第6回 環論グループセミナー

1973年8月19日(日), 20日(月)

岡山大学理学部　会議室

プログラム

8月19日(日)

10:00-11:30
(1) On PI rings and quotient rings

信州大　理　　　大堀　正幸

11:40-12:40
(2) E^{∞}-pure injective modules over Dedekind prime rings

阪大　教養　　　丸林　英俊

14:00-15:30
(3) Balanced conditions and structure of rings

東京教育大　理　　　岩永　恭雄

15:40-16:40
(4) On differentiably simple rings and strongly radiciel extensions

神戸大　教養　　　竹内　康滋　　　7

8月20日(月)

9:00-10:00
(5) On primary decomposition theory for modules and rings

岡山大　理　　　最上　勲

10:10-11:10
(6) Socles and hearts of modules

東京教育大　理　　　牧野　良平

11:20-12:20
(7) On torsion free modules over regular rings

山口大　文理　　　大城　紀代市

On PI rings and quotient rings

信州大 理　大塚 正幸

R は prime ring, $\mathfrak{U}$ は R の nonzero two-sided ideals の全体とする。
$T=\{(U,f)\mid U\in\mathfrak{U},\ f\in \mathrm{Hom}(U_R,R_R)\}$ において

$$(U,f)\sim(V,g) \Leftrightarrow \exists W\subseteq U\cap V,\ W\in\mathfrak{U}\ ;\ f|W=g|W$$

と定義すれば、$\sim$ は T の同値関係である。(U,f) の同値類を $\hat{f}=[U,f]$ であらわし、$Q=T/\sim$ とする。Qの加法と乗法とを

$$\hat{f}+\hat{g}=[U\cap V,\ f+g],\quad \hat{f}\hat{g}=[VU,\ fg]\quad (\hat{f}=[U,f],\ \hat{g}=[V,g])$$

で定義すれば、Qは単位元を持つ環となる。Rにおける $a\in R$ の左乗を a_ℓ であらわせば、$a\mapsto \hat{a}_\ell$ は R から Q の中への monomorphism で、Q は R の一つの右商環 (Q_R は R_R の rational extension) である。(RとQの部分環と見なす。) Qの中心Cは体をなし R の centroid を含む。C を R の extended centroid, $S=RC+C$ を R の central closure とよぶ。

A は体 F 上の多元環, $F\langle x\rangle=F\langle x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\rangle$ は $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ で生成された F 上の自由多元環とする。$A_F\langle x\rangle$ は A と $F\langle x\rangle$ との F 上の universal product とあらわす。

定義. R は F-多元環 A の additive subgroup とする。
R は F 上の GPI [PI] をみたす
$\Leftrightarrow$ $\exists f(x_1,x_2,\cdots,x_n)(\neq 0)\in A_F\langle x\rangle\ [F\langle x\rangle]\ ;\ f(r_1,r_2,\cdots,r_n)=0\ (\forall r_1,\cdots,r_n\in A)$.

定理 1 (Martindale). prime ring R が C 上の GPI をみたすならば、$A=RC+C$ は極小右イデアル $eA\ (e^2=e)$ を持つ primitive ring で、$[eAe:C]<\infty$.

系 1 (Amitsur). V_R を忠実既約右 R-加群, $D=\mathrm{Hom}(V_R,V_R)$, K を D の中心とする。$RK\subset R$ で R が K 上の GPI をみたすならば、R は極小右イデアル $eR\ (e^2=e)$ を持ち $[eRe:K]<\infty$.

系 2 (Kaplansky). primitive ring R がその centroid Z 上の PI をみたすならば、R は Z を中心に持つ simple ring で $[R:Z]<\infty$.

系 3 (Posner). Prime ring R がその centroid Z 上の PI をみたすならば, $A = RC + C$ は C を中心にもつ simple ring で, $[A : C] < \infty$ であり, R の両側商環である.

定義. R が Jacobson ring であるとは, R の任意の prime ideal が primitive ideals の共通分としてあらわされることと定義する. また, 体 F 上の多元環 R の任意の maximal ideal M に対して $[R/M : F] < \infty$ が成り立つとき, R は Hilbert algebra と呼ばれる.

