THE FIFTH SEMINAR OF THE STUDY GROUP OF RINGS

Date: August 31, 1972
Place: Shinshu University

P R O G R A M

9:30-10:20

(1) On radicals of twisted group rings

Mr. Y. Ninomiya, Hokkaido University

10:30-11:20

(2) Multiplicative subgroups of simple algebras

Mr. M. Hikari, Tokyo University of Education

11:30-12:20

(3) On the free quadratic extensions of a commutative ring

Mr. K. Kitamura, Osaka University of Education

13:30-14:20

(4) Non-singular rings and Matlis' problem

Mr. K. Yamagata, Tokyo University of Education

14:30-15:20

(5) On endomorphism rings of quasi-injective modules

Mr. T. Ishi-i, Kinki University

On radicals of twisted group rings

二宮 暴 (北 大)

G を群, $R\ (\ni 1)$ を環. $U(R)$ を R の単元の全体とする. 次の条件をみたす $\{\bar{x} \mid x \in G\}$ を R 上の基としてもつ環を G の R 上の twisted group ring といい, R^tG であらわす:

1) $r\bar{x} = \bar{x}r \quad (r \in R)$

2) $\bar{x}\bar{y} = r(x,y)\,\overline{xy}, \quad r(x,y) \in \cancel{R}U(R)$

　　こゝに, $r(y,z)r(x,yz) = r(x,y)r(xy,z)$.

JR^tG, NR^tG はそれぞれ R^tG の Jacobson 根基, 冪零根基をあらわす.

最近, twisted group ring の根基について興味ある研究が D. S. Passman によって続けられている. こゝでは, その一部を紹介し, あわせてそれに関連したいくつかの事柄を述べる.

<u>定理 1</u>. $H \triangleleft G$, $[G:H] = n < \infty$ ならば,

$$(JR^tG)^n \subseteq (JR^tH)\cdot(R^tG) \subseteq JR^tG.$$

とくに, $n \in U(R)$ であれば, $(JR^tH)(R^tG) = JR^tG$.

<u>系</u>. $p(R/J(R)) = 0$, $H \triangleleft G$, G/H: locally finite p'-group
$\Longrightarrow$ $JR^tG = (JR^tH)\cdot(R^tG)$.

以下, K は標数 $p > 0$ の代数的閉体とする.

<u>定理 2</u>. $H \triangleleft G$, G/H: p-element をもたない可換群, I: K^tG の characteristic ideal $\Longrightarrow$ $I = (I \cap K^tH)\cdot(K^tG)$.

これは, G が p-element をもたない可換群のとき, K^tG が semi-simple であることを示す.

さらに, 有限群についてはつぎが成り立つ.

<u>定理 3</u>. P が有限な p-group のとき,

$\exists\, a_x \in K\setminus\{0\}\ (x \in P) \mid P^* = \{a_x\bar{x} \mid x \in P\} \cong P$, $K^tP = KP^*$.

有限群 G に対しては, $JK^tG = 0 \Longleftrightarrow p \nmid |G|$.

以上の事柄を用いて, 冪零根基について次の定理

が得られる。

定理 4. $\Delta^p(G)=\langle x\in G \mid x: p\text{-element},\ [G:C_G(x)]<\infty\rangle$ とすれば,

(1) $NK^tG=[NK^t(\Delta^p(G))](K^tG)$.

(2) $NK^t(\Delta^p(G))=JK^t(\Delta^p(G))=\bigcup_{W\in S} JK^tW$

ここに, $S=\{W\triangleleft G \mid |W|<\infty,\ W\subset\Delta^p(G)\}$.

(3) $NK^tG=0 \Longleftrightarrow \Delta^p(G)=\langle 1\rangle$.

(4) NK^tG : *nilpotent* $\Longleftrightarrow |\Delta^p(G)|<\infty$.

この定理より, *group ring* に対してつぎが成立する。

系. V, W は *locally finite p-groups* とする。

$p(R/J(R))=0$ のとき, $G=V\wr W$ に対して

$$JRG=\{\textstyle\sum_{x\in G} a_x\bar{x} \mid \sum_{x\in G} a_x\in J(R)\}.$$

特に, $V\neq\langle 1\rangle$, $|W|=\infty$ ならば, $NKG=0$.

