mathrm{K}_0(A/I)$ with $\chi_I^M(n) = [M/I^{n+1}M]$ for $n \in \boldsymbol{Z}$. The main result Theorem 4.1 of this paper insists that there exist uniquely determined elements $\mathrm{e}_0(I, M), \mathrm{e}_1(I, M), \cdots, \mathrm{e}_\ell(I, M)$ in $\mathrm{K}_0(A/I)$, where ℓ is the analytic spread of I (cf. [12]), such that

$$(\sharp) \qquad \chi_I^M(n) = \sum_{i=0}^{\ell} \binom{n+i}{i} \mathrm{e}_i(I, M)$$

for $n \gg 0$. Let us verify that the equality above corresponds to the well-known result on the coefficients of Hilbert polynomial in the case where I is $\mathfrak{m}$-primary. In fact, if I is $\mathfrak{m}$-primary, there exists an isomorphism $\sigma : \mathrm{K}_0(A/I) \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{Z}$ of groups sending $[L]$ to $\mathrm{length}_A L$ for any $L \in A$-mod with $I \subseteq \sqrt{\mathrm{ann}_A L}$. Let $e'_{d-i} = (-1)^{d-i}\sigma(\mathrm{e}_i(I, M))$ for $0 \leq i \leq d$, where $d = \dim A$ (notice that $\ell = d$ as I is $\mathfrak{m}$-primary). Then, mapping the both sides of $(\sharp)$ by σ, we get

$$\mathrm{length}_A M/I^{n+1}M = \binom{n+d}{d} e'_0 - \binom{n+d-1}{d-1} e'_{d-1} + \cdots + (-1)^d e'_d$$

for $n \gg 0$. Thus we may say that the elements $\mathrm{e}_i(I, M)$ for $0 \leq i \leq \ell$ given above suitably generalize the notion of the coefficients of Hilbert polynomial for $\mathfrak{m}$-primary ideals. In particular we notice that the element $\mathrm{e}_\ell(I, M)$ in the "top term", which is denoted by $\mathrm{e}_I(M)$, is mapped to the ordinary multiplicity. Furthermore we shall show that in general $\mathrm{e}_\ell(I,M)$ enjoy the same properties as the ordinary multiplicity of M with respect to an $\mathfrak{m}$-primary ideal. For example, if J is a reduction of I, then the group homomorphism $\mathrm{K}_0(A/I) \to \mathrm{K}_0(A/J)$ induced from the canonical surjection $A/J \to A/I$ is isomorphic, and through this isomorphism we have $\mathrm{e}_I(M) = \mathrm{e}_J(M)$. Moreover if $J = (a_1, a_2, \cdots, a_\ell)A$ is a minimal reduction of I, then $\mathrm{e}_I(M)$ is equal to the Euler-Poincaré characteristic $\chi_A(a_1, \cdots, a_\ell; M)$ of the Koszul complex $\mathrm{K}.(a_1, \cdots, a_\ell; M)$, which is essentially due to Fraser [4, 2.6]. This fact immediately implies that if a short exact sequence $0 \to L \to M \to N \to 0$ in A-mod is given, then $\mathrm{e}_I(M) = \mathrm{e}_I(L) + \mathrm{e}_I(N)$. Consequently, we see that there exists a group homomorphism $\mathrm{K}_0(A) \to \mathrm{K}_0(A/I)$ sending $[M]$ to $\mathrm{e}_I(M)$ for $M \in A$-mod.

Throughout this report A is a Noetherian local ring with the maximal ideal $\mathfrak{m}$ such that $A/\mathfrak{m}$ is infinite. The category of finitely generated A-modules is denoted by A-mod. For $M \in A$-mod, $\mu_A(M)$ is the number of elements in a minimal system of generators for M and $\mathrm{Min}_A M$ is the set of minimal elements in $\mathrm{Supp}_A M$. We further set $\mathrm{Assh}_A M = \{Q \in \mathrm{Min}_A M \mid \dim A/Q = \dim_A M\}$. For an ideal I in A, we denote by $\mathrm{V}(I)$ the set of all prime ideals in A containing I.

2 Preliminaries

In this section we first recall some basic facts on Grothendieck groups and next develop the theory on functions mapping $\boldsymbol{Z}$ to an additive group. We further review the theory of Euler-Poincaré characteristic of Koszul complexes.

Let $\overline{M}$ be the isomorphism class of $M \in A$-mod and let $\mathrm{F}(A) = \bigoplus \boldsymbol{Z} \cdot \overline{M}$ be the free Abelian group determined by the isomorphism classes of A-mod. The Grothendieck group $\mathrm{K}_0(A)$ is the factor group of $\mathrm{F}(A)$ by the subgroup generated by the elements of the form $\overline{M} - \overline{L} - \overline{N}$, where L, M and $N \in A$-mod for which there exists an exact sequence $0 \to L \to M \to N \to 0$. The class of $\overline{M}$ in $\mathrm{K}_0(A)$ for $M \in A$-mod is denoted by $[M]$. Because any $M \in A$-mod has a filtration $M = M_0 \supseteq M_1 \supseteq \cdots \supseteq M_r = (0)$ such that, for all $0 \le i < r$, $M_i/M_{i+1} \cong A/Q_i$ for some $Q_i \in \mathrm{Spec}\, A$, we see that $\mathrm{K}_0(A)$ is generated by $\{[A/Q] \mid Q \in \mathrm{Spec}\, A\}$. If A is Artinian, the group homomorphism $\varphi : \boldsymbol{Z} \to \mathrm{K}_0(A)$ with $\varphi(1) = [A/\mathfrak{m}]$ is isomorphic. In fact, when A is Artinian, there exists "the length function" $\mathrm{K}_0(A) \to \boldsymbol{Z}$ sending $[M]$ to $\mathrm{length}_A M$ for $M \in A$-mod, which is the inverse homomorphism of φ. Let $A \to B$ be a flat homomorphism of rings. Then there exists a group homomorphism $\mathrm{K}_0(A) \to \mathrm{K}_0(B)$ sending $[M]$ to $[M \otimes_A B]$ for $M \in A$-mod. Let $Q \in \mathrm{Spec}\, A$. For $\xi \in \mathrm{K}_0(A)$, we denote by ξ_Q the image of ξ by the surjective homomorphism $\mathrm{K}_0(A) \to \mathrm{K}_0(A_Q)$ induced from the canonical homomorphism $A \to A_Q$. Now we notice that the surjective group homomorphism

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{K}_0(A) & \to & \bigoplus_{Q \in \mathrm{Min}\, A} \mathrm{K}_0(A_Q) \\ \xi & \longmapsto & (\xi_Q)_Q \end{array}$$

always splits since $\mathrm{K}_0(A_Q) \cong \boldsymbol{Z}$ for any $Q \in \mathrm{Min}\, A$. Thus we see, letting m be the number of minimal primes of A,

$$\mathrm{K}_0(A) \cong \underbrace{\boldsymbol{Z} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{Z}}_{m \text{ times}} \oplus \widetilde{\mathrm{K}_0(A)},$$

where $\widetilde{\mathrm{K}_0(A)}$ is the subgroup of $\mathrm{K}_0(A)$ generated by $\{[A/Q] \mid Q \in \operatorname{Spec} A \setminus \operatorname{Min} A\}$. When we write

$$[M] = \sum_{Q \in \operatorname{Spec} A} m_Q \cdot [A/Q] \quad (m_Q \in \boldsymbol{Z})$$

for $M \in A$-mod, we have $m_Q = \operatorname{length}_{A_Q} M_Q$ for $Q \in \operatorname{Min} A$. If A is a normal domain, we have a natural homomorphism $\mathrm{K}_0(A) \to \boldsymbol{Z} \oplus \mathrm{Cl}(A)$ sending $[M]$ to $(\operatorname{rank}_A M, \operatorname{cl}(M))$ for $M \in A$-mod,where $\mathrm{Cl}(A)$ denotes the divisor class group of A and $\operatorname{cl}(M)$ is the divisor class attached to M (cf. [2, Chapter VII § 4.7]). Moreover this is an isomorphism if A is a 2-dimensional normal domain such that $[A/\mathfrak{m}] = 0$ in $\mathrm{K}_0(A)$ (cf. [16, (13.3)]).

Now we look at $\mathrm{K}_0(A/I)$ for an ideal I in A, which is the main tool in our investigation. Let $L \in A$-mod such that $I \subseteq \sqrt{\operatorname{ann}_A L}$. Because $I^i L/I^{i+1}L$ is an A/I-module, we may consider it's class $[I^i L/I^{i+1}L] \in \mathrm{K}_0(A/I)$. We set

$$[L] = \sum_{i \geq 0} [I^i L/I^{i+1}L] \in \mathrm{K}_0(A/I)\,.$$

Notice that, for $Q \in \mathrm{V}(I)$, $IA_Q \subseteq \sqrt{\operatorname{ann}_{A_Q} L_Q}$ and $[L]_Q = [L_Q]$ by definition.

Lemma 2.1 *Let $L \in A$-mod such that $I \subseteq \sqrt{\operatorname{ann}_A L}$. If $L = L_0 \supseteq L_1 \supseteq \cdots \supseteq L_s = (0)$ is a filtration such that $IL_j \subseteq L_{j+1}$ for all $0 \leq j < s$, then $[L] = \sum_{j=0}^{s-1} [L_j/L_{j+1}]$ in $\mathrm{K}_0(A/I)$.*

Let L be as in 2.1. If I is $\mathfrak{m}$-primary, then the length function $\mathrm{K}_0(A/I) \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{Z}$ sends $[L]$ to $\operatorname{length}_A L$. Thus we may regard the class $[\ \cdot\ ]$ defined above for finitely generated A-modules annihilated by some power of I as a notion generalizing "length". Unfortunately, unless I is $\mathfrak{m}$-primary, L is not necessarily (0) even if $[L] = 0$ in $\mathrm{K}_0(A/I)$. However we have the following.

Lemma 2.2 *Let $0 \to L \to M \to N \to 0$ be an exact sequence in A-mod such that $I \subseteq \sqrt{\operatorname{ann}_A M}$. Then $[M] = [L] + [N]$ in $\mathrm{K}_0(A/I)$.*

Let $A \to B$ be a homomorphism of commutative rings such that B is module-finite over A. Regarding B-module as A-module via $A \to B$ we have a group homomorphism $\mathrm{K}_0(B) \to \mathrm{K}_0(A)$. The next result plays an important role in Section 5.

Lemma 2.3 *Let J be an ideal contained in I such that $\sqrt{J} = \sqrt{I}$. Then the homomorphism $\mathrm{K}_0(A/I) \to \mathrm{K}_0(A/J)$ induced from the canonical surjection $A/J \to A/I$ is an isomorphism.*

We shall mainly use 2.3 in the case where J is a reduction of I.

Now we proceed to the next topic in this section. Let G be an additive group. For a function $f : \boldsymbol{Z} \to G$, we define it's difference $\Delta f : \boldsymbol{Z} \to G$, by setting $\Delta f(n) = f(n) - f(n-1)$ for $n \in \boldsymbol{Z}$. The i times iterated Δ-operator will be denoted by Δ^i and we further set $\Delta^0 f = f$. For functions $f, g : \boldsymbol{Z} \to G$, $f + g$ and $-f$ are functions defined by setting $(f+g)(n) = f(n) + g(n)$ and $(-f)(n) = -f(n)$ for $n \in \boldsymbol{Z}$. We write $f \equiv g$ if $f(n) = g(n)$ for all $n \gg 0$. Notice that $\Delta^k(f+g) = \Delta^k f + \Delta^k g$ and $\Delta^k(-f) = -\Delta^k f$ for all $k \geq 0$. Now we define the degree of f as follows:

$$\deg f = \begin{cases} \sup\{k \mid \Delta^k f \not\equiv 0\} & \text{if} \quad f \not\equiv 0 \\ -1 & \text{if} \quad f \equiv 0\,, \end{cases}$$

here we denote by 0 the function sending all $n \in \boldsymbol{Z}$ to $0 \in G$. Obviously we have $\deg \Delta f = \deg f - 1$ if $f \not\equiv 0$, $\deg(-f) = \deg f$ and $\deg(f_1 + \cdots + f_r) \leq \sup\{\deg f_1, \cdots, \deg f_r\}$.

Lemma 2.4 *The following conditions are equivalent for an integer $d \geq 0$ and a function $f : \boldsymbol{Z} \to G$ with $f \not\equiv 0$.*

(1) $\deg f = d$.

(2) *There are elements $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_d \in G$ such that $\xi_d \neq 0$ and*

$$f(n) = \sum_{i=0}^{d} \binom{n+i}{i} \xi_i$$

for $n \gg 0$.

When this is the case, the elements $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_d$ are uniquely determined by f.

For a function $f : \boldsymbol{Z} \to G$ with $0 \leq \deg f = d < \infty$, we denote by $\mathrm{c}_i(f)$ $(i = 0, 1, \cdots, d)$ the element ξ_i stated in 2.4. We further set $\mathrm{c}_i(f) = 0$ for $i > d$. In the case where $f \equiv 0$, we set $\mathrm{c}_i(f) = 0$ for all $0 \leq i \in \boldsymbol{Z}$. It is easily seen from the proof of 2.4 that $\mathrm{c}_i(\Delta f) = \mathrm{c}_{i+1}(f)$ for all $i \geq 0$. Therefore we have the following

Lemma 2.5 *For a function $f : \boldsymbol{Z} \to G$ with $\deg f = d$, we have $\mathrm{c}_d(f) = \Delta^d f(n)$ for $n \gg 0$.*

Let $f : \boldsymbol{Z} \to G$ be a function and α an integer. We define a function $f[\alpha] : \boldsymbol{Z} \to G$ by setting $f[\alpha](n) = f(n + \alpha)$ for $n \in \boldsymbol{Z}$. We can easily show that $\Delta^i(f[\alpha]) = (\Delta^i f)[\alpha]$ for all $i \geq 0$. Hence we get $\deg f[\alpha] = \deg f$. Moreover we have $\deg(f - f[\alpha]) \leq \deg \Delta f$. In fact, if $\alpha < 0$, we have $g := f - f[\alpha] = \Delta f + \Delta f[-1] + \cdots + \Delta f[\alpha + 1]$ and so $\deg g \leq \sup\{\deg \Delta f[\beta] \mid \alpha < \beta \leq 0\}$, from which we get $\deg g \leq \deg \Delta f$ since $\deg \Delta f[\beta] = \deg \Delta f$ for all β. If $\alpha > 0$, then setting $h = f[\alpha]$, we have $\deg(f - f[\alpha]) = \deg(h - h[-\alpha]) \leq \deg \Delta h = \deg \Delta f$. If $\alpha = 0$, the required inequality is obvious.

