第8回環論グループセミナー
東屋教授を囲む環論研究集会
記　　　　録

１　９　７　５

北　海　道　大　学

東　京　教　育　大　学

目　　次

第8回環論グループセミナー（1975年7月19日-20日，北海道大学）

東屋教授を囲む環論研究集会（1975年9月1日-2日，東京教育大学）

On representations of algebras I

Indecomposable modules and quivers

住田 武（大阪市立大 理）

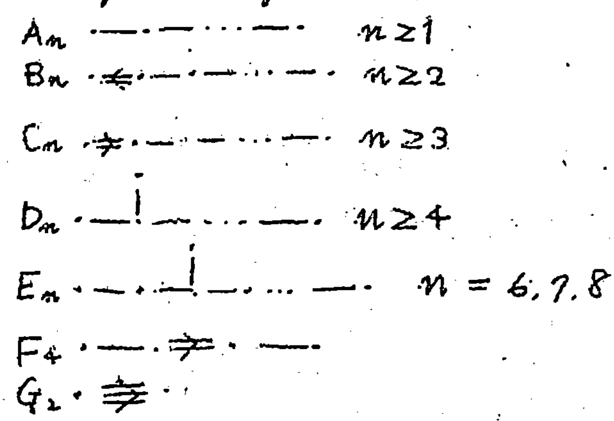
Kを(可換)体, Aを有限次元K-多元環とする. Aが有限生成直既約右加群の同型類を有限個しか持たないとき, Aは *finite representation type* あるいは *finite type* であるという. そこでAが finite type であるためには, Aがどのような条件を満たすことが必要十分であるかと言うことが問題になる. ここではAの(Jacobson) radical の自乗が零の場合に Gabriel [1], [2] 及び Dlab-Ringel [4] によって, その概要を述べる.

1. quiver とその表現

有限個の点をもち, その2点ずつが(1点からその点自身へも含めて)有限個の(0本でもよい)線で結ばれているものをグラフといい, その点のことを頂点, 線のことを辺ということにする. グラフにおいて, 特に各辺が方向をもっているものを quiver と呼ぶ.

以下体Kを一つ固定する. いまΓを quiver としΓの頂点全体の集合をΓ_0, 方向も含めた辺全体の集合をΓ_1で表わす. 各$\alpha \in \Gamma_0$に対しK-ベクトル空間V_αが対応し, 各$(\alpha \xrightarrow{\ell} \beta) \in \Gamma_1$に対し, K線型写像 $f_\ell : V_\alpha \longrightarrow V_\beta$ が対応している時, (V, f)をΓのK-表現という. (V, f)を簡単にVとも書く. ΓのK表現全体のなす category を$\mathcal{L}(\Gamma)$で表わす. ここに, $\mathcal{L}(\Gamma)$においてK-表現(V, f)から(W, g)への morphism φは各$(\alpha \xrightarrow{\ell} \beta) \in \Gamma_1$に対し$\varphi_\beta f_\ell = g_\ell \varphi_\alpha$を満たす$K$線型写像$\varphi_\alpha$の集合である. K-表現の直和及び直既約性は自然に定義される. このとき$\mathcal{L}(\Gamma)$は abelian category

をなす。いまK-表現Vが $\dim_K(\coprod_{\alpha\in\Gamma_0} V_\alpha)<\infty$ をみたすときVは有限次元であるという。$\mathcal{L}(\Gamma)$ が finite type であるとは有限次元直既約な表現の同型類が有限個しかないときにいう。ここで Dynkin diagram を書いておく。



quiver Γの表現に関しては次の定理が成り立つ。

<u>定理1</u> (Gabriel) $\mathcal{L}(\Gamma)$ が finite type である必要十分条件はΓのグラフが A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 の type のグラフの有限個の disjoint union なることである。

この証明は Gabriel [1] においてはベクトル空間の計算による少し面倒なものであるが Bernstein-Gelfand-Ponomarev [3] によって極めて簡単になった。ところで定理1は quiver の表現について述べたものであるが、後で分かるように、一般の体上の多元環の表現を調べるのに quiver の表現では必ずしも十分でないので quiver を一般化した species なるものを定義する。

2. species とその表現。

division ring K_i の有限集合と共に K_i-K_j-両側加群 ${}_iM_j$ の有限集合 $S=(K_i, {}_iM_j)_{i,j\in I}$ が K-species であるとは各 K_i はKを中心に含みかつK上有限次元であり、任意の $k\in K$ と $m\in {}_iM_j$ に対して $km=mk$ となることである。

また$S=(K_i, {}_iM_j)_{i,j\in I}$のdiagramは次のようにして定義される：
Iを点の集合とし，各$i,j\in I$に対し，iとjを

$$\dim_{K_i}({}_iM_j)\times\dim({}_iM_j)_{K_j}+\dim_{K_j}({}_jM_i)\times\dim({}_jM_i)_{K_i}$$

本の線で結ぶ．更に${}_jM_i=0$で$\dim_{K_i}{}_iM_j<\dim {}_iM_{j\,K_j}$のとき$i \Rightarrow j$のように$i$から$j$へ矢印をつけて表わす．
Sの表現$(V_i, {}_jf_i)$はK_j-線型写像${}_jf_i : V_i\otimes_i M_j\to V_j$ $\forall i,j\in I$をもったK_i上の右ベクトル空間V_iの集合である．quiverの時と大体同じようにSの表現$(V_i, {}_jf_i)$から$(W_i, {}_jg_i)$へのmorphismが定義されSの表現全体はabelian categoryをなす．これを$\mathcal{L}(S)$で表わす．$\mathcal{L}(S)$がfinite typeである(このときもSがfinite typeであるという)というのもquiverの場合と同様に定義する．各$i\in I$に対して$K_i=K$のときSはquiverと考えられる．Dlab-Ringel [4] によって定理1は次のように一般化された．

<u>定理2</u> (Dlab-Ringel) $S=(K_i, {}_iM_j)_{i,j\in I}$をK-speciesとする．$S$がfinite typeである必要十分条件は$S$のdiagramがDynkin diagramの有限個のdisjoint unionなることである．

<u>3. speciesから得られるtensor algebra</u>

$S=(K_i, {}_iM_j)_{i,j\in I}$をK-speciesとする．$R=\prod_{i\in I}K_i$, $M=\coprod_{i,j\in I}{}_iM_j$とし$T(S)=R\oplus M\oplus M\otimes_R M\oplus\cdots$とおく．このとき次の定理は容易に得られる．

<u>定理3</u> $\mathcal{L}(S)$は右$T(S)$-加群全体のつくるcategoryにequivalentである．

$T(S)$ が finite type であるとは $\dim_K V<\infty$ なる直既約右加群 V の同型類が有限個のときにいう。定理3から明らかに次の定理が成り立つ。

<u>定理4</u>　$T(S)$ が finite type である必要十分条件は S が finite type なることである。

4. 多元環の species と species の separated diagram

ここで有限次元 K-多元環 A を考える。A の basic ring を B, B の radical を J とする。このときある division ring K_i $(i\in I)$ 及び K_i-K_j-両側加群 ${}_iM_j$ $(i,j\in I)$ があって $B/J=\prod_{i\in I}K_i$　$J/J^2=\coprod_{i,j\in I}{}_iM_j$ となる。ここに I はある有限集合である。容易に分かるように $(K_i,{}_iM_j)_{i,j\in I}$ は K-species になる。これを A の K-species という。とくに K が代数閉体のときは A の K-species は quiver と考えられる。一般に $S=(K_i,{}_iM_j)_{i,j\in I}$ を K-species とする。S から次のようにして定義した diagram を S の separated diagram という。点の集合を $I\times\{0,1\}$ とし $(i,0)$ と $(j,1)$ の間を $\dim_{K_i}{}_iM_j\times\dim{}_iM_{j\,K_j}$ 本の線で結ぶ。更に $\dim_{K_i}{}_iM_j<\dim{}_iM_{j\,K_j}$ のとき $(i,0)\rightleftarrows(j,1)$ のように矢印をつける。

5. radical の自乗が零の多元環

以下 A を有限次元 K 多元環とし A の radical を N で表わす。$N^2=0$ の時次の定理が成り立つ。

<u>定理 5 (Auslander-Reiten)</u>. A を artinian ring, N をその radical で $N^2=0$ とする。このとき A が finite type である必要十分条件は環 $\begin{pmatrix} A/N & N \\ 0 & A/N \end{pmatrix}$ が finite type になることである。

いま A の basic ring を B とし, B の radical を J とする。更に A, $\begin{pmatrix} A/N & N \\ 0 & A/N \end{pmatrix}$ の species を S, S′ とすると, 容易にわかるように S′ の diagram は S の separated diagram であり, また T(S′) は $\begin{pmatrix} B/J & J \\ 0 & B/J \end{pmatrix}$ 即ち $\begin{pmatrix} A/N & N \\ 0 & A/N \end{pmatrix}$ の basic ring に同型である。

従って定理 2, 4, 5 から次の結果が得られる。

<u>定理 6 (Dlab-Ringel)</u>. A を有限次元 K-多元環とし, N をその Jacobson radical としたとき, $N^2=0$ とする。このとき A が finite type である必要十分条件は A の K-species の separated diagram が Dynkin diagram の finite disjoint union になることである。

References

[1] P. Gabriel: Unzerlegbare Darstellungen I, Manuscripta Math., 6 (1972), 71-103.
[2] P. Gabriel: Indecomposable representation II, Istit. Nag. Alta Math., Symp. Math. XI (1973), 81-104.
[3] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand and V. A. Ponomarev: Coxeter functors and Gabriel's theorem, Russian Math. Surveys 28 (1972), 17-32.
[4] V. Dlab and C. M. Ringel: On algebras of finite representation type, J. Alg. 33 (1975), 306-394.

On representations of algebras II
Coherent Functors

佐藤 英雄 (筑波大)

ここに紹介するのはAuslanderが'65年に出した「Coherent Functors」の概要である。この論文が、Auslander流のfinite typeの議論のbaseとなっている。以下特に断わらない限り、$\mathcal{C}$により十分にprojectiveを持つsmall abelian categoryを、$\mathcal{Ab}$によりアーベル群のcategoryを表わす。functorはすべてadditiveであるとする。$\mathcal{C}$から$\mathcal{Ab}$へのcovariant functorがcoherentとは、$\mathcal{C}$のあるobject A, Bについて$[B,-]\to[A,-]\to F\to 0$が完全列となることである。米田の補題から有限表示的(finitely presented)なfunctorと言い換えることができる。$\mathcal{C}$から$\mathcal{Ab}$へのcoherent functor全体のなすcategoryを$\check{\mathcal{C}}$にて表わす。contravariantについても同様に定義し、そのcategoryを$\hat{\mathcal{C}}$にて表わす。

§1. 一般論

この節に於いては、$\hat{\mathcal{C}}$について述べるが、$\check{\mathcal{C}}$について言い換えることは容易である。

(1.1) $\hat{\mathcal{C}}$は十分にprojectiveを持つabelian categoryで、$gl.dim\,\hat{\mathcal{C}} \leqq 2$が成り立つ。

証明. 定義から直ちに$\hat{\mathcal{C}}$は十分にprojectiveを持ち、$gl.dim\,\hat{\mathcal{C}} \leqq 2$である。contravariant functorのcategory $\mathcal{H}om(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{A}b)$はabelianだから、$\hat{\mathcal{C}}$がkernel, cokernel, extensionについて閉じていることを示せば良い。extensionについては明かである。$0 \to G \to F_1 \xrightarrow{g} F_2 \to H \to 0$: exact in $\mathcal{H}om(\mathcal{C}^{op}, \mathcal{A}b)$とする。$F_i \in \hat{\mathcal{C}}$とすれば$[-, B_i] \to [-, A_i] \to F_i \to 0$を完全にする$B_i\ A_i \in \mathcal{C}$がある。これを$(P_i)$で表すと$(P_1) \xrightarrow{\tilde{g}} (P_2)$が導びかれる。$\tilde{g}$のmapping coneを$M(\tilde{g})$とすれば$H_1(P_1) \to H_1(P_2) \to H_1(M(\tilde{g})) \to H_0(P_1) \to H_0(P_2) \to H_0(M(\tilde{g})) \to 0$は完全である。$H_0(P_i) \cong F_i$だから、$H_0(M(\tilde{g})) \cong H$で$H \in \hat{\mathcal{C}}$である。$H_1(P_i) \in \hat{\mathcal{C}}$であるから$K \equiv Coker(H_1(P_1) \to H_1(P_2)) \in \hat{\mathcal{C}}$となる。$H_1(M(\tilde{g}))$

$\in \hat{\mathcal{C}}$ は直ぐわかるから、$G = \mathrm{Ker}(F_1 \to F_2) \cong \mathrm{Coker}($
$K \to H_1(M(g))) \in \hat{\mathcal{C}}$ である。

$F \in \hat{\mathcal{C}}$, $[-,B] \to [-,A] \to F \to 0$：完全とする。このとき $v(F) = \mathrm{Coker}(B \to A)$ と定める。v は $\hat{\mathcal{C}}$ から $\mathcal{C}$ への exact functor であることは明かである。

$\hat{\mathcal{C}}_0 = \{F \in \hat{\mathcal{C}} \mid v(F) = 0\}$ とおく。$\hat{\mathcal{C}}_0$ は subobject, factor object, extension について閉じている。quotient category の定義から直ちに次がわかる。

(1.2) $\mathcal{C} \cong \hat{\mathcal{C}}/\hat{\mathcal{C}}_0$

このことから，$\mathcal{C}$ の議論を $\hat{\mathcal{C}}$ に移行させて展開しまた $\mathcal{C}$ にある意味で戻すことが可能になる。その精確な表現は (1.4) で与えることにして，さきに $\hat{\mathcal{C}}_0$ の特徴付けを与えておく。

(1.3) $F \in \hat{\mathcal{C}}$ について次は同値である。

(1) $F \in \hat{\mathcal{C}}_0$

(2) $\mathcal{C}$ の完全列 $0 \to A_1 \to A_2 \to A_3 \to 0$ があって $0 \to [-,A_1] \to [-,A_2] \to [-,A_3] \to F \to 0$ が完全列である。

(3) 任意の left exact functor G について，
$\mathrm{Ext}^i(F, G)=0$ $(i=0,1)$ である。

(4) 任意の $\mathcal{C}$ の projective object P について，
$F(P)=0$．(即ち F は projectively stable である。)

証明．(1)⟹(2)⟹(3) は明かである。(3)を仮定する。
R^0F (右 0-th derived functor) は left exact だから，$[F, R^0F]=0$。natural map $F \to R^0F$ は projective P の上で同型だから，$F(P)=0$。

(4)⟹(1)： R^0F の特徴付けから，zero functor が left exact であることに注意すれば，$R^0F=0$。従って勝手な left exact functor G について，$[F, G] \cong [R^0F, G]=0$。今，$0 \to A_1 \to A_2 \to A_3$ 及び，$0 \to [-, A_1] \to [-, A_2] \to [-, A_3] \to F \to 0$ が共に完全列とする。$G=[-, A]$ とすれば，米田の補題から，$0=[F, [-, A]] \cong \mathrm{Ker}([A_3, A] \to [A_2, A])$。これが勝手な $A \in \mathcal{C}$ について成り立つから，$A_2 \to A_3 \to 0$ は完全列である。即ち $v(F)=0$。

(1.4) (Shifting Theorem)

$F \in \hat{\mathcal{C}}$について次の完全列が存在し同型の意味で一意的である。$0 \to F' \to F \to G \to F'' \to 0$，ただし$F', F'' \in \hat{\mathcal{C}}_0$かつ$G$はleft exact。

証明．$0 \to A_0 \to A_1 \to A_2$は$\mathcal{C}$の，$0 \to [-, A_0] \to [-, A_1] \to [-, A_2] \to F \to 0$は$\hat{\mathcal{C}}$の，完全列とする。$B = \mathrm{Coker}(A_0 \to A_1) = \mathrm{Ker}(A_2 \to \nu(F))$とおけば下記のrow及びcolumnが完全である可換図式を得る。

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & {[-, A_0]} \arrow[r] \arrow[d, equal] & {[-, A_1]} \arrow[r] \arrow[d, equal] & {[-, B]} \arrow[r] \arrow[d] & F_0 \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & {[-, A_0]} \arrow[r] & {[-, A_1]} \arrow[r] & {[-, A_2]} \arrow[r] \arrow[d] & F \arrow[r] & 0 \\
 & & & {[-, \nu(F)]} \arrow[d] & & \\
 & & & F_1 \arrow[d] & & \\
 & & & 0 & &
\end{tikzcd}
$$

ただし，F_iはtop rowないしmiddle columnを完全ならしむものとする。定義から$F_i \in \hat{\mathcal{C}}_0$。この図式を追いかけることにより，完全列，

$0\to F_0\to F\to[-,v(F)]\to F_1\to 0$ を得る。一意性は, $0\to F'\to F\to G\to F''\to 0$ をもうひとつのものとするとき, (1,3)を使って, $[F,G]\cong[[-,v(F)],G]$ を得るが, この対応は次のようになっている。

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & {[-,v(F)]} \arrow[d] \\ F \arrow[r] & G \end{tikzcd}$$

ここまでの証明は, 「$F', F''\in\mathcal{C}_0$, G は left exact」にのみ依存しているから, これにより証明が完了する。最後に, $[-,v(F)]\cong R^0F$ であることに注意しておく。

§2. 加群への応用

前節では, $\mathcal{C}$ とその上の coherent functor の category の関係を求めるのが目的であったため, contravariant について述べたが, 今節では, 取り扱われる functor はすべて covariant である。前節に述べたことを断りなく covariant に換えて使うことを注意しておく。

我々の目標は, Shifting Theorem に於ける F

として特別なものを選ぶとき，それが何を意味するかを調べることである。

(2.1) $M \in {}_R\mathfrak{M}$について，M：有限表示型$\Leftrightarrow$ $-\otimes_R M$：coherent。このとき $P_1 \to P_0 \to M \to 0$ をP_iが有限生成projectiveな完全列とすれば，

$[P_1^*, -] \to [P_0^*, -] \to -\otimes_R M \to 0$ は完全列。

証明．($\Rightarrow$)有限生成projective P について $[P^*, -] \cong -\otimes_R P$ は良く知られている。ただし$*$はR-dualを表わすものとする。

($\Leftarrow$) $F = \sum\oplus_\Omega R \to M \to 0$ を完全列とする。このとき，$-\otimes F \cong \sum\oplus_\Omega(-\otimes R) \cong \sum\oplus_\Omega [R^*, -]$ で $-\otimes M$は有限生成だからΩとして有限なものがとれる。

$F_1 \to F_0 \to M \to 0$ をF_0は上記のもの，F_1は自由加群とする完全列とする。$-\otimes_R M$ は有限表示的だから，同様にしてF_1として有限生成なものがとれる。

(2.2) ${}_R M$を有限表示型とするとき，次のfunctorialな完全列がある。

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(N, -) \to - \otimes M \to [M^*, -] \to \mathrm{Ext}^2(N, -) \to 0$$

証明、$P_1 \to P_0 \to M \to 0$ を P_i が有限生成 projective な完全列とする。$N = \mathrm{Coker}(P_0^* \to P_1^*)$, $K = \mathrm{Coker}(M^* \to P_0^*) = \mathrm{Ker}(P_1^* \to N)$ とすれば、Shifting Theorem の証明から、次の完全列が得られる。

$$0 \to \mathrm{Ext}^1(N, -) \to - \otimes M \to [M^*, -] \to \mathrm{Ext}^1(K, -) \to 0.$$

ここで $\mathrm{Ext}^1(K, -) \cong \mathrm{Ext}^2(N, -)$ である。

(2.3) $0 \to A \to B \to C \to 0$ (☆) を ${}_R\mathfrak{M}$ の完全列で、${}_RC$ は有限表示的とする。次は同値。

(1) ☆は分解型である。

(2) $0 \to A \otimes_R - \to B \otimes_R - \to C \otimes_R - \to 0$ は完全列。

証明. (2) ⇒ (1) のみ示せば良い。Q_i を有限生成な projective として $Q_1 \to Q_0 \to C \to 0$ は完全であるとする。$M = \mathrm{Coker}(Q_0^* \to Q_1^*)$ と定めれば M は有限表示型で $0 \to M^* \to Q_1^{**} \to Q_0^{**} \to C \to 0$ は完全である。(2.2) により $0 \to \mathrm{Ext}^1(C, -) \to \otimes M \to [M^*, -]$ は完全である。これを☆に施せば、下記の row 及び column が完全な可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \mathrm{Hom}(C,B) & & & & \\
 & & \downarrow & & & & \\
 & & \mathrm{Hom}(C,C) & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathrm{Ext}^1(C,A) & \to & A\otimes M & \to & [M^*, A] \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 & \to & \mathrm{Ext}^1(C,B) & \to & B\otimes M & \to & [M^*, B]
\end{array}$$