Multiplicative subgroups of simple algebras

光 道隆 (東京教育大)

有限群の表現を考える場合, 表現自体に興味をもち, 群のいろいろな性質からその表現の性質を導き出すという方向と, 逆に, 表現の性質からそのような表現をもつ群を調べるという方向とがある。逆の方向における一つの問題として, n 次以下の忠実な表現をもつ群にはどんな性質があるか? —— $GL_n(\mathbb{C})$ の部分群はどんな性質をもっているか? —— という問題に注目してみる。より一般的に (たとえば整数表現を考える場合に, $\mathbb{Q}$ 上の表

現が重要になるので）代数体上の多元体Δのn次の全行列環$M_n(\Delta)$の乗法に関する部分群はどんな性質をもっているかということも考えてみる必要がある。もちろん，代数体上の単純多元環に入っている群をすべて決定せよというような問題にしてしまうと，これは群をすべて決定せよという問題になってしまって，解くことは不可能なので，多元体に入っている群を決定することとか，低次数の全行列環に入っている群を決定することなどを，非常に特徴的な群に注目して，考えることになる。こゝでは，群論における常套的手段にしたがって，p-Sylow group がどうなっているか考えてみる。多元体に入っている p-group は cyclic か generalized quaternion かで問題はないが，一般に$M_n(\Delta)$に入る p-group をすべて求めるためには p-group をすべて知らねばならないわけで，それは不可能である。そこで，$M_n(\Delta)$に入っている p-group で特徴的なものをみつけだそうということになる。

いま特に，$n=p^k$とする。$M_n(\Delta)$は部分多元環として$\overbrace{M_{n/p}(\Delta)\oplus\cdots\oplus M_{n/p}(\Delta)}^{p}$を自然に含んでいる。$M_{n/p}(\Delta)$に入っている一つの p-group Pをとり，$M_{n/p}(\Delta)\oplus\cdots\oplus M_{n/p}(\Delta)$の$i$成分の中にそれぞれ$P$と同型な$P_i$をとる。さらに，$M_n(\Delta)$の元$g$で，共役によって$P_1$を$P_2$に，$P_2$を$P_3$に，・・・，$P_p$を$P_1$に移し，$g^p\in\prod_{i=1}^{p}P_i$をみたすものを考えると，$\langle P_1, g\rangle$は$M_n(\Delta)$に入るような p-group となる。実は，このようにしてできる p-groups が$M_n(\Delta)$に入る p-groups を特徴づけていることが知られる。

さらに，Amitsur によって決定された多元体に入る群や，$M_2(\Delta)$に入るような群に関連した話題にもふれたいと思う。

On the free quadratic extensions of a commutative ring

北村　和雄（大阪教育大）

R は単位元 1 を有する可換環とする。R 上有限生成射影的で階数 2 の R-多元環を R の 2 次拡大，特に R-加群として自由であるとき，自由 2 次拡大とよぶ。$Q(R)$ を R の 2 次拡大の同型類全体の集合，$Q_s(R)$ を分離的な 2 次拡大の同型類全体の集合とし，$Q_f(R)$, $Q_{fs}(R)$ をそれぞれ $Q(R)$, $Q_s(R)$ のうち自由加群であるものの同型類全体の集合とする。H. Bass, A. Micali, E. Villamayor, P. Revoy によって，$Q_s(R)$ は可換群の構造をもち

$$0 \longrightarrow Q_{fs}(R) \longrightarrow Q_s(R) \longrightarrow Pic(R)_2 \quad (\text{完全})$$

であることが知られている。われわれは，Bass らとは違った方法で，$Q_f(R)$ に積を定義する：R の自由 2 次拡大 S は，$S = R \oplus Rx$, $x^2 = ax + b$ $(a, b \in R)$ によって定まるので，$S = (R, a, b)$ であらわす。また，(R, a, b) の同型類を $[R, a, b]$ であらわす。

補題．(1) つぎの条件は同値である：

a) $(R, a, b) \approx (R, c, d)$　（R-多元環として）

b) $\exists$可逆元 $\alpha \in R$, $\exists \beta \in R \mid c = \alpha(a - 2\beta)$, $d = \alpha^2(\beta a + b - \beta^2)$.

(2) a) または b) がみたされるならば，

c) $\exists$可逆元 $\gamma \in R \mid c^2 + 4d = \gamma^2(a^2 + 4b)$.