Lemma 2.6 *Let $f : \boldsymbol{Z} \to G$ be a function with $0 \leq \deg f = d < \infty$. Let α be an integer. Then $\mathrm{c}_d(f[\alpha]) = \mathrm{c}_d(f)$.*

The rest of this section is devoted to reviewing the theory of Euler-Poincaré characteristic of Koszul complexes due to Auslander-Buchsbaum [1] and Fraser [4]. Let $a_1, a_2, \cdots, a_\ell$ $(\ell \geq 1)$ be elements in A. We set $I = (a_1, a_2, \cdots, a_\ell)A$. We denote by $\mathrm{H}_i(a_1, \cdots, a_\ell; M)$ the i-th homology module of the Koszul complex $\mathrm{K}.(a_1, \cdots, a_\ell; M)$. Because $I \cdot \mathrm{H}_i(a_1, \cdots, a_\ell; M) = (0)$, the class $[\mathrm{H}_i(a_1, \cdots, a_\ell; M)] \in \mathrm{K}_0(A/I)$ can be considered for any i. We set

$$\chi_A(a_1, \cdots, a_\ell; M) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i [\mathrm{H}_i(a_1, \cdots, a_\ell; M)] \in \mathrm{K}_0(A/I)$$

and call it the Euler-Poincaré characteristic.

Proposition 2.7 ([1, 3.2]) *Let $0 \to L \to M \to N \to 0$ be an exact sequence in A-mod. Then we have*

$$\chi_A(a_1, \cdots, a_\ell; M) = \chi_A(a_1, \cdots, a_\ell; L) + \chi_A(a_1, \cdots a_\ell; N).$$

By 2.7 we see that there exists a group homomorphism $\chi_A(a_1, \cdots, a_\ell) : \mathrm{K}_0(A) \to \mathrm{K}_0(A/I)$ sending $[M]$ to $\chi_A(a_1, \cdots, a_\ell; M)$ for $M \in A$-mod.

Proposition 2.8 **([1, 3.2], [4, 1.2])** *Let $M \in A$-mod. If $a_1{}^n M = (0)$ for some $n > 0$, then $\chi_A(a_1, \cdots, a_\ell; M) = 0$.*

Proposition 2.9 **([1, 3.3], [4, 1.7])** *Let $M \in A$-mod. If $\ell \geq 2$, we have*

$$\chi_A(a_1, \cdots, a_\ell; M) = \chi_{\overline{A}}(\overline{a_2}, \cdots, \overline{a_\ell})(\chi_A(a_1; M)),$$

where $\overline{A} = A/a_1 A$ and $\overline{a_i}$ denotes the class of a_i in $\overline{A}$.

Proposition 2.10 **([4, 1.7])** *Let $0 < k < \ell$. Then the following diagram*

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{K}_0(A) & \xrightarrow{\chi_A(a_1, \cdots, a_k)} & \mathrm{K}_0(\overline{A}) \\
\| & & \downarrow \chi_{\overline{A}}(\overline{a_{k+1}}, \cdots, \overline{a_\ell}) \\
\mathrm{K}_0(A) & \xrightarrow{\chi_A(a_1, \cdots, a_\ell)} & \mathrm{K}_0(A/I)
\end{array}$$

is commutative, where $\overline{A} = A/(a_1, \cdots, a_k)A$ and $\overline{a_i}$ denotes the class of a_i in $\overline{A}$.

3 Superficial element and analytic spread

In this section we recall the notions of superficial element (cf. [11]) and analytic spread (cf. [12]), generalizing them slightly. Let $\mathbf{G}$ be the associated graded ring $\mathrm{G}(I) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n/I^{n+1}$. Let $M \in A$-mod and let X be the associated graded $\mathbf{G}$-module $\mathrm{G}(I, M) = \bigoplus_{n \geq 0} I^n M/I^{n+1} M$. For an element $a \in I$, we set $a^* = a \bmod I^2 \in \mathbf{G}_1$.

Lemma 3.1 *Let $a \in I$. Then the following conditions are equivalent.*

(1) *There exists $c > 0$ such that $(I^{n+1}M :_M a) \bigcap I^c M = I^n M$ for all $n > c$.*

(2) *There exists $c > 0$ such that a^* is a non-zero-divisor on $X|_{\geq c} := \bigoplus_{n \geq c} I^n M/I^{n+1}M$.*

(3) *If $\mathbf{G}_+ \not\subseteq Q \in \mathrm{Ass}_{\mathbf{G}} X$, then $a^* \notin Q$.*

We say that $a \in I$ is a superficial element of I with respect to M if one of the conditions of 3.1 is satisfied. Because we assume that $A/\mathfrak{m}$ is infinite, the existence of a superficial element is always guaranteed by the condition (3) of 3.1.

Lemma 3.2 *Let a be a superficial element of I with respect to M. Then, for $n \gg 0$, we have*

(1) $aM \bigcap I^n M = aI^{n-1}M$,

(2) $I^{n+1}M :_M a = ((0) :_M a) + I^n M$,

(3) $((0) :_M a) \bigcap I^n M = (0)$ *and*

(4) $I^n((0) :_M a) = (0)$.

Lemma 3.3 *Let a be a superficial element of I with respect to M. Then the sequence*

$$0 \to (0) :_M a \to M/I^nM \xrightarrow{a} M/I^{n+1} \to \overline{M}/I^{n+1}\overline{M} \to 0$$

is exact for $n \gg 0$, where $\overline{M} = M/aM$.

We denote by $\ell(I, M)$ the Krull dimension of the G-module $X/\mathrm{m}X$. In particular we write $\ell(I) = \ell(I, A)$, which is called the analytic spread of I (cf. [12]). In general, we have $0 \leq \ell(I, M) \leq \ell(I)$. Because we are assuming that A/m is infinite, $\ell(I) = \mu_A(J)$ for any minimal reduction J of I. The inequalities $\mathrm{ht}_A\, I \leq \ell(I) \leq \min\{\dim A, \mu_A(I)\}$ are valid for any ideal I in A. Hence if I is m-primary, $\ell(I) = \dim A$. We note for future use that if $I = (a_1, \cdots, a_\ell)A$ and $\ell(I) = \ell$, then $\ell((a_1, \cdots, a_k)A) = k$ for $0 \leq k \leq \ell$. In fact, setting $K = (a_1, \cdots, a_k)A$ and $L = (a_{k+1}, \cdots, a_\ell)A$, we have $\ell(I) \leq \ell(K) + \ell(L)$ (cf. [12, §8 LEMMA 1]), $\ell(K) \leq k$ and $\ell(L) \leq \ell - k$, which imply $\ell(K) = k$. In particular, if $a_1, \cdots, a_k$ is a subsystem of parameters (ssop) for A, then $\ell((a_1, \cdots, a_k)A) = k$. We further notice that if $I = (a_1, \cdots, a_\ell)A$ and $a_1, \cdots, a_\ell$ is a d-sequence on A (cf. [7]), then $\ell(I) = \ell$ because by [8, 3.1] G/mG is isomorphic to a polynomial ring over A/m with ℓ variables.

Lemma 3.4 *If $\ell(I, M) = 0$, then $I \subseteq \sqrt{\mathrm{ann}_A M}$.*

Lemma 3.5 *Suppose $\ell(I, M) > 0$. Then there exists an element $a \in I$ satisfying the following conditions:*

(1) *a is a part of a minimal system of generators for I.*

(2) *a is a superficial element of I with respect to M.*

(3) *$\ell(I, \overline{M}) = \ell(I, M) - 1$, where $\overline{M} = M/aM$.*

4 Hilbert-Samuel function

For $M \in A$-mod, we define the function $\chi_I^M : \boldsymbol{Z} \to \mathrm{K}_0(A/I)$ by setting $\chi_I^M(n) = [M/I^{n+1}M]$ and call it the Hilbert-Samuel function of M with respect to I. We simply denote χ_I^A by χ_I.

Theorem 4.1 *Let $M \in A$-mod. Then*

$$\max\{\dim_{A_Q} M_Q \mid Q \in \mathrm{Min}_A A/I\} \leq \deg \chi_I^M \leq \ell(I, M).$$

In particular we have

$$\mathrm{ht}_A I \leq \deg \chi_I \leq \ell(I).$$

Here we notice that $\dim_A M = -\infty$ if $M = (0)$.

Lemma 4.2 *If $\deg \chi_I^M \leq 0$, then $\dim_{A_Q} M_Q \leq \deg \chi_I^M$ for any $Q \in \mathrm{Min}_A A/I$.*

Definition 4.3 *Let $M \in A$-mod. We set* $\mathrm{e}_i(I, M) = \mathrm{c}_i(\chi_I^M) \in \mathrm{K}_0(A/I)$ *for* $i \geq 0$. *Then* $\mathrm{e}_i(I, M) = 0$ *for* $i > \ell(I, M)$ *and*

$$\chi_I^M(n) = \sum_{i \geq 0} \binom{n+i}{i} \mathrm{e}_i(I, M)$$

in $\mathrm{K}_0(A/I)$ *for* $n \gg 0$.

Proposition 4.4 *Let $M \in A$-mod. Then we have the following assertions.*

(1) *Let a be a superficial element of I with respect to M. We set $\overline{M} = M/aM$. Then* $\mathrm{e}_i(I, \overline{M}) = \mathrm{e}_{i+1}(I, M)$ *for any* $i \geq 1$ *and* $\mathrm{e}_0(I, \overline{M}) = \mathrm{e}_1(I, M) + [(0) :_M a]$.

(2) $\mathrm{e}_i(I, M)_Q = \mathrm{e}_i(IA_Q, M_Q)$ *for any* $Q \in \mathrm{V}(I)$.

Corollary 4.5 *Let $M \in A$-mod and $Q \in \mathrm{V}(I)$. If* $\mathrm{e}_i(I, M)_Q \neq 0$, *then* $i \lesssim \mathrm{ht}_A Q$.

Proposition 4.6 ([4, 3.1]) *Let I be generated by an M-regular sequence of length m. Then* $\mathrm{e}_m(I, M) = [M/IM]$ *and* $\mathrm{e}_i(I, M) = 0$ *for any* $i \neq m$.

The following result is due to Fraser [4]. We will give another proof using superficial element.

Proposition 4.7 ([4, 2.6]) *Let I be minimally generated by $a_1, a_2, \cdots, a_m$. Then for any $M \in A$-mod we have* $\Delta^m \chi_I^M(n) = \chi_A(a_1, \cdots, a_m; M)$.

We need the following

Lemma 4.8 *Let $M \in A$-mod, $\ell \geq 2$ and a_1 a superficial element of I with respect to M. Then*

$$\chi_A(a_1, a_2, \cdots, a_\ell; M) = \chi_{\overline{A}}(\overline{a_2}, \cdots, \overline{a_\ell}; \overline{M}),$$

where $\overline{A} = A/a_1A, \overline{M} = M/a_1M$ *and* $\overline{a_i}$ *is the class of* a_i *in* $\overline{A}$.

Corollary 4.9 *Let $M \in A$-mod. If I is minimally generated by $a_1, a_2, \cdots, a_m$ and $\ell(I, M) < m$, Then* $\chi_A(a_1, \cdots, a_m; M) = 0$.

5 Multiplicity

In this section we concentrate our attention on the "top term" in the expression of a Hilbert-Samuel function using binomial coefficients. Throughout this section $d = \dim A, \ell = \ell(I)$ and $M \in A$-mod.

Definition 5.1 *We set* $\mathrm{e}_I(M) = \mathrm{e}_\ell(I, M)$ *and call it the multiplicity of M with respect to I.*

Proposition 5.2 $\mathrm{e}_I(M) = \Delta^\ell \chi_I^M(n)$ *for* $n \gg 0$. *Hence* $\mathrm{e}_I(M) = 0$ *if* $\ell(I, M) < \ell$.

Proposition 5.3 *Let $m \geq 1$. Then, identifying $\mathrm{K}_0(A/I)$ with $\mathrm{K}_0(A/I^m)$ through the isomorphism $\mathrm{K}_0(A/I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{K}_0(A/I^m)$ induced from the canonical surjection $A/I^m \to A/I$, we get $\mathrm{e}_{I^m}(M) = m^\ell \cdot \mathrm{e}_I(M)$.*

Proposition 5.4 *Let $I = (a_1, \cdots, a_\ell)A$ and $a_1, \cdots, a_\ell$ is an M-regular sequence. Then $\mathrm{e}_I(M) = [M/IM]$.*

Proposition 5.5 *Let $Q \in \mathrm{V}(I)$. If $\ell(IA_Q) = m$, then $\mathrm{e}_{IA_Q}(M_Q) = \mathrm{e}_m(I, M)_Q$.*

Let us denote by $\mathrm{e}'_I(M)$ the ordinary multiplicity of M with respect to an $\mathfrak{m}$-primary ideal I. Then, as is noticed in the introduction, when I is $\mathfrak{m}$-primary, $\mathrm{e}_I(M)$ is sent to $\mathrm{e}'_I(M)$ by the length function $\mathrm{K}_0(A/I) \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{Z}$. More generally we have the following.

Lemma 5.6 *Let $Q \in \mathrm{Min}_A\, A/I$ with $\mathrm{ht}_A Q = s$. Let*

$$\mathrm{e}_s(I, M) = \sum_{P \in \mathrm{V}(I)} m_P \cdot [A/P] \quad (m_P \in \boldsymbol{Z})$$

in $\mathrm{K}_0(A/I)$. Then $m_Q = \mathrm{e}'_{IA_Q}(M_Q)$.

Lemma 5.7 *Let N be an A-submodule of M such that $I \subseteq \sqrt{\mathrm{ann}_A M/N}$. If $\ell > 0$, we have $\mathrm{e}_I(M) = \mathrm{e}_I(N)$.*

Proposition 5.8 *Let J be a reduction of I. Then via the isomorphism $\mathrm{K}_0(A/I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{K}_0(A/J)$ induced from the canonical surjection $A/J \to A/I$, we have $\mathrm{e}_I(M) = \mathrm{e}_J(M)$.*

By virtue of 4.7 and 5.8, we immediately get the following.

Theorem 5.9 *Let $\ell \geq 1$ and $J = (a_1, a_2, \cdots a_\ell)A$ be a minimal reduction of I. Then $\mathrm{e}_I(M) = \chi_A(a_1, \cdots, a_\ell; M)$ via the isomorphism $\mathrm{K}_0(A/I) \xrightarrow{\sim} \mathrm{K}_0(A/J)$.*

Corollary 5.10 ([4, 1.12]) *Let $a_1, a_2, \cdots, a_m$ be elements in $\mathfrak{m}$. Then for any positive integers $n_1, n_2, \cdots, n_m$, we have*

$$\chi_A({a_1}^{n_1}, {a_2}^{n_2}, \cdots, {a_m}^{n_m}; M) = n_1 n_2 \cdots n_m \cdot \chi_A(a_1, a_2, \cdots, a_m; M)$$

through the isomorphism $\mathrm{K}_0(A/(a_1, a_2, \cdots, a_m)A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{K}_0(A/({a_1}^{n_1}, {a_2}^{n_2}, \cdots, {a_m}^{n_m})A)$.

The next proposition is a direct consequence of 2.7, 5.6 and 5.7.