定理 2 (Procesi). R は 1 を含む Jacobson ring, S は 1 を共有する R の拡大環とする. $S = R[x_1, \cdots, x_n]$ $(x_i \in V_S(R))$ で, 係数が ± 1 であるような PI をみたすならば,

(a) S は Jacobson ring.

(b) S の任意の極大イデアル M に対し, $R \cap M$ は R の極大イデアルで, S/M は $R/R \cap M$ 上長さ有限.

さらに, R が体 F 上の Hilbert algebra ならば,

(c) S は F 上の Hilbert algebra.

References

[1] S. A. Amitsur: Generalized polynomial identities and pivotal monomials, Trans. Amer. Math. Soc. 114(1965).

[2] S. A. Amitsur and C. Procesi: Jacobson-rings and Hilbert algebras with polynomial identities, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 71(1966).

[3] W. S. Martindale, 3rd: Prime rings satisfying a generalized polynomial identities, J. Algebra 12(1969).

[4] W. S. Martindale, 3rd: Prime rings with involution and generalized polynomial identities, J. Algebra 22(1972).

[5] E. C. Posner: Prime rings satisfying a polynomial identity, Proc. Amer. Math. Soc. 11(1960).

[6] C. Procesi: Non-commutative affine rings, Atti Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez. I (8) 8(1967).

[7] C. Procesi: Non commutative Jacobson-rings, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 21(1967).

Eはすべて $\underline{E}$ の誤り.

E^∞-pure injective modules over Dedekind prime rings

阪大 教養　丸林 英俊

D. K. Harrison, R. J. Nunke によって始められた cotorsion abelian group の理論が non commutative Dedekind ring 上で, hereditary torsion theory (同じことだが, additive topology) を用いてどのように展開されるかを述べる.

以下, R を Dedekind prime ring とし, E を right additive topology とする. E に対応する left additive topology を E_l であらわす.

定義 1. M_R : E-torsion $\Leftrightarrow$ $\forall m \in M$, $\exists I \in E \mid mI = 0$

M_R の E-torsion submodule を M_E であらわす.

定義 2. exact sequence $0 \to L \to M \to N \to 0$ が E^∞-pure

$\Leftrightarrow$ $0 \to L_E \to M_E \to N_E \to 0$ が splitting exact.

定義 3. E^∞-pure exact sequence に関して projective (injective) property を持つ R-module を E^∞-pure projective (injective) という.

定義 4. M_R が E_l-divisible $\Leftrightarrow$ $\forall J \in E_l$, $MJ = M$.

M_R の maximal E_l-divisible submodule を ME^∞ であらわす.

$Q_E = \varinjlim I^{-1}$ $(I \in E)$, $K_E = Q_E/R$ とする.

定理 1. G_R が E^∞-pure projective

$\Leftrightarrow$ G は projective module と E-torsion module との直和.

定理 2. G_R が E^∞-pure injective $\Leftrightarrow$ $G \simeq E(GE^\infty) \oplus \mathrm{Ext}(K_E, G)$

ここに $E(GE^\infty)$ は GE^∞ の injective hull.

定義 5. E-reduced, E^∞-pure injective module が E-torsion-free submodule $(\neq 0)$ を直和因子に持たないとき, adjusted module とよばれる.

定義 6. D_R: E-injective $\Leftrightarrow$ $\forall I \in E$, $\mathrm{Ext}(R/I, D) = 0$.

定理 3. $T \to \mathrm{Ext}(K_E, T)$ は, E-reduced, E-torsion modules の同型類と adjusted modules の同型類との間の 1−1 対応をひきおこす。

定理 4. $D \to \mathrm{Hom}(K_E, D)$ は E-torsion, E-injective modules の同型類と E-reduced, E-torsion-free, E^{∞}-pure injective modules の同型類との間の 1−1 対応をひきおこす。

References

[1] D. K. Harrison: Infinite Abelian groups and homological methods, Ann. of Math. 69(1959).