さらに，2 が可逆元ならば，逆も成立する。

この補題により，$Q_f(R)$ は積 $[R, a, b] \cdot [R, c, d] = [R, ac, a^2d + bc^2 + 4bd]$ に関して，単位元 $[R, 1, 0]$ を有する可換半群をなすことがわかる。さらに，われわれの積は $Q_{fs}(R)$ においては Bass 等の積と一致し，$Q_{fs}(R)$ は $Q_f(R)$ の可逆元全体の集合である。

こゝでは，われわれの積をもとにして，可換半群 $Q_f(R)$ および可換群 $Q_{fs}(R)$ の構造を調べる。

$U(R)$ を R の単数群, $U^2(R)=\{u^2 \mid u\in U(R)\}$ とする。$a\sim b \Longleftrightarrow \exists c,d\in U^2(R) \mid ac=bd$ によって同値関係 $\sim$ を定義し，商集合 $R/\sim$ を $R/U^2(R)$ であらわす。$R/U^2(R)$ は，積 $[a][b]=[ab]$ に関して単位元 $[1]$ を有する可換半群をなし，$R/U^2(R)$ の可逆元全体のなす可換群は $U(R)/U^2(R)$ となる。こゝで，準同型写像 $D:Q_f(R)\longrightarrow R/U^2(R)$, $D([R,a,b])=[a^2+4b]$ を導入する。

定理 1. $\{R_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}$ は単位元をもつ可換環の集合とする。自然な対応で，$Q_f(\prod_\lambda R_\lambda)\approx\prod_\lambda Q_f(R_\lambda)$, $Q_{fs}(\prod_\lambda R_\lambda)\approx \prod_\lambda Q_{fs}(R_\lambda)$.

定理 2. 2 が可逆元ならば，D によって $Q_f(R)\approx R/U^2(R)$, $Q_{fs}(R)\approx U(R)/U^2(R)$.

定理 3. R が一意分解整域，または 2R が素イデアルで 2 が非零因子であるような環であれば，D は単射。

系. $Q(\mathbb{Z})\approx \mathrm{Im}\,D=\{n\mid n=4r,\ 4r+1\ (r\in\mathbb{Z})\}$, $Q_s(\mathbb{Z})$ は trivial.

系. $Q(\mathbb{Z}[i])\approx \mathrm{Im}\,D=\{[\alpha]\in \mathbb{Z}[i]/\{1,-1\}\mid \alpha=4b,\ 4b+1,\ 4b+2i\ (b\in\mathbb{Z}[i])\}$, $Q(\mathbb{Z}[i])$ は trivial.

定理 4. 有限体 K に対しては，$Q(K)\approx \mathbb{Z}/(3)$ (乗法半群として), $Q_s(K)$ は位数 2 の群.

定理 5. $R=\mathbb{Z}/(n)$ とする。$n=p_1^{e_1}p_2^{e_2}\cdots p_r^{e_r}$ を素因数分解とすれば，$Q_{fs}(R)$ は $(\overbrace{2,2,\cdots 2}^{r})$ 型の可換群である。

Non-singular rings and Matlis' problem

山形 邦夫（東京教育大）

直既約 injective modules の直和に同型な module を completely decomposable module という。Matlis の問題 "completely decomposable module の直和因子は completely decomposable か？" について，

特に non-singular ring 上の module に対して調べる。

環 R との module M_R の singular submodule を $Z(M_R)$ であらわす。$Z(M_R) = M_R$ のとき M_R は singular, $Z(M_R) = 0$ のとき non-singular であるという。また，M_R が locally injective とは，$0 \neq \forall x \in M$ に対して，xR の injective hull $E(xR)$ に同型な M の submodule $M_0 (\ni x)$ が存在することである。

命題 1. locally injective な M_R が直既約 injective submodules M_i $(i \in I)$ と $Z(M_R)$ の essential extension $\bar{Z}(M_R)$ との直和であるとする：$M = (\sum^{\oplus}_{i \in I} M_i) \oplus \bar{Z}(M_R)$．このとき，M の任意の直和因子 N_R も locally injective であって，M と同様な分解をもつ，すなわち，$N = (\sum^{\oplus}_{j \in J} N_j) \oplus \bar{Z}(N_R)$，こゝに N_j は直既約 injective で $\bar{Z}(N_R)$ は $Z(N_R)$ の essential extension である。

系 2. completely decomposable module の non-singular 直和因子は completely decomposable である。

命題 1 により，Matlis の問題は singular parts が non-zero な直既約 injective submodules の直和であるような completely decomposable module の直和因子の直既約分解のそれに帰着される。

定理 3. $Z(R_R) = 0$ のとき，つぎは同値：

(i) injective singular modules の直和は injective.