Proposition 5.11 *Let $0 \to L \to M \to N \to 0$ be an exact sequence in A-mod. Then $\mathrm{e}_I(M) = \mathrm{e}_I(L) + \mathrm{e}_I(N)$.*

By virtue of 5.11 we get the group homomorphism $\mathrm{e}_I : \mathrm{K}_0(A) \to \mathrm{K}_0(A/I)$ sending $[M]$ to $\mathrm{e}_I(M)$ for any $M \in A$-mod. If $J = (a_1, \cdots, a_\ell)A$ is a minimal reduction of I, the following diagram

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{K}_0(A) & \xrightarrow{\mathrm{e}_I} & \mathrm{K}_0(A/I) \\ \| & & \downarrow \\ \mathrm{K}_0(A) & \xrightarrow{\chi_A(a_1, \cdots, a_\ell)} & \mathrm{K}_0(A/J) \end{array}$$

is commutative, where the vertical arrow denotes the isomorphism induced from the canonical surjection $A/J \to A/I$.

Proposition 5.12 *Let*

$$[M] = \sum_{Q \in \operatorname{Spec} A} m_Q \cdot [A/Q] \quad (m_Q \in \boldsymbol{Z})$$

in $\mathrm{K}_0(A)$. *Then*

$$\mathrm{e}_I(M) = \sum_{\substack{Q \in \operatorname{Spec} A \\ \ell(I+Q/Q)=\ell}} m_Q \cdot \mathrm{e}_I(A/Q).$$

When I is $\mathfrak{m}$-primary, 5.10 implies the additive formula:

$$\mathrm{e}'_I(M) = \sum_{Q \in \operatorname{Assh} A} \operatorname{length}_{A_Q} M_Q \cdot \mathrm{e}'_I(A/Q),$$

because $m_Q = \operatorname{length}_{A_Q} M_Q$ for $Q \in \operatorname{Min} A$, $\ell = d$ and $\ell(I + Q/Q) = \dim A/Q$.

Proposition 5.13 *Let $J = (a_1, \cdots, a_\ell)A$ be a minimal reduction of I and $0 \leq k \leq \ell$. We put $K = (a_1, \cdots, a_k)A$. If $\ell(I/K) = \ell - k$, then $\mathrm{e}_I(M) = \mathrm{e}_{I/K}(\mathrm{e}_K(M))$.*

Let us notice that even if $I = (a_1, \cdots, a_\ell)A$, $\ell(I/(a_1, \cdots a_k)) < \ell - k$ can happen for some $0 < k < \ell$. For example, let $A = F[[X, Y]]$ be the formal power series ring over a field F and $I = (X^2, XY)A$. Then $\ell(I) = 2$. However $\ell(I/X^2A) = 0$ as I/X^2A is nilpotent. On the other hand, if $a_1, \cdots, a_\ell$ is a ssop for A or a d-sequence, then the equality $\ell(I/(a_1, \cdots, a_k)A) = \ell - k$ holds for all $0 \leq k \leq \ell$.

Corollary 5.14 *Under the same notations and assumptions as 5.13, let*

$$\mathrm{e}_K(M) = \sum_{Q \in \mathrm{V}(K)} m_Q \cdot [A/Q] \quad (m_Q \in \boldsymbol{Z})$$

in $\mathrm{K}_0(A/K)$. *Then*

$$\mathrm{e}_I(M) = \sum_{\substack{Q \in \mathrm{V}(K) \\ \ell(I+Q/Q)=\ell-k}} m_Q \cdot \mathrm{e}_{I/K}(A/Q).$$

When I is $\mathfrak{m}$-primary, 5.14 means the associativity formula (cf. [11, (24.7)]). In fact, in that case, $\ell = d$ and $a_1, \cdots, a_d$ is a sop for A. So $\ell(I/K) = \dim A/K = d - k$. Furthermore $\ell(I + Q/Q) = \dim A/Q$ for all $Q \in \operatorname{Spec} A$. Therefore, as $m_Q = \mathrm{e}'_{KA_Q}(M_Q)$ for all $Q \in \operatorname{Min}_A A/K$ by 5.6, we have

$$\mathrm{e}_I(M) = \sum_{Q \in \operatorname{Assh}_A A/K} \mathrm{e}'_{KA_Q}(M_Q) \cdot \mathrm{e}_{I/K}(A/Q).$$

Now sending the both sides of the equality above by the length function $\mathrm{K}_0(A/I) \xrightarrow{\sim} \boldsymbol{Z}$, we get the associativity formula.

As is well known, when I is $\mathfrak{m}$-primary, we always have inequalities $\mathrm{e}'_I(M) \geq 0$ and $\mathrm{e}'_I(M) \leq \operatorname{length}_A M/JM$ for any minimal reduction J of A. Now we generalize these facts. Let $\mathrm{K}_0(A/I)_+$ denotes the subset of $\mathrm{K}_0(A/I)$ consisting of the classes of finitely generated A/I-module.

Proposition 5.15 *We always have the following assertions.*

(1) $\mathrm{e}_I(M) \in \mathrm{K}_0(A/I)_+$.

(2) $[M/JM] - \mathrm{e}_I(M) \in \mathrm{K}_0(A/I)_+$ *for any minimal reduction J of I.*

Proposition 5.16 *Let $I = (a_1, \cdots, a_\ell)A$ and let $n_1, \cdots, n_\ell$ be positive integers. We assume $\ell((a_1{}^{n_1}, \cdots, a_\ell{}^{n_\ell})A) = \ell$. Then, through the isomorphism*

$$\mathrm{K}_0(A/I) \to \mathrm{K}_0(A/(a_1{}^{n_1}, \cdots, a_\ell{}^{n_\ell})A),$$

we have

$$\mathrm{e}_{(a_1{}^{n_1}, \cdots, a_\ell{}^{n_\ell})A}(M) = n_1 n_2 \cdots n_\ell \cdot \mathrm{e}_I(M).$$

The next result is a generalization of the lemma of Lech. But in order to state it, we have to fix one more notation. Let m be a positive integer and

$$f : \underbrace{Z \times \cdots \times Z}_{m \text{ times}} \to G$$

a function, where G is an additive group. For $1 \leq i \leq m$, we define

$$\triangle_i f : \underbrace{Z \times \cdots \times Z}_{m \text{ times}} \to G$$

by setting $\triangle_i f(n_1, \cdots, n_i, \cdots, n_m) = f(n_1, \cdots, n_i, \cdots, n_m) - f(n_1, \cdots, n_i - 1, \cdots, n_m)$.

Proposition 5.17 *Let $I = (a_1, \cdots, a_\ell)A$. We assume that*

$$\ell((a_1{}^{n_1}, \cdots, a_\ell{}^{n_\ell})A/(a_1{}^{n_1}, \cdots, a_k{}^{n_k})A) = \ell - k$$

for all positive integers $n_1, \cdots, n_\ell$ and $0 \leq k \leq \ell$. Let

$$f : \underbrace{Z \times \cdots \times Z}_{\ell \text{ times}} \to \mathrm{K}_0(A/I)$$

be the function such that $f(n_1, \cdots, n_\ell) = [M/(a_1{}^{n_1}, \cdots, a_\ell{}^{n_\ell})M]$. Then we have

$$\triangle_1 \triangle_2 \cdots \triangle_\ell f(n_1, \cdots, n_\ell) = \mathrm{e}_I(M)$$

for $n_1, \cdots, n_\ell \gg 0$.

So far we have verified that our multiplicities actually enjoy the same properties as the ordinary ones. Now it should be required to consider the influence of the value $\mathrm{e}_I(M)$ on I and M themselves. As the first step of the study in this aspect, the following two results are concerned with when $\mathrm{e}_I(A) = [A/I]$.

Proposition 5.18 *Let A be a Cohen-Macaulay ring. Then $\mathrm{e}_I(A) = [A/I]$ if and only if I is generated by a regular sequence.*

Proposition 5.19 *Let A/Q be a regular local ring. Assume* $\operatorname{Ass}\hat{A} = \operatorname{Assh}\hat{A}$*, where* $\hat{A}$ *is the completion of* A*. Then* $\mathrm{e}_Q(A) = [A/Q]$ *if and only if* A *is regular.*

If I is equimultiple, then $\mathrm{e}_I(A) \neq 0$ by 4.1. The next proposition provides with examples of non-equimultiple ideal whose multiplicities are not vanished.

Proposition 5.20 *Let A be a Gorenstein ring and* $Q \in \operatorname{Spec} A$ *such that A/Q is a Cohen-Macaulay normal domain. We assume that* $\mu_A(Q) = \mathrm{ht}_A Q + 1$ *and A_Q is regular (such a prime ideal is said to be an almost complete intersection (cf. [5, (2.1)])). Then we have the following assertions.*

(1) $\mathrm{e}_Q(A) = [A/Q] - [K_{A/Q}]$*, where $K_{A/Q}$ denotes the canonical module of A/Q.*

(2) *If A/Q is not Gorenstein, then* $\mathrm{e}_Q(A) \neq 0$*. The converse is true when* $\dim A/Q = 2$ *and* $[A/\mathrm{m}] = 0$ *in* $\mathrm{K}_0(A/Q)$.

The prime ideal in the formal power series ring $F[[X, Y, Z, U, V, W]]$ over a field F generated by the maximal minors of the matrix

$$\begin{pmatrix} X & Y & Z \\ U & V & W \end{pmatrix}$$

is a typical example of Q in 5.20

References

[1] Auslander, M. and Buchsbaum, D., *Codimension and multiplicity*, Ann. Math. **68** (1958), 625–657.

[2] Bourbaki, N., *Algèbre commutative*, Hermann, Paris (1961).

[3] Cowsik, R. and Nori, S., *On the fibres of blowing up*, J. Indian Math. Soc. **40** (1976), 217–222.

[4] Fraser, M., *Multiplicities and Grothendieck groups*, Trans. Amer. Math. Soc. **136** (1969), 77–92.

[5] Goto, S. and Shimoda, Y., *On the Gorensteinness of Rees and form rings of almost complete intersections*, Nagoya Math. J. **92** (1983), 69–88.

[6] Herrmann, M., Ikeda, S. and Orbanz, U., *Equimultiplicity and Blowing-up*, Springer-Verlag, (1988).

[7] Huneke, C., *The theory of d-sequences and powers of ideals*, Adv. Math. **46** (1982), 249–279.

[8] Huneke, C., *On the symmetric and Rees algebra of an ideal generated by a d-sequence*, J. Alg. **62** (1980), 268–275.

[9] Herzog, J. and Kunz, E., *Der kanonishe Modul eines Cohen-Macaulay-Rings*, Lecture Notes in Math. **238**, Springer (1971).

[10] Lipman, J., *Equimultiplicity, reduction, and blowing up*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math. **68**, Dekker (1982), 111–147.

[11] Nagata, M., *Local rings*, Interscience (1962).

[12] Northcott, D. G. and Rees, D., *Reductions of ideals in local rings*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **50** (1954), 145–158.

[13] Samuel, P., *La notion de multiplicité en algèbre et en géométrie algébrique*, J. math. pure et appl. **30** (1951), 159–274.

[14] Serre, J. P., *Algèbre Locale-Multiplicités*, Lecture Notes in Math. **11**, Springer (1965).

[15] Stückrad, J., *Grothendieck-Gruppen abelscher Kategorien und Multiplizitäten*, Math. Nachr. **62** (1974), 5–26.

[16] Yoshino, Y., *Cohen-Macaulay modules over Cohen-Macaulay rings*, London Math. Soc. Lecture Note Series **146** (1990).

Some examples of derived equivalent blocks of finite groups

北海道教育大学旭川校　　奥山哲郎

§0. はじめに

多元環の表現論において. derived category の議論が精力的に行なわれていると門外漢の私にも目に見えて来たのは. 80年代後半にはいってのことである。Derived equivalence の理論の多元環の表現論における意義, 位置について若松氏の論説[11]を興味深く読んだ記憶がある。有限群の表現論への応用が (十分意味がありそうに) 意識されたのは. 90年前後 .主に Broué, Rickard の一連の研究が発表されてからのことと思う。Broué 予想. .あるいは Broué の夢である。

群環の blocks 間の derived equivalence の Broué 予想が興味深いと思われる (私にとっての) 理由は. Green, Alperin らを中心に整備, 形づくられてきた群の表現論の加群論的理論をどう深めるべきかの今後の方向を与えているからである。Alperin 予想への突破口というだけでなく. Broué - Puig の source algebra の理論や, p-可解群 (特に p-巾零群) の Dade の理論などのこの立場からの解釈は興味深く, 研究方向の正当性を示唆している。(私は門外漢でよくわからないが) Broué の興味のひとつに "有限簡約群" の Deligne - Lusztig の指標の構成と. それを与える complex の derived category での考察がある。これとかかわって. Glauberman 対応の加群論考察も今後なされるべきと思う。Broué, Puig らの Brauer の指標理論の精密化の研究も. derived equivalence の帰結として構成される perfect isometry にかかわっていた。指標, 加群, complex と話を拡げただけのことで, かえって難しくなっているかもしれない。実際, Broué 予想そのものの進展はほとんどない。(不勉強のため. 情報を十分もっていません。もしかしたらあるのかもしれませんが. 公表されている事柄については) が. Perfect isometry にかかわる問題はある意味で相当進展しており. Broué の夢は (かなわぬものなのかもしれないが) 「見てもよい夢」であることは間違いない。 Broué [1, 2, 3] などを参考にされたい。

講演では. derived equivalent な blocks の計算例を報告した。計算に自信があるわけではないので. そのつもりでお読み下さい。

Aを体k上の有限次元多元環，$\mathrm{mod}A$，$\mathrm{proj}A$を 有限生成right A-mods，有限生成 projective right A-modsのなすcategoryとする。$K(\mathrm{mod}A)$，$K(\mathrm{proj}A)$をそれぞれ，そのcomplexからなるhomotopy category，$K^b(\mathrm{proj}A)$，$K^-(\mathrm{proj}A)$は，上下に有界，上に有界なcomplexのなすsubcategory of $K(\mathrm{proj}A)$とおく。mapping coneをとる操作，及びshift [n]を考えてのtriangulated categoryとなる。

§1. Rickardの結果から

Rickardの一連の論文から，必要な事実をまとめておく。

<u>(1.1)</u> Aをsymmetric，(簡単のため) basicとし，$1=\sum_{i\in I} e_i$ (原始的巾等元への直和)

$I_0 \subset I$をひとつ決め，各$i\in I$について，次のcomplexを考える。

$i\in I_0$のとき　P_i^* : $\cdots\to 0\to \underset{0\text{-th.}}{P_i}\to 0\to 0\to\cdots$　　$P_i=e_iA$

$j\notin I_0$のとき　P_j^* : $\cdots\to 0\to R_j\xrightarrow{f_j} P_j\to 0\to\cdots$　　$P_j=e_jA$ で，map f_jは

$e_jA\supset e_jAeA$のprojective cover $R_j\to e_jAeA$ と $e_jAeA\hookrightarrow e_jA$の合成。

ここで $e=\sum_{i\in I_0} e_i$。　$P^*=\oplus\sum_{i\in I} P_i^*$ とおくと，次が成立。

(1) $\mathrm{Hom}_{K^b(\mathrm{proj}A)}(P^*, P^*[n])=0$，$^\forall n\in\mathbb{Z}$，$n\neq 0$.