[2] R. J. Nunke: Modules of extensions over Dedekind rings, Ill. J. Math. 3(1959).

Balanced conditions and structure of rings

東京教育大 理 岩永恭雄

この講演は balanced module, balanced ring および QF-1 ring についてこれまでに得られている結果の総合報告である。

1. A を ring, $_AM$ を left A-module, $C = End(_AM)$ を $_AM$ の centralizer, $D = End(M_C)$ を $_AM$ の double centralizer とすると, 自然な ring homomorphism $\sigma ; A \to D$ が存在し, これによって D は A-module となる。ここで σ が surjective のとき, $_AM$ は balanced であるといい, すべての left (resp. right) A-module が balanced のとき, ring A は left (resp. right) balanced ring, すべての faithful left (resp. right) A-module が balanced のとき, left (resp. right) QF-1 ring であるという。

2. balanced module の概念は"有限群の表現において, 表現のすべての行列と交換可能な行列をとり, 次にそれらすべてと交換可能な行列をとれば, それらはもとの行列全体と一致する"ということから派生したものであろうが, 一般の ring 上でどのような module が balanced であるかという問題についてはほとんどわかっていないと云ってよい。実際, 今迄に知られている balanced module は generator (Morita, 1958, Sci. Rep. T.K.D.) と f-cogenerating cogenerator (Kawada, 1972, Proc. Japan Acad.) 位と, 他に f-cogenerating injective module については dominant dimension を計算すればよい (Morita, 1970, Math. Z.) という程度である。そこで, module の balanced condition についての種々の結果を, 特に次の §3 の問題を解くことを考慮しながら述べてみる。

3. "quasi-Frobenius ring 上の faithful module は balanced である。" という Nesbitt-Thrall (Ann. Math. 1946) の結果に注目して, Thrall (Trans.

A.M.S. 1948) が QF-I algebra を定義し，その 'ideal structure' を決定するという問題（これを Thrall's problem という）を提起してから 20 年以上を経過したが，今日迄未解決である。Thrall による問題提起以後の最初のもっとも本質的な仕事は 10 年後の Morita (Math. Z. 1958) で，その次は更に 10 年後の Fuller (Math. Z. 1968) による 'serial QF-I algebra' についてであり，研究がさかんになったのは極めて最近になってからである。そして，興味あるいくつかの結果が得られたとはいうものの，問題解決には未だ程遠い感じである。その辺の所の解説をこころみる。

On differentiably simple rings and strongly radiciel extensions

神戸大 教養　竹内康滋

純非分離拡大体の理論を可換環に迄拡張することをこころみる。以下，環はすべて単位元を持つ可換環を意味するものとする。

定義 1.　H は環 C に作用する higher order derivations の集合で，$D \in H$, $a \in C$ に対し $[D, a] \in H$ をみたすものとする。C が自明でない H-stable ideal を持たないとき，C は H-simple であるという。

定理 1.　C は素数を標数として持つとする：$ch(C) = p$.

(1)　C が H-simple なら，$K = \{a \in C \mid D(a) = 0 \text{ for all } D \in H\}$ は体である。

(2)　H に含まれる higher order derivations の order は有界とする。このとき，C が H-simple なら，C は K を含む係数体を持つ local ring で，その radical は nil である。~~maximal ideal は nilpotent である~~。

定義 2.　A は $ch(A/\mathfrak{p})$ $(\forall \mathfrak{p} \in Spec(A))$ が素数であるような環とする。A の拡大環 C が次の条件をみたすとき，C を A の strongly radiciel extension と呼ぶ：

1)　C は A 上 f.g. projective.

2)　$J_{C/A} = Ker(\text{contraction map}: C \otimes C \to C)$ は nilpotent.

定理 2.　C は A の strongly radiciel extension とする。

(1)　natural map $\varphi : Spec(C) \to Spec(A)$ は bijective.