Snake Lemma を使って, $\mathrm{Hom}(C,B)\to\mathrm{Hom}(C,C)\to 0$ が完全列であることがわかる。これは(1)を意味する。

今まではF∈肌に対して $0\to F_0\to F\to R^0F\to F_1\to 0$ を考えて来た。今度は, $0\to F_0\to L_0F\to F\to F_1\to 0$ を考えてみよう。

(2.4) ${}_RC$ を有限表示型とし, $P_1\to P_0\to C\to 0$ を P_i が有限生成projectiveな完全列とする。
$M=\mathrm{Coker}(P_0^*\to P_1^*)$ に対して次ぎが成立する。

(1) $L_0([C,-])\cong C^*\underset{R}{\otimes}-$

(2) $0\to \mathrm{Tor}_2(M,-)\to C^*\otimes-\to[C,-]\to\mathrm{Tor}_1(M,-)\to 0$

は完全列である。

証明. (1) $C^*\otimes_R-$ は right exact だから, L_0F の特徴

付けにより任意の projective P に対して $C^* \otimes P \cong [C, P]$ が言えれば良い。これは P が有限生成のときは良く知られている。${}_RC$ は有限生成であるから、$\varinjlim$ と hom-functor の交換が可能である。このことから上記のことが成り立つ。

(2) $K = \mathrm{Coker}(C^* \to P_0^*) = \mathrm{Ker}(P_1^* \to M)$ とすれば

$0 \to \mathrm{Tor}_2(M,-)\,(\cong \mathrm{Tor}_1(K,-)) \to C^* \otimes - \to P_0^* \otimes -$

は完全列である。下記の図式を可換ならしめる η の存在がわかる。

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Tor}_2(M,-) \arrow[r] & C^* \otimes - \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & P_0^* \otimes - \arrow[r] \arrow[d, "\wr\|"] & P_1^* \otimes - \arrow[d, "\wr\|"] \\
 & 0 \arrow[r] & {[C,-]} \arrow[r] & {[P_0,-]} \arrow[r] & {[P_1,-]}
\end{tikzcd}$$

この図式から、$\mathrm{Ker}\,\eta \cong \mathrm{Tor}_2(M,-)$ がわかる。

$$\begin{tikzcd}
 & C^* \otimes - \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & P_0^* \otimes - \arrow[r] \arrow[d, "\wr\|"] & K \otimes - \arrow[dr] & \\
0 \arrow[r] & {[C,-]} \arrow[r] & {[P_0,-]} \arrow[r] & {[P_1,-]} \arrow[r, phantom, "\cong"] & P_1^* \otimes -
\end{tikzcd}$$

なる可換図式から snake lemma により、$\mathrm{Coker}\,\eta \cong \mathrm{Tor}_1(M,-)$ がわかる。即ち次の完全列を得た。

$$0 \to \mathrm{Tor}_2(M,-) \to C^* \otimes - \xrightarrow{\eta} [C,-] \to \mathrm{Tor}_1(M,-) \to 0$$

最後に、Auslander-Bridger. duality と呼ばれているものについて述べる。(Auslander自身は transpose と呼んでいる。) ${}_R\mathcal{F}$ で有限表示型の左R加群のなす category を表わす。$A, B \in {}_R\mathcal{F}$ のとき $\pi(A,B)$ でもって Hilton[5] の意味の homotopy (projective)群を表わす。即ち、$\mathfrak{a}(A,B) = \{f: A \to B \mid f$ はある projective を通る。$\}$ は $[A,B]$ の subgroup をなす。このとき $\pi(A,B) = [A,B]/\mathfrak{a}(A,B)$ とする。${}_R\underline{\mathcal{F}}$ でもってその object は ${}_R\mathcal{F}$ と同じとし ${}_R\underline{\mathcal{F}}(A,B) = \pi(A,B)$ と定めた category とする。これを ${}_R\mathcal{F}$ の projective stabilized category という。Hilton-Rees により「$A \cong B$ in ${}_R\underline{\mathcal{F}}$ $\Leftrightarrow \mathrm{Ext}^1(A,-) \cong \mathrm{Ext}^1(B,-) \Leftrightarrow A \oplus P \cong B \oplus Q$ for some projective P, Q」が知られている。([6])

(2.5) (Auslander-Bridger duality)

$D: {}_R\underline{\mathcal{F}} \to \underline{\mathcal{F}}_R$ を、(2.2) に於ける記号で $D(M) = N$, morphism については $P_1 \to P_0 \to M \to 0$, $P_1' \to P_0' \to M' \to 0$ を共に P_i, P_i' が projective

な完全列とするとき，$M \xrightarrow{\underline{f}} M'$ により導びかれる map $(P)\to(P')$ をまた f で表わす。このとき

$$\begin{array}{ccccccc} P_0^* & \to & P_1^* & \to & N & \to & 0 \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \tilde{f}} & & \\ P_0'^* & \to & P_1'^* & \to & N' & \to & 0 \end{array}$$

により導びかれる map $N'\to N$ を $\tilde{f}$ とする。このとき $D(\underline{f}) = \underline{\tilde{f}}$ と定める。同様に $D: \underline{\mathfrak{F}}_R \to {}_R\underline{\mathfrak{F}}$ を定義する。${}_R\underline{\mathfrak{F}}$ と $\underline{\mathfrak{F}}_R$ はこの対応により dual である。

証明. D が functor となっていることを示せば良い。$f: M\to M'$ が projective P を通過しているとすれば，P は有限生成と仮定して良い。(2.2) により，$D(P)=N''$ とすれば次の可換図式を得る：

$$\begin{array}{ccccccc} 0 \to & \mathrm{Ext}^1(N,-) & \to & -\otimes M & \to & [M^*,-] \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to & \mathrm{Ext}^1(N'',-) & \to & -\otimes P & \to & [P^*,-] \\ & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 \to & \mathrm{Ext}^1(N',-) & \to & -\otimes M' & \to & [M'^*,-] \end{array}$$

ところが P は有限生成 projective だから $\mathrm{Ext}^1(N'',-)=0$。従って $\mathrm{Ext}^1(\tilde{f},-)=(\mathrm{Ext}^1(N,-)\to\mathrm{Ext}^1(N',-))=0$。即ち $\mathrm{Ext}^1(\tilde{f},-)$ は $\underline{f}\in{}_R\underline{\mathfrak{F}}(M,M')$ により

決まる。今 $\underline{M} \cong \underline{M}'$ in ${}_R\underline{\mathfrak{F}}$ とする。即ち $\alpha: M \to M'$ $\beta: M' \to M$ があって $\beta\alpha = 1_M$, $\alpha\beta = 1_{M'}$ とする。$\mathrm{Ext}^1(1_M, -) = [\mathrm{Ext}^1(N, -) \to \mathrm{Ext}^1(N', -) \to \mathrm{Ext}^1(N, -)]$ $\mathrm{Ext}^1(1_{M'}, -) = [\mathrm{Ext}^1(N', -) \to \mathrm{Ext}^1(N, -) \to \mathrm{Ext}^1(N', -)]$ だから $\mathrm{Ext}^1(N, -) \cong \mathrm{Ext}^1(N', -)$。Hilton-Rees の結果から $\underline{N} \cong \underline{N}'$ in $\underline{\mathfrak{F}}_R$。

§3. Appendix

(3.1) (2.2)に於いての $-\otimes M$ の代わりに $\mathrm{Tor}_k^R(M, -)$ を, (2.4)に於いての $[C, -]$ の代わりに $\mathrm{Ext}^k(M, -)$ をとっても，類似の結果が得られる。[c.f. 3]

(3.2) ある functor が coherent であるかどうかについては，次の十分条件が知られている。「$\mathcal{C}$ が complete abelian category とするとき, functor $F: \mathcal{C} \to \mathcal{A}b$ が product を保存するなら F は coherent である。(Auslander (cf. [4]))」

(3.3) 一般に $\mathrm{Ext}^1(A, -) \in \check{\mathcal{C}}_0$, 逆に $G \in \check{\mathcal{C}}_0$ ならば ある $A \in \mathcal{C}$ に対して $G \rightarrowtail \mathrm{Ext}^1(A, -)$ である。また $G \in \check{\mathcal{C}}_0$ について G が half exact であ

ることとGが$\check{\mathcal{C}}_0$についてinjectiveであることは同値である。そこで、このときには$G \lessdot \mathrm{Ext}^1(A,-)$である。次の問題が自然に起こる。「$G \lessdot \mathrm{Ext}^1(A,-)$ならばある$B \in \mathcal{C}$に対して$G \cong \mathrm{Ext}^1(B,-)$か？」この問題は現在のところ解かれていない。しかし次の場合は肯定的であることが知られている。(I) $\mathcal{C}$が可算直和を許すとき。(Freyd) (II) $\mathrm{pd}\,A < \infty$のとき。(Auslander) (III) すべてのprojective Pについて$[A,P]=0$のとき。(Hilton) (c.f. [2],[1])

(3.4) このような話は、$\mathrm{Ext}^1(A,-)$が決定的な役割を果している。そこでこのextension functorの特徴付けを与えることが考えられる。$\mathrm{Ext}^1(A,-)$は明らかに次の性質をもつ。(i) injectively stable, (ii) productを保存する, (iii) half exact。Griffithは(i),(ii),(iii)だけで$\mathrm{Ext}^1(A,-)$が特徴付けられることを$\mathcal{C}$がGrothendieckのときに示している。(c.f. [4])

Refferences

1. M. Auslander, Coherent functors, Proc. Conference on Categorical Algebra La Jolla 1965

2. M. Auslander, Comments on the functor Ext, Topology vol 8 pp 151–166, 1969.

3. M. Auslander–M. Bridger, Stable module Theory, Memoir, A.M.S. No. 94 1971

4. P. Griffith, On the problem of intrinsically characterizing of the functor Ext, Symposia Mathematica

5. P. Hilton, Homotopy theory of modules and duality, Symposium international de Topologia Algebraica 1958 pp 273–281

6. P. Hilton–D. Rees, Natural maps of Extension functors and a theorem of R. G. Swan, Proc. Camb. Phil. Soc. vol 57 1961 pp 489–502

On Representations of Algebras III
Perfect Categories

大阪市立大 理　原田　学

1960年に H. Bass [5] が semi-primary ring の拡張として，semi-perfect あるいは perfect ring を定義した。その後，それが色々重要な加群の endomorphism ring 等に表われて，興味が持たれるようになって来た。

更に1963年に B. E. Mares [18] によって，これが加群に迄拡張されて，semi-perfect あるいは perfect module が研究されるようになった。

ここでは，これを更に一般化して，任意の Grothendieck category の中で semi-perfect あるいは perfect になるものを研究しよう。（perfect ring を命名したのは S. Eilenberg [6] であろう。）一方，M. Auslander によって，finite representation algebra では直既約加群の中に noetherian あるいは co-noetherian という性質が表われてくることが知られ [1]，これが functor category の中では generating set が T-nilpotent であることに関係して，semi-perfect あるいは perfect category が finite representation algebra の研究に表われて来ることが Fuller [9] によって示された。

以下において，category $\underline{A}$ が Grothendieck であるとは

1. $\underline{A}$ は abelian category である。

ii. 無限個の直和が $\underline{A}$ の中に存在する.

iii. generating set を持っている.

(ここでは functor category に興味があるので) 更に $\underline{A}$ の object A は $A = \bigcup A_\alpha$; $A_\alpha \subset A$ 且つ small object, と表わせることとする.

猶, 以下では module と同じ terminology をあらためて定義することなしに用いることにする.

<u>定理 1.</u> P を $\underline{A}$ の projective とするとき, 次は同値:

i. $End_R(P)$ が local ring である.

ii. P の proper な部分加群は P の中で small である.

iii. P が semi-perfect 且つ直既約である.

([14], [18], [22] 等参照)

これにより, 上の P は有限生成で $J(P)$ が最大の部分 object になる. これらは functor category の研究に役立つ結果である.

次に, category が perfect であるとき, それが加群の場合と同じような性質を持つには, 任意の projective object P について $P \neq J(P)$, 即ち P の中に極大部分 object が存在するという結果が重要である. (一般の Grothendieck perfect category ではこれが成立しない [15].) ここでは制限された category だから, 無限直和の準同型は列-総和的行列で表わされることにより, 東屋 [4] の方法を用いて

<u>補題 1</u>（[14]）．　$\{A_i\}$ を $\underline{A}$ の objects の集合で $[A_i, J(A_i)] \subseteq J(End(A_i))$ とする．$A = \sum_1^{\infty}{}_{\oplus} A_i$ として，$f \in End(A)$ について $Ker(1-f) \neq 0$ なら，　$Im\, f \neq J(Im\, f)$ ．

これより

<u>定理 2</u>（[5]，[14]，[21]）．　上において A_i が projective 且つ $J(A_i)$ が A_i において small であれば，$\sum_{\oplus} A_i$ の直和因子 B について，　$B \neq J(B)$ ．

semi-perfect あるいは semi-artinian を定義する前に locally, semi-T-nilpotent set [8] を定義しよう．$\{A_\alpha\}_I$ を $\underline{A}$ の objects の集合，$\{B_\alpha | \subseteq A_\alpha\}_I$ を部分 objects の集合とする．その可附番個からなる部分集合 $\{A_{\alpha_i}\}_1^{\infty}$ と準同型の集合 $\{f_i : A_{\alpha_i} \to A_{\alpha_{i+1}} | f(A_{\alpha_i}) \subseteq B_{\alpha_{i+1}}\}$ について，A_{α_1} の任意の small object $A'_{\alpha_1} \subseteq A_{\alpha_1}$ に対して $f_n f_{n-1} \cdots f_1(A'_{\alpha_1}) = 0$ となる n が存在するとき，$\{f_i\}_1^{\infty}$ が <u>locally, right T-nilpotent</u> という．すべての $\{A_{\alpha_i}\}$，$\{f_i\}$ について $\{f_i\}$ が locally, right T-nilpotent であるとき，$\{B_\alpha\}_I$ が <u>locally, right semi-T-nilpotent</u> であるという．もし上の可附番個の集合 $\{A_{\alpha_i}\}$ で $\alpha_i = \alpha_j$ も許すとき，即ち重複して同じ A_α をとることを許すとき <u>T-nilpotent</u> という．勿論 I が無限集合の場合を考えているが，I が有限の時 $A_{\alpha'} = 0$ と考えて $\{B_\alpha\}$ は <u>semi-T-nilpotent</u> と呼ぶことにする．しかし T-nilpotent にはならない．

上において $f_i : A_{\alpha_{i+1}} \to A_{\alpha_i}$（$f_i(A_{\alpha_{i+1}}) \subseteq B_{\alpha_i}$）として

$f_1 f_2 \cdots f_n (A_{\alpha_{n+1}}) = 0$ となるとき，$\{B_\alpha\}$ を <u>left semi-T-nilpotent</u> という．（この場合は locally では定義されない．）以下からも知られる通り，semi-T-nilpotent が重要な役割をはたし，T-nilpotent はさほど重要ではない．H. Bass [5] 以来研究されて来たのは T-nilpotent の方で semi-T-nilpotent は考えられなかったが，これはこれからの研究に大切な概念であると思う．

この二つの概念が表われて来る例を与えよう．$S(A)$ を A の socle として，すべての $A \in \underline{A}$ について $S(A) \neq 0$ のとき $\underline{A}$ を semi-artinian という [20]．

<u>定理 3</u>（[20]）．　$\underline{A}$ を，projective 且つ small objects $\{P_\alpha\}_I$ を generating set としてもつ Grothendieck category とする．このとき，

$$\underline{A} \text{ が semi-artinian} \Leftrightarrow \begin{cases} 1)\ \{J(P_\alpha)\}_I \text{ が left semi-T-nilpotent} \\ 2)\ P_\alpha \supsetneqq A \supseteq J(P_\alpha) \text{ について } S(P_\alpha/A) \neq 0. \end{cases}$$

<u>定理 4</u>（[15]）．　$\underline{A}$ の中で semi-perfect objects の集合 $\{P_\alpha\}_I$ について，

$$P = \sum_I \oplus P_\alpha \text{ が semi-perfect} \Leftrightarrow \{J(P_\alpha)\}_I \text{ が locally right semi-T-nilpotent}$$

次に semi-perfect な functor category を考えよう．$\underline{B}$ を additive category とし $\underline{B}$ の objects よりなる集合を $\{B_\alpha\}_J$ とする．$\{B_\alpha\}_J$ の有限直和からなる $\underline{B}$ の full subcategory を $\underline{B}_f$ で示す．$\underline{B}_f$ からアーベル群の作る category Ab への contravariant functor の全体を $(\underline{B}_f^c, Ab)$ で示す，ここ

では $H_c = [\ ,c]$, $c \in \underline{B}_f$ が small 且つ projective で $\{H_c\}$ が generating set を作っている [19]. もし $\underline{B}$ が $\{B_\alpha\}$ を small 且つ projective objects よりなる generating set としてもてば, $[H_c, H_{c'}] \approx [c, c']$ (Yoneda's Lemma) と考え合わせることにより, $\underline{B}$ と $(\underline{B}_f^0, Ab)$ とは同値な category になる [7]. いま category $\underline{A}$ について, すべての(有限生成な) object が projective cover を持つとき, $\underline{A}$ を perfect (semi-perfect) category という. これについて

<u>定理 5</u> ([15]). $\underline{A}$ を abelian category とするとき,

$\underline{A}$ が semi-perfect で small 且つ projective objects からなる generating set をもつ $\Longleftrightarrow$ $\underline{A} \approx (\underline{B}_f^0, Ab)$.

更に

$$\underline{A} \text{ が perfect} \Longleftrightarrow \begin{cases} \underline{A} \approx (\underline{B}_f^0, Ab) \\ \{B_\alpha\}(\text{generating set}) \text{ が } \{J(B_\alpha)\} \text{ を right semi-T-nilpotent にする.} \end{cases}$$

このことより, semi-perfect Grothendieck category は functor category $(\underline{C}^0, Ab)$ と表わされる. 一方, $(\underline{C}^0, Ab)$ は P. Gabriel [10] によって次の様な(単位元をもたない)特殊な環上の加群の作る category になる:

$$R = \sum_{c \in \underline{C}} \oplus [c_\alpha, c_\beta] ,$$

積は category の結合による. e_α を $[c_\alpha, c_\alpha]$ の恒等写像とすれば $R = \sum \oplus e_\alpha R = \sum \oplus R e_\alpha$ で $\{e_\alpha\}$ が互に直交する R の巾等元の組である. 更に R 右加群の category $\underline{M}_R$ の中で $\underline{M}_R^+ = \{A \in \underline{M}_R \mid AR = A\}$ とすれば

$$(\underline{C}^0, Ab) \ni F \longleftrightarrow F(c) = Me_c$$

によって $(\underline{C}^0, Ab) \approx \underline{M}_R^+$ を得る. 結局, 単位元を持つ環から

出発して，artinian → semi-primary → semi-perfect → semi-perfect category と拡張して，最後に単位元のない環を考えることになった。

この方法で M. Auslander [2, 3] の variety, annuli 等を考えるとき，後の方法は環論でのよく知られた結果の重複であることがよく解り，理解しやすいものになる．．．

この $\underline{M}_R^+$ を用いて今迄のことを云い表すと

<u>定理 6</u>（[15]）．R を上の通りとするとき，次は同値：

i． R が $\underline{M}_R^+$ で semi-perfect である

ii． $\{e_\alpha J(R)\}_\alpha$ が right semi-T-nilpotent である．

iii． $R/J(R)$ が $\underline{M}_R^+$ で semi-cimple 且つ $R/J(R)$ の idempotent が R へ lift する．

これは [5] の結果とやや異るが，それについては

定理 7（[15]）．次は同値：

i． $\underline{M}_R^+$ が semi-perfect である．

ii． ${}_R\underline{M}^+$ が semi-perfect である．

iii． $R=\sum_\oplus e_\alpha R=\sum_\oplus Re_\alpha$ で $e_\alpha Re_\alpha$ が local ring である．

更に，次は同値：

i′． $\underline{M}_R^+$ が perfect である．

ii′． $\{e_\alpha J(R)\}$ が right T-nilpotent である．

iii′． gl.dim R = w.gl.dim R

最後に，finite representation type の algebra で hereditary ring が重要になるが，semi-perfect で hereditary あるいは semi-artinian な Grothendieck category は三角行列を一般化

した比較的見易い形の category になる．その方法も [10]，[11] 等による tensor algebra の考から出発しており，finite representation type の研究にも関係が深いことを附言しておく．

文　献

1. M. Auslander: Notes on representation theory of Artin algebras, Brandeis Univ. 1971-72.
2. M. Auslander: ——— II, to appear.
3. M. Auslander: ——— III, to appear.
4. G. Azumaya: Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull-Remak-Schmidt's theorem, Nagoya Math. J. 1 (1950), 117-124.
5. H. Bass: Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 466-488.
6. S. Eilenberg: Homological dimension and syzygies, Ann. Math. 64 (1956), 328-336.
7. P. Freyd: Abelian categories, Columbia Univ., N. Y., 1962.
8. K. R. Fuller and I. Reiten: Note on rings of finite representation type and decompositions of modules, to appear.
9. K. R. Fuller: On rings whose left modules are direct sum of finitely generated modules, to appear.
10. P. Gabriel: Des categories abeliennes, Bull. Soc. Math. France, 90 (1962), 323-448.
11. E. Green: The representation theory of tensor algebras, J. Algebra 33 (1975), 435-462.
12. M. Harada: On categories of indecomposable modules II, Osaka J. Math. 8 (1971), 309-321.
13. M, Harada: Small submodules in a projective module and semi-T-nilpotent set, to appear.
14. M. Harada: Perfect catogories I, Osaka J. Math. 10 (1973), 329-341.
15. M. Harada: ——— II, ibid., 10 (1973), 343-355.
16. M. Harada: ——— III, ibid., 10 (1973), 357-367.
17. M. Harada: ——— IV, ibid., 10 (1973), 585-596.

