第7回環論グループセミナー

1974年10月14日(月), 15日(火)

京都工芸繊維大学

化学棟21番教室

プログラム

10月14日(月)

9:30 - 10:20

(1) On H-separable extensions and QF extensions

岡山理大 理 中本 太一

10:30 - 11:20

(2) On QF extensions

東京学芸大 教育 北村 好

11:30 - 12:50

(3) Notes from the ICRA

東京教育大 理 岩永 恭雄

10月15日(火)

9:30 - 10:20

(4) A characterization of the triangular matrix rings over QF rings

大阪市大 理 住岡 武

10:30 - 11:20

(5) Non-commutative rings whose proper homomorphic images are self-injective

筑波大 平野 慎一

11:30 - 12:20

(6) On locally direct summands of modules

近畿大 理工 石井 理雅

13:30 - 14:20

(7) Projective modules with the exchange property

東京教育大 理 山形 邦夫

14:30 - 15:20

(8) Linearly compact modules and cogenerators

北大 理 尾野寺 毅

15:30 - 16:20

(9) Structure of dominant modules

東北大 教養 加藤 豊紀.

On H-separable extensions and QF extensions

岡山理大 理　中本 太一

以下 A/B は，単位元を共有する環拡大とし，A の中心を C，$V_A(B)$ を V であらわす．

A/B が H-separable であるとは，${}_A A \otimes_B A_A \mid {}_A A_A$ であることと定義され，平田，菅野両氏によって多くの結果が得られているが，その手法は homological なものであった．ここでは，H-system を利用した計算的手法を用いることにより，已に得られたいくつかの主要結果の証明を簡素化し，更にいくつかの新しい結果を与える．

容易に知られるように，A/B が H-separable であることは，$\sum_{i,j} x_{ij} \otimes y_{ij} v_i = 1 \otimes 1$ となるような有限個の元 $v_i \in V$，$\sum_j x_{ij} \otimes y_{ij} \in (A \otimes_B A)^A$ の系 $\{v_i ; \sum_j x_{ij} \otimes y_{ij}\}_i$ が存在することと同値である．このような系を A/B の H-system と呼ぶことにする．

以下において，A/B は H-separable とし，その H-system を $\{v_i ; \sum_j x_{ij} \otimes y_{ij}\}_i$ とする．

次のことは，H-system を利用した計算において，基本的である：

(1) $\eta : {}_A A \otimes_B A_A \twoheadrightarrow {}_A \mathrm{Hom}_C(V, A)_A$，ここに

$$a_1 \otimes a_2 \longmapsto (v \longmapsto a_1 v a_2)$$

$$\sum_{i,j} x_{ij} \otimes y_{ij} h(v_i) \longleftarrow h$$

(2) $\xi : {}_V V \otimes_C V_V \twoheadrightarrow {}_V \mathrm{Hom}({}_B A_B, {}_B A_B)_V$，ここに

$$u_1 \otimes u_2 \longmapsto (a \longmapsto u_1 a u_2)$$

$$\sum_i v_i \otimes \sum_j x_{ij} g(y_{ij}) \longleftarrow g$$

$$\parallel$$

$$\sum_i \sum_j g(x_{ij}) y_{ij} \otimes v_i$$

(3) $\sum_{i,j} g(x_{ij}) v y_{ij} a v_i = g(a) v \quad (a \in A,\ v \in V,\ g \in \mathrm{Hom}(A_B, A_B))$

$\sum_{i,j} v_i a x_{ij} v g(y_{ij}) = v g(a) \quad (a \in A,\ v \in V,\ g \in \mathrm{Hom}({}_BA, {}_BA))$

以上(1)－(3)の組合せによって，已に得られた多くの結果，たとえば次の commutor theorem などが非常に容易に示される．

定理 1. $V_A(\ )$ は，次の $\mathfrak{G}_l$ と $\mathfrak{D}_l$ との間の 1－1 対応を与える：

$\mathfrak{G}_l = \{B' \mid B \subset B' \subset A,\ {}_{B'}B'_{B'} <\oplus\, {}_{B'}A_{B'},\ {}_{B'}B' \otimes_B A_A \xrightarrow{\text{canl.}} {}_{B'}A_A \longrightarrow 0 : \text{split}\}$

$\mathfrak{D}_l = \{V' \mid C \subset V' \subset V,\ {}_{V'}V' <\oplus\, {}_{V'}V,\ {}_{V'}V' \otimes_C V_V \xrightarrow{\text{canl.}} {}_{V'}V_V \longrightarrow 0 : \text{split}\}$.