(2)　$\mathfrak{q} = \varphi(\mathfrak{p})$ $(\mathfrak{p} \in Spec(C))$ とすれば，$C_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}C_{\mathfrak{p}}$ は $A_{\mathfrak{q}}/\mathfrak{q}A_{\mathfrak{q}}$ の純非分離拡大体。

環 A の拡大環 C における higher order A-derivations の全体を $Der(C/A)$ であらわす。

定理 3.　A は $ch(A/\mathfrak{p})$ $(\forall \mathfrak{p} \in Spec(A))$ が素数であるような環とする。環 C は A の拡大で，A 上 f.g. projective とする。このとき

次は同値である。

1) C は A の strongly radicial extension.

2) natural map : $C \oplus \mathrm{Der}(C/A) \to \mathrm{Hom}_A(C, C)$ は同型.

3) $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $C_{\mathfrak{p}}$ は $A_{\mathfrak{p}}$ の strongly radicial extension.

さらに $A_{\mathfrak{p}}$ ($\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$) が Artinian のときには,

4) $\forall \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(A)$, $C \otimes A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ は, 体 $A_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}A_{\mathfrak{p}}$ 上純非分離的な係数体を持つ local ring で, その maximal ideal は nilpotent.

定理 4. C は A の strongly radicial extension とする. $\Delta = \{E \mid$ E は乗法に関して閉じた $\mathrm{Der}(C/A)$ の C-module direct summand で, $D \in E$, $a \in C$ ならば $[D, a] \in E\}$ とし, $\Gamma = \{B \mid$ C が B 上 projective であるような A と C との中間環$\}$ とすれば, Δ と Γ との間に 1-1 対応が存在する.

References

[1] A. Hattori: On high order derivations from the view-point of two-sided modules, Sci. Pap. Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo, 20(1970).

[2] Y. Nakai: High order derivations I, Osaka J. Math. 7(1970).

[3] S. Yuan: Differentiably simple rings of prime characteristic, Duke Math. J., 31(1964).

[4] S. Yuan: Inseparable Galois theory of exponent one, Trans. Amer. Math. Soc., 149(1970).

[5] S. Yuan: Finite dimensional inseparable algebras, Trans. Amer. Math. Soc., 150(1970).

On primary decomposition theory for modules and rings

岡山大 理　　最上 勲

以下，R，R' を任意の環とし，M を R-R'-bimodule とする ($M \neq 0$)．N が M の R-R'-submodule であることを，$M \geq N$ であらわす．

ここでは，M の left s-primary decomposition theory を J. W. Fisher の方法と H. Tominaga の方法とを用いて考察する．

定義．　$\mathfrak{p}(M) \equiv$ prime radical of $\ell(M)$，ここに $\ell(M) = \{r \in R \mid rM = 0\}$．

$M \geq N$: left primary submodule of $M \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} M/N \geq {}^{\forall}M'' \neq 0$，$\ell(M'') \subseteq \mathfrak{p}(M/N)$．

$\mathfrak{p}(M/N)$ が nilpotent modulo $\ell(M/N)$ であるような left primary submodule N of M を left s-primary submodule と呼ぶ．

$$\{N_i \mid i \in I \text{ (finite)}\} \text{: left s-primary decomposition of } N \text{ in } M \ (\ell\text{-s-p.d.}) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (1) & N = \bigcap_{i \in I} N_i, \text{ irredundant} \\ (2) & N_i : \ell\text{-s-primary} \\ (3) & \mathfrak{p}(M/N_i) \neq \mathfrak{p}(M/N_j) \ (i \neq j) \end{cases}$$

M の任意の proper submodule が ℓ-s-p.d. を持つとき，M は left s-primary decomposition theory (ℓ-s-p.d.t.) を持つという．

定理 1.　$\{N_i \mid i \in I\}$ が ℓ-s-p.d. of N in M ならば，それは left P-decomposition でもあり，$P(M/N) = \{\mathfrak{p}(M/N_i) \mid i \in I\}$．