(2) P^*から，直和，直和因子，mapping cone，shiftをとる操作で $\cdots\to 0\to A\to 0\to\cdots$ を作ることができる。

(Rickard [7])

<u>(1.2)</u> 一般に，$P^*\in K^b(\mathrm{proj}A)$が(1.1)の条件(1)，(2)をみたすとき Aの<u>tilting complex</u>という。次は同値である。

(1) $K^-(\mathrm{proj}A)$と$K^-(\mathrm{proj}B)$がtriangulated categoryとして同値

(2) Aのtilting complex P^*が存在し，$B=\mathrm{End}_{K^b(\mathrm{proj}A)}(P^*)$

(Rickard [5])

このときAとBは<u>derived equivalent</u>であるという。

<u>(1.3)</u> Aのtilting complex P^*が与えられ，$B=\mathrm{End}(P^*)$とおく。このとき，$K^-(\mathrm{proj}A)$から$K^-(\mathrm{proj}.B)$へのequivalenceは，"P^*-resolution"をとり，$\mathrm{Hom}(P^*,-)$をapplyすることに

よって与えられる。 $Q^* \in K^b(\mathrm{proj}\, B)$ を $\cdots \to 0 \to \overset{0\text{-th}.}{A} \to 0 \to \cdots \in K^b(\mathrm{proj}\, A)$ に対応する complex とするとき，Q^* は B の tilting complex となり，$A = \mathrm{End}(Q^*)$ となる。

P^*, Q^* を"同時に"与える両側加群の complex が次の様に構成される。

(i) $\mathrm{Hom}_A(P^*, A) \in K^b(\mathrm{proj}\, A^{op})$ は A^{op} の tilting complex で，B^{op} を自己準同型環にもつ。

(ii) $\mathrm{Hom}_A(P^*, A) \otimes_k A \in K^b(\mathrm{proj}\, A^{op} \otimes_k A)$ は $A^{op} \otimes_k A$ の tilting complex で，$B^{op} \otimes_k A$ を自己準同型環にもつ。

(iii) ${}_A A_A$ の $A^{op} \otimes_k A$-mod. としての proj. resolution $U^* \in K^-(\mathrm{proj}\, A^{op} \otimes_k A)$ $(H^0(U^*) = A)$ に，($\mathrm{Hom}_A(P^*, A) \otimes_k A$ -resolution を用いての equivalence で) 対応する complex $\Delta^* \in K^-(\mathrm{proj}\, B^{op} \otimes_k A)$ を考える。 Δ^* は (B, A) bimodule の complex である。

このとき $\quad \Delta^* \simeq P^*$ in $K^-(\mathrm{proj}\, A)$

$\mathrm{Hom}_B(\Delta^*, B) \simeq Q^*$ in $K^-(\mathrm{proj}\, B)$ $\qquad$ (Rickard [8])

Δ^* は bounded ではないが，$\Delta^* \in K^-(\mathrm{proj}\, B^{op} \otimes A)$ であるから，"truncate" して bounded な $B^{op} \otimes_k A$-module の complex S^*

$$S^* : \quad \to 0 \to S^{-n} \to S^{-n+1} \to \cdots\cdots \qquad \to \cdots \to 0 \to \cdots\cdots$$

で Δ^* と quasi iso. なものが作られる。 S^i は proj $B^{op} \otimes A$-mod. $i \neq -n$,

(1.4) A を symmetric とする。

(1.3) の設定で，A が symmetric であれば B も symmetric となる。また，complex S^* の S^{-n} は A-mod., B^{op}-mod. として それぞれ projective となる。

${}_A M_B = \Omega^n(\mathrm{Hom}_A(S^{-n}, A))$ $\quad$, ${}_B N_A = \Omega^{-n}(S^{-n})$ とおく，Ω は $A^{op} \otimes B$-$(B^{op} \otimes A$-$)$ mod. としての Heller operator． この両側加群は

${}_A M$, M_B $\quad$, ${}_B N$, N_A は proj で

(1) $M \otimes_B N = A \oplus \mathrm{proj}(A, A)$-mod. $\quad$ as (A, A)-mod.s

(2) $N \otimes_A M = B \oplus \mathrm{proj}(B, B)$-mod $\quad$ as (B, B)-mod.s

特に $-\otimes_A M : \underline{\mathrm{mod}}\, A \longrightarrow \underline{\mathrm{mod}}\, B$ $\quad$, $-\otimes_B N : \underline{\mathrm{mod}}\, B \longrightarrow \underline{\mathrm{mod}}\, A$ は stable mod. category の 互いに逆の equivalence を与える。

また，$K^-(\mathrm{proj}\, A) \sim K^-(\mathrm{proj}\, B)$ のみならず，このときは $K(\mathrm{mod}\, A) \sim K(\mathrm{mod}\, B)$ でもある。 S^* , $\mathrm{Hom}_A(S^*, A)$ による $\otimes$ が equivalence を与えている。

(Rickard [8])

(1.5) 以下．あつかう多元環は symmetric とし，semisimple 因子はないものとする。

一般に 2つの対称多元環 A, B について，両側加群 ${}_AM_B$　${}_BN_A = Hom_B(M, B)$ が (1.4) の (1)，(2) をみたすとき A と B は（M と N で）Morita type の stable equiv. であるという。このとき ${}_AM_B$ は non-proj な直和因子は indecomposable で．それ自身も A と B の stable equivalence を与える。

${}_AM_B$ が proj. な summand をもたず，A と B の Morita type の equivalence を与えるとすると，次が成立．

(i)　$S\otimes_A M$ は indecomposable　$^\forall S$: simple A-mod.

(ii)　$S\otimes_A M$ が simple　$^\forall S$: simple A-mod　とすると．M は Morita equiv. を与える．（$M\otimes_B N = A$，　$N\otimes_A M = B$ となる）

（Linckelmann [4], Rouquier [10]）

§2. 補題

§1 でみたように．derived equivalent な 2つの対称多元環は，Morita type の stable equivalent である。(1.5) (ii) の事実は，存在は保証されている両側加群 M による．$-\otimes M$ をできるだけ計算実行可能な議論にすることが．重要であることを示唆する。一方で (1.4) に述べたように M の構成は一般には計算可能とは思われない。この節では．(1.1) の tilting complex に関して，$-\otimes_A M$ のある事実を述べる。derived equivalent な blocks の例の構成に利用される。

A : Symmetric，（簡単のため）basic とする。

P^* を A の tilting complex で $B = End(P^*)$ とおく。また ${}_AM_B$ を (1.4) に述べた両側加群で A と B の Morita type の stable equiv. を与えるものとする。

(2.1)．　X : A-mod.　X^*: proj. resolution of X　（$H^0(X^*) = X$）　$\in K^-(proj\,A)$ とする。　$\exists n_0 \in \mathbb{Z}$ があって．$H^m(Hom_A(P^*, X)) = 0$　$^\forall m \neq n_0$　であれば

$$X\otimes_A M = \Omega^{n_0}(Hom_{K^-(proj A)}(P^*, X^*[n_0])) \quad \text{in } \underline{mod}\, B$$

(2.2)．　$1 = \sum_{i\in I} e_i$（原始的巾等元の直交和），$P_i = e_iA$,　$S_i = e_iA/e_iJ(A) = e_iS(A)$ とおく。$I_0 \subset I$ をとり．P^* を (1.1) で定義した A の tilting complex とする。

P^* の直和因子 P_i^* に対応する　$B = End(P^*)$ の巾等元を同じ記号 e_i で表すことにする。

同じく $S_i = e_iB/e_iJ(B)$ の記号を用いる。 $e = \sum_{i \in I_0} e_i$, $f = 1 - e$ ($\in A$ とも $\in B$ とも) とおく。

X ; non proj. indec. A-mod とし, $X \otimes_A M = Y \oplus$ proj , Y : indec. B-mod.

(1) $Xf = X$ のとき $Yf = Y$ 。実際は $A/AeA \cong B/BeB$ "自然に"同型で、これをとおして, $X = Y$ となる。特に, $X = S_j$ のとき $Y = S_j$ $\forall j \notin I_0$

(2) $(\mathrm{Soc}\,X)e = \mathrm{Soc}\,X$ のとき, X は (2.1) の仮定を $n_0 = 1$ でみたす。さらに, このとき $\exists i \in I_0$ があって $\mathrm{top}\,X = S_i$, $\Omega(X)e = S_i$ であれば $Y = S_i$

A は symmetric であるから, 上の議論を双対的に実行できる。

$i \in I_0$ について P_i^* ; $\cdots \to 0 \to 0 \to P_i \to 0 \to \cdots$ とおく。

$j \notin I_0$ について P_j^* ; $\cdots \to 0 \to P_j \xrightarrow{g_j} Q_j \to 0 \to \cdots$ を次の様に定義する。

$P_j \supset U_j$ を 組成因子は S_k $k \notin I_0$ であるような最大の submodule とし,

$0 \to P_j/U_j \to Q_j$: inj. hull , $P_j \to P_j/U_j \to 0$ の合成を g_j とおく

$P^* = \oplus \sum_{i \in I} P_i^*$, e_i, S_i の記号の用い方の便法を (2.2) のように約束する。

<u>(2.2)'</u>

(1) . (2.2).(1) と全く同じ

(2) . $(\mathrm{top}\,X)e = \mathrm{top}\,X$, $\exists i \in I_0$ があって $\mathrm{Soc}\,X = S_i$, $\Omega^{-1}(X)e = S_i$ であれば $Y = S_i$.

§3. Broué 予想

G を有限群, $B_0(G)$ を群環 kG の principal block . つまり, 自明な加群 k を零にしない, kG の連結な alg. summand とする。 <u>char $k = p > 0$</u> とする。

以下 <u>G の Sylow p-subgroup P は abelian</u> と仮定。

<u>(3.1)</u> Broué 予想 : $B_0(G) \sim B_0(N_G(P))$ derived equiv. ?

同じことであるが, H をもうひとつの群で Sylow p-subgroup P を"共有"し, $B_0(N_G(P)) \cong B_0(N_H(P))$ であるとき , $B_0(G) \sim B_0(H)$ derived equiv. ?

Broué 予想と、群の表現論における他の理論との関連については、ここでは述べない。宇佐美[12]奥山[12]に(いくらか)述べられている。(principal でない blocks についても予想があるが、省略する)

<u>(3.2)</u> Broué 予想が解決されているのは

(1) P : cyclic (Rickard)

(2) $p=2$, $P=\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$ (Rickard, Erdmann)

(3) G : p-可解群 (Dade)　(1), (2), (3) は principal に限らず、解決されている。

(4) "有限簡約群" のある条件をもつ family について、$B_0(G)\sim B_0(N_G(P))$ Morita equiv. (Puig)

が "family" としては全てと思う　　(引用文献は Broué [1] のそれを参考にして下さい)

$G=SL(2,8)$, $p=2$

$G=A_6=PSL(2,3^2)$, $p=3$　が確認されている。

<u>(3.3)</u> (1.4) にみたように、symmetric algebras の間の derived equiv. は、両側加群の complex によるテンサーで実現でき、加群の complex の homotopy category の同値をも導びく。Rickard は、群環の blocks 間では、さらによい性質をもつ、両側 tilting complex の存在を意識している。

G, H を 2つの群で <u>(3.1)</u> の設定のものとする。(Rickard ではもう少し一般的設定)
$(B_0(G), B_0(H))$-mods の complex X^* は、次の条件をもつとき "splendid tilting complex" という。X^* の各項は、$B_0(G)$-mod. $B_0(H)$-mod. として projective

(1) $\mathrm{Hom}_{B_0(G)}(X^*, X^*) \simeq B_0(H)$　in $K(\mathrm{mod}\ B_0(H)^{op}\otimes_k B_0(H))$

$\mathrm{Hom}_{B_0(H)}(X^*, X^*) \simeq B_0(G)$　in $K(\mathrm{mod}\ B_0(G)^{op}\otimes_k B_0(G))$

(対称多元環間で、derived. equiv. なものについては、このような X^* はいつも存在した (1.4))

(2) X^* の各項は、$k[G\times H]$-mod. (とみれるが) として $\Delta(P)$-proj な permutation module の直和因子に同型、ここで $\Delta(P)=\{(a,a)\in G\times H\ ;\ a\in P\}$。

このような X^* を意識する理由、存在したときに得られる $B_0(G)$ と $B_0(H)$ の間の derived equiv. 以上の重要な事実は Rickard [9] を読まれたい。そこでは、さらに、(3.2) の (3) の case、(2) の例の A_5 と A_4 について、splendid tilting complex の存在を証明している。(3.2) の (1) の case は $B_0(G)$、$B_0(N_G(P))$ について Rouquier [10] が splendid tilting complex を具体的に構成している。また Rouquier は (1.1) の内容の"両側"版に相当する議論を展開しており，$p=2$，$SL(2,8)$ についても splendid complex を与えている。

以下，$G \supset H \supset P$ とし，G, H は (3.1) の設定をもつとする。$G \supset H$ のときは $N_G(P) = N_H(P)C_G(P)$ が成立すると仮定することである。

$B_0(G)$ は $k[G\times G]$-mod. として indec. で vertex $\Delta(P)$ をもつ。$k[G\times H]$-mod. として vertex $\Delta(P)$ をもつ unique な indec. direct summand $M(1)$ をもつ。$M(1)$ は $(B_0(G), B_0(H))$-mod となる。　$N(1) = Hom_{B_0(G)}(M(1), B_0(G))$ とおく

(3.4)

$$M(1) \otimes_{B_0(H)} N(1) = B_0(G) \oplus \text{some } (B_0(G), B_0(G))\text{-mod.} \quad \text{as } (B_0(G), B_0(G))\text{-mod.s}$$

$$N(1) \otimes_{B_0(G)} M(1) = B_0(H) \oplus \text{some } (B_0(H), B_0(H))\text{-mod.} \quad \text{as } (B_0(H), B_0(H))\text{-mod.s}$$

時々"状況"が良いとき，$M(1)$ が $B_0(G)$ と $B_0(H)$ の Morita equiv. を与えることがある。(つまり (3.4) の右辺の項の第2項が 0 module となること)，次の例がある．($H = N_G(P)$ で)

(1)　$G = PSL(2,q)$　$q \equiv 3 \pmod{8}$　$p=2$　(Erdmann)

(2)　$G = PSp(4,q)$　p : odd，$p \mid q-1$　((3.2) (4) の Puig の一部)

(3.5)　各 $Q \subset P$ に対し，$B_0(C_G(Q))$ と $B_0(C_H(Q))$ について，定まる vertex $\Delta(P)$ をもつ，$B_0(C_G(Q))$ の $k[C_G(Q)\times C_H(Q)]$-mod としての indecomp. summand を $M(Q)$ とおく。$M(1)$ が $B_0(G)$ と $B_0(H)$ の Morita type の stable equiv. を与える条件が次のように述べられる。

(*)　　$B_0(G)$ と $B_0(H)$ は $M(1)$ と $N(1)$ で Morita type の stable equiv.