18. B. E. Mares: Semi-perfect modules, Math. Z. 83 (1963), 347-360.
19. B. Mitchell: Theory of categories, Academic Press, N. Y., 1965.
20. C. Nastasesucu et N. Popescu: Anneaux semi-artiniens, Bull. Soc. Math. France 96 (1968), 357-368.
21. M. Weidenfeld et G. Weidenfeld: Ideaux d'une categories, application aux categories semi-perfect, C. R. Acad. Sci. Paris, 270 (1970), Serie A 1569-1771.
22. K. Yamagata: On projective modules with the exchange property, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Ser. A, 12 (1974), 39-48.

On representations of algebras IV.
— Rings of finite representation type —

山形邦夫　（筑波大）

Brauer-Thrall conjecture に関する Roiter - Auslander の肯定的解答と、環が finite type であるための条件（Auslander-Tachikawa）とを紹介する。

"Artin環上の有限生成直既約加群の長さが有界（bounded type）なら、有限生成直既約加群は有限個（finite type）であるか？"

これは Brauer-Thrall conjecture と言われて、部分的に肯定的解答が得られていただけで長い間環論の中心的話題の一つとなっていたのであるが、1968年に Roiter が体上の多元環に対して肯定的に答え、最近、Auslander によって、完全に解答されたのである。

次に紹介するのは，その研究歴（完全ではない）である。

<u>1</u>. <u>G. Köthe</u> (1934)

可換Artin環A上の有限生成加群がcyclic (Köthe ring) ならば、Aはuniserialである。

・<u>Cohen-Kaplansky</u>

A：可換Köthe環 ⇒ A：uniserial

・<u>Warfield, Jr.</u>

A：可換Artin環のとき，

A：Köthe ⇔ A：uniserial

⇔ すべての加群は，完全直既約加群の直和．

・<u>Nakayama</u>

Serial ring は Köthe ring

<u>2</u>. <u>H. Brummund</u> (1939)

$A = KG$, $K =$ a field, $ch(K) = p$,

$G =$ non-cyclic p-group

ならば，A は unbounded type.

Higmann (1954)

$A = KG$, K = a field, G = a finite gr.

$0 < ch(K) \neq |G|$

のとき. A = finite type

$\Leftrightarrow$ G の p-Sylow subgroup が cyclic

$\Leftrightarrow$ A = bounded type.

3. Yoshii (1956)

A が algebra over a field K, のとき

$Rad(A)^2 = 0$ なら conjecture は正しい。

4. Curtis-Jans (1965)

A = algebra over a closed field K.

で. すべての直既約加群の socle が. 同型な simple submodules を2つ以上含まない

ならば. A は finite type.

5. Roiter [2] (1968)

A が. 体 K 上の algebra なら. 予想は

正しい。

(注) 5. から. 4 は容易に証明出来る。

6. Auslander[1](1974)

Aが left artin ring なら 予想は正しい。

§1. Auslander[1] による証明の概略を述べるが、証明はかなり Functor category の概念を用いているので、ここでは、Ⅲで紹介された Gabriel (1962) の idea を用いて、必ずしも単位元をもたない環上の加群の話に一部を還元して紹介することにする。こうすることによって、例えば Yoneda lemma や Freyd の tensor product の定理などが自明な性質となってしまう(!!)からである。但し、都合上、証明はかなり略すことになるので、(もとの)詳しい証明は、[1]を参照のこと。

以下、Aは単位元をもつ left artinian ring とし、有限生成加群の category を mod-A functor category Funct(mod-A, Ab) がひきおこす環を R (=Aの functor ring)で、R-加群と

して. $RM=M$ を満足するものを考える(III 参照)

<u>定理 1</u> (Roiter-Auslander)

<u>次は同値</u>;

a) <u>A is of finite (rep.) type</u>.

b) i) $M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \longrightarrow M_n \xrightarrow{f_n} M_{n+1} \longrightarrow \cdots$

$f_n \cdots f_1 \neq 0$ $(\forall n)$, M_i=有限生成直既約

$\Rightarrow$ $\exists s$: f_n=同型 for all $n \geq s$.

ii) $\cdots \longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_n} M_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow M_2 \xrightarrow{f_1} M_1$

$f_1 \cdots f_n \neq 0$ $(\forall n)$, M_i=有限生成直既約

$\Rightarrow$ $\exists s$: f_n=同型 for all $n \geq s$.

(注) b-i, b-ii) の条件は、それぞれ noetherian, conoetherian condition (Auslander) と言われているが、III における T-nilpotent system の概念と一致する。

証明には、定義と補題が必要である。

<u>補題 1</u> <u>次は同値</u>

a) <u>A : finite type</u>

b) i) simple left R-module は有限表示的である。

ii) zero でない left R-module は non-zero socle をもつ。

証明は、この命題に帰着させる。以下、N を R の radical とする。

補題2. M: R-module, $M \subsetneqq Re_\alpha$ ($e_\alpha = e_\alpha^2 \in R$) に対して次は同値

a) $M = Ne_\alpha$

b) $f: \bigoplus_{i=1}^{n} Re_{\alpha_i} \to Re_\alpha$ に対して ($e_{\alpha_i} = e_{\alpha_i}^2 \in R$),
$\mathrm{Im}(f) \subseteq M \Leftrightarrow f \neq$ epimorphism

c) b) において、$n=1$ として b) が成立。

補題3. $f: \bigoplus_i Re_{\alpha_i} \to Re_\alpha$ を non-epi. とする。次は同値

a) $f(\bigoplus_i Re_{\alpha_i}) = Ne_\alpha$

b) P を任意の有限生成 (f.g.) projective R-module, $g: P \to Re_\alpha$ を non-epi. とすると

$\exists : h : P \to \bigoplus_i Re_{\alpha_i}$ $\underline{s.t.\ g = fh}$.

c) <u>b)において、$P = Re_\beta$ $(e_\beta = e_\beta^2 \in R)$ とおいて b)が成立</u>。

証明) a) $\Rightarrow$ b) $\Rightarrow$ c) は明らか。

c) $\Rightarrow$ a). 仮定から、$\mathrm{Im} f \subseteq Ne_\alpha$. 今 $\mathrm{Im} f \neq Ne_\alpha$ と仮定すると、$e_\beta a e_\alpha \notin \mathrm{Im} f$ となる元 $e_\beta a e_\alpha \in Ne_\alpha$ が存在する。そこで $g : Re_\beta \to Re_\alpha : re_\beta \mapsto re_\beta a e_\alpha$, とおけば 明らかに g は epi. ではない $(\because\ g(Re_\beta) \subseteq Ne_\alpha \subsetneq Re_\alpha)$

故に、$\exists h : Re_\beta \to \bigoplus_i Re_{\alpha_i}$ s.t. $fh = g$.

$\therefore\ e_\beta a e_\alpha = g(e_\beta) \in f(\bigoplus_i Re_{\alpha_i})$ … 矛盾.

<u>定義</u> 1) $f : \bigoplus_{i=1}^n Re_{\alpha_i} \to Re_\alpha$: almost splittable

$\overset{def.}{\Longleftrightarrow}$ a) $f \neq$ epi. $\Leftrightarrow$ a) $f \neq$ epi.

b) P : $^\forall$f.g. proj.

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "\exists h"'] \arrow[d, "^\forall g \neq \text{epi.}"] \\ \bigoplus_{i=1}^n Re_{\alpha_i} \arrow[r, "f"'] & Re_\alpha \end{tikzcd}$$

b')

$$\begin{tikzcd} & Re_\beta \arrow[dl, dashed, "\exists h"'] \arrow[d, "^\forall g \neq \text{epi.}"] \\ \bigoplus_{i=1}^n Re_{\alpha_i} \arrow[r, "f"'] & Re_\alpha \end{tikzcd}$$

2) $f : {}_AN \to {}_AM$, $M \in \mathrm{mod}\,A$, $N \in \mathrm{mod}\text{-}A$,
M: 直既約, とする。

f が almost splitable とは, R-加群の中で考えて, $\mathrm{Hom}_A(\ ,f)$ が almost splitable.
従って, $f : {}_AN \to {}_AM$ almost splitable

$\Leftrightarrow$ a) $f \neq$ splitable epi.

b) $\exists h$ — ${}_AX$: $\forall$ f.g. A-module, $\forall g \neq$ splitable epi.

$$\begin{tikzcd} & {}_AX \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "\forall g"] \\ {}_AN \arrow[r, "f"'] & {}_AM \end{tikzcd}$$

<u>系</u> <u>次は同値</u>.

a) <u>Re_α/Ne_α : 有限表示的 (finitely presented)</u>

b) $\exists f : \bigoplus_{i=1}^{n} Re_{\alpha_i} \to Re_\alpha$: <u>almost splitable</u>

証明) 定義より明らか。

以下において, $F : \mathrm{mod}\text{-}A \to Ab$ を covariant additive functor とする.

<u>定義</u> 1) $x \in F(M)$: minimal element (min el)

$\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ $x \neq 0$, $M \xrightarrow{f} N$, $\mathrm{Ker} f \neq 0 \Rightarrow F(f)(x) = 0$.

2) $x \in F(M)$: universealy minimal element (uni. mini. el.)

$\overset{def.}{\Leftrightarrow}$ $x \neq 0$, $M \xrightarrow{f} N$ が splitable mono. ではないならば $F(f)(x)=0$.

<u>補題4</u> <u>F: mod-$A \to Ab$ に対して</u>

a) <u>$F(M) \ni \exists x$: uni. mini. el. $\Rightarrow$ M: 直既約</u>

b) <u>M が noether A-module, $F(M) \ni x \neq 0$ とすると. $\exists f: M \to M'$ s.t. $F(f)(x)=$ mini. el</u>

証明) a)は明白. b) $\mathcal{S} = \{M'' \subseteq M \mid F(M \to M/M'')(x) \neq 0\}$ とおくと. $M \in \mathcal{S}$ より $\mathcal{S} \neq \phi$.
従って. $\mathcal{S}$ に極大元 M_0 が存在することがわかる。そこで $f: M \xrightarrow{nat.} M/M_0 = M'$ とおけば良い。

<u>補題5.</u> <u>定理1の条件 b-i が成立するなら. F: mod-$A \to Ab$, $F \neq 0$, に対して $F(M)$ が uni. mini. el. を含むような M が存在する。</u>

証明) $\mathcal{S} = \{(M_i, x_i)_{i \in I} \mid M_i \in$ mod-A, $F(M_i) \ni x_i$

x_i = mini. el. $\}$ とおくと、補題4から. $\mathcal{S} \neq \phi$ で. M_i は直既約. $f: M_i \to M_j$, $F(f)(x_i) = x_j$ のときに、$f: (M_i, x_i) \to (M_j, x_j)$ として $\mathcal{S}$ に順序を入れると. 極大元 (M_0, x_0) の存在がわかる。そこで: (M_0, X_0) の極大性から. X_0 が uni. mini. el. であることを定義から確認すればよい(容易)。

補題6. mod-A が定理1の条件 b-i) を充足すば. Simple R-module は有限表示的である。

証明) $M \in$ mod-A を直既約とする。系. から. almost splitable morphism $f: N \to M$ の存在を示せばよい。

i) M = projective の場合.

M' を極大部分加群とし. $f: M' \to M$ を inclusion とする。$g: X \to M$, $X \in$ mod-A, を. splitable epi. ではない morphism とすれ

ば $g(X)\subseteq M'$. $\therefore$ $h: g(X)\hookrightarrow M'$ とおくと.
$g = fh$. 故に $f: M' \to M$ は almost split morphism.

ii) $M \neq$ projective のとき.

明らかに $\mathrm{Ext}_A^1(M,-): \mathrm{mod}\text{-}A \to Ab$ は non-zero. 従って. 補題5 より. $\mathrm{Ext}_A^1(M, M')$ が uni. mini. ele. $x \neq 0$ を含むような $M' \in \mathrm{mod}\,A$ をとれる。 $x: 0 \to M' \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} M \to 0$ とおく。 g が almost split であることを示せばよい。 $h: X \to M$ を splitable epi. ではない任意の morphism とする。 g も h も splitable epi. ではないから. $\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(-,g))$ も. $\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(-,h))$ も. $Ne_M = \mathrm{rad}\,\mathrm{Hom}(\ ,M)$ に含まれる (e_M は. M に対応する巾等元). 従って. $t = h \oplus g: N \oplus X \to M$ とおくと.
$\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(\ ,t)) \subseteq Ne_M$. 即ち. t は分解しない。 故に $y = \mathrm{Ext}_A^1(M, x) \neq 0$,

$y: 0 \to K \to N \oplus X \xrightarrow{t} M \to 0$, $K = \mathrm{Ker}\,t$.

$$\begin{tikzcd}
x: 0 \arrow[r] & M' \arrow[r] \arrow[d, "u"'] & N \arrow[r] \arrow[d, "\binom{1}{0}"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
y: 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & N\oplus X \arrow[r] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

x = uni. mini. el. であるから、$v: K \to M'$ で $vu = 1_{M'}$ となるものがある。従って、

$Ext^1_A(M,v)\left(Ext^1_A(M,u)(x)\right) = Ext^1_A(M,vu)(x)$

$= x$ ∴次の diagram が考えられる：

$$\begin{tikzcd}
y: 0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "v"] & N\oplus X \arrow[r, "t"] \arrow[d, "w"] & M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
x: 0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "f"] & N \arrow[r, "g"] & M \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

∴ $h = t|X$ とおけば、$h = (gw)|X = g\cdot(w|X)$.

これは、g が almost split であることを示す。

以上から、定理1 b-i) ⇒ 補題1 b-i).

次に定理1 b-ii) ⇒ 補題1 b-ii) を示せば良い。

Functor F を、対応する R-module M で、uni. min. el. を考えなおすと、次の補題を得る；

<u>補題2.</u> <u>$M \ni x = \sum_{i=1}^{n} e_{\alpha_i} x$ が uni. mini. el.</u>

である条件は epimorphismでない任意の

$$g=(a_{ji}) : \bigoplus_{j=1}^{m} Re_{\beta_j} \to \bigoplus_{i=1}^{n} Re_{\alpha_i},$$

に対して、$g(x)=\sum_{i=1}^{n} a_{ji} e_{\alpha_i} x = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} x = 0$.

補題8. a) $M \ni x$ が uni. min. el.

$\Leftrightarrow$ (i) $\exists e_\alpha : x = e_\alpha x$, (ii) Rx : simple

b) $Soc_R(M) \neq 0 \Leftrightarrow M \ni \exists x$: uni. min. el

証明は定義からほとんど明らかであるので省略する。今、定理1の条件 b-ii を仮定すると、補題5と同様にして R-module が uni. min. el.（即ち functor F が uni. min. el.）をもつことがわかるので、補題8から、補題1の条件 b-ii を結論出来ることがわかる。

§2. finite type の rings に対する森田同値類について。

この節では結果のみを記す。

定理 2 (Auslander, Tachikawa-Ringel)

次の I〜III における それぞれの環の森田同値類は 1 対 1 に対応している

I. A : artin ring of finite type.

II. B : artin ring, gl.dim $B \leqq 2$, dom.dim $B \geqq 2$

III C : artin ring, (left and right) QF-3 maximal quotient ring, gl.dim $C \leqq 2$.

但し. QF-3, 及び dom.dim. は. 次の様に定義される: A を artin ring とする,

i). A : left QF-3

$\Leftrightarrow \exists$ (unique) minimal faithful left A-module.

ii) dom.dim ${}_AM \geqq n$

$\Leftrightarrow \exists : 0 \to M \to X_1 \to \cdots \to X_n$: exact,

各 X_i は. projective, injective A-加群.

定理3. (Tachikawa) category $\mathcal{C}$ において次は同値:

i) $\mathcal{C} \cong {}_A\mathfrak{M}$, A = ring of finite type

ii) $\mathcal{C} \cong {}_B\mathcal{P}$ (= the category of all projective left B-modules), B = semi-primary, QF-3 maximal quotient ring, gl.dim $B \leq 2$.

文献

[1] Auslander: Representations of artin algebras II. Comm. in Alg. 1 (4), 269-310 (1974).

[2] Roiter: Izv. Akad. SSSR, Ser. Math. 32 (1968) pp. 1275-1282.

On representations of algebras V.
— Rings with decomposition property.

筑波大　岩永恭雄

最初に幾つかの notation を与える.

環 Λ に対して,

$\mathrm{Mod}(\Lambda)$ = the category of all left Λ-modules,

$\mathrm{mod}(\Lambda)$ = the category of all finitely generated left Λ-modules,

$\underline{P}(\Lambda)$ = the category of all projective left Λ-modules,

$\underline{p}(\Lambda)$ = the category of all finitely generated projective left Λ-modules,

$[\mathcal{C}, \mathcal{A}b]$ = the category of additive contravariant functors from a category $\mathcal{C}$ to the category of abelian groups $\mathcal{A}b$,

$C \in obj(\mathscr{C})$ に対して，$(-, C) = Hom_{\mathscr{C}}(-, C)$.

ここで考察する問題は，次の定義がその出発点となる.

<u>定義</u> 環Λ上のすべての左加群が有限生成部分加群の直和に分解されるとき，Λは *left decomposition property* (以下，*l. d. p.* と略す) を持つといい，*right decomposition property* についても同様に定義する.（*r. d. p.* と略す）

このような環を取り上げて，最初に著しい結果を得たのは S. U. Chase である．即ち，

<u>定理</u> (Chase, '60) *l. d. p.* を持つ環は左 artin 環である.

これから，以下考える環はすべて左 artin 環とする.

ここで，次の予想を提出する．この予想の根拠はその後に述べる結果にある.

<u>予想</u>　l.d.p.を持つ環は，finite representation typeであろう.

ここに，非同型な有限生成直既約左加群を有限個しか持たない左artin環をfinite representation typeであると言う.(以下，単にfinite typeと言う.)　このとき，非同型な直既約左及び右加群は有限個で，右artin環である.

<u>予想の根拠となる定理</u>.(Auslander & Ringel-Tachikawa, '72)　finite typeの環は，l.d.p.及びr.d.p.を持つ.

[証明の概略]　Λをfinite typeの環とし，${}_\Lambda G$をすべての非同型な直既約左加群の直和とすると，$G\in \mathrm{mod}(\Lambda)$で，$\Gamma = \mathrm{End}({}_\Lambda G)$はartin環になることが知られている.　そこで，$P = \mathrm{Hom}_\Lambda(G, \Lambda)$とおくと，$P$は$(\Gamma, \Lambda)$-bimoduleで;

左 Γ-加群として有限生成射影的となる. 更に, $\mathcal{E}nd(G_\Gamma) \cong \Lambda$ より,

$$\mathrm{Hom}_\Gamma(P, -) : \underline{P}(\Gamma) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}(\Lambda)$$

なる equivalence を得る. (逆の functor は $\mathrm{Hom}_\Lambda(G,-)$ で与えられる.) しかも, この equivalence は各々の subcategory の間の equivalence $\underline{p}(\Gamma) \xrightarrow{\sim} \mathrm{mod}(\Lambda)$ を導く. artin 環上の射影加群については l.d.p. 及び r.d.p. が成立することはよく知られているから, 求める定理を得る.