次の結果も，(1)－(3)の簡単な応用例とみなされる．

定理 2. σ は B の各元を不変にするような A の環自己準同型とする．そのとき，σ は単型であり，更にもしも σ が C の各元を不変にするか $V_A(\sigma(A)) = C$ をみたせば，σ は自己同型である．

また，(1), (2) における同型の一般化を考えることにより，次の結果が示される．

定理 3. $B \subset B' \subset A$ ，$V' = V_A(B')$ とする．

(i) $V_A(V') = B'$ ，${}_{V'}V'_{V'} <\oplus\, {}_{V'}V_{V'}$ ならば，

$$A/B' : QF \iff V'/C : QF$$

(ii) ${}_{B'}B'_{B'} <\oplus\, {}_{B'}A_{B'}$ ならば，

$$B'/B : QF \iff V/V' : QF$$

On QF extensions

東京学芸大 教育　北村 好

QF拡大上の加群の自己準同型環の関係を，加群にある種の条件を仮定して考察し，それをQF拡大における可換子環の議論に適用してみる．

定理 A. A/B を QF 拡大とし，M を右 A-加群で，$M\otimes_B A_A | M_A$ なるものとする．$A^* = End(M_A)$，$B^* = End(M_B)$，$\widehat{A} = End({}_{A^*}M)$，$\widehat{B} = End({}_{B^*}M)$ とおく．このとき，次のことが成り立つ：

a) B^*/A^* は QF 拡大である．

b) ${}_{B^*}B^*\otimes_{A^*} M \mid {}_{B^*}M$.

c) $\widehat{A}/\widehat{B}$ は QF 拡大で，自然な対応によって $\widehat{A} \cong A\otimes_B \widehat{B} \cong \widehat{B}\otimes_B A$ である．

ここに，$X_R | Y_R$ は X が R-加群として，Y の有限個のコピーの直和の直和因子に同型であることを表わす．

定理 B. T を A/B の中間環とする．もし T/B が QF 拡大で，${}_T T\otimes_B A_A | {}_T A_A$ であれば，次のことが成り立つ：

a) B'/T' は QF 拡大である．

b) ${}_A A\otimes_{T'} B'_{B'} \mid {}_A A_{B'}$.

c) T''/B'' は QF 拡大で，自然な対応によって $T'' \cong T\otimes_B B'' \cong B''\otimes_B T$ である．

ここに，X' $(X \subset A)$ は，X の A における可換子環を表わす．

A characterization of the triangular matrix rings over QF rings

大阪市大理　住岡武

Rは単位元1を持つ環とする。QF-3 semi-primary hereditary ringの構造については，次の(A)が知られている(Harada [1])。

(A) Rをbasic indecomposable ringとする。このとき，Rがright QF-3 semi-primary hereditaryであるための必要十分条件は，Rがあるdivision ring上の(upper) triangular matrix ringに同型になることである。
したがって，このときRは(right and left) artinianであり，そのmaximal (right and left) quotient ringはsemi-simpleである。

ここで，(A)におけるglobal dimensionをself injective dimensionで置きかえた類似の結果(B)が成り立つ。

(B) Rをbasic indecomposable ringとする。このとき，Rが(right and left) self injective dimension ≤ 1のright QF-3 right perfect ringでそのmaximal right quotient ringがQFであるための必要十分条件は，RがあるQF ring上の(upper) triangular matrix ringに同型になることである。したがって，このときRは(right and left) artinian ringである。

この十分性のうち，self injective dimension ≤ 1であることはZaks [2]による。したがって，必要条件であることを証明する。

[1] M. Harada: QF-3 and semi-primary PP rings I, Osaka J. Math. 2 (1965), 357-368.
[2] A. Zaks: Injective dimension of semi-primary rings, J. of Algebra 13 (1969), 73-86.

Non-commutative rings whose proper homomorphic images are self-injective

筑波大　　平野　慎一

R は non-commutative Noetherian ring で，その proper homomorphic image はすべて self-injective であるようなものとする．ここでは，このような R の特徴づけや性質などについて述べる．

定理 1.　R は Artinian か prime ring である．

定理 2 (Hajarnavis)．　R が bounded prime ring ならば，それは prime Dedekind ring である．

定理 3.　R が right & left primitive ring でないとき，次の条件は同値である：

1)　R は bounded.

2)　R は hereditary.