$\Leftrightarrow$ $B_0(C_G(Q))$ と $B_0(H)$ は $M(Q)$ と $N(Q)$ で Morita equiv. $1 \neq {}^{\forall}Q \subset P$

(Broué [2], Rickard [9])

このとき，$-\otimes_{B_0(G)} M(1)$，　$-\otimes_{B_0(H)} N(1)$ は Green 対応と一致する。

(3.6)　$G_1 \supset H_1 \supset P$　，$G_2 \supset H_2 \supset P$　が (3.1) の設定をもち，$B_0(H_1) \simeq B_0(H_2)$ とする。どちらにおいても (3.5) (*) の条件が成立し，さらに，$B_0(G_1)$ の simples の Green 対応子と $B_0(G_2)$ の simples Green 対応子が $B_0(H_1) \simeq B_0(H_2)$ をとおして全体として一致しているとすると　$B_0(G_1) \sim B_0(G_2)$　Morita equiv.

これは．$(B_0(G_1), B_0(G_2))$-mod. $M_1(1) \underset{B_0(H)}{\otimes} N_2(1)$ （$M_1(1)$は $G_1 \supset H_1$ の $N_2(1)$は $G_2 \supset H_2$ の両側加群で，$B_0(H_1)=B_0(H)=B_0(H_2)$とみて）が $B_0(G_1)$と$B_0(G_2)$の Morita type の stable equiv. を与えることと，simples が simples に対応することから従がう（(1.5)）。

次のような例がある。

(1) $G=PSL(2,q)$，$q \equiv 5 \ (\mathrm{mod}.\ 8)$ $p=2$ のとき $B_0(G) \underset{\text{Morita}}{\sim} B_0(PSL(2,5))$ (Erdmann)

(2) $G=PSp(4,q)$ $3 \| q+1$，$p=3$ のとき $B_0(G) \underset{\text{Morita}}{\sim} B_0(Sp(4,2))=B_0(S_6)$ (Waki-Okuyama)

(3) $G=R(3^{2n+1})$ $(={}^2G_2(3^{2n+1}))$：Reeの群，$p=2$ のとき $B_0(G) \underset{\text{Morita}}{\sim} B_0(R(3))$
$(R(3) \simeq P\Gamma L(2,8))$ (Landrock-Michler)

§4. Derived equivalent な blocks のいくつかの例

次の様な手順で計算することができた例を報告する。

$G \supset H = N_G(P) \supset P$　　P：abelian とし，次のことを仮定する。

(1) $M(1)$，$N(1)$ が $B_0(G)$ と $B_0(H)$ の Morita type の stable equiv. を与える

(2) $B_0(G)$ の simples T_i，$i \in I$ の Green 対応子 X_i （X_iは$B_0(H)$-mod.）が知られている。（$X_i = T_i \otimes_{B_0(G)} M(1)$ であった）

このとき．$B_0(H)$ の tilting complex を

(3) "上手"に $I_0^{(1)} \subset I$ をとり，(2.2)（あるいは(2.2)）のように P_1^* を作る。

$B_1=\mathrm{End}(P_1^*)$ とし，(1.4) の $(B_0(H), B_1)$-mod を M_1 とおく．$X_i \otimes_{B_0(H)} M_1 = Y_i \oplus \mathrm{proj}$ なる Y_i を計算する。Y_i は B_1-mod.

<u>もし</u> ${}^\forall i \in I$ について Y_i が simple であれば，(1.5) により $B_0(G) \underset{\text{Morita}}{\sim} B_1$。

$B_0(H) \underset{\text{derived}}{\sim} B_1$ であるから　　$B_0(G) \underset{\text{derived}}{\sim} B_0(H)$ となる。

(3)′ もし，そうなっていなければ．再び（<u>今度は B_1 について</u>）"上手"に $I_0^{(2)} \subset I$ をとり．tilting complex P_2^* を作り，$B_2=\mathrm{End}(P_2^*)$，(1.4)の (B_1, B_2)-mod. M_2 について

$Y_i \otimes_{B_1} M_2 = Z_i \oplus \mathrm{proj}$．なる Z_i を計算する。Z_i は B_2-mod.

<u>もし</u>．${}^\forall i \in I$ について Z_i が simple であれば 同じく (1.5) により $B_0(G) \underset{\text{Morita}}{\sim} B_2$。

同じく $B_0(H) \underset{\text{derived}}{\sim} B_1 \sim B_2$ であるから　$B_0(G) \underset{\text{derived}}{\sim} B_0(H)$ となる。

(4) (3) の操作を上のように何回か (n 回) ほどこして、最後に X_i の対応子がすべて simple になっていれば最後の algebra B_n は、上と同じ理由で $\underset{\text{Morita}}{B_0(G) \sim B_n}$, $\underset{\text{derived}}{B_0(H) \sim B_1 \sim \cdots \sim B_n}$ となり、$\underset{\text{derived}}{B_0(G) \sim B_0(H)}$ と結論できる。

以下にかかげる list は、次の群である。

<u>char $k = 3$</u>,　$G \supset H = N_G(P)$, 3-Sylow $P \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$

$N_G(P) \cong \mathbb{Z}_4 \ltimes (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$	$G = A_6$, A_7
$N_G(P) \cong D_8 \ltimes (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$	$G = S_6$, A_8
$N_G(P) \cong Q_8 \ltimes (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$	$G = PSL(3,4)$, M_{22}
$N_G(P) \cong SD_{16} \ltimes (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$	$G = M_{11}$, M_{23}, HS

($M_?$ は ? 次の Mathieu 群, HS は Higman-Sims の群 , D_8 , Q_8, SD_{16} は それぞれ その数字を位数にもつ dihedral, quaternion, semidihedral group)

各群とも (1) の仮定は容易に確認できる。(2) の simples の Green 対応子もいろいろな人によって計算されている。list は次のように書いた。$H = N_G(P)$ の type ごとに、

(i) $B_0(H)$ の basic algebra の quiver と relations。巾等元の集合 I は数字などで表した。数字は、対応する simple を表すのにも用いる。次に その type の Sylow normalizer をもつ 各群 G について

(ii) $B_0(G)$ の simples の 集合 (群の表現論の通常の表記をできるだけ用いた。simples を数字を使って表しているが、数字の大きさは今の場合意味はありません), その下に それらの Green 対応子 ($B_0(H)$-mods であるが その組成列を書いた。そこに現れている mod.s については、ほとんどの場合 組成列で unique に決まる)

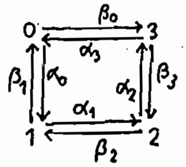
(iii) $I \supset I_0$ を指定して tilting complex を作るが (2.2) のときは $\{I_0\}$ と (2.2)$'$ のときは $\{I_0\}^\vee$ と書く。Green 対応子の下に、この derived equiv. で対応する $B_1 = \mathrm{End}(\{I_0\}^{(\vee)})$ の modules をやはり 組成列で書く。B_1 の quiver を その近くの右側に書く。relations は省略した。(B_1 の巾等元 , simples の表記は (2.2), (2.2)$'$ のような便法を用いる)

(iv) さらにつづけるときも (iii) のような考えで書く。完了したときは quiver だけでなく relations も書いておいた。これが $B_0(G)$ の basic algebra の quiver である。(数字を対応する $B_0(G)$ の simple に)

(v) 途中, 2回の操作を一辺にまとめて、計算する方が楽なことがある。"{??} つづけて {??}" と書いた。

(4.1) $H = \mathbb{Z}_4 \ltimes (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$

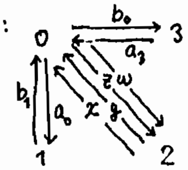
$B_0(H)$:



$\alpha\beta = \beta\alpha$

$\alpha^3 = 0 \quad \beta^3 = 0$

B_1 :



$x b_0 = 0,\ y a_0 = 0,\ b_1 w = 0,\ a_3 z = 0$

$a_0 b_1 - b_0 a_3 = zx - wy$

$xw = 0,\ yz = 0,\ xz = yw$

$b_1 a_0 = 0.\ a_3 b_0 = 0$

$b_1 z y = 0 \quad a_3 w x = 0$

$z y b_0 = 0 \quad w x a_0 = 0$

$a_0 b_1 b_0 a_3 = b_0 a_3 a_1 b_1$

(1) $G = A_7$

simples of $B_0(A_7)$:	I	10_a	10_b	13
Green corresp.s :	0	1	3	$\begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$
tilting complex :		{2}		
resulting mod.s :	0	1	3	2

完了

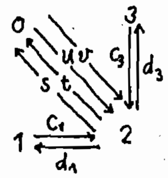
(2) $G = A_6$

s. of $B_0(A_6)$:	I	3_a	3_b	4
G. c. :	0	$\begin{smallmatrix}1\\0\\3\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}3\\0\\1\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix} & 2 & \\ 1 & & 3 \\ & 2 & \end{smallmatrix}$
t. c. (1回目)		{2}		
r. m.	0	$\begin{smallmatrix}1\\0\\3\end{smallmatrix}$	$\begin{smallmatrix}3\\0\\1\end{smallmatrix}$	2
t. c. (2回目)		{1, 3}		
r. m.	0	1	3	2

完了

B_1 : A_7 に同じ

B_2 :



$c_1 t = 0,\ c_3 s = 0$

$c_1 d_1 = 0,\ c_3 d_3 = 0$

$s v = d_3 c_3$

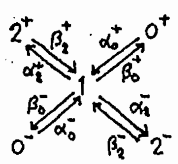
$t u = d_1 c_1$

$s u = t v,\ us = vt$

$u d_1 = 0 \quad v d_3 = 0$

(4.2) $H = D_8 \ltimes (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$

$B_0(H)$:



$\alpha_0^{\pm}\beta_0^{\mp} = 0,\ \beta_2^{\pm}\alpha_2^{\mp} = 0$ (複号同順)

$\alpha_0^{*}\alpha_2^{+}\beta_2^{+} = \alpha_0^{*}\alpha_2^{-}\beta_2^{-},\ \alpha_2^{+}\beta_2^{+}\beta_0^{*} = \alpha_2^{-}\beta_2^{-}\beta_0^{*}$ $(* = \pm)$

$\beta_2^{*}\beta_0^{+}\alpha_0^{+} = \beta_2^{*}\beta_0^{-}\alpha_0^{-},\ \beta_0^{+}\alpha_0^{+}\alpha_2^{*} = \beta_0^{-}\alpha_0^{-}\alpha_2^{*}$

$\beta_0^{+}\alpha_0^{+} + \beta_0^{-}\alpha_0^{-} = \alpha_2^{+}\beta_2^{+} + \alpha_2^{-}\beta_2^{-}$

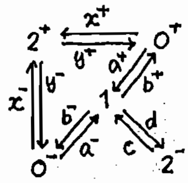
(1) $G = A_8$

s. of $B_0(A_8)$:	I	7	13	28	35
G. c. :	0^+	0^-	$\begin{smallmatrix}2^+\\1\\2^+\end{smallmatrix}$	2^-	1

t.c. : $\{2^+\}$

r.m. : $0^+ \quad 0^- \quad 2^+ \quad 2^- \quad 1$ 完了

B_1 :



$x^-y^+ = a^-b^+$, $x^+y^- = a^+b^-$. $y^+x^+ = y^-x^-$

$b^+x^+ = b^-x^-$, $y^+a^+ = y^-b^-$, $b^*a^*b^* = 0$ $\quad a^*b^*a^* = 0$ $\quad (* = \pm 1)$

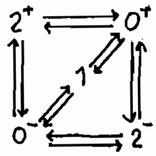
$b^+a^+d = b^-a^-d$, $cb^+a^+ = cb^-a^-$, $b^+a^+ + b^-a^- = dc$

(2) $G = S_6$

S. of $B_0(S_6)$: $I \quad 1 \quad 6 \quad 4_+ \quad 4_-$

G.C. : $0^+ \quad 0^- \quad \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 0^+ & & 0^- \\ & 1 & \end{smallmatrix} \quad \begin{smallmatrix} 2^+ \\ 1 \\ 2^+ \end{smallmatrix} \quad \begin{smallmatrix} 2^- \\ 1 \\ 2^- \end{smallmatrix}$

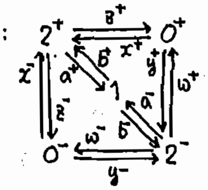
B_1 :



t.c. (1回目) : $\{2^+, 2^-\}$

r.m. : $0^+ \quad 0^- \quad \begin{smallmatrix} & 1 & \\ 0^+ & & 0^- \\ & 1 & \end{smallmatrix} \quad 2^+ \quad 2^-$

B_2 :



t.c. (2回目) : $\{1\}$

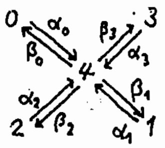
r.m : $0^+ \quad 0^- \quad 1 \quad 2^+ \quad 2^-$ 完了

$b^+a^+ + b^-a^- = 0$ $\quad a^+b^+ = z^+x^+ + z^-x^-$ $\quad a^-b^- = \omega^+y^+ + \omega^-y^-$, $\quad z^+y^+ = z^-y^- = a^+b^-$, $\omega^+x^+ = \omega^-x^- = a^-b^+$

$x^{\pm} z^{\mp} = y^{\pm}\omega^{\mp}$ (複号同順) $\quad x^*a^+ = y^*a^-$, $b^+z^* = b^-\omega^*$ $\quad (* = \pm 1)$

(4.3) $H = Q_8 \ltimes (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$

$B_0(H)$:



$\alpha_i\beta_i = 0 \quad (0 \leq i \leq 3)$ $\qquad \beta_0\alpha_0 + \beta_1\alpha_1 = \beta_2\alpha_2 + \beta_3\alpha_3$

$\alpha_i\beta_j\alpha_j = \alpha_i\beta_k\alpha_k$

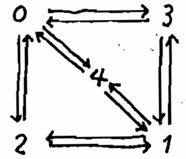
$\beta_j\alpha_j\beta_i = \beta_k\alpha_k\beta_i$ $\qquad \left(\begin{matrix} \{j,k\} = \{0,1\} \text{ or } \{2,3\} \\ i \notin \{j,k\} \end{matrix} \right)$

(1) $G = M_{22}$

S. of $B_0(M_{22})$: $I \quad 55 \quad 49 \quad 49^* \quad 231$

G.c. : $0 \quad 1 \quad \begin{smallmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{smallmatrix} \quad \begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \quad \begin{smallmatrix} & 4 & \\ 0 & & 1 \\ & 4 & \end{smallmatrix}$

B_1 :



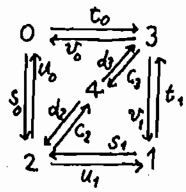
t.c. (1回目) : $\{2, 3\}$

r.m. : $0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \begin{smallmatrix} & 4 & \\ 0 & & 1 \\ & 4 & \end{smallmatrix}$

t.c. (2回目) : $\{4\}$

r.m. : 0 1 2 3 4 完了

B_2 :



$s_0c_2 = t_0c_3$ $u_0s_0 = c_2d_2$ $d_2u_0 = d_3v_0$ $d_2c_2 = d_3c_3$

$s_1c_2 = t_1c_3$ $v_0t_0 = c_3d_3$ $d_2u_1 = d_3v_1$ $u_1t_1 = u_0t_0 + c_2d_3$. $v_1s_1 = v_0s_0 + c_3d_2$