これから予想について述べるが, 現在のところ, 完全に解けたわけではないが, 予想を肯定する注目すべき結果が2つ得られているのでそれらを証明の概略と共に以下に紹介しようと思う.

予想に対する部分的な解答.

(1) Auslander ('74) : artin algebra (i.e. その中心上有限生成な artin 環) が l.d.p. を持て

ば，それは finite type である．

(2) Fuller-Reiten ('75)： l.d.p. 及び r.d.p. を持つ環は finite type である．

この2つの結果から，予想はかなり追いつめられた感じであるが，decomposition property を持つということが左右対称であるかどうかが問題である．

まず Auslander の結果について証明の概略を述べる．On representations of algebras IV で述べられている次の定理を使うべく証明は進められる．

__定理__ (Auslander, '73)．左 artin 環 Λ について，次は互いに同値：

(1) Λ は finite type，

(2) (a) 任意の simple object $S \in [\mathrm{mod}(\Lambda), Ab]$ に対して，S は coherent．(On representations

of algebras II を参照.)

(b) $[\mathrm{mod}(\Lambda), \mathcal{Ab}]$ は semi-artin. (On representations of algebras III を参照.)

(3) (a) noether condition; $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \to M_i \xrightarrow{f_i} \cdots$ が有限生成直既約左加群 $\{M_i\}$ の間の単射ならば, $\exists n>0$; $i \geqq n$ なる i に対して f_i は同型.

(b) conoether condition; $\cdots \xrightarrow{f_i} M_i \to \cdots \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_0} M_0$ が有限生成直既約左加群 $\{M_i\}$ の間の全射ならば, $\exists n>0$; $i \geqq n$ なる i に対して f_i は同型.

次に3つの命題を用意する.

<u>命題 1</u> (Gruson). 左 artin 環 Λ に対して, Λ が l. d. p. を持つ為の必要十分条件は Λ が noether condition を充たすことである.

[必要性の証明] $M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_i \subseteq \cdots$ で，各 M_i は有限生成直既約左 Λ-加群とするとき，

$$_\Lambda M = \varinjlim M_i = \bigcup_{i \geq 0} M_i$$

とおくと，Λ が l.d.p. を持つから，特に M は有限生成直既約な直和因子 $M' \neq 0$ を含む．このとき M' が有限生成より，

$$\exists n > 0 : \ M' \subseteq M_i \ \text{ for } \forall i \geq n.$$

従って，M' は M_i $(i \geq n)$ の直和因子でもあるが，今 M_i は直既約だから，$M' = M_i$ $(i \geq n)$．即ち，Λ は noether condition を充たす．

artin algebra の場合に予想が肯定的となる key point は次の命題にある．

<u>命題 2.</u> (Auslander-Reiten). artin algebra Λ については，$[\mathrm{mod}(\Lambda), \mathcal{Ab}]$ のすべての simple object は coherent.

この命題の証明の為には，次の注意が必要となる．

1. Λ を左 artin 環とするとき，2つの類

$$\{ S \in [\mathrm{mod}(\Lambda), \mathcal{A}b] \, ; \; S \text{ は simple object} \}$$

と $$\{ C \in \mathrm{mod}(\Lambda) \, ; \; C \text{ は直既約} \}$$

の間に1対1の対応がある．その対応は，

$$S \longmapsto C \text{ with } S(C) \neq 0,$$

$$C \longmapsto S = (-, C)/Rad(-, C)$$

で与えられる．ここに，$Rad(-, C)$ は $(-, C)$ という object の radical．（Reference [2] を参照）

2. Λ を左 artin 環，${}_\Lambda C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ を直既約，$S = (-, C)/Rad(-, C)$ とするとき，

S が coherent

$\Longleftrightarrow$ $\exists B \in \mathrm{mod}(\Lambda)$，$\exists f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(B, C)$，但し f は splitable epi でない．そして，$^\forall X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ と splitable epi でない $\forall g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X, C)$ に対して，$\exists h \in \mathrm{Hom}_\Lambda(X, B)$ s.t. $g = fh$．

$$\Longleftrightarrow \quad \exists B \in \mathrm{mod}(\Lambda), \quad \exists f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(B, C)$$

$$\text{s.t.} \quad (-, B) \xrightarrow{(-,f)} \mathrm{Rad}(-, C) \longrightarrow 0 \quad (\text{exact})$$

このような f を almost split morphism という.

このとき,

$$(-, B) \xrightarrow{(-,f)} (-, C) \xrightarrow{\text{canonical}} S \longrightarrow 0$$

は S の minimal projective resolution となる.

以上から, 命題 2 の証明の為には,

"Λ を artin algebra, $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ を直既約とするとき,

$\exists B \in \mathrm{mod}(\Lambda)$, $\exists f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(B, C)$ で f は almost split morphism"

を示せばよいが, これを示す為にもう少し準備をする.

Λ を artin algebra; $M \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ とし, M の minimal projective resolution を

$$P_1 \xrightarrow{f} P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0, \qquad P_i \in \underline{P}(\Lambda)$$

とするとき, $M^*_\Lambda = \mathrm{Hom}_\Lambda(M, \Lambda)$ 等とおくと,

$$P_0^* \xrightarrow{f^*} P_1^* \longrightarrow \mathrm{Coker}(f^*) \longrightarrow 0$$

は Coker(f^*) の minimal projective resolution になる. この Coker(f^*) は, On representations of algebras II の Auslander-Bridger duality の項で述べられているようにある意味で M のみに依存して一意的に決まる. そこで, この Coker(f^*) を $Tr(M)$ と書く.

次に, M の Λ-準同型 f について,

$$\exists P \in \underline{P}(\Lambda),\ \exists g \in \mathrm{Hom}_\Lambda(M, P),\ \exists h \in \mathrm{Hom}_\Lambda(P, M)$$
$$s.t.\quad f = hg$$

となる f の全体 $\mathcal{P}(M)$ は $\mathcal{E}nd({}_\Lambda M)$ の ideal になる. そこで, $\underline{\mathcal{E}nd}({}_\Lambda M) = \mathcal{E}nd({}_\Lambda M)/\mathcal{P}(M)$ とおく.

これらの準備を基にして, 命題2を証明する. Λ を artin algebra, R を Λ の中心とするとき, $\forall X \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ に対して,

$$D(X) = \mathrm{Hom}_R(X, R/\mathrm{Rad}(R))$$

と定めると, D は $\mathrm{mod}(\Lambda) \longrightarrow \mathrm{mod}(\Lambda)^{op.}$ なる duality になる. $\mathrm{mod}(\Lambda)^{op}$ は $\mathrm{mod}(\Lambda)$ の opposite category を表わす．　さて，任意の直既約 $C \in \mathrm{mod}(\Lambda)$ に対して，

(i) C が射影的のとき，$C' = Rad(C)$ は C の唯一の極大部分加群であるから，inclusion $C' \longrightarrow C$ を考えれば，これは almost split morphism. なぜなら，$g : X \to C$ を splitable epi でないとすると，C が射影的より g は全射でない．よって，$\mathrm{Image}(g) \subseteq C'$.

(ii) C が射影的でないとき，$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, D\mathrm{Tr}\,C)$ の <u>End</u>$({}_\Lambda D\mathrm{Tr}\,C)$-加群としての socle は simple となるので，その生成元を

$$0 \longrightarrow D\mathrm{Tr}\,C \longrightarrow B \xrightarrow{f} C \longrightarrow 0$$

とすると f は almost split morphism となる．この証明は非常に面白いものであるが，長いのでここには紹介しきれない．Reference [3] を参照

最後に，

<u>命題 3.</u> (Auslander) 左 artin 環 Λ が noether condition を充たせば，$[\mathrm{mod}(\Lambda), \mathcal{A}b]$ は semi-artin.

この命題の証明は，On representations of algebras IV 及び Reference [4] を参照．

以上3つの命題と Auslander の finite type の環を特徴付ける上述の定理を組み合わせれば，予想に対する結果(1)を得る．

次に，Fuller-Reiten の結果(2)について述べる．　まず次の命題を準備とする．(Cf. 命題1.)

<u>命題4.</u> (Fuller)　環 Λ が l. d. p. を持てば，$\{M_i \in mod(\Lambda)$; M_i は直既約$\}$ の間の非同型写像

$$M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} \cdots$$

に対して，　$\exists n > 0$:　$f_0 f_1 \cdots f_n = 0$.

ここで，写像 f_i は右から作用する．

[証明の概略]　${}_\Lambda G = \coprod_{\alpha \in I} \{M_\alpha \in mod(\Lambda)$; M_α は直既約かつ $M_\alpha \cong M_\beta$ iff $\alpha = \beta\}$ とし，

$$R = \{f \in End({}_\Lambda G) ;\ \text{有限個の}\ \alpha\ \text{以外では}\ M_\alpha f = 0\},$$

$$\widehat{\mathrm{Hom}}_\Lambda(G, M) = \{ f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(G, M) \,;\, \text{有限個の}\alpha\text{以外では}M_\alpha f = 0 \},$$

$$\mathrm{Add}(G) = \{ X \in \mathrm{Mod}(\Lambda) \,;\, X\text{は}G\text{のcopyの直和の直和因子} \}.$$

と定めると,

$$\widehat{\mathrm{Hom}}_\Lambda(G, -) : \mathrm{Add}(G) \longrightarrow \underline{P}(R),$$

$$G \otimes_R - \quad : \quad \underline{P}(R) \longrightarrow \mathrm{Add}(G)$$

は equivalence で, 互いの逆 functor になっている.

R は一般に単位元を持たないが, 原田[9]の結果を使えば, Λ が l. d. p. を持てば, R は左 perfect 環となり, R の radical が左 T-nilpotent であることから, 求める結果を得る.

この命題を用いて我々の予想に対する結果(2)を証明するが, Auslander の定理によれば, 後は conoether condition のみを示せばよい.

今,

$$\cdots \xrightarrow{f_i} M_i \longrightarrow \cdots \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_0} M_0$$

において, 各 M_i は有限生成直既約左加群, 各 f_i は全射とすると,

$$\mathrm{Tr}M_0 \xrightarrow{\mathrm{Tr}f_0} \mathrm{Tr}M_1 \xrightarrow{\mathrm{Tr}f_1} \cdots \longrightarrow \mathrm{Tr}M_i \xrightarrow{\mathrm{Tr}f_i} \cdots$$

を得る．ここで，各 $\mathrm{Tr}M_i$ は有限生成直既約右加群であり，

$$f \text{ が全射なら，} \mathrm{Tr}f \neq 0,$$

$$f \text{ が同型} \iff \mathrm{Tr}f \text{ が同型}$$

に注意すれば，もし無限個の i に対して f_i が非同型とすると，$\mathrm{Tr}f_i$ も非同型になるから，

$$\exists\, m>0 : \mathrm{Tr}f_0 \cdot \mathrm{Tr}f_1 \cdots \mathrm{Tr}f_m = 0.$$

よって，

$$\mathrm{Tr}(f_0 f_1 \cdots f_m) = \mathrm{Tr}f_0 \cdot \mathrm{Tr}f_1 \cdots \mathrm{Tr}f_m = 0$$

これは $f_0 f_1 \cdots f_m$ が全射であることに反する．従って，$\{f_i \,;\, i \geqq 0\}$ の中，非同型なものは有限個となり，conoether condition が成立する．

終りに，予想については次の事が成立すれば，予想は肯定的となることを述べておく．

Λ を l.d.p. を充たす環とし，M, M_α $(\alpha \in I)$

を有限生成直既約とするとき，M が $\coprod_{\alpha\in I} M_\alpha$ の直和因子であれば，$\exists \alpha \in I : M \cong M_\alpha$ となるか？

References

[1] Auslander, M.: Coherent functors.

[2] _____ : Representation theory of artin algebras. II, Comm. in Alg. 1 (1974).

[3] _____ : Representation theory of artin algebras. III, Comm. in Alg. 3 (1975).

[4] _____ : Large modules over artin algebras, To appear.

[5] Auslander, M. & Reiten, I.: Stable equivalence of dualizing R-varieties, Adv. in Math. 12 (1974).

[6] Chase, S. U.: On direct products of modules, Trans. AMS 97 (1960).

[7] Fuller, K. R.: On rings whose left modules are direct sums of finitely generated modules, To appear.

[8] Fuller, K. R. & Reiten, I.: Note on rings of finite representation type and decompositions of modules, Proc. AMS 50 (1975).

[9] Harada, M.: On perfect categories. I, Osaka J. Math. 10 (1973).

On Quotient Categories

東京学芸大　政池 寛三

環 R, S 上の bimodules ${}_SP_R$ と ${}_RQ_S$ とにおいて bimodule homomorphisms

$$(\ , \ ) : Q \otimes_S P \longrightarrow R$$
$$[\ , \ ] : P \otimes_R Q \longrightarrow S$$

があって

$$q[p, q'] = (q, p)q'$$
$$p(q, p') = [p, q]p'$$

が成立するとき, Morita context $\langle R, S, P, Q \rangle$ が存在するという.

B. J. Müller [3] はこの関係を用いて, 環 R と S のある種の hereditary torsion theory の quotient category 間の同値を示した. この結果から, 次の命題は容易に得られる:

Proposition. 環 R の torsion class $\mathcal{T}_R$, torsion free class $\mathcal{F}_R$ とする任意の hereditary torsion theory を $(\mathcal{T}_R, \mathcal{F}_R)$ とする. これに対応する right ideals の topologizing idempotent filter を f_R とし, $S = End(M_R)$, $M \in \mathcal{F}_R$ で M の trace ideal は f_R に属しているとする. このとき right S-modules $\{Hom(M_R, N_R) \mid N \in \mathcal{F}_R\}$ を torsion free class とする largest (hereditary) torsion theory ([4] の意味で) を $(\mathcal{T}_S, \mathcal{F}_S)$, $\hat{M}_R$ を M_R の divisible-hull とすれば, $\hat{S} = End(\hat{M}_R)$ は S の $(\mathcal{T}_S, \mathcal{F}_S)$ における localization になっている.

これを Lambek torsion theory に適用すれば,

Theorem 1. 前の Proposition において, $(\mathcal{T}_R, \mathcal{F}_R)$ が Lambek torsion theory ($\mathcal{F}_R$ は $E(R_R)$-torsionless modules の全体, $E(R_R)$ は R_R の injective-hull) であれば, $(\mathcal{T}_S, \mathcal{F}_S)$ も

Lambek torsion theory により, End$(\hat{M}_R)$ は End(M_R) の maximal right quotient ring である.

Morita context $\langle R, S, P, Q\rangle$ において

$$(q, P) = 0 \curvearrowright q = 0 \quad ; \quad (Q, p) = 0 \curvearrowright p = 0$$
$$[P, q] = 0 \curvearrowright q = 0 \quad ; \quad [p, Q] = 0 \curvearrowright p = 0$$

のとき non-degenerate Morita context という. 今後 R と S との間に non-degenerate Morita context が存在するときには $R \equiv S$ とおく. 関係 $\equiv$ は同値関係である.

Theorem 2. 次は同値である:

(i) $R \equiv S$.

(ii) faithful torsionless right R-module M が存在して, S は End(M_R) の maximal right quotient ring の中に次の条件をみたす様に埋め込むことができる:

(a) $S \subset \mathrm{End}(M_R)$.

(b) $[\mathrm{End}(M_R)] \cdot I \subset S$ となる S の dense right ideal I が存在する.

(iii) faithful torsionless right S-module K が存在して, R は End(K_S) の maximal right quotient ring の中に (ii) と同様の条件をみたす様に埋め込むことができる.

Q を simple Artin 環とする. Q はある division ring D と Morita equivalent である. このとき, Q と D の right orders の間にこの同値関係を拡張した関係を導くことが出来る.

ここでは, 二つの Morita equivalent な semi-simple rings の right orders の間に, Theorem 2 の結果を用いて, 一つの関係を導き出す.

Q を classical right quotient ring とする二つの right orders R と T が $\sim$ equivalent であるとは，Q の単元 a, b, c, d が存在して $aRb \subset T$, $cTd \subset R$ となることである．特に $a = c = 1$ のとき，R と T とは $\underset{\sim}{\text{right}}$ equivalent であるという．

Theorem 3. R と T が $\sim$ equivalent のとき，次が成立つ．

(i) faithful torsionless right T-module M が存在して $\mathrm{End}(M_T)$ は R と $\underset{\sim}{\text{right}}$ equivalent である．

(ii). $R \equiv T$ が成立する．

[証明] Q を R と T の classical quotient ring とする．$aRb \subset T$, $cTd \subset R$ とする．$A = \{q \in Q \mid q(caRbT) \subset caRbT\}$, $M = caRbT$ とおく．M は faithful torsionless right T-module で，$A \cdot (caRbTd) \subset c(aRb)Td \subset cTd \subset R$. $caRbTd$ は Q の単元を含み，$A \cong \mathrm{End}(M_R)$ であるから (i) は明らか．この単元は T の元としてもよく，Q の単元を含む T の両側イデアルは dense right ideal だから；(ii) も明らか．

$R \equiv T$ なる関係は，R と T が semi-prime Goldie 環の場合は，Morita equivalence と classical quotient ring の中の $\sim$ equivalence の概念を同時に拡張したものとみられ，次の結果が導かれる．

Theorem 4. Q と S を森田同値な semi-simple rings とする．Q の中の任意の $\sim$ equivalent orders の class $\mathcal{C}_1$ に対して S の中の $\sim$ equivalent orders の class $\mathcal{C}_2$ が存在して

$$R \equiv T \quad (\forall R \in \mathcal{C}_1,\ \forall T \in \mathcal{C}_2)$$

が成立つ.

Theorem 5. Theorem 4 において, $\mathcal{C}_1$ に maximal right order R が存在すれば, $\mathcal{C}_2$ にも maximal right order T が存在して

$$T \cong \mathrm{End}\,(M_R)$$

$$R \cong \mathrm{End}\,(N_T) \quad ,$$

ここに M_R (resp. N_T) は faithful torsionless right R-(resp. T-) module である.

References

[1] H. Bass: The Morita theorem, Mineographed, 1962.
[2] K. Masaike: On equivalent orders in semi-simple rings, Bull. Tokyo Gakugei Univ. Ser. IV, 26 (1974).
[3] B. Müller: The quotient category of a Morita context J. Algebra 28 (1974).
[4] J. Lambek: Torsion theories, additive semantics, and rings of quotients, Lecture Notes in Math. 177, Springer, 1971.

Non-Commutative Krull Rings

大阪大 教養　丸林 英俊

Brungs [3] は非可換 Krull 環を定義し乗法的イデアル論を研究したが，彼の定義は可換 Krull 環上の完全行列環，可換 Krull 環上の極大整環及びネター的 Asano 整環を含まない．したがって彼の定義は非可換環及び Krull 環の歴史的立場から見るとあまり適当でないように思われる．ここでは，局所化の立場から，Brungs とは異なる非可換 Krull 環の定義を与え，その構造特にイデアル論を述べる．証明は概略に留めるか，省略したが，詳細については [6], [7] を参照されたい．

§1. 非可換 Krull 環の定義と例

以下を通して，R はアルチン的でない単位元を持つ素 Goldie 環とし，Q は R の（単純，アルチン的）商環とする．R を Q の<u>整環</u>と称する．F を R の上の右加法的トポロジーとする．R の F に関する商環を R_F であらわす．以下 F は essential 右イデアルからなるものとする．このとき $R_F = \varinjlim \mathrm{Hom}_R(I,R)$ $(I \in F)$ となる．

<u>定義 1.1</u> ([9])．F を R 上の右加法的トポロジーとする．F の任意の元 I に対して $IR_F = R_F$ が成立つとき，F は <u>perfect</u> という．

<u>定義 1.2</u>．R の overring R' が次の条件を満すとき；R' は<u>右 essential</u> という：

(i) $R' = R_F$，ここに F は R の上の perfect な右加法的トポロジー．

(ii) F の任意の元 I に対して $R'I = R'$ が成立つ．

R' が右且つ左 essential のとき，<u>essential</u> と呼ぶ．

<u>定義 1.3</u>．R の Jacobson 根基 $J(R)$ が極大イデアルで，$R/J(R)$ がアルチン環のとき R を <u>local</u> という．

定義 1.4. R が次の条件を満すとき，(非可換) Krull 環という：

(K1) $R = \cap_i R_i \cap \cap_j S_j$ $(i \in \mathbb{I},\ j \in \mathbb{J})$，ここに R_i, S_j は R の essential overrings で，$\mathbb{J}$ の cardinal number は有限.