3)　R は restricted minimum condition をみたす．

4)　R の片側 tertiary ideal はつねに non-zero tertiary radical をもつ．

定理 4.　R が non-zero Jacobson radical を持てば，R は bounded Dedekind prime ring で同時に principal ideal ring である．

On locally direct summands of modules

近畿大 理工 石井 理稚

R は単位元を持つ環とし，$\{M_\alpha\}_{\alpha\in I}$ は（単位的）完全直既約 R-右加群の集合とする。

$\mathfrak{A}$ は，すべての R-右加群の圏の加法的 full 部分圏で，その対象は $\sum\oplus M^*_\lambda$ ($M^*_\lambda \in \{M_\alpha\}_I$) に同型なものとする。$\mathfrak{A}$ の射の subclass $\mathfrak{J}'$ を，任意の対象 $M = \sum\oplus M'_\alpha$ と $N = \sum\oplus M''_\beta$ とに対して，$\mathfrak{J}' \cap \mathrm{Hom}_R(M, N) = \{f \in \mathrm{Hom}_R(M, N) \mid p_\beta f i_\alpha$ は非同型 $\}$ であるように定める，ここに $i_\alpha : M'_\alpha \longrightarrow M$ は inclusion で，$p_\beta : N \longrightarrow M''_\beta$ は projection である。また，$S_M = \mathrm{End}_R(M)$ とおき，その Jacobson 根基を $J(S_M)$ であらわす。

$f : M \to N$ ($M, N \in \mathfrak{A}$) が left regular modulo $\mathfrak{J}'$ であるとは，$f\cdot g \in \mathfrak{J}'$ ($g : L \to M$, $L \in \mathfrak{A}$) ならばつねに $g \in \mathfrak{J}'$ であることと定義する。right regular modulo $\mathfrak{J}'$ であることも同様に定義される。

M の submodule $N = \sum_K \oplus M_\gamma \in \mathfrak{A}$ が（この分解に関して）M の局所的直和因子（l. d. s.）であるとは，K の任意の有限部分集合 K′ に対して，$\sum_{K'} \oplus M_{\gamma'}$ が M の直和因子になることと定義する。

l. d. s. について，次のことが示される。

1. $N \subset M \in \mathfrak{A}$ のとき，
N : M の l.d.s. $\Leftrightarrow$ inclusion $f : N \to M$ が left regular mod. $\mathfrak{J}'$

2. $M \in \mathfrak{A}$ に対し，M の l. d. s. $M' \in \mathfrak{A}$ が常に存在する。そして，任意の $f : N \to M$ ($N \in \mathfrak{A}$) に対し，left regular mod. $\mathfrak{J}'$ なる $i : M' \to M$ と right regular mod. $\mathfrak{J}'$ なる $f' : N \to M'$ とを適当にとれば，$f = i f'$ mod. $\mathfrak{J}'$ なるごとくできる。

3. $N \subset M \in \mathfrak{A}$ とする。inclusion $i : N \to M$ が left regular mod. $\mathfrak{J}'$ であれば，M のある l. d. s. $N' \in \mathfrak{A}$ が

存在して，$N \oplus N'$ が M の l.d.s. で，$1_M = ip + i'p'$ mod. $\mathfrak{J}'$，$pi = 1_N$ mod. $\mathfrak{J}'$，$p'i' = 1_{N'}$ mod. $\mathfrak{J}'$，$p'i = pi' = 0$ mod. $\mathfrak{J}'$ となる，ここに $p: M \to N$，$p': M \to N'$ で $i': N' \to M$ は inclusion．

M の l.d.s. の集合に適当な方法で order を導入し，M の maximal l.d.s. を定義することができる．

4．すべての $M_\alpha \in \{M_\alpha\}_I$ が injective ならば，$N \subset M \in \mathfrak{A}$ について，

$N : M$ において essential $\Longleftrightarrow$ $N : M$ の maximal l.d.s.

5．$M \in \mathfrak{A}$ の maximal l.d.s. は，Harada の意味における M の dense submodule に一致する．

以上の結果と Azumaya の方法とを用いて，次の結果が得られる．

6．$S_M \cap \mathfrak{J}' = J(S_M)$ とする（$M \in \mathfrak{A}$）．$M = \sum_K \oplus M_\alpha = \sum_J \oplus N_\beta$ を完全直既約部分加群への二通りの分解とするとき，K の任意の部分集合 K' に対して，K' から J の中へのある1対1写像 φ が存在して

$$M_{\alpha'} \approx N_{\varphi(\alpha')} \qquad (\forall \alpha' \in K')$$
$$M = \sum_{K'} \oplus N_{\varphi(\alpha')} \oplus \sum_{K-K'} \oplus M_{\alpha''}$$