$u_0s_0 + u_1s_1 = 0$. $v_0t_0 + v_1t_1 = 0$. $s_0u_0 + t_0v_0 = 0$. $s_1u_1 + t_1v_1 = 0$

(2) $G = PSL(3.4)$

S. of $B_0(PSL(3.4))$: I $15^{(1)}$ $15^{(2)}$ $15^{(3)}$ 19

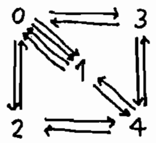
B_1, B_2 : M_{22}と同じ

G. C. : 0 $\begin{smallmatrix}&4&\\0&&1\\&4&\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}&4&\\0&&2\\&4&\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}&4&\\0&&3\\&4&\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}2&&1&&3\\&4&&4&\\3&&1&&2\end{smallmatrix}$

t.c. 1回目, 2回目. M_{22}の項と同じことを実行

r.m. : 0 4 $\begin{smallmatrix}&3&\\0&&4\\&2&\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}&2&\\0&&4\\&3&\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}&1&\\2&&3\\&1&\end{smallmatrix}$

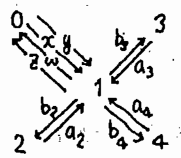
B_3 :



t.c. (3回目) : $\{1\}$

r.m. : 0 4 $\begin{smallmatrix}&3&\\0&&4\\&2&\end{smallmatrix}$ $\begin{smallmatrix}&2&\\0&&4\\&3&\end{smallmatrix}$ 1

B_4 :



t.c. (4回目) : $\{2, 3\}$

r.m. : 0 4 3 2 1 完了

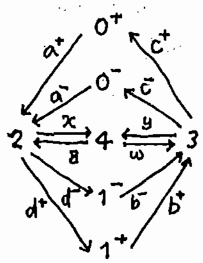
$a_ib_i = 0$ $(i = 2.3.4)$

$(x-y)b_4 = 0$, $xb_2 = 0$, $yb_3 = 0$. $xz + yw = 0$, $zx + wy = 0$

$b_4a_4 = (z+w)(x-y)$, $b_2a_2 = wx$, $b_3a_3 = zy$, $a_4(z+w) = 0$, $a_3z = 0$, $a_2w = 0$

(4.4) $H = SD_{16} \ltimes (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$

$B_0(H)$:



$a^\pm d^\mp = 0$ $b^\pm c^\mp = 0$ (複号同順)

$zx = wy$ $a^*xz = 0$ $xzd^* = 0$ $(* = \pm)$

$b^*yw = 0$ $ywc^* = 0$

$c^+a^+ = c^-a^- + yz$ $d^+b^+ = d^-b^- + xw$

$c^+a^+x + c^-a^-x = 0$ $d^+b^+y + d^-b^-y = 0$

$wc^+a^+ + wc^-a^- = 0$ $zd^+b^+ + zd^-b^- = 0$

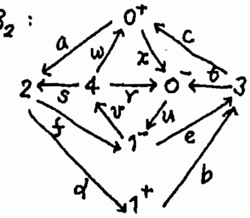
(1) $G = M_{23}$

S. of $B_0(M_{23})$:	I	22	253	770^*	770	104	104^*
Gr. C. :	0^+	1^-	1^+	2	3	0^- 2 4	4 3 0^-

t.c (1回目, 2回目) : $\{0^-, 4\}$ つづけて $\{4\}^\vee$

r.m. : $0^+, 1^-, 1^+, 2, 3, 0^-, 4$ (完3)

B$_2$:



$xu = af$, $vw = ec$, $fe = db$,

$bcx = 0$, $wad = 0$, $ca = tuvs$, $wx = sfet$

$afvs = 0$, $tuec = 0$, $cx = -tuet$, $wa = -sfvs$, $ruv = sfv$, $uvr = uet$

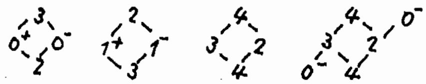
$fvsd = 0$, $btue = 0$, $afet = 0$, $sfec = 0$, $rue = -sfe$, $fvr = -fet$

$cafv = 0$, $ueca = 0$, $fvsf = fvru$, $etue = vrue$

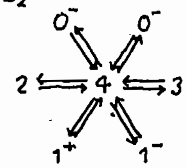
(2) $G = HS$

S. of $B_0(HS)$: I , 22 , 154 , 321 , 1176 , 1253 , 748

G.c. : 0^+ , 1^- , 1^+



B$_2$:



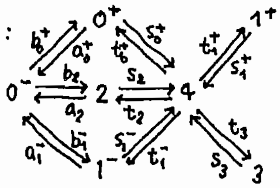
t.c. (1回目; 2回目) : $\{4\}$ つづけて $\{2, 3\}$

r.m. : 0^+ , 1^- , 1^+ , 3 , 2 , 4 , $\begin{matrix} 0^- \\ 4 \\ 0^- \end{matrix}$

t.c. (3回目) : $\{0^-\}$

r.m. : 0^+ , 1^- , 1^+ , 3 , 2 , 4 , 0^- (完3)

B$_3$:



$t_0^+ a_0^+ = t_1^- a_1^- = t_2 a_2$, $b_0^+ a_0^+ = b_1^- a_1^- = b_2 a_2$, $s_2 t_2 = a_2 b_2$

$b_0^+ s_0^+ = b_1^- s_1^- = b_2 s_2$, $t_3 s_3 = t_0^+ s_0^+$

$s_2 t_3 = 0$, $s_3 t_0^+ = 0$, $s_0^+ t_3 = 0$

$s_2 t_1^+ = 0$, $s_1^+ t_2 = 0$, $s_2 t_1^- = a_2 b_1^-$, $s_1^- t_2 = a_1^- b_2$

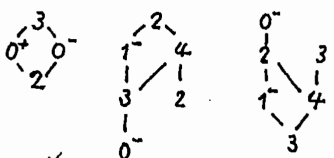
$s_0^+ t_1^- = a_0^+ b_1^-$, $s_1^- t_0^+ = a_1^- b_0^+$

$t_2 s_2 = t_1^+ s_1^+ + t_1^- s_1^-$, $t_0^+ s_0^+ = t_1^+ s_1^+ - t_1^- s_1^-$

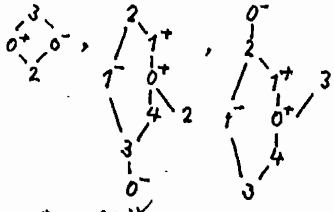
(3) $G = M_{11}$

S. of $B_0(M_{11})$: I , 10_a , 5 , 5^* , 24 , 10 , 10^*

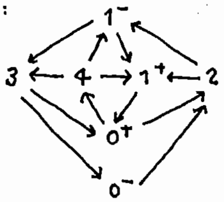
G.c. : 0^+ , 1^- , $\begin{matrix} 1^+ \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$, $\begin{matrix} 4 \\ 2 \\ 1^+ \end{matrix}$



t.c. (1回目, 2回目) : $\{1^+, 4\}$ つづけて $\{4\}^\vee$

r.m. : $0^+, 1^-, 1^+, 4,$ 

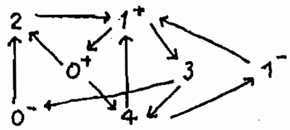
B_2 :



t.c. (3回目, 4回目) : $\{0^-, 2, 3\}$ つづけて $\{3\}$

r.m. : $0^+, 1^-, 1^+, 4, 3, 2,$ $\begin{matrix} 0^- \\ 2 \\ 1^+ \\ 3 \\ 0^- \end{matrix}$

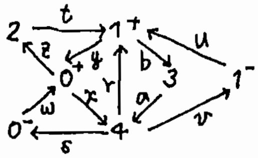
B_4 :



t.c. (5回目) : $\{0^-\}$

r.m. : $0^+, 1^-, 1^+, 4, 3, 2, 0^-$ ようやく完了

B_5 :



$xv=0$, $uy=0$, $arb=0$

$yxs=bas$ $\quad tyx=tba$ $\quad swz=ryz$ $\quad asw=ary$

$wzt=wxr$ $\quad ztb=xrb$ $\quad vu=-ryxr$ $\quad wxryz=0$

$rba+ryx=swx$, $bar+yxr=yzt$

$wzty=-wxsw$, $ztyz=-xswz$

(注): (1) relations は char $k=3$ を前提に書いている。

(2) 上述の群の simples の Green 対応子, $B_0(G)$ の quiver 自身は、

Siegel : Comm. in Alg. 19 (11) 3099-3117 (1991) A_8, A_7

Schneider: Comm. in Alg 15 (8) 1543-1547 (1987) $PSL(3,4)=M_{21}$

Waki : Comm. in Alg. 21 (5) 1457-1485 (1993) $M_{11}, M_{21}, M_{22}, M_{23}$

Comm. in Alg. 21 (10) 3475-3487 (1993) HS

で詳しく論じられている。

参考文献

[1] Broué : Isométries parfaites, types de blocs, catégories dérivées ; Astérisque . 181-182 , 61-92 (1990)

[2] Broué ; Equivalences of blocks of group algebras , in Proc. ICRA (Ottawa, 1992) "Finite Dimensional Algebras and Related Topics" (eds. Dlab, and Scott)

[3] Broué ; Rickard equivalences and block theory , Groups'93 Galway / St Andrews I. (eds. Campbell et al.) . London Math. Soc. L.N.S 211 , 58-79

[4] Linckelmann ; The isomorphism problem for blocks with cyclic defect groups ,

[5] Rickard ; Morita theory for derived categories . J. London . Math. Soc.(2)39 436-456 (1989)

[6] Rickard ; Derived categories and stable equivalence . J. Pure and Appl. Alg. 61 303-317 (1989)

[7] Rickard ; Derived equivalences for principal blocks of A_4 and A_5 ,(unpublished) preprint (1990)

[9] Rickard ; Splendid equivalences ; derived categories and permutation modules, Proc. London Math. Soc. (3) 72 , 331-358 (1996)

[8] Rickard ; Derived equivalences as derived functors , J. London Math . Soc (2)43, 37-48 (1991)

[10] Rouquier ; From stable equivalences to Rickard equivalences for blocks with cyclic defect . [3] の文献 の 212 512-523

[11] 第3回 多元環の表現論シンポジウム 報告集 (1987. 長野戸倉)

[12] 第4回 多元環の表現論 シンポジウム 報告集 (1993. 南伊豆)

量子群の表現論
(Representations of quantum groups)

広島大学理学部　谷崎俊之　(Toshiyuki TANISAKI)

1　量子群

1.1　Drinfeld [3] および神保 [6] は，対称化可能なカッツ・ムーディ・リー代数 $\mathfrak{g}$ の包絡環 $U(\mathfrak{g})$ の q 変形として，新たなホップ代数 $U_q(\mathfrak{g})$ を定義したが，ここではこれを量子群と呼ぶことにする．簡単のため（また初学者に心理的負担をかけないために）本稿では $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathrm{C})$ の場合のみを扱うが，§3 で述べること以外は，すべて一般の対称化可能なカッツ・ムーディ・リー代数 $\mathfrak{g}$ に対応する量子群でも成り立つ事を注意しておく．

1.2　$E_{ij} \in M_n(\mathrm{C})$ を (i,j)-成分のみが 1 で他の成分はすべて 0 となる行列とするとき，リー代数 $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathrm{C}) = \{a \in M_n(\mathrm{C}) \mid \mathrm{tr}(a) = 0\}$ の基底として

$$E_{ii} - E_{i+1,i+1} \quad (i = 1, \ldots, n-1), \qquad E_{ij} \quad (i \neq j)$$

が取れるが，いま

$$h_i = E_{ii} - E_{i+1,i+1}, \quad e_i = E_{i,i+1}, \quad f_i = E_{i+1,i} \quad (i = 1, \ldots, n-1)$$

とおくとき，リー代数 $\mathfrak{g}$ はこれら $3(n-1)$ 個の元により生成され，以下の基本関係式を持つ事がわかる：

(1.1)　　$[h_i, h_j] = 0,$

(1.2)　　$[h_i, e_j] = a_{ij} e_j,$

(1.3)　　$[h_i, f_j] = -a_{ij} f_j,$

$$(1.4) \qquad [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i,$$

$$(1.5) \qquad \mathrm{ad}(e_i)^{1-a_{ij}} e_j = 0 \quad (i \neq j),$$

$$(1.6) \qquad \mathrm{ad}(f_i)^{1-a_{ij}} f_j = 0 \quad (i \neq j).$$

ここで，a_{ij} は $i = j$ のとき 2，$|i - j| = 1$ のとき -1，それ以外のときは 0 とする．また $x \in \mathfrak{g}$ に対して，$\mathrm{ad}(x) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は $\mathrm{ad}(x)(y) = [x, y]$ で定まる線形変換とする．従ってその包絡環 $U(\mathfrak{g})$ は，$\mathbf{C}$ 上の結合代数であって同じく $3(n-1)$ 個の元 h_i, e_i, f_i $(i = 1, \ldots, n-1)$ で生成され，基本関係式 (1.1),...,(1.6) を満たすものになる．ただしこの場合は，ブラケット積 $[x, y]$ は $xy - yx$ をあらわすものと解釈する．従って，(1.5) と (1.6) は，以下のように書き直すことができる．

$$(1.7) \qquad \sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \binom{1-a_{ij}}{m} e_i^{1-a_{ij}-m} e_j e_i^m = 0 \quad (i \neq j),$$

$$(1.8) \qquad \sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \binom{1-a_{ij}}{m} f_i^{1-a_{ij}-m} f_j f_i^m = 0 \quad (i \neq j).$$

1.3 そこで，対応する量子群 $U_q(\mathfrak{g})$ を次のように与える．$U_q(\mathfrak{g})$ は，$4(n-1)$ 個の元 $k_i, k_i^{-1}, e_i, f_i \quad (i = 1, \ldots, n-1)$ により生成され，以下の基本関係式を持つ $\mathbf{C}(q)$ 上の結合代数である．

$$(1.9) \qquad k_i k_i^{-1} = k_i^{-1} k_i = 1,$$

$$(1.10) \qquad k_i k_j = k_j k_i,$$

$$(1.11) \qquad k_i e_j k_i^{-1} = q^{a_{ij}} e_j,$$

$$(1.12) \qquad k_i f_j k_i^{-1} = q^{-a_{ij}} f_j,$$

$$(1.13) \qquad [e_i, f_j] = \delta_{ij} \frac{k_i - k_i^{-1}}{q - q^{-1}},$$

$$(1.14) \qquad \sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ m \end{bmatrix} e_i^{1-a_{ij}-m} e_j e_i^m = 0 \quad (i \neq j),$$

$$(1.15) \qquad \sum_{m=0}^{1-a_{ij}} (-1)^m \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ m \end{bmatrix} f_i^{1-a_{ij}-m} f_j f_i^m = 0 \quad (i \neq j).$$