(K2) R_i はネター的，local Asano 整環で，S_j はネター的単純環である.

(K3) R の任意の正則元 c に対して $cR_i \neq R_i$ $(R_i \neq R_i c)$ となる $i \in \mathbb{I}$ は有限個.

$J = \emptyset$ のとき，R は bounded であるという.

Krull 環の例をあげよう：

(i) 可換 Krull 環 D，極大 D-整環はともに bounded Krull 環である.

(ii) ネター的 Asano 整環は Krull 環である. 特に (Jacobson の意味で) bounded なネター的 Asano 整環は bounded Krull 環.

(iii) R が (bounded) Krull 環ならば完全行列環 $(R)_n$ もまた (bounded) Krull 環である.

(iv) R が Krull 環ならば多項式環 $R[x]$ もそうである.

「R が Krull 環ならば巾級数環 $R[[x]]$ も Krull？」は未解決である.

§2. Bounded Krull 環の v-イデアル

この節では Krull 環のいくつかの基本的性質を述べ，その後で (片側) v-イデアルを調べる.

命題 2.1. R が Krull 環ならば，R は (Asano の意味で) 極大整環である.

この命題は Krull 環の定義と [1] の定理 1.2 を用いて証明される.

A を R のイデアルとする. R/A で正則な元の全体を $C(A)$ であらわす. R が $C(A)$ に関して Ore condition を満すとき，$C(A)$ を

分母系とする R の商環を R_A であらわす.

<u>命題 2.2.</u> R' は R の essential overring で, ネター的, local, Asano 整環とする. P' を R' の唯一つの極大イデアルとするとき,

(1) $P = P' \cap R$ は R の素イデアル.

(2) R は $C(P)$ に関して Ore condition を満し, $R' = R_P$.

この命題は essential overring の定義と R' の性質とを用いて証明される.

<u>定義 2.1.</u> R を極大整環, I を R の (片側) R-イデアルとする. このとき, $I^* = (I^{-1})^{-1}$ と定義し, $I = I^*$ のとき I は <u>(片側) v-イデアル</u>と呼ばれる.

v-イデアル全体の集合 $v(R)$ は次の定義で半群をなす:
$A \circ B = (AB)^*$ $(A, B \in v(R))$.

$v(R)$ に関しては次の定理が成立する:

<u>定理 2.1</u>(Asano-Murata [2]). R が極大整環ならば $v(R)$ はアーベル群である. 特に整 v-イデアルに対して極大条件が満されるなら $v(R)$ は素 v-イデアルで生成された無限巡回群の直積である.

以下, $R = \cap_i R_i$ $(i \in \mathbb{I})$ を bounded Krull 環とする. P_i' を R_i のただ一つの極大イデアルとし, $P_i = P_i' \cap R$ とする. 命題 2.1 から P_i は R の素イデアルである. また命題 2.1, 定理 2.1 から $v(R)$ はアーベル群であるが, $\{P_i \mid i \in \mathbb{I}\}$ がその生成系であることを示す. 便宜のため $\mathbb{P} = \{P \mid i \in \mathbb{I}\}$ とおく.

<u>補題 2.1.</u> $\mathbb{P}$ の各元は v-イデアルである.

<u>補題 2.2.</u> 整(片側) R-イデアルは $\mathbb{P}$ の元の有限個の中積を含む.

<u>命題 2.3.</u> $R = \cap_i R_i$ $(i \in \mathbb{I})$ を bounded Krull 環とし, P を R の素イデアルとする. そのとき, P が極小素イデアルであるための必要十分条件は $P \in \mathbb{P}$.

この命題は補題 2.1, 2.2 を用いて証明される.

<u>定理 2.2.</u>　R を bounded Krull 環とする．そのとき

(1)　$v(R)$ は $\mathbb{P}$ の元により生成された無限巡回群の直積．

(2)　$v(R) \cong \prod G(R_P)$ $(P \in \mathbb{P})$，ここに $G(R_P)$ は R_P-イデアルの作る群．

(1) は定理 2.1，命題 2.3 より明らか．(2) は (1) より明らか．

bounded，ネター的 Asano 整環は bounded Krull であるが（§1の例），この逆が成立つ条件を考える．

<u>補題 2.3.</u>　R を bounded Krull 環，$P \in \mathbb{P}$ とする．そのとき $R_P = \varinjlim B^{-1}$，ここに B は P に含まれないイデアルを渉る．

<u>定理 2.3.</u>　R を bounded Krull 環とするとき，次は同値：

(1)　R は bounded Dedekind 環．

(2)　R は bounded，ネター的 Asano 整環．

(3)　R の素イデアルはすべて極大．

(1) $\Leftrightarrow$ (2) は Michler [8]，(2) $\Rightarrow$ (3) は Asano [1] による．

(3) $\Rightarrow$ (1)：まず仮定により，R の任意の素イデアル P は逆イデアルを持つことがわかる．次に補題 2.3 と Goldie の定理から R/P^n がアルチン環であることが示される．この事実と R が Goldie の意味で有限次元であることから R がネター環であることが証明される．これに [8] の定理 3.5 を適用して R の Dedekind 環であることが証明される．

再び，bounded Krull 環のイデアルを調べる．

<u>補題 2.4.</u>　R を bounded Krull 環，$P_1, \cdots, P_k \in \mathbb{P}$，$A = P_1 \cap \cdots \cap P_k$ とする．このとき

(1)　R は $C(A)$ に関して Ore condition を満し

$$R_A = R_{P_1} \cap \cdots \cap R_{P_k}.$$

(2)　$A^* = AR_A$ とおけば，R_A/A^* は R/A の商環で，アルチン的準素環．

(3)　R_A は単項イデアル環で，$P_1R_A, \cdots, P_kR_A$ が R_A の極大イデアルをつくす．

次の二つの定理は可換 Krull 環に対して成立している定理の拡張である。可換の場合には valuation theory を用いて証明されている。我々の場合には、補題 2.4 と localization functor を用いて証明する。

定理 2.4 (Approximation theorem for bounded Krull ring). R を bounded Krull 環, $P_i \in \mathbb{P}$ $(1 \le i \le k)$, n_i $(1 \le i \le k)$ 任意の整数とする。そのとき、次の条件を満す Q の unit x が存在する:

$$x R_{P_i} = P_i'^{\,n_i} \ (1 \le i \le k), \quad x \in R_{P_j} \ (j \ne i,\ P_j \in \mathbb{P}).$$

定理 2.5. R を bounded Krull 環, I を任意の右 R-イデアルとする。そのとき、I に含まれる任意の正則元 c に対して I の元 b が存在して $I^* = (aR + bR)^*$ とできる。

定理 2.5 はネター的 bounded Asano 整環の右 R-イデアルが 2 元から生成されるという定理の一般化にもなっている。この結果は Dedekind 環でも成立つことがわかっている ([4])。

§3. Bounded Krull 環に同値な極大整環

この節では、bounded Krull 環に同値な極大整環はまた bounded Krull であることを示す。

補題 3.1. R を bounded Krull 環, R' を R と同値な整環とする。このとき、R' が極大整環であるための必要十分条件はある右 v-イデアル I が存在して $R' = O_l(I)$ とあらわされることである。ここに $O_l(I) = \{x \in Q \mid xI \subseteq I\}$.

補題 3.2. R を bounded Krull 環, I を右 v-イデアルとする。そのとき、次が成立つ:

(1) $O_l(I) = \cap\, O_l(IR_P)$ $(P \in \mathbb{P})$.

(2) $O_l(IR_P)$ はネター的, local Asano 整環で、その唯一の極大イデアルは $IP'I^{-1}$.

(3) $O_l(IR_P)$ は $O_l(I)$ の essential overring.

(4) $O_l(I)$ は条件 (K3) を満す。

補題 3.1, 3.2 から次の定理が得られる。

<u>定理 3.1.</u> R を bounded Krull 環, R' を R と同値な極大整環とする. そのとき

(1) R' は bounded Krull 環.

(2) $v(R) \cong v(R')$.

§4. 可換 Krull 環上の極大整環

D を可換整域, K をその商体, Σ を中心的単純 K-多元環, $[\Sigma : K] < \infty$ とする. Fossum [5] は有限生成でない D の上の Σ の中の<u>整環</u> Λ を次の様に定義した:

(i) Λ は D を含む Σ の部分環.

(ii) $K\Lambda = \Sigma$.

(iii) Λ の元は D 上整.

特に D が Krull 環, Λ が極大整環のとき, Λ は bounded Krull 環である (§1 の例). 従って, §§2, 3 の一般論がこの Λ に対して成立する. 本節では, 多元環に固有の理論を述べる.

<u>命題 4.1.</u> Λ を Krull 環, D^* を Λ の中心とする. そのとき

(1) Λ は bounded 極大 D^*-整環.

(2) D^* は Krull 環.

この命題により, D-整環の中で Krull 環を調べるためには D を Krull 環としてよいことがわかる:

<u>命題 4.2.</u> D を Krull 環, Λ を D-整環とするとき, 次は同値:

(1) Λ は Krull 環.

(2) Λ は (環として) 極大整環

(3) Λ は 極大 D-整環.

D を Krull 環とし, D の極小素イデアルの全体を $\mathfrak{P}$ であらわす. Λ を極大 D-整環とする. このとき; $\Lambda = \bigcap \Lambda \otimes D_p$ $(p \in \mathfrak{P})$ で, $\Lambda \otimes D_p$ はネター的, local Asano 整環である. $\Lambda \otimes D_p$ の唯一つの極大イデアルを P' とし, $P = P' \cap \Lambda$ とすると, $\mathbb{P} = \{P \mid p \in \mathfrak{P}\}$ が Λ の極小素イデアルの全体となる (命題 2.3). 更に, $P \cap D = p$. これが

次の命題の(1)の証明である.

<u>命題 4.3.</u> D を Krull 環, Λ を極大 D-整環とする. そのとき

(1) D の極小素イデアルと Λ の極小素イデアルとの間に 1-1 対応がある.

(2) $p \in \mathbb{p}$ に ((1)の対応で) 対応する $\mathbb{P}$ の元を P とすれば, p の上に lying する Λ の素イデアルは P に限る.

(2) の証明は torsion theory を Goldie 的方法に適用してなされる.

以上は [6], [7] の解説であるが, 未発表の結果をつけ加えると bounded Krull 環についての理論は完成に近づきつつあるといえる. 今後は bounded でない Krull 環, あるいはより一般に極大整環 (命題 2.1 により, Krull 環は極大整環だから) が主として研究されるようになると思う.

References

[1] K. Asano: Zur Arithmetik in Schiefringen I, Osaka Math. J. 1 (1949), 98-134.

[2] K. Asano and K. Murata: Arithmetical ideal theory in semigroups, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. 4 (1953), 9-33.

[3] H. Brungs: Non commutative Krull domains, J. Reine Angew. Math. 264 (1973), 161-171.

[4] D. Eisenbud and J. C. Robson: Modules over Dedekind prime rings, J. Algebra 16 (1970), 67-85.

[5] R. M. Fossum: Maximal orders over Krull domains, J. Algebra 10 (1968), 321-332.

[6] H. Marubayashi: Non commutative Krull rings, Osaka J. Math. 12 (1975).

[7] H. Marubayashi: On bounded Krull prime rings, to appear in Osaka J. Math.

[8] G. Michiler: Asano orders, Proc. London Math. Soc. 19 (1969), 421-443.

[9] B. Stenström: Rings and modules of quotients, Springer, Heidelberg, 1971.

On rings whose maximal left ideals are left annihilators

信大・理・岸本量夫

§0.

Annihilator によって環の構造を特徴づけることは [1, Chap.IV, §15, Ths. 3, 4], [3], [4], [5] 等でなされている。

最近[3]において、環Rが division ring 上のベクトル空間の finite rank の一次変換全体のなす環(これを complete simple ring と呼ぼう)の直和となるための必要十分条件が与えられた。ここでは更に、これに同値な条件をつけ加えて、[3]の結果も含めて紹介する。詳細は[2], [3]を参照されたい。

§1.

(I) 環Rの left(right) ideal の全体を $\mathfrak{L}$ ($\mathfrak{R}$),
left(right) annihilator の全体を $\mathfrak{L}^0$ ($\mathfrak{R}^0$),

maximal left (right) ideal の全体を $\mathcal{L}_m$ ($\mathcal{R}_m$) とし, $\mathcal{L}_m^0 = \mathcal{L}^0 \cap \mathcal{L}_m$ ($\mathcal{R}_m^0 = \mathcal{R}^0 \cap \mathcal{R}_m$) とする。

(II) M を R－左加群とする。

(i) M の任意の元 m に対して, $Rm \ni m$ なるとき, M を left s-unital と呼ぶ。(right s-unital についても同様に定義する。) 特に, R が R－左(右)－加群として left (right) s-unital のとき, R を left (right) s-unital と呼ぶ。

(ii) M の任意の R－部分加群が M の極大 R－部分加群の共通部分として得られるとき, M を left V-module と呼ぶ。特に R が R－左加群として left V-module のとき, left V-ring と呼ぶ。

(III) 任意の $\ell \in \mathcal{L}$ に対して $\ell^2 = \ell$ のとき, R を fully left idempotent と呼ぶ。

Note: (i) irreducible な R－左加群は left s-unital である。

(ii) von Neumann regular ring は left s-unital

かつ right s-unital である。

§ 2.

次の定理を証明することが主目的である。

定理 次の条件は同値である。

(1) R は complete simple ring の直和である。

(2) R は left s-unital な semi-prime ring で $\mathcal{L} = \mathcal{L}^0$ である。

(3) R は von Neumann regular ring で $\mathcal{L} = \mathcal{L}^0$ である。

(4) R は left s-unital な semi-prime ring で $\mathcal{L}_m \subseteq \mathcal{L}^0$ である。

(5) R は von Neumann regular ring で $\mathcal{L}_m \subseteq \mathcal{L}^0$ である。

(6) R は right s-unital, left V ring で $\mathcal{L}_m \subseteq \mathcal{L}^0$ である。

(7) R は fully left idempotent で $\mathcal{L}_m \subseteq \mathcal{L}^0$。

定理の証明の前に、次の二つの補題を証明しておこう。

補題1 R を left s-unital とする。

(a) R の proper two sided ideal は，maximal left ideal に含まれる。特に $\mathcal{L}_m \neq \phi$ である。

(b) ${}_RR$ が完全可約であるための必要十分条件は任意の $m \in \mathcal{L}_m$ が直和因子となることである。

証明 (a) $\mathfrak{a}$ を proper two sided ideal とし，$u \in R \setminus \mathfrak{a}$ とする。$eu = u$, ${}^{\exists}e \in R$ であるが $\mathcal{M} = \{ \ell \in \mathcal{L} \mid \ell \supseteq \{x \in R \mid xu \in \mathfrak{a}, \ell \not\ni e\}$ の極大元を m とする。R の任意の元 r について，$r - re \in m$ に注意すれば $m \in \mathcal{L}_m$ が知られる。特に $\mathfrak{a} = \{0\}$ とすれば $\mathcal{L}_m \neq \phi$ が導かれる。

(b) R の left socle を S とし，$R \neq S$ とする。(a) より $m \supseteq S$ となる $m \in \mathcal{L}_m$ がある。${}_Rm <\oplus_R R$ ならば，${}_RR = {}_Rm \oplus_R n$ で n は minimal left ideal となり矛盾を生ずる。逆は明らかである。

補題2 R が right s-unital, left V-ring であれ

ば，fully left idempotent である。

証明　$\mathcal{L} \ni {}^{\exists}\mathfrak{l}$ に対し $\mathfrak{l}^2 \neq \mathfrak{l}$ とすれば，$\mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{l}^2$，$\mathfrak{m} \not\supseteq \mathfrak{l}$ となる $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}_m$ が存在する。$x \in \mathfrak{l} \setminus \mathfrak{m}$ とすれば $x R \ni x$ より $xy = x$ となる y が R にある。$R = \mathfrak{m} + \mathfrak{l}$ より，$y = m + l$ $(m \in \mathfrak{m}, l \in \mathfrak{l})$ とおけば，$x = xy = xm + xl \in \mathfrak{m} + \mathfrak{l}^2 \subseteq \mathfrak{m}$ となり矛盾である。

定理の証明　(3)→(2)→(4)，(3)→(5)→(4) 及び (7)→(4) は明らかであるし，(1)→(3) は [1, Chap. IV, §16, Th. 3] より直ちに導かれる。

(4)→(1)　最初に R の left singular ideal Z が 0 なることを示す。$Z \neq 0$ とし，$Z \cap \mathfrak{a} = 0$ となる性質に関して極大な left ideal を $\mathfrak{a}$ とすれば，$\mathfrak{a} = l(Z) = \{a \in R \mid aZ = 0\}$ となる。$Z \oplus \mathfrak{a} \subsetneqq R$ とすれば，補題 1 より $\mathfrak{m} \supseteq Z \oplus \mathfrak{a}$ となる $\mathfrak{m} \in \mathcal{L}_m$ が存在するが，$\mathcal{L}_m = \mathcal{L}^0$ より $\mathfrak{m} = l(a)$ である。

したがって，$a \in r(Z \oplus \mathfrak{J}) = r(Z) \cap r(\mathfrak{J}) = l(Z) \cap l(T) = T \cap l(T) = 0$ なる矛盾を得るから，$Z \oplus \mathfrak{J} = R$。ところで再び補題1より $\mathcal{L}_m \subseteq \mathcal{L}^0$ に注意すれば，$\mathfrak{J} \subseteq l(u) \in \mathcal{L}_m$ となり $u \in r(T) = Z$ である。$Ru \cong R/l(u)$ は minimal left ideal となり，$Z \ni e = e^2 (\neq 0)$ なる矛盾を得る。left singular ideal が 0 なることと，${}_RR$ が unital で $\mathcal{L}^0$ の任意の元が ${}_RR$ で proper な essential extension を有さないこととが同値であるから，$\mathcal{L}_m \subseteq \mathcal{L}^0$ は，すべての maximal left ideal が直和因子となることを示している。補題1より ${}_RR$ は完全可約，したがって left V-ring であり，$\mathcal{L} = \mathcal{L}^0$ となる。R_λ を R の homogeneous component とすれば，各 R_λ は [1. Chap IV, §16, Th. 3] より complete simple ring である。

(4) → (6)　(4) → (1) で示したように，R は完全可約で，semi-prime ring であるから明らかである。

(6) → (7) 補題 2 より明らかである.

定理の系として, 次が得られる.

系 1. 次の条件は同値である.

(1) R は単純アルチン環の直和である.

(2) R は left s-unital, semi-prime ring で, $\mathcal{L}_m \subseteq \mathcal{L}^0$, $\mathcal{R}_m \subseteq \mathcal{R}^0$ である.

(3) R は von Neumann regular ring で, $\mathcal{L}_m \subseteq \mathcal{L}^0$, $\mathcal{R}_m \subseteq \mathcal{R}^0$ である.

(4) R は right s-unital, left V-ring で, $\mathcal{L}_m \subseteq \mathcal{L}^0$, $\mathcal{R}_m \subseteq \mathcal{R}^0$ である.

(5) R は fully left idempotent で, $\mathcal{L}_m \subseteq \mathcal{L}^0$, $\mathcal{R}_m \subseteq \mathcal{R}^0$ である.

References

[1] N. Jacobson: Structure of rings, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 37, 1958.

[2] K. Kishimoto and H. Tominaga: On decompositions into simple rings. II, Math. J. Okayama Univ. 18 (1975), 39-41.

[3] H. Tominaga: On decompositions into simple rings, Math. J. Okayama Univ. 17 (1975), 159-163.

[4] K. G. Wolfson: An ideal-theoretic characterization of the ring of all linear transformations, Amer. J. Math. 75 (1953), 358-385.

[5] C. R. Yohe: On rings in which every ideal is the annihilator of an element, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968), 1346-1348.