(ii) injective singular modules の直和は quasi-injective.

(iii) essential right ideals に対して，ascending chain condition が成り立つ。

命題 1 と定理 3 とから，次の定理が得られる。

定理 4. $Z(R_R) = 0$ で，R の essential right ideals に対して ascending chain condition が成り立つとする。このとき，completely decomposable module M_R の直和因子もまた completely decomposable である。

注意. 定理 4 の条件をみたす環は，必らずしも Noetherian ではない。

Harada, Ishii : On end. ring of q-inj module
Osaka J. Math.
Matlis :
Shores (Pacific J.) J-W Harada.

On endomorphism rings of quasi-injective modules

石井 理雅 (近畿大)

ある種の有限条件をみたす準移入的加群の自己準同形環について考える。以下，Rは単位的環，Mは準移入的R-右加群，SはMの自己準同型環とする。

定理 1. 1) MがR-Noether的ならば，つぎがなりたつ：

(i) Sは準素環。

(ii) Mが準射影的 $\Longrightarrow$ Sは右Artin的。

(iii) Rが右Artin的 $\Longrightarrow$ Sは左Artin的。

(iv) Sの任意の左イデアル L, L' に対して $r(L \cap L') = r(L) + r(L')$ がなり立つ $\Longrightarrow$ Sは左Artin的。

2) MがR-Artin的ならば，つぎがなりたつ：

(i) Sは左Noether的。

(ii) MがR-Noether的 $\Longrightarrow$ Sは左Artin的。

3) Rがduo-環でMの移入包絡$E(M)$がNoether的，または，Rが可換でMがNoether的 $\Longrightarrow$ SはArtin的。

定理 2. 1) Mが零化部分加群に関してR-Noether的 $\Longleftrightarrow$ MがS-Noether的。

2) Rが右Artin的ならば，つぎがなり立つ：

(i) MはS-Noether的。

(ii) MがR-Noether的 $\Longrightarrow$ MはS-Artin的。

3) MがR-Noether的でweakly distinguishedならば，つぎの3条件は同値である：

(i) Sは左Noether的 ($\Longrightarrow$ 左Artin的)。

(ii) MはR-Artin的。

(iii) MはS-移入的。

4) Rが可換で，Mがweakly distinguishedならば，つぎがなりたつ：

MがR-Noether的 $\Longleftrightarrow$ Sが左Artin的
$\Longrightarrow$ MはR-Artin的，S-移入的。

<u>定理 3.</u> M は S-R-移入的 S-R-両側加群で, $\mathrm{Hom}_S(M, M) = R$ とする.

1) M が R-Noether 的 $\Longleftrightarrow$ S が左 Artin 的

$\Longrightarrow$ M は R-Artin 的.

2) M が S-R-Noether 的, あるいは, R が右 Artin 的で S が左 Artin 的ならば, M は有限生成 R-右加群の圏と有限生成 S-左加群の圏との間の森田 duality を与える。

<u>定理 4.</u> R は可換で, M は Artin 的直既約とする.

1) $\exists$ R の極大イデアル $P \mid M = \bigcup_i \{x \in M \mid xP^i = 0\}$.
このとき, M は R_P-加群と考えられて R_P-準移入的である。

2) M は S-移入的で, S は可換 Noether 的 $\mathfrak{q}$-adic 完全局所環である ($\mathfrak{q}$ は S の極大イデアル)。
さらに, M の S-部分加群の集合と M の R-部分加群の集合とは一致する.

3) R は S において dense ($\mathfrak{q}$-adic topology に関して) である, したがって,

$$\forall s \in S, \ \forall m_1, \cdots, m_n \in M, \ \exists r \in R \mid m_i r = m_i s \ .$$

(逆に, S が 2) の前半と 3) とをみたせば, M は Artin 的準移入的である.)