上記により，ℓ-s-p.d. の一意性がわかるが，さらに isolated components について次が成り立つ：

定理 2.　N が ℓ-s-p.d. を持てば，N の isolated components はその ℓ-s-p.d. のえらび方によらない。

定理 3.　$M \geq M' \neq 0$ とする．

$\{N_i \mid i \in I\}$: ℓ-s-p.d. of N in $M \Rightarrow \{M' \cap N_i \mid i \in I\}$ は ℓ-s-p.d. of $M' \cap N$ in M' を含む．

定理 4.　M は ℓ-s-p.d.t. を持つとする．

$M \supsetneqq N$，$P(M/N) = \{\mathfrak{q}_i \mid i = 1, \cdots, s\}$

$\Rightarrow$ $\exists$ positive integer $k \mid \{(N + \mathfrak{q}_i^k M)_{\mathfrak{q}_i} \mid i = 1, \cdots, s\}$ が ℓ-s-p.d. of N．

次に，M が l-s-p.d.t. を持つための条件を求めるために，次の条件を考える：

(A) $^{\forall}N \subseteq M$, $^{\forall}\mathfrak{a} \subseteqq R$, $\mathfrak{a}^{-\infty}N$ は accessible で，$N = N_0 \subseteq N_1 \subseteq N_2 \subseteq \cdots$ (N_i : limit module of N_{i-1}) の長さは $s(N)$ を越えない。

(B) $^{\forall}M'/N \neq 0$, $\exists$ min. $\overline{\text{prime}}$ divisor $\mathfrak{z}$ of $l(M'/N)$ | $\mathfrak{z}^{-1}N \cap M' \supsetneqq N$.

(C) M : p-worthy.

(D) left P-submodule is left primary.

(D′) left P-submodule is left s-primary.

(E) M : left Artin-Rees module.

(F) M : left s-module

定理 5. M が l-s-p.d.t. を持つことと，次の各条件は同値：
(1) (A) + (B) + (D), (2) (A) + (B) + (E), (3) (C) + (D) + (F),
(4) (C) + (D′), (5) (C) + (E) + (F).

定理 6. M の任意の factor module が finite dimensional のとき
(E),(F) $\Rightarrow$ M は l-s-p.d.t. を持つ。

定理 7. M は l-s-p.d.t. を持つとする。$N = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{a}^n M$ ($\mathfrak{a} \subseteqq R$)
とおけば，$\mathfrak{a}N = N$

References

[1] K. L. Chew: On a conjecture of D. C. Murdoch concerning primary decompositions of an ideal, Proc. Amer. Math. Soc. 19(1968).

[2] J. W. Fisher: Decomposition theories for modules, Trans. Amer. Math. Soc. 145(1969).

[3] J. W. Fisher: The primary decomposition theory for modules, Pacific J. Math. 35(1970).

[4] H. Tominaga: On primary ideal decompositions in non-commutative rings, Math. J. Okayama Univ. 3(1953).

Socles and hearts of modules

東京教育大 理　牧野 良平

以下，R は単位元を持つ環，M は左 R-加群とする。R の Jacobson radical を $J(R)$ であらわす。また，$E({}_RM)$ で M の injective hull を，$S({}_RM)$ で M の socle をあらわすことにする。

Lesieur-Croisot は，$M \cap (\cap\{\mathrm{Ker}\,\beta \mid \beta \in J(\mathrm{End}_R(E({}_RM)))\})$ で M の heart $C({}_RM)$ を定義した。$C({}_RM)$ はつねに $S({}_RM)$ を含むが，ここでは，どのような場合に $C({}_RM)$ が $S({}_RM)$ に一致するかということについて述べる。

R が左 Noether 的で，$E({}_RR/P)$ ($\forall$ prime ideal P) が直既約，injective であり，直既約 injective な左 R-加群がこのような形のものにかぎるとき，R は左 Matlis 的であるという。

定理 1.　R が左 Matlis 的で，prime ideals が可換ならば次がなりたつ：

(i)　$\forall$ prime ideal P,　$C(E({}_RR/P)) = \sum\{{}_RN \mid {}_RK/P \simeq {}_RN \subseteq E({}_RR/P)\}$.