非可換環上のある non-singular bilinear map

筑波大学　宮下庸一

先ず，Kを可換環とし，K上の *monic polynomial* $f(X)$ を考える。多項式環 $K[X]$ を $f(X)$ で生成されるイデアル $(f(X))$ でわると，$R = K[X]/(f(X))$ は $\bar{1} = 1 + (f(X))$, $\bar{X} = X + (f(X))$, $\cdots$, $\bar{X}^{n-1} = X^{n-1} + (f(X))$ を K-基底とする K-多元環である，ただし $n = \deg f(X)$。いま h を

$$h(a_0\bar{1} + a_1\bar{X} + \cdots + a_{n-1}\bar{X}^{n-1}) = a_{n-1}$$

によって定義される R から K への写像とするとき，任意の $\alpha, \beta \in R$ について

$$\varphi(\alpha, \beta) = h(\alpha\beta)$$

によってφをきめれば，φは *non-singular* かつ *R-associative* な $R \times R$ から K への K-双1次写像である，つまり，$K[X]/(f(X))$ は K上の自由フロベニウス拡大である([1])。これを非可換なものに迄一般化しようとすると，直接的にはうまく行かないので，少々工夫して思い切った一般化を試みる。

話を明瞭にするために，ここでは "free" な場合に限定して話を進めることにする。

$R = K[X; S, D]$ を $aX = Xa^S + a^D$ $(a \in K)$ によって定義される *twisted polynomial ring* とする，ここに S は Kの自己同型写像とし，D は Kの(加法に関する)自己

準同型で $(ab)^D = a^D b^S + a b^D$ $(a, b \in K)$ をみたすものとする。$R_n = K + XK + \cdots X^n K$ $(n = 0, 1, \cdots)$ とおくと、$R = \bigcup R_n$ は positively filtered ring である，$n<0$ については $R_n = 0$ とおく。$f(X)$ を monic polynomial で $\deg f = n \geq 1$，$Kf = fK$ なるものとするとき，次のことが成立つ：

$$R_{n-2} \oplus Rf = R_{n-2} \oplus f^*R \quad \text{かつ} \quad Kf^* = f^*K$$

なる degree n の monic polynomial $f^*(X)$ が $f(X)$ に対して一意に定まり，$(R/f^*R) \times (R/Rf)$ から R_{n-1}/R_{n-2} への non-singular K-K-bilinear map で R-associative なものが $K[X]$ の場合と同様に定義される。

その他，種々の non-singular bilinear map が $R = K[X; S, D]$ から構成される。

文　献

[1] Y. Miyashita: Commutative Frobenius algebras generated by a single element, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ., Ser. I, 21 (1971), 166-176.

Torsion Theories under Change of Rings

山口大文理　倉田吉喜

1.　R は単位元を持った環, R-mod の hereditary torsion theories の全体を R-tors とする. $\tau = (T(\tau), F(\tau)) \in$ R-tors に対して同じ文字 τ を用いて対応する left exact radical をあらわす. すなわち任意の $_RM$ に対して, $\tau(M)$ は M の部分加群で, $\tau(M/\tau(M)) = 0$, かつ M の部分加群 M' に対して $\tau(M') = M' \cap \tau(M)$ が成立つ. τ に対して, R の左イデアル $\mathfrak{m}$ で $R/\mathfrak{m} \in T(\tau)$ なるもの全体が定める R の topology を

$$L(\tau) = \{\mathfrak{m} \leq R \mid R/\mathfrak{m} \in T(\tau)\}$$

とかく. また $_RM$ の τ による localization を M_τ, canonical R-homomorphism を $\eta_M : M \to M_\tau$ とかく. 任意の $\mathfrak{m} \in L(\tau)$, $f \in \mathrm{Hom}_R(\mathfrak{m}, M)$ に対して

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{m} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, dotted, "f'"] \\ M & \end{tikzcd}$$

が commutative になる $f' \in \mathrm{Hom}_R(R, M)$ が存在するとき, $_RM$ は τ-injective であるという. (Torsion theory に関連した事柄については, 例えば Stenström [7] を参照.)

S は単位元をもった環, $G :$ R-mod $\to$ S-mod を exact で直和と commute する functor とする. $\sigma \in$ S-tors に対して $\{_RM \mid G(M) \in T(\sigma)\}$ は R-mod の hereditary torsion class を作るから, $\sigma^* \in$ R-tors が存在して

$$T(\sigma^*) = \{_RM \mid G(M) \in T(\sigma)\}$$

とかける. このとき対応する torsion-free class に対しても同様な

関係
$$F(\sigma^*) = \{{}_RM \mid G(M) \in F(\sigma)\}$$
が成立つだろうか？　例えば inclusion map $\alpha: \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ に対して，$0 \in \mathbb{Q}$-tors は functor $\alpha^*: \mathbb{Z}$-mod $\to \mathbb{Q}$-mod, $\alpha^*(M) = \mathbb{Q}\otimes_{\mathbb{Z}} M$，に関して上の関係をみたさない；

上の関係が成立つとき，σ は G に関して条件 (F) をみたすと云う．以下環準同型 $\alpha: R \to S$ が induce する functors
$$\alpha_*: S\text{-mod} \to R\text{-mod},\ \alpha_*({}_SN) = {}_RN,$$
$$\alpha^*: R\text{-mod} \to S\text{-mod},\ \alpha^*({}_RM) = S\otimes_R M$$
について，どんな時に条件 (F) が成立つかを調べる．

2. $\alpha: R \to S$ によって induce された $\alpha_*: S$-mod $\to R$-mod は exact で，直和と commute するから，$\tau \in R$-tors に対して $\{{}_SN \mid \alpha_*(N) \in T(\tau)\}$ は S-mod の hereditary torsion class．そこで
$$T(\tau^*) = \{{}_SN \mid \alpha_*(N) \in T(\tau)\}$$
によって $\tau^* = (T(\tau^*), F(\tau^*)) \in S$-tors をきめる．$F(\tau^*) \supset \{{}_SN \mid \alpha_*(N) \in F(\tau)\}$ は一般に正しい．等号については

(2.1)　$\tau \in R$-tors に対して次は同値：

(1)　τ は α_* に関して条件 (F) をみたす．

(2)　$L(\tau^*) = \{\mathfrak{m}' \leq S \mid \alpha^{-1}(\mathfrak{m}') \in L(\tau)\}$.

(3)　任意の ${}_SN$ に対して　$\alpha_*\tau^*(N) = \tau\alpha_*(N)$.

S_R が flat のときは，次の条件とも同値：

(4)　各 ${}_SN$ に対して R-isomorphism $h: N_{\tau^*} \to \alpha_*(N)_\tau$ が存在して，
$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "\eta_N^*"] \arrow[dr, "\eta_N"'] & N_{\tau^*} \arrow[d, "h"] \\ & \alpha_*(N)_\tau \end{tikzcd}$$
が commutative.

(Pr.)　(1) $\Rightarrow$ (2).　$\mathfrak{m}'$ は S の左 ideal で $\alpha^{-1}(\mathfrak{m}') \in L(\tau)$ と仮定．$N \in F(\tau^*)$，$f \in \mathrm{Hom}_S(S/\mathfrak{m}', N)$ を任意にとると

$\mathrm{Hom}_R(\alpha(R)/m', \alpha_*(N)) = 0$． 従って，$f(1_S + m') = f(\alpha(1_R) + m')$ $= 0$，$f = 0$． すなわち $S/m' \in T(\tau^*)$，$m' \in L(\tau^*)$．

(2) ⇒ (3)． 条件 (2) は，S の左 ideal m' に対して

$$\alpha_*(S/m') \in T(\tau) \rightleftarrows R/\alpha^{-1}(m') \in T(\tau)$$

を意味する． 条件 (3) は ${}_SN$ と $x \in N$ とに対して

$$\alpha_*(S/\mathrm{Ann}_S(x)) \in T(\tau) \rightleftarrows R/\alpha^{-1}(\mathrm{Ann}_S(x)) \in T(\tau)$$

を意味する． これから明らか．

(3) ⇒ (1) は明らかで，(4) ⇒ (3) は $\mathrm{Ker}(\eta_N) = \tau\alpha_*(N)$，$\mathrm{Ker}(\eta_N^*) = \tau^*(N)$ に注意すればよい．

次に，S_R は flat と仮定して (3) ⇒ (4) を示す．(3) を用いて $\mathrm{Ker}(\eta_N^*)$，$\mathrm{Coker}(\eta_N^*) \in T(\tau)$，$\tau\alpha_*(N_{\tau^*}) = 0$． 従って $\alpha_*(N_{\tau^*})$ が τ-injective を示せば，(3) ⇒ (4) は次の (2.2) から得られる：

$m \in L(\tau)$，$f \in \mathrm{Hom}_R(m, \alpha_*(N_{\tau^*}))$ を任意にとる．$\alpha^{-1}(S\alpha(m)) \in L(\tau)$，(2) から $S\alpha(m) \in L(\tau^*)$． さて，$g : S\alpha(m) \to N_{\tau^*}$，$g(\sum_i s_i\alpha(a_i)) = \sum_i s_i f(a_i)$，は S_R が flat ゆえ well-defined. N_{τ^*} は τ^*-injective ゆえ $g' \in \mathrm{Hom}_S(S, N_{\tau^*})$ が存在して

$$\begin{tikzcd} S\alpha(m) \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & S \arrow[dl, "g'"] \\ N_{\tau^*} & \end{tikzcd}$$

は commutative． このとき $g' \circ \alpha \in \mathrm{Hom}_R(R, \alpha_*(N_{\tau^*}))$ で

$$\begin{tikzcd} m \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & R \arrow[dl, "g'\circ\alpha"] \\ \alpha_*(N_{\tau^*}) & \end{tikzcd}$$

は commutative．

さて，一般に ${}_RM$ の $\tau \in R\text{-tors}$ による localization M_τ，canonical map $\eta_M : M \to M_\tau$ に関して，$\mathrm{Ker}(\eta_M)$，$\mathrm{Coker}(\eta_M)$ がともに $T(\tau)$ に属し，$M_\tau \in F(\tau)$ でしかも τ-injective であることはよく知られている． 次は，これらの性質が M_τ を特徴づけることを示している．

(2.2) $M, X \in R$-mod, $f \in Hom_R(M, X)$ とする. $\tau \in R$-tors に対して $Ker(f)$, $Coker(f)$ が共に $T(\tau)$ に属すると仮定する. このとき

(1) 唯一つの $h \in Hom_R(X, M_\tau)$ が存在して

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_M"'] & X \arrow[dl, "h"] \\ M_\tau & \end{tikzcd}$$

is commutative.

(2) $Ker(h) = \tau(X)$.

(3) h が onto $\rightleftarrows$ $X/\tau(X)$ が τ-injective

(注意) M, X 共に環で, f が環準同型なら, h もそうである.

さて, $\alpha : R \to S$ が onto のときは, 明らかにどんな $\tau \in R$-tors も α_* に関して条件 (F) をみたすが;

(2.3) $Coker(\alpha) \in T(\tau)$ ならば, τ は α_* に関して条件 (F) をみたす。(逆は成立しない.)

また,

(2.4) S が可換なら, 任意 $\tau \in R$-tors は α_* に関して条件 (F) をみたす。(逆は一般に不成立.)

3. ここでは (2.1) の応用をのべる. R-modules の class $\{ {}_R M \mid S \otimes_R M = 0 \}$ は (一般には hereditary とはかぎらない) torsion class ゆえ, R-mod の idempotent radical τ_0 が存在して

$$T(\tau_0) = \{ {}_R M \mid S \otimes_R M = 0 \},$$

それに対応する filter は $L(\tau_0) = \{ m \leq R \mid S\alpha(m) = S \}$ で, この τ_0 は次の様な性質をもっている;

(3.1) (1) $Ker(\alpha) \in T(\tau_0)$.

(2) 任意の ${}_S N$ に対して $\alpha_*(N) \in F(\tau_0)$.

(3) $Coker(\alpha) \in T(\tau_0) \rightleftarrows \alpha$ が環の category で epimorphism (Popescu & Spircu [5, Proposition 2.1]).

(4) S_R が flat ならば，任意の ${}_SN$ は τ_0-injective.

(5) α が left flat epimorphism $\rightleftarrows$ τ_0 が hereditary で，かつ唯一つの環同型 $h : S \to R_{\tau_0}$ が存在して
$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\eta_R"'] & S \arrow[dl, "h"] \\ R_{\tau_0} & \end{tikzcd}$$
が commutative

(Morita [3, Theorem 3.1], Popescu & Spircu [5, Théorème 2.7]).

また，${}_RM$ に対して $\alpha_M : M \to S \otimes_R M$, $\alpha_M(x) = 1 \otimes x$ は R-homomorphism で，$\mathrm{Ker}(\alpha_M) = \tau_0(M)$. 特に $\mathrm{Ker}(\alpha) = \mathrm{Ker}(\alpha_R) = \tau_0(R)$ が成立つ.

(3.2) $\tau \in R\text{-tors}$ とし，$\mathrm{Coker}(\alpha) \in T(\tau)$, $\alpha_*(S) \in F(\tau)$ と仮定する.

(1) S が semisimple Artinian $\Rightarrow$ $\tau^* = 0$.

(2) τ が Goldie torsion theory $\Rightarrow$ 逆も成立.

(Pr.) (1) S が semisimple Artinian から
$$\{m' \leq S \mid m' \text{ は essential in } S\} = \{S\},$$
すなわち，$L(\tau^*) = \{0\}$, $\tau^* = 0$.

(2) m' は S の左 ideal で essential in S とする. m' は R-module としても essential in S. したがって $\alpha^{-1}(m')$ も essential in R. $\alpha^{-1}(m') \in L(\tau)$. (2.1) から $m' \in L(\tau^*) = \{S\}$. S は semisimple Artinian となる.

(3.3) $\tau \in R\text{-tors}$ とし，$\mathrm{Coker}(\alpha) \in T(\tau)$ とする.
このとき次は同値：

(1) $\tau^* = 0$.

(2) 任意の S-module は τ に関して torsion-free.

(3) $S\alpha(m) = S$ for all $m \in L(\tau)$.

(4) $\tau \leqq \tau_0$.

(5) 任意の ${}_RM$ に対して $\tau(M) \subset \mathrm{Ker}(\alpha_M)$.

しかもこのとき，α は環の category で epimorphism である.

さて，$\mathrm{Coker}(\alpha) \in T(\tau)$ かつ $\tau^* = 0$ のとき，$\tau \in R\text{-tors}$ は

α に関して perfect と云うことにすると，

(3.4) $\tau \in R$-tors とする．Coker(α), Ker(α) が共に $T(\tau)$ に属するとき，次は同値：

(1) τ は α に関して perfect.

(2) $\tau = \tau_0$.

(3.5) $\tau \in R$-tors とする．Coker(α) $\in T(\tau)$ で，しかも α が 1対1 であるかあるいは S_R が flat ならば次は同値：

(1) τ は α に関して perfect.

(2) すべての S-module は τ に関して torsion-free かつ τ-injective.

functor Z : R-mod $\longrightarrow$ R-mod , $Z({}_RM) = {}_RM$ の singular submodule, は R-mod の left exact preradical で，対応する filter は R で essential な R の左 ideals の全体，すなわち $L(Z) = \{ \mathfrak{m} \leqq R \mid$ $\mathfrak{m}$ は essential in $R \}$. この Z を用いると

(3.6) $\tau \in R$-tors とする．Coker(α) $\in T(\tau)$, $\alpha_*(S) \in F(\tau)$, しかも α が 1対1 ならば，次は同値：

(1) S は semisimple Artinian .

(2) $\tau = \tau_0 = Z$.

しかもこのとき，α は left flat epimorphism で，τ は Lambek torsion theory に一致し，S は R の maximal ring of left quotients と R 上同型になる．

(Pr.) まず $\alpha(R)$ は S で essential (Goldman [2, Lemma 3.8]). 従って，R の左 ideal $\mathfrak{m}$ が R で essential ならば，$S\alpha(\mathfrak{m})$ は S-module として S で essential.

(1) $\Rightarrow$ (2). $\mathfrak{m}$ を R の左 ideal で essential in R とする．$S\alpha(\mathfrak{m})$ が S-module として S で essential だから $S\alpha(\mathfrak{m}) = S$. すなわち $\mathfrak{m} \in L(\tau_0)$, $Z \leqq \tau_0$. 逆に $\mathfrak{m} \in L(\tau_0)$ ならば，$\mathfrak{m}$ は R で essential . これは $\tau_0(R) = \mathrm{Ker}(\alpha) = 0$ と

Goldman [2, Lemma 3.8] による. 従って $Z=\tau_0$.

(2) ⇒ (1). $Z({}_RR)=\tau_0(R)=Ker(\alpha)=0$. 従って, $\tau=Z$ は Goldie torsion theory であり, Lambek torsion theory でもある. (3.2), (3.4) から S は semisimple Artinian となる.

(3.6) の特別な場合として

(3.7) $\tau=Z$, $S=R_\tau$, $\alpha=\eta_R: R\to R_\tau$, $Z({}_RR)=0$ の場合は Sandomierski [6, Theorem 2.3] である.

(3.8) $\alpha: R\to S$ が 1対1 でしかも left flat epimorphism の場合は, (3.1) により $\tau=\tau_0$ が (3.6) の条件をみたし, Page [4, Theorem 2] となる.

(3.9) R を left Ore ring, S を R の classical ring of left quotients, $\alpha: R\to S$ を canonical map, A を R の非零因子の全体とする. R の左 ideal で A と交りをもつものの全体は R の上の topology となるから, $L(\tau)=\{m\leqq R \mid m\cap A\neq\emptyset\}$ によって $\tau\in R$-tors がきまる. τ は (3.6) の条件をみたし, しかも $\tau_0=\tau\leqq Z$. 従って, (3.6) により, S が semisimple Artinian であるためには各 $m\in L(\tau)$ が非零因子を含むことが必要十分となる.

したがって, 任意の R に対して次は同値:

(1) R が semisimple Artinian な classical ring of left quotients をもつ.

(2) R は left Ore で, 各 $m\in L(\tau)$ は非零因子を含む.

(3) $Z({}_RR)=0$ で, 各 $m\in L(Z)$ は $Ra\in L(Z)$ となる元 a を含む.

(4) R は semiprime, 有限次元, かつ left annihilators に関して極大条件をみたす.

4. この節では, S_R を flat と仮定する. したがって, functor

$$\alpha^*: R\text{-mod}\to S\text{-mod},\quad \alpha^*({}_RM)=S\otimes_R M$$

は exact で直和と commute する. $\sigma\in S$-tors に対し, $\sigma^*\in R$-tors

が存在して　$T(\sigma^*) = \{{}_RM \mid S\otimes_R M \in T(\sigma)\}$.　その対応する topology は　$L(\sigma^*) = \{\mathfrak{m} \leqq R \mid S\alpha(\mathfrak{m}) \in L(\sigma)\}$.　Golan [1] によれば，α が環の category における epimorphism なら，任意の $\sigma \in S\text{-tors}$ に対し $\sigma = (\sigma^*)^*$ が成立つ．しかし，もう少し一般的に

(4.1)　$\sigma \in S\text{-tors}$ とする．$\mathrm{Coker}(\alpha) \in T(\sigma^*)$ ならば $\sigma = (\sigma^*)^*$.

そこで，今度は $\tau \in R\text{-tors}$ に対して $\tau = (\tau^*)^*$ が成立つのはどういうときかを調べてみる．定義から

$$L((\tau^*)^*) = \{\mathfrak{m} \leqq R \mid S\alpha(\mathfrak{m}) \in L(\tau^*)\}.$$

従って $\tau = (\tau^*)^* \rightleftarrows L(\tau) = \{\mathfrak{m} \leqq R \mid S\alpha(\mathfrak{m}) \in L(\tau^*)\}$.　これは $\mathrm{Coker}(\alpha) \in T(\tau)$ のとき次の様に云いかえることが出来る：

(4.2)　$\tau \in R\text{-tors}$ とする．$\mathrm{Coker}(\alpha) \in T(\tau)$ のとき，次は同値：

(1)　$\tau = (\tau^*)^*$.

(2)　$\mathrm{Ker}(\alpha) \in T(\tau)$.

(3)　$\tau_0 \leqq \tau$.

(4)　ある $\sigma \in S\text{-tors}$ が存在して，$\tau = \sigma^*$.