がなりたつ．

これはすでに M. Harada – Y. Sai によって得られているが，その証明は factor category $\mathfrak{A}/\mathfrak{J}'$ の構造を用いてなされた．ここでは，$\sum_{K-K'} \oplus M_{\alpha''}$ をふくむ M のある種の l.d.s. の中で maximal なものが存在して，それが M に一致することを環論的手法で示す．

Projective modules with the exchange property

東京教育大 理　山形 邦夫

Rは単位元をもつ環とし，R-加群はすべて右R-加群とする。MをR-加群，$\mathcal{C}$をR-加群のあるclassで

$$\exists X \in \mathcal{C} \quad s.t. \quad M \underset{\oplus}{\subset} X$$

をみたすものとする。

定義1. Mが$\mathcal{C}$においてexchange propertyをもつとは，$X = M' \oplus N$，$M' \cong M$となる任意の$X \in \mathcal{C}$と，その直和分解 $X = \sum^{\oplus}_{i \in I} X_i$ とに対して

(*) $X = M' \oplus \sum_{i \in I} X_i'$ をみたす部分加群 $X_i' \subseteq X_i$ が存在する

ことである。特に，$\mathcal{C} = \mathfrak{M}_R$ の場合には，単にexchange propertyをもつという。

単射的加群がexchange propertyをもつことは知られているが（R. B. Warfield, Jr.），射影的加群に関しては，例えばsemi-perfect ringについてそうであることが知られているが，それ以外にはあまりよく分っていない。“制限をつけた性質”に関しては，次の定理が得られている：

定理2 (M. Harada). $\{P_i\}_{i \in I}$ をindecomposable projectivesの集合とし，

$$\mathfrak{P} = \{ M \in \mathfrak{M}_R \mid M = \sum^{\oplus}_{j \in J} M_j, \quad M_j \cong P_{i(j)} \quad (j \in J) \}$$

とおく。$P = \oplus_{i \in I} P_i$ に関して，次は同値である：

(i) Pはsemi-perfect, i.e., Pの任意の準同型像がprojective coverをもつ。

(ii) Pは$\mathfrak{P}$においてexchange propertyをもつ。

(iii) $\{f_n : P_{i_n} \to P_{i_{n+1}}\}$ を非同型な列とすると，
$\forall x \in P_{i_1}$, $\exists m \geq 1$ s.t. $f_m f_{m-1} \cdots f_1(x) = 0$.

この定理を利用して，直既約分解可能な射影的加群の exchange property について調べる．

定義 3. $\mathfrak{c}$ を cardinal number とする．M が $\mathcal{C}$ において $\mathfrak{c}$-exchange property をもつとは，$\mathrm{Card}(I) \leqq \mathfrak{c}$ であるかぎり M が (※) をみたすことである．特に，$\mathcal{C} = \mathfrak{M}_R$ であって，$\mathrm{Card}(I) < \aleph_0$ であるかぎり M が (※) をみたすとき，M は finite exchange property をもつという．

定理 4. $P = \oplus_{i \in I} P_i$, P_i: indecomposable projective，に関して，次は同値である：

(i) P は semi-perfect．

(ii) P は finite exchange property をもつ．

(iii) P の直和因子は，$\mathcal{C} = \{P\}$ において 2-exchange property をもつ．

定理 5. R は直既約右イデアルの直和であるとする．そのとき，次は同値である：

(i) R は right perfect．

(ii) 右射影的加群は exchange property をもつ．

(iii) $F = \oplus_{i=1}^{\infty} R_i$, $R_i \cong R$, は finite exchange property をもつ．

すなわち，right perfect ring 上の右射影的加群は exchange property をもつ．

Linearly compact modules and cogenerators

北大 理 尾野寺 毅

linearly compact modules は chain condition を仮定しない森田 duality において中心的な役割を演ずる。いま、環 R について、左 R-加群 ${}_R R$ およびすべての極小左 R-加群の injective envelope がまた linearly compact であるとき、R は左森田 ring であるということにする。右森田 ring も同様に定義される。これらはまた森田 duality を与えるような環としても定義される。

1. 与えられた森田 ring から出発して新らしい森田 ring を作ること。このことに関して、次の結果が得られる。

イ. R が左森田 ring, ${}_R P$ が有限生成 projective 左 R-加群, S を ${}_R P$ の自己準同型環とする。このとき、S もまた左森田 ring である。

ロ. R が左森田 ring, ${}_R Q$ を cofinitely generated injective 左 R-加群, T を ${}_R Q$ の自己準同型環とする。このとき、T は右森田環である。