(ii)　$S({}_RM) \subseteq' {}_RM \Rightarrow S({}_RM) = C({}_RM)$.

たとえば，Noether 的可換環は定理 1 の条件をみたす。

命題 2.　R は左 Artin 的，${}_RM$ は injective とする。

$$S({}_RM) = C({}_RM) \Leftrightarrow \mathrm{supp}({}_RM) = \mathrm{ch}({}_RM),$$

ただし $\mathrm{supp}({}_RM) = \{\text{prime ideals } P \mid P \geq \ell(M)\}$, $\mathrm{ch}({}_RM) = \{\ell(N) \mid \text{simple } {}_RN \subseteq {}_RM\}$.

命題 3.　R は左 Artin 的，${}_RM$ は simple とする。

$$S(E({}_RM)) = C(E({}_RM)) \Leftrightarrow P\Big(\bigcap_{\text{prime } Q_i \neq P} Q_i\Big) = J(R)$$

ただし　$P = \ell(M)$.

命題 2, 3 を用いて，次の二つの定理が得られる．

定理 4. R は左 Artin 的，${}_RM$ は simple とする．

$$ {}_RM \text{ が injective } \Leftrightarrow P^2 = P, \quad P\Big(\bigcap_{\text{prime } Q_i \neq P} Q_i\Big) = J(R) $$

ただし $P = l(M)$．

定理 5. R が左 Noether 的のとき，次は同値：

(i) $S({}_RM) = C({}_RM)$, $\forall\, {}_RM \in {}_R\mathcal{M}$.

(ii) R は左 Artin 的 primary rings の有限直和．

On torsion free modules over regular rings

山口大学 文理　大城 紀代市

与えられた ring の上で，どのような module が cyclic modules の直和に書けるか？　これはよく知られた問題である．Pierce [3] では，可環な regular ring の上でこの問題が topological な問題として取り扱われ，いくつかの重要な結果が得られた．ここでは，[3] で Pierce が提起した問題に関して得られた結果についてのべる．

以下，R は単位元を持つ commutative ring，$Q(R)$ はその injective hull とする．R-module M は，$\{x \in M \mid \mathrm{Hom}_R(Rx, Q(R)) = 0\} = 0$ のとき torsion free とよばれる．

torsion free R-module M について，次の三つの条件を考える：

(α)　M は cyclic R-modules の直和にかける．

(β)　M は cyclic R-modules の直和の中に essential submodule として埋蔵される．

(γ)　M は cyclic torsion free R-modules の直和の中に submodule として埋蔵される．

定理 1.　regular ring R について，次の条件は同値である：

(a)　$Q(R)$ は R の Baer hull と一致する．

(b)　すべての f.g. torsion free R-module は条件 (β) をみたす．

(c)　すべての f.g. torsion free R-module は条件 (γ) をみたす．

X は位相空間，x は X の点，ξ は任意の ordinal number とする．たがいに disjoint な X の open subsets の族 $\{U_\eta \mid \eta < \xi\}$ があって，$x \in U_\eta^- - U_\eta$ （U_η^- は U_η の X での closure）がすべての η に対して成り立つとき，x は ξ-point とよばれる．

定理 2. Boolean ring R について，次の条件は同値である：

(a) すべての f.g. torsion free R-module は条件 (α) をみたす．

(b) $\mathrm{Spec}(R)$ は 3-point を持たない．

(c) $\lambda: \mathrm{Spec}(Q(R)) \to \mathrm{Spec}(R)$ を自然な写像とするとき，

$$|\lambda^{-1}(x)| \leq 2 \quad \text{for all} \quad x \in \mathrm{Spec}(R)$$

ただし $|\lambda^{-1}(x)|$ は $\lambda^{-1}(x)$ の元の個数を意味する．

References

[1] K. Oshiro: On torsion free modules over regular rings, Math. J. Okayama Univ. 16(1973).

[2] K. Oshiro: On torsion free modules over regular rings II, Math. J. Okayama Univ. (to appear).

[3] R. S. Pierce: Modules over commutative regular rings, Mem. Amer. Math. Soc. 128(1967).