(4.3)　$\{\tau \in R\text{-tors} \mid \mathrm{Coker}(\alpha) \in T(\tau) \ \&\ \tau = (\tau^*)^*\}$ と $\{\sigma \in S\text{-tors} \mid \mathrm{Coker}(\alpha) \in T(\sigma^*)\}$ との間に1対1対応が存在する．

特に α が環の category で epimorphism のときは，$\sigma \in S\text{-tors}$ が $\mathrm{Coker}(\alpha) \in T(\sigma^*)$ をみたすから，$\{\tau \in R\text{-tors} \mid \tau = (\tau^*)^*\}$ と $S\text{-tors}$ との間に1対1対応の存在が知られる．

(4.4)　$\sigma \in S\text{-tors}$ とする．$\mathrm{Coker}(\alpha) \in T(\sigma^*)$ ならば，任意の ${}_RM$ に対して $\sigma^*(M) = \alpha_M^{-1}(\sigma(S\otimes_R M))$．もし α が環の category で epimorphism ならば，$S\otimes_R \sigma^*(M) = \sigma(S\otimes_R M)$ が成立つ．

(4.5)　$\sigma \in S\text{-tors}$ に対して，次は同値：

(1)　任意の ${}_RM$ に対して　$S\otimes_R \sigma^*(M) = \sigma(S\otimes_R M)$.

(2)　$F(\sigma^*) \subset \{{}_RM \mid S\otimes_R M \in F(\sigma)\}$

もし $\mathrm{Coker}(\alpha) \in T(\sigma^*)$, $\sigma^*(S) = 0$ を仮定すれば, 更に次とも同値：

(3) 任意の ${}_RM \in F(\sigma^*)$ に対して, $\alpha_M(M)$ は essential in $S \otimes_R M$.

(4) α は環の category で epimorphism.

(4.6) α が環の category で epimorphism のとき, 次は同値：

(1) α^* に関して条件 (F) をみたす $\sigma \in S$-tors が存在する.

(2) すべての $\sigma \in S$-tors が α^* に関して条件 (F) をみたす.

(3) S_R は faithfully flat.

(Pr.) (1) ⇒ (3). ${}_RM$ が $S \otimes_R M = 0$ をみたせば, $M \subset \mathrm{Ker}(\alpha_M) = \tau_0(M) \subset \sigma^*(M)$ から $M \in T(\sigma^*)$. (1) から $M = 0$ を得る.

(3) ⇒ (2) は (4.4) から, (2) ⇒ (1) は明らか.

References

[1] J. Golan: On the torsion-theoretic spectrum of a non-commutative ring, to appear.

[2] O. Goldman: Rings and modules of quotients, J. Algebra 13 (1969), 10-47.

[3] K. Morita: Flat modules, injective modules, and quotient rings, Math. Z. 120 (1971), 25-40.

[4] S. Page: Properties of quotient rings, Canad. J. Math. 24 (1972), 1122-1128.

[5] N. Popescu and T. Spircu: Quelque observations sur les épimorphismes plats (à gauche) d'anneau, J. Algebra 16 (1970), 40-59.

[6] F. L. Sandomierski: Semisimple maximal quotient rings, Trans. Amer. Math. Soc. 128 (1967), 112-120.

[7] B. Stenström: Rings and modules of quotients, Lecture Notes in Math. 237, Springer, Berlin, 1971.

(付記) 最近 K. Louden: Torsion theories and ring extensions (to appear) の Theorem 2.5 に (2.1) と同じ結果があるのを知った.

Generalized Morita equivalence for infinitely generated projective modules

Inidiana Univ. 東 屋 五 郎

Λを環, PをΛ-左加群, Γをその準同型環とする. PはΓ-右加群, 従って両側Λ-Γ-加群とみられる. Jacobson は [2, Corollary, p.112] において Pが自由Λ-左加群であればΛの右イデアル R と PのΓ-部分加群 S との間に $RP=S$, $R=\{\lambda\in\Lambda;\lambda P\subset S\}$ なる関係によって 1-1 対応があることを示した. 尾野寺代は [4, Satz 4] においてこれを P がΛ-加群として射影的 generator である場合に拡張した. 本稿では尾野寺代の結果をΛ-右加群とあるΓ-右加群との間の (category 的な) 1-1 の対応に拡張する. そのためにΓ-右加群 P の準同型像の和で表わされるようなΓ-右加群よりなる class (即ち P_Γ から generate された class) を $\mathfrak{C}$ とする. しからば我々の結果は "P がΛ-加群として射影的 generator であるとき, $\mathfrak{C}$ は hereditary な torsion class をなし, Λ-右加群 X と $\mathfrak{C}$ に属するΓ-右加群 Y との間に (自然的同一視によって) $X\otimes_\Lambda P = Y$, $X = \mathrm{Hom}_\Gamma(P,Y)$ なる関係によって 1-1 の対応がある" ということである. ここに $\mathfrak{C}$ が torsion class であるとは $\mathfrak{C}$ が直和, 準同型像および群拡大に関して閉じていることであり, それが hereditary であるとは更に部分加群に関して閉じていることである. 我々はしかしこれを更に次の二つの定理に精密化する; 上の定理がこれら二定理の共通部分として得られることは明らかであろう.

<u>定理 P.</u> P を射影的Λ-左加群, Γをその準同型環とする. しからば P_Γ から generate された class $\mathfrak{C}$ は hereditary な torsion class をなすが, $\mathfrak{C}$ に属する任意のΓ-右加群 Y に対して自然同型

$$\eta : [\mathrm{Hom}_\Gamma(P,Y)\otimes_\Lambda P]_\Gamma \cong Y_\Gamma$$

が存在する．ただし，η は $\eta(f\otimes p)=f(p)$ ($f\in Hom_{\Gamma}(P,Y)$, $p\in P$) によって与えられる．

<u>定理 G</u>．P は Λ-左加群として generator，Γ をその準同型環とする．しからば P_{Γ} から generate された class $\mathcal{C}$ は torsion class をなすが，任意の Λ-右加群 X に対して $X\otimes_{\Lambda}P$ は Γ-右加群として $\mathcal{C}$ に属し，しかも自然同型

$$\xi : X_{\Lambda} \cong Hom_{\Gamma}(P, X\otimes_{\Lambda}P)_{\Lambda}$$

が存在する．ただし，ξ は $\xi(x)p = x\otimes p$ ($x\in X$, $p\in P$) によって与えられる．

特に ${}_{\Lambda}P$ を有限生成射影的 generator (即ち progenerator) とすれば森田氏の定理 [3, Lemma 3.3] によって P_{Γ} も generator であるから，$\mathcal{C}$ はすべての Γ-右加群のなす class と一致し，従ってこの場合上の両定理 P, G をあわせたものが所謂森田同値定理 [3, Theorem 3.4] に他ならない．

§1．定理 P の証明．Γ を環，P を Γ-右加群とするとき，P_{Γ} の準同型像であるような Γ の右イデアルすべての和 T を P_{Γ} の trace ideal と呼ぶ．T はよく知られたように Γ の両側イデアルである．若し $PT=P$ が成立てば，Sandmierski に従って P_{Γ} は trace-accessible であるということにする．P_{Γ} が射影的ならば trace-accessible であることはよく知られている．また P_{Γ} が generator ならば $T=\Gamma$ だから trivially に trace-accessible である．

<u>補題 1</u>．P_{Γ} が trace-accessible ならば，T は $T^2=T$ を満し，P_{Γ} から generate された class $\mathcal{C}$ は $MT=M$ を満すような Γ-右加群 M よりなり，従って torsion class をなす．

証明. $PT = P$ ならばすべての準同型写像 $f : P_P \to \Gamma_P$ に対して $f(P)T = f(P)$ であるから, これらの和なる T に対して $T^2 = T$ が成立つ. 同様に M を $\mathfrak{C}$ に属する Γ-右加群とすれば $MT = M$ が証明される. 逆に $M = MT$ ならば $M = \sum xT$ (x は M のすべての元を動く) で xT は T_P の準同型像であるが, $T_P \in \mathfrak{C}$ であることに注目すれば $M \in \mathfrak{C}$ がわかる. $\mathfrak{C}$ が直和および準同型像に関して閉じていることは $\mathfrak{C}$ の定義から明らかである. 次に $M_P \supset N_P \in \mathfrak{C}$, $(M/N)_P \in \mathfrak{C}$ とする. 後の二条件は夫々 $NT = N$, $MT + N = M$ を意味するが, $MT \supset NT$ だから $MT \supset N$ 従って $MT = MT + N = M$ 即ち $M \in \mathfrak{C}$ が出る; かくて $\mathfrak{C}$ は torsion class である.

<u>補題 2</u>. P が射影的 Λ-左加群で, Γ がその準同型環なるとき, P_P は trace-accessible であり, P_P から generate された class $\mathfrak{C}$ は hereditary な torsion class をなす.

証明. ${}_\Lambda P$ が射影的であるということは適当な集合 I の各元 α によって番号づけられた準同型写像 $\varphi_\alpha : {}_\Lambda P \to {}_\Lambda\Lambda$ および $a_\alpha \in P$ をとって (i) 各 $p \in P$ に対し有限個の α を除いて $\varphi_\alpha(p)a_\alpha = 0$, (ii) 各 p に対して (実際には有限和) $\sum \varphi_\alpha(p)a_\alpha = p$ が成立つように出来るということと同値であるが, 森田 [3, Lemma 3.3] の証明におけるように各 α に対して準同型写像 $f_\alpha : P_P \to \Gamma_P$ が存在して $\varphi_\alpha(p)a = pf_\alpha(a)$ がすべての $p \in P$, $a \in P$ に対して成立つ. (即ち, $a \in P$ をとって一応 fix し, $p \mapsto \varphi_\alpha(p)a$ なる ${}_\Lambda P$ の自己準同型写像即ち T の元を考え, これを a の関数と見ることにより f_α が定義される.) しかるとき上の条件 (i), (ii) は夫々 (i') 各 $p \in P$ に対し $pf_\alpha(a_\alpha) = 0$ が有限個の α を除いて成立つ,

(ii') 各 $p \in P$ に対して $\sum p f_\alpha(a_\alpha) = p$ が成立つ（換言すれば $\{f_\alpha(a_\alpha)\}$ なる T の元の system は所謂 summable である）という条件に翻訳される。しかるに $f_\alpha(a_\alpha) \in T$ であるから，このことから $PT = P$ 即ち P_T が trace-accessible であることが出る。それ故 $\mathcal{C}$ は torsion class である。$\mathcal{C}$ が hereditary である即ち部分加群に関して閉じていることを云うためには M_Γ が $\mathcal{C}$ に属するとき M の各元 x に対して（巡回部分加群）$x\Gamma$ もまた $\mathcal{C}$ に属すること，即ち $xT = x\Gamma$，あるいは $x \in xT$ なることを云えば十分である。さて $x \in M$，$M \in \mathcal{C}$ なることより適当な有限個の準同型写像 $h_i : P_\Gamma \to M_\Gamma$ および $p_i \in P$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ をとれば $x = h_1(p_1) + h_2(p_2) + \cdots + h_n(p_n)$ と表われることがわかる。次に上の二条件 (i')，(ii') によって，各 i に対して適当な I の有限部分集合 I_i をとって $\alpha \notin I_i$ ならば $p_i f_\alpha(a_\alpha) = 0$ であり，しかも $p_i = \sum p_i f_\alpha(a_\alpha)$ が成立つが，この和は実際は α が I_i の中のみを動くと考えてよい。そこで $I_0 = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$ とおけば，I_0 も I の有限部分集合であり，明らかにすべての i に対して，$\alpha \notin I_0$ ならば $p_i f_\alpha(a_\alpha) = 0$ であり，しかも $p_i = \sum p_i f_\alpha(a_\alpha)$ であるが，ここで和は実際は α が I_0 の中のみを動くと考えてよい。しかるとき，α が I_0 の中を動いたときの有限和 $\sum f_\alpha(a_\alpha)$ を γ とおけば $\gamma \in T$ であって $p_i = p_i\gamma$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ を満足する。ここへ h_i を施すと $h_i(p_i) = h_i(p_i)\gamma$ を，従って $x = h_1(p_1) + h_2(p_2) + \cdots + h_n(p_n) = h_1(p_1)\gamma + h_2(p_2)\gamma + \cdots + h_n(p_n)\gamma$ $= x\gamma \in xT$ を得る。かくて補題 2 が証明された。

さて定理 P の残りの部分を証明するために Cartan-Eilenberg [1, p.120] で与えられた自然準同型写像

$$\sigma : \mathrm{Hom}_\Gamma(B, C) \otimes_\Lambda A \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(A, B), C)$$

を考察する．但し，A, B, C は任意の Λ-左加群，Λ-Γ-両側加群，Γ-右加群であって，σ は $\sigma(f\otimes a)g = f(g(a))$ $(f\in Hom_\Gamma(B,C)$, $g\in Hom_\Lambda(A,B)$, $a\in A)$ によって定義されるものである．

<u>補題 3</u>．${}_\Lambda A$ が射影的であれば，σ は 1-1 である．

証明．もしこの補題がすべての自由 Λ-加群 A に対して証明されれば，射影加群は適当な自由加群の直和因子であるということから，直和分解論法によって我々の補題がすべての射影的 Λ-加群 A についても正しいということが知られる．それ故 ${}_\Lambda A$ を自由加群と仮定してよい．そこで $\{a_\alpha ; \alpha\in I\}$ を ${}_\Lambda A$ の一つの基とする．しからばこれはまた $\otimes_\Lambda$ に関して $Hom_\Gamma(B,C)$ に対しても基をなす，即ち $Hom_\Gamma(B,C)\otimes_\Lambda A$ の元は $\sum f_\alpha\otimes a_\alpha$ $(f_\alpha\in Hom_\Gamma(B,C))$ なる形に一意的に表わされる．但し有限個の $\alpha\in I$ を除いて $f_\alpha=0$ とする．今この元が σ の核に属する，即ち $\sigma(\sum f_\alpha\otimes a_\alpha)=0$ であるとする．次に任意に $\beta\in I$ 及び $b\in B$ をとれば，$g(a_\beta)=b$ しかして $\alpha\neq\beta$ ならば $g(a_\alpha)=0$ なるような $g\in Hom_\Lambda(A,B)$ が一意的に存在するが，この g に対して $0=\sigma(\sum f_\alpha\otimes a_\alpha)g = \sum f_\alpha(g(a_\alpha)) = f_\beta(b)$ となる．これがすべての $b\in B$ に対して云えるから $f_\beta=0$ であり，またこれがすべての $\beta\in I$ に対して成立つから結局 $\sum f_\alpha\otimes a_\alpha=0$ である．かくて準同型写像 σ は 1-1 であることが証せられた．

<u>注意</u>．${}_\Lambda A$ が有限生成的でなければ，補題 3 において σ は必ずしも（*Cartan-Eilenberg* [1, *Prop*. 5.2, *p*.120] におけるように）同型ではない．

さて，P を与えられた射影的 Λ-左加群，Γ をその準同型環，Y を P_Γ から generate された class $\mathfrak{C}$ に属する Γ-右加群とするとき，${}_\Lambda A={}_\Lambda P$, ${}_\Lambda B_\Gamma={}_\Lambda P_\Gamma$, $C_\Gamma=Y_\Gamma$ に補題 3 を適用

することによって 1-1 準同型 σ を得るが，この場合 $\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B) = \mathrm{Hom}_\Lambda(P,P) = \Gamma$ だから $\mathrm{Hom}_\Gamma(\mathrm{Hom}_\Lambda(A,B), C) = \mathrm{Hom}_\Gamma(\Gamma, Y)$ であるが，これはまたその各元をそれによる $1(= P$ の恒等写像$) \in \Gamma$ の像 $\in Y$ と同一視することによって $= Y$ と見られる．かくて $\sigma : \mathrm{Hom}_\Gamma(P,\Gamma) \otimes_\Lambda P \to Y$ でしかも $\sigma(f \otimes p) = f(p)$ ($f \in \mathrm{Hom}_\Gamma(P,\Gamma)$, $p \in P$) となるが，これは σ が定理 P における η に他ならないことを示している．更に任意に $y \in Y$ をとると，Y_Γ が P_Γ の準同型像の和であるから，適当な有限個の準同型写像 $f_i \in \mathrm{Hom}_\Gamma(P,Y)$ 及び元 $p_i \in P$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ によって $y = \sum f_i(p_i)$ と表わされる．従って $\sigma(\sum f_i \otimes p_i) = \sum f_i(p_i) = y$ となるが，これは σ が Y の上への準同型であることを示す．かくて σ 即ち η は同型写像である．

§2．定理 G の証明．　${}_\Lambda P$ が generator，$\Gamma = \mathrm{End}_\Lambda(P)$ だから森田 [3, Lemma 3.3] によって P_Γ は（有限生成）射影的となる．それ故 P_Γ は *trace-accessible* であり，補題 1 によって $\mathfrak{C}$ は *torsion class* をなす．また Λ-右加群 X に対し $(X \otimes_\Lambda P)_\Gamma$ は明らかに $x \otimes P$ $(x \in X)$ なる形の P_Γ の準同型像の和で表わされる故 $\mathfrak{C}$ に属する．

さて一般的に，任意の Λ，Γ，Γ-右加群 A，Λ-Γ 両側加群 B，Λ-右加群 C に対して自然準同型

$$\tau : C \otimes_\Lambda \mathrm{Hom}_\Gamma(A, B) \longrightarrow \mathrm{Hom}_\Gamma(A, C \otimes_\Lambda B)$$

を考察する．但し，τ は $\tau(c \otimes f)a = c \otimes f(a)$ $(c \in C$, $f \in \mathrm{Hom}_\Gamma(A,B)$, $a \in A)$ によって定義される．しからば次の補題は Cartan-Eilenberg [1, *Prop. 5.2, p. 120*] と全く同じ論法で証明される．

<u>補題 4</u>. A_Γ が有限生成射影的であれば，τ は同型である.

この補題を $A_\Gamma = P_\Gamma$, ${}_\Lambda B_\Gamma = {}_\Lambda P_\Gamma$, $C_\Lambda = X_\Lambda$ に適用することが出来るが，再び [3, Lemma 3.3] により $\Lambda = \mathrm{Hom}_\Gamma(P, P)$ であり，$X \otimes_\Lambda \Lambda$ は $x \otimes 1$ と $x\ (\in X)$ とを同一視することによって $= X$ と見られることに注意すれば，$\tau : X_\Lambda \to \mathrm{Hom}_\Gamma(P, X \otimes_\Lambda P)$ で，$\tau(x)p = x \otimes p\ (x \in X,\ p \in P)$ であることがわかるが，これは τ が定理 G における ξ に他ならないことを示す. かくて ξ は同型である.

References

[1] H. Cartan and S. Eilenberg: Homological Algebra, Princeton, 1956.

[2] N. Jacobson: Structure of Rings, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 37, 1956.

[3] K. Morita: Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, 6 (1958), 83-142.

[4] T. Onodera: Koendlich erzeugte Moduln und Kogeneratoren, Hokkaido Math. J. 2 (1973), 69-83.

有限次元 cocommutative Hopf algebra について

東海大理　光　道隆

Kostant の定理([2], (8.1.5), (13,0.1)) より直ちに次の命題が出てくる。

命題 1 (Kostant)　k を標数 0 の体，H を有限次元 cocommutative Hopf algebra とする。K-Hopf algebra として $H\otimes_k K \simeq KG$ をみたすような k の有限次 Galois 拡大 K と有限群 G が存在する。

命題 1 より，群環と cocommutative Hopf algebra がどれぐらい違うかという興味がわいてくる。そこで，この小文では群環，cocommutative Hopf algebra にあらわれる simple component について考えてみる。特に，k が代数体のとき，central simple k-algebra は有限次元 cocommutative k-

Hopf algebra の simple component として実現される事を述べる.

1. Galois descent.

命題1によってcocommutative Hopf algebraは群環のGalois descentとして出てくる事が分った。そこで，当面の目標は群環を与えておいて，そのGalois descentを決める事である。

kを体，Kをkの有限次Galois拡大，πをそのGalois群，Gを有限群とする。ψをπから$\mathrm{Aut}\,G$への準同型写像とする。$\pi \ni \sigma$に対し，$\psi(\sigma)$を対応 $\psi(\sigma)(\sum_{g\in G} a_g g) = \sum_{g\in G} \sigma(a_g)\,\psi(\sigma)(g)$, $a_g \in K$, によってKGのk-自己同型とみる事にする。

$\mathcal{H}(K/k, G) = \{H \mid H$は$k$-Hopf algebraでHopf algebraとして$H\otimes_k K \simeq KG$をみたす.$\}$, $\Psi(\pi, G) = \{\psi \mid \psi : \pi \to \mathrm{Aut}\,G$, 準同型$\}$ とおく。$\psi_1, \psi_2 \in \Psi(\pi, G)$とする。$\pi \ni {}^{\forall}\sigma$に対し，$\tau^{-1}\psi_1(\sigma)\tau = \psi_2(\sigma)$をみたす$\mathrm{Aut}\,G$の元$\tau$が存在するとき.