上記結果の証明には、RZ-pair の概念およびそれに関する次の性質が用いられる。すなわち、${}_R P$ を有限生成 projective 加群, ${}_R Q$ を cofinitely generated injective 加群とする。いま、${}_R P$ のすべての simple な準同型像は ${}_R Q$ の submodule に同型で、かつ ${}_R Q$ のすべての simple な submodule は ${}_R P$ の準同型像であるとき、対 $\{P, Q\}$ を RZ-pair と呼ぶことにする。このとき、左 S-加群 ${}_S \mathrm{Hom}_R(P, Q)$ は左 S-加群のカテゴリーにおける injective cogenerator であり、その自己準同型環は ${}_R Q$ の自己準同型環に一致する。ここで S は ${}_R P$ の自己準同型環である。

なお、上記の結果イ. は、R. W. Miller - D. R. Turnidge : Morita duality for endomorphism rings, Proc. Amer. Math. Soc. 31

(1972), 91−94. においても報告されている。

2. QF−3 ring の対称性について。QF−3 ring の対称性に関して，次の結果が知られている。すなわち，環 R が左 artin または右 artin であるとする。このとき，もし R が左QF−3 ring ならば，それは右 QF−3 ring である。(K. Morita: Duality for QF-rings, Math. Z. 108 (1969), 237−252)。ここで，R が左 QF−3 であるというのは，忠実かつ injective な R の左イデアルが存在することである。この結果は次のように一般化される。すなわち，R を $_RR$ が linearly compact であるような環とする。このとき，もし忠実，linearly compact, cofinitely generated かつ flat な左 R−加群が存在するならば，忠実，有限生成 projective かつ injective な R−右加群が存在する。この証明は，1.の結果と森田 duality とに基づいてなされる。

3. linearly compact ring 上の injective 加群について。
環 R 上の忠実 injective 加群 $_RM$ を考える。いま，Q を $_RM$ の biendomorphism ring としたとき，左 Q−加群 $_QM$ は injective であるかどうかという問題は，一般的にはわからない。R が左 artin 環の場合にはそうであることが知られている。(例えば，T. Kato: Rings of U-dominant dimension ≧ 1, Tôhoku Math. J. 21 (1969), 321−327.) これは，より一般に $_RR$ が linearly compact で $_RM$ の socle が $_RM$ で large であるときにも成り立つ。この場合，M_S は linearly compact でかつ self-cogenerator，すなわち n を任意の自然数とし，$\mathcal{U}$ を $M_S^{(n)}$ の submodule としたとき $M^{(n)}/\mathcal{U}$ は M_S − torsionless，である，ここに S は $_RM$ の自己準同型環である。

Structure of dominant modules

東北大 教養　加藤豊紀

Rを単位環とする．右R-加群P_Rが(1) P_Rは忠実かつ有限生成射影的　(2) ${}_SP$は下半正則，ここに$S = \mathrm{End}(P_R)$であるとき，P_Rをdominant加群と呼ぶ．

dominant加群を持つような環は，semi-primary環，perfect環等の一般化として注目される．

dominant加群それ自体も興味ある性質を持っている．たとえば，

(1) dominant加群P_Rのdouble centralizerはRの極大左商環である．

(2) [Rutter] 有限生成射影的加群P_Rがdominantであるための必要十分条件は，そのtrace idealがRのminimal dense左イデアルとなることである．

ここでは，dominant加群（ならびにそれを持つ環）の構造について述べる．

$({}_RU, {}_RR)$がpairであるとは，(1) ${}_RU$の任意のsimple factor moduleがRの左イデアルに同型であり，(2) Rの任意の極小左イデアルが${}_RU$のfactor moduleに同型になることである．

構造定理．環Rは次の2条件を満たすとする：

(1) Rの任意のnon-zero左イデアルは，Rの左イデアルに同型になるようなsimple factor moduleを持つRの左イデアルを含む．

(2) $({}_RU, {}_RR)$がpairであるような有限生成射影的加群${}_RU$が存在する．

そのとき，$U_R^* = \mathrm{Hom}({}_RU, {}_RR)$はdominantである．逆に，$R$がdominant加群$P_R$を持てば，$R$は上の条件(1)，(2)を満たし，しかも$P_R \approx U_R^*$とできる．

この構造定理からも，*right perfect* 環が *dominant* 右加群を持つことが知られる．

なお，上記構造定理において，条件 (1) は次の条件 (1′) でおきかえてよい：

(1′) R の *left socle* の *injective hull* は忠実である．

勿論，この条件 (1) (または (1′)) と (2) とが独立であることを示す例が存在する．

この定理の証明は，*U-distinguished module* に関する理論を用いてなされる．