ただし一般に $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}$ は，2 項係数 $\binom{n}{m}$ の q 類似であり，

$$[n]=\frac{q^n-q^{-n}}{q-q^{-1}},\quad [n]!=[n][n-1]\cdots[1],\quad \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}=\frac{[n]!}{[m]![n-m]!}$$

で定まる．

今，新たなパラメータ $\hbar$ を導入して，

$$q=\exp(\hbar),\qquad k_i=\exp(\hbar h_i)$$

とおき，関係式 (1.9),...,(1.15) において形式的な極限 $\hbar\longrightarrow 0$ （すなわち $q\longrightarrow 1$）をとると，$U(\mathfrak{g})$ の関係式 (1.1),...,(1.6) が回復されることがわかる（[11], [12] に，より精密な議論がある）．この意味で，量子群は包絡代数の q 類似（あるいは q 変形）であると思える．

なお，$U_q(\mathfrak{g})$ には更にホップ代数の構造が入るのだが，以下の話には直接関係しないので，省略する．

2 最高ウェイト加群

2.1 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1})\in\mathbf{Z}^{n-1}$ に対して，(左)$U_q(\mathfrak{g})$ 加群 $M_q(\lambda)$ を

(2.1) $M_q(\lambda)=U_q(\mathfrak{g})/(\sum_{i=1}^{n-1}U_q(\mathfrak{g})(k_i-q^{\lambda_i})+\sum_{i=1}^{n-1}U_q(\mathfrak{g})e_i)$

で定め，これを最高ウェイト λ を持つ Verma 加群と呼ぶ．Verma 加群 $M_q(\lambda)$ はただ一つの極大真部分加群 $K_q(\lambda)$ を持つことがわかる．そこで，既約 $U_q(\mathfrak{g})$ 加群 $L_q(\lambda)$ が

(2.2) $L_q(\lambda)=M_q(\lambda)/K_q(\lambda)$

により定まる．これを最高ウェイト λ を持つ既約加群と呼ぶ．以下，$L_q(\lambda)$ について考察する．

2.2 一般に，M を $U_q(\mathfrak{g})$ 加群とするとき，$\mu\in\mathbf{Z}^{n-1}$ に対して

$$M_\mu=\{m\in M\mid k_im=q^{\mu_i}m\quad(i=1,\ldots,n-1)\}$$

とおく．$U_q(\mathfrak{g})$ 加群 M であって

$$\dim M_\mu < \infty \quad (\mu \in \mathbf{Z}^{n-1}) \qquad M = \oplus_{\mu\in\mathbf{Z}^{n-1}} M_\mu$$

を満たすものをウェイト加群と呼ぶ．ウェイト加群 M に対して，その指標 $\mathrm{ch}(M)$ を形式和

$$\mathrm{ch}(M) = \sum_{\mu\in\mathbf{Z}^{n-1}} \dim M_\mu e^\mu$$

として定める．$M_q(\lambda)$ や $L_q(\lambda)$ はウェイト加群なのでその指標を考えることができるが，特に $M_q(\lambda)$ の指標は簡単で，

$$\text{(2.3)}\quad \mathrm{ch}(M_q(\lambda)) = \frac{e^\lambda}{\prod_{i<j}(1-e^{-\alpha_{ij}})} = e^\lambda \prod_{i<j}(1 + e^{-\alpha_{ij}} + e^{-2\alpha_{ij}} + \cdots)$$

により与えられる．ただし，$1 \leqq i < j \leqq n$ に対して $\alpha_{ij} = (\alpha_{ij}^{(1)}, \ldots, \alpha_{ij}^{(n-1)})$ は，$\alpha_{ij}^{(k)} = \delta_{ik} + \delta_{j,k+1} - \delta_{jk} - \delta_{i,k+1}$ で定まるものとする．

問題 2.1 $L_q(\lambda)$ の指標 $\mathrm{ch}(L_q(\lambda))$ を決定せよ．

この問題は，$M_q(\lambda)$ の組成列にあらわれる組成因子の決定と関連している．それについて説明しよう．$M_q(\lambda)$ は有限な組成列

$$M_q(\lambda) = M_0 \supset M_1 \supset \cdots \supset M_r = 0$$

をもち，各組成因子 M_i/M_{i+1} は，ある $\mu_i \in \mathbf{Z}^{n-1}$ に対する $L_q(\mu_i)$ と同型になる．そこで，$M_q(\lambda)$ の組成列における因子 $L_q(\mu)$ の重複度 $\sharp\{i \mid \mu_i = \mu\}$ を $[M_q(\lambda) : L_q(\mu)]$ で表すことにしよう．

問題 2.2 $[M_q(\lambda) : L_q(\mu)]$ を決定せよ．

このとき問題 2.1 と，問題 2.2は同値な問題である．実際，問題 2.2が解けたとする．このとき等式の族

$$\mathrm{ch}(M_q(\lambda)) = \sum_\mu [M_q(\lambda) : L_q(\mu)]\, \mathrm{ch}(L_q(\mu)) \qquad (\lambda \in \mathbf{Z}^{n-1})$$

を，未知変数 $\mathrm{ch}(L_q(\mu))$ $(\mu\in\mathbf{Z}^{n-1})$ に関する連立方程式と思うと，$[M_q(\lambda):L_q(\mu)]$ に関する簡単な事実より，これは一意的に解けて，

$$\mathrm{ch}(L_q(\lambda))=\sum_\mu a_{\lambda\mu}\,\mathrm{ch}(M_q(\mu))\qquad(\lambda\in\mathbf{Z}^{n-1})$$

となり，$\mathrm{ch}(L_q(\lambda))$ の具体的表示が求まる．逆も同様．

2.3 実は，もとのリー代数 $\mathfrak{g}$（あるいは，同じ事だが包絡代数 $U(\mathfrak{g})$）に対しても，Verma 加群 $M(\lambda)$ やその既約商加群 $L(\lambda)$ が同様に定義されて，全く同じ問題を考えることができる．こちらのほうでの答えはわかっていて，$\mathrm{ch}(L(\lambda))$ や $[M(\lambda):L(\mu)]$ の具体的な値が知られている（いわゆる Kazhdan-Lusztig 予想，Brylinski- 柏原 [2]，Beilinson-Bernstein[1] により証明された）．

予想 2.3 (Lusztig[10]) 問題の答は $U(\mathfrak{g})$ 加群で考えても $U_q(\mathfrak{g})$ 加群で考えても同じ．すなわち

(2.4) $$\mathrm{ch}(L_q(\lambda))=\mathrm{ch}(L(\lambda)),$$

(2.5) $$[M_q(\lambda):L_q(\mu)]=[M(\lambda):L(\mu)].$$

$\lambda\in(\mathbf{Z}_{\geqq 0})^{n-1}$ のときには，予想 2.3は G. Lusztig[9] により既に示されていた．また，最近一般の場合にも予想 2.3が正しいことが証明されたようである（Drinfeld[4], Kazhdan-Lusztig[7, III]）．

なお，以下の事実は，純代数的方法で比較的簡単にわかることに注意しておく（[15], [13]）．

命題 2.4 (i) $\dim L(\lambda)_\mu\leqq\dim L_q(\lambda)_\mu$ $(\lambda,\mu\in\mathbf{Z}^{n-1})$.

(ii) $[M_q(\lambda):L_q(\mu)]\neq 0$ と $[M(\lambda):L(\mu)]\neq 0$ は同値．

3 最高ウェイト加群と q 小行列式

3.1 $p\leqq n-p$ なる $p\in\mathbf{Z}_{>0}$ を一つとり固定し，$\lambda=me_p\in\mathbf{Z}^{n-1}$ のときの $L(\lambda)$ および $L_q(\lambda)$ について考察する．$m\geqq 0$ のときはよくわかっているので，以下 $m=-r<0$ の場合のみを扱う．

3.2　まず $L(-r\mathbf{e}_p)$ について考える．

Verma 加群

$$M(-r\mathbf{e}_p) = U(\mathfrak{g})/(\sum_{i\neq p} U(\mathfrak{g})h_i + U(\mathfrak{g})(h_p + r) + \sum_{i=1}^{n-1} U(\mathfrak{g})e_i)$$

において，$\overline{f}_i \quad (i \neq p)$ はその極大真部分加群に含まれることがわかる．そこで

(3.1) $N(-r\mathbf{e}_p) = U(\mathfrak{g})/(\sum_{i\neq p} U(\mathfrak{g})h_i + U(\mathfrak{g})(h_p + r) + \sum_{i=1}^{n-1} U(\mathfrak{g})e_i + \sum_{i\neq p} U(\mathfrak{g})f_i)$

とおく．このとき，$L(-r\mathbf{e}_p)$ は，$N(-r\mathbf{e}_p)$ をその極大真部分加群 $J(-r\mathbf{e}_p)$ で割ったものと一致する．今，

(3.2) $I = \{p+1, p+2, \ldots, n\}, \qquad J = \{1, 2, \ldots, p\}$

とおき，$\mathfrak{g}$ の（可換な）部分代数 $\mathfrak{n}$ を

(3.3) $\mathfrak{n} = \sum_{i\in I, j\in J} \mathbf{C}E_{ij}$

で定める．このとき，いわゆる PBW 定理により，自然な写像 $U(\mathfrak{n}) \to N(-r\mathbf{e}_p) \quad (u \to \overline{u})$ は線形同型写像であることがわかる．また $\mathfrak{n}$ の可換性から $U(\mathfrak{n})$ は多項式環 $\mathbf{C}[E_{ij} \mid i \in I, j \in J]$ に同型である．従って，線形同型写像 $F_r : \mathbf{C}[E_{ij} \mid i \in I, j \in J] \to N(-r\mathbf{e}_p)$ が定まる．問題は，$J'(-r\mathbf{e}_p) = (F_r)^{-1}(J(-r\mathbf{e}_p))$ の記述を与えることである．

定理 3.1 (Levasseur-Stafford[8] を参照) (i)　$r \geqq p$ ならば，$J'(-r\mathbf{e}_p) = 0$.

(ii)　$r \leqq p-1$ ならば，$J'(-r\mathbf{e}_p)$ は，$p \times (n-p)$ 行列 $(E_{ij})_{i\in I, j\in J}$ の $r+1$ 次の小行列式たちで生成されるイデアルと一致する．

3.3　次に $L_q(-r\mathbf{e}_p)$ について同様のことが成立するかどうかを考える．

リー代数の場合と同様に

(3.4) $N_q(-r\mathbf{e}_p) = U_q(\mathfrak{g})/(\sum_{i\neq p} U(\mathfrak{g})(k_i - 1) + U(\mathfrak{g})(k_p - q^{-r}) + \sum_{i=1}^{n-1} U(\mathfrak{g})e_i + \sum_{i\neq p} U(\mathfrak{g})f_i)$

とおくと，やはり $L_q(-r\mathbf{e}_p)$ は，$N_q(-r\mathbf{e}_p)$ をその極大真部分加群 $J_q(-r\mathbf{e}_p)$ で割ったものと一致する．山根 [14] に従い，root vectors の q 類似 $\{e_{ij} \,|\, i > j\} \subset U_q(\mathfrak{g})$ を以下で定義する．

(3.5) $e_{i+1,i} = f_i, \qquad e_{ij} = qe_{i-1,j}f_{i-1} - f_{i-1}e_{i-1,j}$

そこで，$\{e_{ij} \,|\, i \in I, j \in J\}$ で生成される $U_q(\mathfrak{g})$ の部分代数を $U_q(\mathfrak{n})$ とする．このとき，リー代数の場合と同様に，自然な写像 $H_r : U_q(\mathfrak{n}) \to N_q(-r\mathbf{e}_p) \quad (u \to \overline{u})$ は線形同型写像であることがわかる．$J'_q(-r\mathbf{e}_p) = (H_r)^{-1}(J_q(-r\mathbf{e}_p))$ とおく．ただし $\{e_{ij} \,|\, i \in I, j \in J\}$ たちは互いに可換ではなく，次の交換関係を満たす．

(3.6) $e_{ij}e_{kj} \;=\; qe_{kj}e_{ij} \qquad (i < k),$

(3.7) $e_{ij}e_{i\ell} \;=\; qe_{i\ell}e_{ij} \qquad (j < \ell),$

(3.8) $e_{ij}e_{k\ell} \;=\; e_{k\ell}e_{ij} \qquad ((i < k, j > \ell),$

(3.9) $e_{ij}e_{k\ell} \;=\; e_{k\ell}e_{ij} + (q - q^{-1})e_{kj}e_{i\ell} \qquad (i < k, j < \ell).$

$s \leqq p$ に対して行列 $(e_{ij})_{i \in I, j \in J}$ の s 次小行列

$$\begin{aligned} A &= (e_{ij})_{i \in I_1, j \in J_1} \\ &\quad I_1 = \{i_1, \ldots, i_s\} \subset I, \quad J_1 = \{j_1, \ldots, j_s\} \subset J, \\ &\quad i_1 < \cdots < i_s, \quad j_1 < \cdots < j_s \end{aligned}$$

に対して，その q 小行列式を

(3.10) $\det_q(a) = \sum_{\sigma \in S_s} (-q)^{\ell(\sigma)} e_{i_{\sigma(1)}j_1} \cdots e_{i_{\sigma(s)}j_s}$

により定める．ただし，S_s は s 次対称群を表し，$\sigma \in S_s$ に対して，

$$\ell(\sigma) = \sharp\{(i,j) \,|\, i < j, \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

とする．

定理 3.2 (i) $r \geqq k$ ならば，$J'_q(-r\mathbf{e}_p) = 0$.

(ii) $r \leqq k-1$ ならば，$J'_q(-r\mathbf{e}_p)$ は，$p \times (n-p)$ 行列 $(e_{ij})_{i\in I, j\in J}$ の $r+1$ 次の q 小行列式たちで生成される左イデアルと一致する．

証明に関して一言述べておく．まず (i) は一般論から従う．(ii) で $r+1$ 次の q 小行列式たちで生成される左イデアルが $J'_q(-r\mathbf{e}_p)$ に含まれることは，福島 [5] で証明されている．逆の包含関係は，Lusztig[9] の論法により容易に示せる．

References

[1] A. Beilinson, J. Bernstein, Localisation de $\mathfrak{g}$-modules, C. R. Acad. Sci. Paris, **292** (1981), 15–18.

[2] J.-L. Brykinski, M. Kashiwara, Kazhdan-Lusztig conjecture and holonomic systems, Invent. Math, **64** (1981), 387–410.

[3] V. G. Drinfeld, Hopf algebras and quantum Yang-Baxter equation, Soviet Math. Dokl., **32** (1985), 254–258.

[4] V. G. Drinfeld, On quasitriangular quasi-Hopf algebras closely related to Gal($\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q}$), Algebra i Analiz, **2** (1990), 149–181.

[5] 福島潤一, 量子群の最高ウェイト表現と q-行列式, 広島大学理学研究科数学専攻修士論文, (1996).

[6] M. Jimbo, A q-difference analogue of $U(\mathfrak{g})$ and the Yang-Baxter equation, Lett. Math. Phys., **10** (1985), 63–69.

[7] D. Kazhdan, G. Lusztig, Tensor structures arising from affine Lie algebras I-IV, J. Amer. Math. Soc., **6** (1994), 905–947, 949–1011 and **7** (1994), 335–381, 383–453.

[8] T. Levasseur, J. T. Stafford, Rings of differential operators on classical rings of invariants, Memoirs of AMS, **81** no.412, 1989.

[9] G. Lusztig, Quantum deformations of certain simple modules over enveloping algebras, Adv. Math., **70** (1988), 237–249.

[10] G. Lusztig, On quantum groups, J. Algebra, **131** (1990), 466–475.

[11] T. Tanisaki, Harish-Chandra isomorphisms for quantum algebras, Comm. Math. Phys., **127** (1990), 555–571.

[12] T. Tanisaki, Finite dimensional representations of quantum groups, Osaka J. Math., **28** (1991), 37–53.

[13] 寺島泰茂, 有限型量子群の Verma module の BGG 定理, 広島大学理学研究科数学専攻修士論文, (1995).

[14] H. Yamane, A Poincaré-Birkhoff-Witt theorem for quantized universal enveloping algebra of type A_N, Publ. RIMS. Kyoto Univ., **25** (1989), 503–520.

[15] 安田喜雄, 量子群の Verma 加群について, 広島大学理学研究科数学専攻修士論文, (1994).

Department of Mathematics
Faculty of Science
Hiroshima University
Higashi-Hiroshima, 739, JAPAN

tanisaki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

About decomposition numbers of $Sp(4,q)$

脇　克志
弘前大学　理学部　情報科学科

1　記号と主定理

任意の素数 p とその巾 $q=p^n$ について群 $G=Sp(4,q)$ とする。ただし $Sp(4,q)$ は、I を 2×2 の単位行列としたとき $Sp(4,q):=\left\{X\in GL(4,q)\;\middle|\;{}^tX\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}X=\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}\right\}$ で定義される。

p と異なる素数 r に関して White[3][4][5] でほとんどの $r-$分解定数が決定されている。しかし r が $q+1$ を割り切る場合、主ブロックの $r-$分解定数の中に未決定の部分が残されている。今回は r が奇素数の場合に完全な $r-$分解定数を得る方法を概説する。以下 $q+1=r^ds$ で r と s は互いに素であるとする。

White[4][5] の結果で解っていることは次の通りである。

定理 1.1 群 G の主ブロック $B_0(G)$ は 5 つの既約 *Brauer* 指標 $\{k_G=\varphi_0,\varphi,\varphi_s,\varphi_t,\varphi_{st}\}$ を持つ。また、$B_0(G)$ の分解行列の一部は以下のとおりである。(ただし α は未決定で $r^d=3$ の時、$\alpha\geq 1$ で $r^d>3$ の時、$\alpha\geq 2$)

次数	指標	φ_0	φ	φ_s	φ_t	φ_{st}
1	1_G	1				
$q(q-1)^2/2$	η		1			
$q(q^2+1)/2$	χ_s	1		1		
$q(q^2+1)/2$	χ_t	1			1	
q^4	χ_{st}	1	α	1	1	1

この α に関して Waki[6] で α の上限を r^d の値で付けている。

命題 1.2

$$\alpha\leq\frac{r^d-1}{2}\quad(q:\text{偶数})$$
$$\alpha\leq\frac{(r^d-1)^2}{r^d+1}\quad(q:\text{奇数})$$

特に $r^d=3$ の場合は α の値が 1 と確定できる。また、定理 1.1 の α の下限より $\alpha=1$ となるのは $r^d=3$ の場合のみである。

そして次の定理が今回の主定理である。

定理 1.3 *(Okuyama, Waki)*

$$\alpha = 1 \quad (r^d = 3)$$
$$\alpha = 2 \quad (r^d > 3)$$

定義 1.4 以下にここで使う記号を列挙する。

- $(\lambda, \alpha, \mu, \beta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda & \lambda\alpha + \beta \\ -\alpha & 1 & \beta & \mu \\ 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $s = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $U_s = \{(\lambda, 0, \mu, \beta) | \lambda, \mu, \beta \in GF(q)\}$

- $L_s = \left\{ \begin{pmatrix} {}^tA^{-1} & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \middle| A \in GL(2, q) \right\}$

- 極大 *Parabolic* 部分群 $G_s := \langle B, s \rangle$ と $G_t := \langle B, t \rangle$

kG–加群 Mに対し、$\mathrm{Top}(M) := M/\mathrm{Rad}(M)$ と $\mathsf{H}(M) := \mathrm{Rad}(M)/\mathrm{Soc}(\mathrm{Rad}(M))$ をそれぞれを Mのトップとハートと呼ぶことにする。

2 極大 Parabolic 部分群のブロック

この章では、主定理を証明するために極大 Parabolic 部分群 G_sのあるブロックに注目する。群 G_sは U_sと L_sの半直積 $(U_s \rtimes L_s)$ である。ここで U_sは位数が q^3の可換群で L_sは一般線形群 $GL(2, q)$ と同型になる。G_sの Sylow r–部分群は位数が r^dの巡回群であるため、G_sの r–ブロックの r–分解行列を求めるのは容易である。

群 G の既約通常指標ηは G_sに制限しても既約であることが解る。(Enomoto [1] と Srinivasan [2] を参照) この G_sの指標をη_-とする。指標η_-を含む G_sの r–ブロックを b とする。ブロック b に含まれる既約通常指標の集合は $\{\eta_+, \eta_-, \eta_i\}$ $(1 \leq i \leq \frac{r^d-1}{2})$ である。また、b は 2 つの既約 Brauer 指標 $\{\varphi_+, \varphi_-\}$ を持ち、r–分解行列は次の通りとなる。

次数	指標	φ_+	φ_-
$q(q-1)^2/2$	η_+	1	0
$q(q-1)^2/2$	η_-	0	1
$q(q-1)^2$	η_1	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮
$q(q-1)^2$	$\eta_{\frac{r^d-1}{2}}$	1	1

よって、このブロックの Brauer Tree は、$\overset{\eta_+}{\bigcirc} \overset{\varphi_+}{\text{———}} \overset{\eta_i}{\circledcirc} \overset{\varphi_-}{\text{———}} \overset{\eta_-}{\bigcirc}$ となる。これから$\varphi_\pm$に対応する射影被覆 $P(\varphi_\pm)$ の Loewy 構造が決定される。以下 kG–加群 Mに対し M_bで Mを kG_sに制限した $M_{\downarrow G_s}$の b–部分を表すことにする。

3 主定理の証明

それでは、主定理の証明を次の6つの補題に分けて説明して行いく。

補題 3.1 $\varphi_{\downarrow G_s} = \varphi_-$

これは、定理 1.1 と b の分解行列より得られる。

補題 3.2 $\varphi_s \otimes \varphi_t$の射影でない最大直和因子を Mとすると、その既約因子は、$\alpha\varphi + \varphi_{st}$となる。

k_{G_s}と k_{G_t}を自明な kG_s– kG_t–加群とする。この2つの加群を群 G に誘導した G–加群は、次のような Loewy 構造を持つ加群の直和で表される。

$$k_{G_s}{}^{\uparrow G} = \begin{matrix}\varphi_0\\ \varphi_s\\ \varphi_0\end{matrix} \oplus \xi, \qquad k_{G_t}{}^{\uparrow G} = \begin{matrix}\varphi_0\\ \varphi_t\\ \varphi_0\end{matrix} \oplus \xi$$

ここでξは既約な射影 kG–加群。

Mackey のテンサー積定理により $k_{G_s}{}^{\uparrow G} \otimes k_{G_t}{}^{\uparrow G}$ は、射影加群になる。実際、このテンサー積はφ_0に対応する射影被覆加群 $P(\varphi_0)$ を直和因子としてちょうど1つ含む。また、$\begin{matrix}\varphi_0\\ \varphi_s\\ \varphi_0\end{matrix} \otimes \begin{matrix}\varphi_0\\ \varphi_t\\ \varphi_0\end{matrix} \cong P(\varphi_0) \oplus P$（$P$は $P(\varphi_0)$ を直和因子に持たない射影加群）と表せることも解る。
ここで2つの完全列

$$0 \longrightarrow \varphi_0 \longrightarrow \begin{matrix}\varphi_0\\ \varphi_s\\ \varphi_0\end{matrix} \xrightarrow{f_s} \begin{matrix}\varphi_0\\ \varphi_s\end{matrix} \longrightarrow 0 \quad と \quad 0 \longrightarrow \varphi_0 \longrightarrow \begin{matrix}\varphi_0\\ \varphi_t\\ \varphi_0\end{matrix} \xrightarrow{f_t} \begin{matrix}\varphi_0\\ \varphi_t\end{matrix} \longrightarrow 0,$$

から次の完全列が構成できる。

$$0 \longrightarrow \varphi_0 \longrightarrow \begin{matrix}\varphi_0\\ \varphi_s\\ \varphi_0\end{matrix} \oplus \begin{matrix}\varphi_0\\ \varphi_t\\ \varphi_0\end{matrix} \xrightarrow{f'} \begin{matrix}\varphi_0\\ \varphi_s\\ \varphi_0\end{matrix} \otimes \begin{matrix}\varphi_0\\ \varphi_t\\ \varphi_0\end{matrix} \xrightarrow{f} \begin{matrix}\varphi_0\\ \varphi_s\end{matrix} \otimes \begin{matrix}\varphi_0\\ \varphi_t\end{matrix} \longrightarrow 0. \quad (i)$$

このとき Soc(Ker$f$)$\cong \varphi_0$となり Ker$f$は P(φ_0) 含まれる。よって上の完全列 (i) より

$$\begin{matrix}\varphi_0\\ \varphi_s\end{matrix} \otimes \begin{matrix}\varphi_0\\ \varphi_t\end{matrix} \cong P(\varphi_0)/\mathrm{Ker}f \oplus P$$

が得られる。次に

$$0 \longrightarrow \varphi_s \longrightarrow \begin{matrix}\varphi_0\\ \varphi_s\end{matrix} \xrightarrow{g_s} \varphi_0 \longrightarrow 0 \quad と \quad 0 \longrightarrow \varphi_t \longrightarrow \begin{matrix}\varphi_0\\ \varphi_t\end{matrix} \xrightarrow{g_t} \varphi_0 \longrightarrow 0,$$

から次の完全列ができる。

$$0 \longrightarrow \varphi_s \otimes \varphi_t \longrightarrow \begin{matrix}\varphi_0\\ \varphi_s\end{matrix} \otimes \begin{matrix}\varphi_0\\ \varphi_t\end{matrix} \xrightarrow{g'} \begin{matrix}\varphi_0\\ \varphi_s\end{matrix} \oplus \begin{matrix}\varphi_0\\ \varphi_t\end{matrix} \xrightarrow{g} \varphi_0 \longrightarrow 0. \quad (ii)$$

ここでTop(Ker$g$)は、φ_0と同型となることが解る。よってKer$g$は$P(\varphi_0)/\mathrm{Ker}f$の像になり、$P(\varphi_0)/\mathrm{Ker}f$からKer$g$への全射が得られる。この全射の核を$M$とおくと、完全列(*ii*)より$\varphi_s \otimes \varphi_t \cong M \oplus P$となる。

定理1.1より$P(\varphi_0)$の既約因子は$4\varphi_0+\alpha\varphi+2\varphi_s+2\varphi_t+\varphi_{st}$である。また、Ker$f$とKer$g$の既約因子はそれぞれ$3\varphi_0+\varphi_s+\varphi_t$と$\varphi_0+\varphi_s+\varphi_t$であるので$M$の既約因子は$\alpha\varphi+\varphi_{st}$となる。

補題 3.3 制限した加群$M_{\downarrow G_s}$のb-部分は$\mathsf{H}(P(\varphi_+))$ *(q: even)* 又は$\mathsf{H}(P(\varphi_+)) \oplus P(\varphi_+)$ *(q: odd)* と同型となる。

$\varphi_{s\downarrow G_s}$と$\varphi_{t\downarrow G_s}$の射影でない最大直和因子はそれぞれ$\varphi_+$と$\mathsf{H}(P(k_{G_s}))$である。いま、$\dim \varphi_+$が素数$r$で割り切れないので$\varphi_+ \otimes H(P(k_{G_s}))$は$\mathsf{H}(P(\varphi_+))$を直和因子に持つ。このことを使って補題が得られる。

次にM_0を既約因子にφ_{st}を含むMの最小部分加群とする。

補題 3.4 $M_0/Rad(M_0) \cong \varphi_{st}$、$M/M_0 \cong \varphi$

前半は明らかである。もし$M_0 = M$なら前半から$M/\mathrm{Rad}\ M$がφ_{st}と同型になる。ところが$M = M^*$より Soc(M)もφ_{st}と同型になってしまい、Mの既約因子が$\alpha\varphi + \varphi_{st}$で$\alpha > 0$であることに矛盾する。よって$M_0$は$M$の真部分加群となる。

次に、M/M_0の既約因子がすべてφと同型で、補題3.3と$\mathsf{H}(\varphi_+)$のLoewy構造より$\dim_k \mathrm{Hom}_{kG_s}((M/M_0)_b, \varphi_-) = 1$である。さらに$\varphi_b = \varphi_-$で$\mathrm{Ext}^1_{G_s}(\varphi_-, \varphi_-)=0$より$(M/M_0)_b$となり補題が証明できる。

補題 3.5 もし*Rad(M_0)*が*0*でないなら、*Rad(M_0)* $\cong \varphi$

Rad(M_0)の既約因子はすべてφと同型で、補題3.4と同様の方法でRad$(M_0) \cong \varphi$が示される。この補題はRad$(M_0) \neq 0$であれば、$\alpha = 2$であることを示している。

補題 3.6 もしr^dが*3*より大きいとき*Rad(M_0)* $\neq 0$

Rad$(M_0) = 0$であると、補題3.4から$\alpha = 1$となり、命題1.2から$r^d = 3$となる。

以上が証明の概説である。分解行列を決定する手法としては、指標の誘導と制限により射影指標を構成してその直既約性を証明していくのが一般的である。ほとんどの分解定数が既に決定していて従来の方法では残りの部分が決定できない場合、加群としての構造を決定しながらその分解定数を決定していく今回の方法は、有用であると思われる。

参考文献

[1] H. Enomoto, The characters of the finite symplectic group $Sp(4,q)$, $q = 2^f$, Osaka J. Math. 9, 75–94 (1972)

[2] B. Srinivasan, The characters of the finite symplectic group $Sp(4,q)$, Trans. Amer. Math. Soc. 131, 488-525 (1968)

[3] D. L. White, The 2-blocks and Decomposition Numbers of $Sp(4,q)$, q Odd, Ph.D. Thesis, Yale University, (1987)

[4] D. L. White, Decomposition Numbers of $Sp(4,q)$ for Primes Dividing $q \pm 1$, J. Alg. 132, 488–500 (1990)

[5] D. L. White, Decomposition Numbers of $Sp_4(2^a)$ in Odd Characteristics, J. Alg. 177, 264–276 (1995)

[6] K. Waki, A Note on the Decomposition Numbers of $Sp(4,q)$, J. Alg. 186, 105–112 (1996)