$\psi_1 \sim \psi_2$ と書く事にする.

<u>命題2</u> (1). $(KG)^{\psi(\pi)} = \{ \sum_{g\in G} a_g g \in KG \mid \psi(\sigma)(\sum_g a_g g) = \sum a_g g \text{ for } \forall \sigma \in G \}$ は k-Hopf algebra で, K-Hopf algebra として $(KG)^{\psi(\pi)} \otimes_k K \simeq KG$.

(2). k-Hopf algebra として $(KG)^{\psi_1(\pi)} \cong (KG)^{\psi_2(\pi)}$ であるための必要十分条件は $\psi_1 \sim \psi_2$.

命題2によって写像 $\varphi ; \Psi(\pi, G) \longrightarrow \mathcal{H}(K/k, G)$
$\psi \longmapsto (KG)^{\psi(\pi)}$

は $\bar{\varphi} ; \Psi(\pi, G)/\sim \longrightarrow \mathcal{H}(K/k, G)/\cong$ をみちびく事が分かるが実は.

<u>定理3</u> $\bar{\varphi}$ は全単射である.

つまり, 有限次元 cocommutative Hopf algebra を考えるには $(KG)^{\psi(\pi)}$ を考えればよい事になる。ところで, その coalgebra 構造は次の命題

によって決定される．

<u>命題4</u> kを体，Kをkの有限次Galois拡大，πをそのGalois群，Gを有限群，ψをπから$\mathrm{Aut}\,G$への準同型写像とする。$G=D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_n$と$\psi(\pi)$-orbitに分解すると，$k$-algebraとして，$((KG)^{\psi(\pi)})^*\cong((KD_1)^{\psi(\pi)})^*\oplus\cdots\oplus((KD_n)^{\psi(\pi)})^*$．$g_i$を$D_i$の元とし，$\pi_i=\{\tau\in\pi\mid\psi(\tau)(g_i)=g_i\}$とおくに，$k$-algebraとして$((KD_i)^{\psi(\pi)})^*\cong K^{\pi_i}$．

2. Simple components

kを標数0の体，Kをkの有限次Galois拡大，πをそのGalois群とする。$\{\alpha_{\sigma,\tau}\}_{\sigma,\tau\in\pi}$を$\pi$の$K$におけるfactor setとする．$\pi$が位数$n$の巡回群$\langle\sigma\rangle$で，ある$\alpha\in k-\{0\}$に対し，

$$\alpha_{\sigma^i,\sigma^j}=\begin{cases}1 & i+j<n\text{ のとき}\\ \alpha & i+j\geqq n\text{ のとき},\end{cases}$$

をみたしているとき，$\{\alpha_{\sigma,\tau}\}_{\sigma,\tau\in\pi}$によって

きまる K と $\langle\sigma\rangle$ の crossed product を (K, α) と書いて，cyclic algebra という事にする。又，ζ を 1 の巾根とし，て，$K = k(\zeta)$ かつ $\forall \sigma, \tau \in \pi$ に対し $\alpha_{\sigma,\tau}$ は K に含まれる 1 の巾根 になっている時，$\{\alpha_{\sigma,\tau}\}$ によってきまる K と π の crossed product を cyclotomic algebra とよぶ事にしよう。

群環の simple component にあらわれてくる simple algebra は cyclotomic algebra と Brauer 同値である事が知られている。(e.g. [37]). では，Hopf algebra の simple component として出てくるような simple algebra はどのようなものであろうか。

<u>定理5.</u> k を標数 0 の体，K を k の有限次 Galois 拡大とする。任意の cyclic k-algebra (K, α)，$\alpha \in k-\{0\}$，は有限次元 cocommutative k-Hopf algebra の simple component として実現される。

(略証) $(K : k) = n$ とし，β を α^{-1} の n 乗根，

εを1のn乗根とする。$\pi = \operatorname{Gal}(K(\beta,\varepsilon)/k)$,
$\pi_0 = \operatorname{Gal}(k(\beta,\varepsilon)/k)$, $\pi_1 = \operatorname{Gal}(K(\beta,\varepsilon)/k(\beta,\varepsilon))$,
$\pi_2 = \operatorname{Gal}(K(\beta,\varepsilon)/k)$ と書き, $\operatorname{Gal}(K/k) = \langle u \rangle$
とおく。$\beta\varepsilon_1 (=\beta), \beta\varepsilon_2, \dots, \beta\varepsilon_h$ を $\{\sigma(\beta) \mid \sigma \in \pi_0\}$
の相異なる元の全体とする。

$G = \langle x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_h \mid x_i^2 = 1, y_s^n = 1, x_i x_j = x_j x_i, y_s y_t = y_t y_s, y_s^{-1} x_1 y_s = x_2, \dots, y_s^{-1} x_n y_s = x_1$ for $1 \le {}^\forall i, {}^\forall j \le n$, $1 \le {}^\forall s, {}^\forall t \le h \rangle$ とする。

$$\rho : K(\beta,\varepsilon)G \longrightarrow M_n(K(\beta,\varepsilon))$$

$$x_i \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$y_i \longmapsto \begin{pmatrix} & \varepsilon_i^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \varepsilon_i^{-1} \\ \varepsilon_i^{-1} & & & \end{pmatrix}$$

とする。ρはGの既約表現である。

$\sigma \in \pi$ に対し, $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_h\}$ の置換$\psi(\sigma)$
を次のように定義する。

(1) $\sigma \in \pi_2$ ならば, $\psi(\sigma)(x_i) = x_i$, $i = 1, \dots, n$.

(2) $\sigma\pi_2 = u$ ならば, $\psi(\sigma)(x_1) = x_2$, $\psi(\sigma)(x_2) = x_3$,

$\cdots$, $\psi(\sigma)(x_n) = x_1$.

(3) $\sigma(\beta\varepsilon_i) = \beta\varepsilon_j$ ならば $\psi(\sigma)(y_i) = y_j$.

このように $\psi(\sigma)$ を定義すると，G の定義から $\psi(\sigma)$ は G の自己同型とみる事が出来て，$\psi : \pi \longrightarrow \mathrm{Aut}\,G$, $\sigma \longmapsto \psi(\sigma)$ は準同型写像になる。

e を ρ に対応する $K(\beta,\varepsilon)G$ の central idempotent とすると，$e \in (K(\beta,\varepsilon)G)^{\psi(\pi)}$ である事がチェックできる。命題2と考えあわせると $(K(\beta,\varepsilon)Ge)^{\psi(\pi)}$ は有限次元 cocommutative k-Hopf algebra $(K(\beta,\varepsilon)G)^{\psi(\pi)}$ の simple component という事になる。

$\hat{K} = \{(a x_1 + u(a) x_2 + \cdots + u^{n-1}(a) x_n)e \mid a \in K\}$.

$\sigma \in \pi$ に対し，i_σ を $\sigma(\beta) = \beta\varepsilon_{i_\sigma}$ によって定義し，$\hat{u} = \frac{1}{|\pi|}\sum_{\sigma\in\pi}\sigma(\beta)\, y_{i_\sigma}^{-1} e$ とおくと，$\hat{K}$, $\hat{u}$, e $(K(\beta,\varepsilon)Ge)^{\psi(\pi)}$ で，$(K(\beta,\varepsilon)Ge)^{\psi(\pi)} = \hat{K} + \hat{K}\hat{u} + \cdots + \hat{K}\hat{u}^{n-1} \cong (K,\alpha)$ である事が分かる。つまり，(K,α) は $(K(\beta,\varepsilon)G)^{\psi(\pi)}$ の simple component.

ところで Hasse - Brauer - Noether の定理(e.g. [1])により，代数体上の central simple algebra は cyclic algebra であるから，定理5より，代数体 k 上の任意の central simple algebra は有限次 cocommutative k-Hopf algebra の simple component として実現される事が分かる．

では，任意の simple algebra は cocommutative k-Hopf algebra の simple component として実現されるであろうか？これはまだよく分からない。ただ，可換の時は次の命題が証明できる。

命題6．k を標数0の体，$L_1, \cdots, L_t$ を k の有限次拡大とする。k-algebra として $L_1 \oplus \cdots \oplus L_t$ を直和因子として含むような commutative cocommutative k-Hopf algebra が存在する。

文献

[1]. A.A. Albert, Structure of algebras, Amer,

Math. Soc. Colloq. Publ. XXIV (1939).

[2] M. E. Sweedler, Hopf algebras, Benjamin, (1969).

[3] T. Yamada. The Schur subgroup of the Brauer group, Lecture Notes in Math., vol 397, Springer-Verlag, New York. (1974).

Schur Index and Schur Subgroup

山田俊彦（都立大）

この小文では，Schur subgroup および Schur index に関して最近1年間に得られた結果を報告致します．

§1. Schur Subgroup $S(k)$, k＝代数体

k：円体，$k \subset Q(\zeta_m)$ は k を含む最小の1のm乗根の体，$W(k)$：k に含まれる1のm乗根全体，とすると，

$$S(k) = \sum_{p \mid |W(k)|} S(k)_p ,$$

$$S(k)_p = \{ [A] \in S(k) ;\ A \text{ の index は } p \text{ 巾} \}.$$

以下素数 p を固定する．さて

$$\mathcal{Q} = \{ \ell\ (\text{素数}) ;\ \ell \text{ は } Q(\zeta_m)/k \text{ で分岐し，その分岐指数は } p \text{ で割れる} \},$$

$$S(k, \mathfrak{M})_p = \{[A] \in S(k)_p \,;\ \mathfrak{M} \text{ の元を割らない } k \text{ の任意の素点で } A \text{ は split}\},$$

$$S(k, q)_p = \{[A] \in S(k)_p \,;\ k \text{ の } q \text{ を割らない任意の素点で } A \text{ は split}\},$$

($q \neq p$ は素数) とおくと, 次のことが成りたつ.

<u>Decomposition Theorem</u> (Janusz [5]).

$p \neq 2$ のとき

$$S(k)_p = S(k, \mathfrak{M})_p + \sum_{q \nmid m} S(k, q)_p \quad (\text{直和}).$$

$S(k, q)_p$ は cyclic group で, その order は k に関する不変量で記述される.

$p = 2$ のときの $S(k)_2$ の構造に関してはまだ未解決である. 特に $S(k)_2$ については, 上記のような分解は成りたたない.

§2. Schur Index と Modular 表現

Schur index と Modular 表現の間にある種

の関係があることは，R. Brauer, P. Fong 等の論文に見受けられていたが，1970年頃 K. Kronstein [6] が次の2つの定理を証明した：

<u>Theorem 2.1.</u> p：素数，Q_p：p進体，G：有限群，χ：Gの既約指標，φ：χの p-modular constituent (irreducible Brauer character)，$d_{\chi\varphi}$：分解定数，とするとき，

$$m_{Q_p}(\chi) \,\Big|\, [Q_p(\chi,\varphi) : Q_p(\chi)] \cdot d_{\chi\varphi} .$$

<u>Theorem 2.2.</u> ℓ：pと異なる素数，H：hyper-elementary group at ℓ，χ：Hの既約指標，φ：χの p-modular constituent，とするとき，

$$m_{Q_p}(\chi) = [Q_p(\chi,\varphi) : Q_p(\chi)].$$

さて M. Benard [1] は Theorem 2.2 を一般化して次の結果をえた：

<u>Theorem 2.3.</u> G：有限群，χ：cyclic defect group をもつ p-block にぞくする Gの既約指

標, φ: χの p-modular constituent, とするとき,

$$m_{Q_p}(\chi) = [Q_p(\chi, \varphi) : Q_p(\chi)].$$

証明には, cyclic defect group をもつ block の構造に関する Dade の結果を用いる.

Schur index と Modular 表現に関する他の関係をもっと見出すことが望ましい.

§3. Schur index と群の構造

Schur index と群の構造の関係については, これまでに次の結果が知られていた.

<u>Theorem 3.1.</u> (Fein-Yamada [3]). χ: G の既約指標, Q: 有理数体, $m = m_Q(\chi)$, とすると,

(i) $m \mid$ exponent of G, $m^2 \mid |G|$,

(ii) $p^r \mid m$, $p = 2$ or Sylow p-subgroup of G が abelian ならば, $p^{r+1} \mid$ exponent of G.

最近 C. Ford [4] により, この結果は次のように精密化された.

<u>*Theorem 3.2.*</u>　記法は *Theorem 3.1* と同じ．

(i) $p^r \mid m_Q(\chi)$ ならば，$p^{2r} \mid$ exponent of G であるかまたは $p^r \mid$ exponent of G'（Gの交換子群）．

(ii) $p \neq 2$, Sylow p-subgroup of G が abelian ならば，$p^{2r} \mid$ exponent of G.

§4. Splitting field

$n = |G|$, ζ_n：1の原始n乗根，χ：Gの既約指標とする．R. Brauer の結果により，χ は $Q(\zeta_n)$ において realizable である．群の表現と1の巾根の密接な関係を考えれば，次の問題が自然に生じる：

$m_Q(\chi)$ は $\min_L [L : Q(\chi)]$ にどれくらい近いか？

ここでLはχを realize するようなQの cyclotomic extension 全体を動く．

この方面における B. Fein の結果は [8] において報告しましたが，最近彼はさらに次の結果をえた．

Theorem 4.1. p は任意の素数, m は任意の正整数とするとき, 次の条件をみたす群 G とその既約指標 χ が存在する:

$$m_Q(\chi) = p \quad かつ \quad p^m = \min_L [L : Q(\chi)]$$

ここで L は上記の通り.

その他, real valued character χ の分解体に関する M. Benard の研究があるが, 省略します.

§5. 2-group の Schur Index

G を p-group とする. $p \neq 2$ なら G の任意の既約指標 χ に対して $m_Q(\chi) = 1$. $p = 2$ なら $m_Q(\chi) = 1$ or 2 であることはよく知られている. したがって次の問題が生じる:

$m_Q(\chi) = 2$ なる既約指標 χ をもつ 2-group G を特徴づけよ.

さて P. Roquette の論文をみると, もし 2-group G が $m_Q(\chi) = 2$ なる既約指標 χ をもてば, G の

subgroup Hとその既約指標φが存在して次の条件をみたす： $\chi = \varphi^G$, $m_Q(\varphi) = 2$, $\ker \varphi = N$ とおくと，H/Nはgeneralized quaternion groupで，φはH/Nのfaithfulな指標とみなせる．したがって，$m_Q(\chi) = 2$なるχをもつ2-group Gは，generalized quaternion groupをsectionとしてもつ．そこで上記の逆の命題が問題となる．すなわち

$G = 2$-group, $G \supset H \rhd N$, $H/N =$ generalized quaternion, φ：Hの既約指標で$\ker \varphi = N$, φ^G：既約，のとき，$m_Q(\varphi^G) = 2$か？

筆者は，Hそのものがgeneralized quaternion groupである場合，そのfaithfulな指標φの誘導指標φ^GのSchur index $m_Q(\varphi^G)$を調べてみましたが，詳しい結果はいづれ発表の予定ですので省略します．

References

[1] M. Benard: Schur indices and cyclic defect groups, (to appear).

[2] B. Fein: Cyclotomic splitting fields for group representations, (to appear).

[3] B. Fein and T. Yamada: The Schur index and the order and exponent of a finite group, J. Algebra 28 (1974), 496-498.

[4] C. Ford: Theorems relating the Schur index of a representation to the structure of the grou, (to appear).

[5] G. J. Janusz: The Schur group of an algebraic number field, (to appear).

[6] K. Kronstein: Representations over q-adic and q-modular field, (preprint).

[7] P. Roquette: Realisierung von Darstellungen endlicher nilpotenter Gruppen, Archiv der Math. 9 (1958), 241-250.

[8] T. Yamada: Schur 多元環の分解体について,1974 代数学シンポジウム記録.

[9] T. Yamada: The Schur subgroup of the Brauer group, Lecture Notes in Math. 397, Springer, 1974.

Jacobson radical of a matrix ring

大阪市立大 理　原田　学

ここでは，著者の近刊予定の "Small submodules in a projective module and semi-T-nilpotent sets" の内容を紹介する．

以下，R は単位元を持つ環，加群は右 R-加群で unitary とする．I を任意の集合とするとき，R_I は I×I-行列で列有限なもの全体の作る環を表わす．更に，J( ) は Jacobson radical を示すものとする．

われわれの目的は，$J(R_I)$ を決定することであるが，I が有限であれば $J(R_I) = J(R)_I$ であることはよく知られている．一般に $J(R_I) \subseteq J(R)_I$ が成立つが，I が無限のとき，この不等式がどうなるかという問題を N. Jacobson が [5] で提起した．これに関して，E. M. Patterson [8], N. E. Sexauer, J. E. Warnock [9] 等が，

$$J(R_I) = J(R)_I \Leftrightarrow J(R) \text{ が right T-nilpotent (vanishing ideal)}$$

を示した．その後 1969～1972 年に R. Ware, J. Zelmanowitz [12], R. Slover [10, 11] 等が，$J(R_I)$ の元を vanishing set of right ideals の概念を用いて完全に決定した．その後も W. Liebert [6] が R が domain の場合に $J(R_I)$ の型を決定しているが，これは上記の特殊な場合として含まれてしまう．

ここでは [12] の方法に従って考えて行くが，それでは先づ <u>small module</u> ($M \supset S$; $M = S + T \Rightarrow M = T$)

の概念が用いられる．

Lemma 1 [12]. P を projective, $S_P = \mathrm{End}_R(P)$ とするとき, $J(S_P) = \{f \in S_P \mid f(P)$ is small in $P\}$.

Lemma 2 [4]. Lemma 1 の仮定の下で, $J(S_P) = \mathrm{Hom}_R(P, J(P)) \Leftrightarrow J(P)$ is small in P.

この2つの lemmas から，$J(S_I)$ は free module の中の small submodules を決定することによって求められることがわかる．

一一般に projective modules の直和の中の small submodules を決定するのに，次の様な vanishing set of ideals の一般化が用いられる：

$\{M_\alpha\}_I$ を加群の集合，$\{S_\alpha \mid \subseteq M_\alpha\}$ をその部分加群の集合とする．$\{M_\alpha\}$ の任意の可附番個の部分集合 $\{M_{\alpha_i}\}$ および homomorphisms の集合 $\{f_i : M_{\alpha_i} \to M_{\alpha_{i+1}},\ f_i(M_{\alpha_i}) \subseteq S_{\alpha_{i+1}}\}$ について，M_{α_1} の元 m に対して $f_n f_{n-1} \cdots f_1(m) = 0$ となる n が存在するとき，$\{S_\alpha\}$ を locally, right semi-T-nilpotent set と呼ぶ．$M_\alpha = R$, S_α が右イデアルであるときには vanishig set と呼ばれている [12].

以上の準備により，次の定理を述べることができる．

定理 1. $\{P_\alpha\}_I$ を projective modules の集合，$P = \sum_I \oplus P_\alpha$, $P \supset S$ とする．このとき，次が同値になる：

1. S が P で small である．
2. $p_\alpha : P \to P_\alpha$ を projection とすれば，$\{p_\alpha(S)\}_I$ が locally, right semi-T-nilpotent set で且つ $p_\alpha(S)$ が P_α で small である．

3. P_α の中で small な submodule S_α で，$\{S_\alpha\}_I$ が locally, right semi-T-nilpotent set 且つ $S \subseteq \sum \oplus S_\alpha$ となるものが存在する．

これより，

系．M を R-加群，$\{m\}_{M_0}$ を M の generator とする．右イデアルの集合 $\{A_m \subseteq J(R)\}_{M_0}$ が locally, right semi-T-nilpotent であれば，$\sum_{M_0} m A_m$ は M で small である．逆に，P が projective で，S がその small submodule なら，上のような $\{A_m\}$ が存在して $S \subseteq \sum_{P_0} m A_m$ となる．

この系によって，projective module の small submodule は $\sum m A_m$ を標準形としていることがわかる．

一般に，$f \in End_R(M)$ は M の generator を用いて（一意的ではないが）$f = (a_{\sigma\tau}) \in R_{M_0}$ と表わされる．

定理 2．P を projective とし，$f \in End_R(P)$ が上の表現で $f = (a_{\sigma\tau})$ とするとき，

$f \in J(S_P) \Leftrightarrow \{\sum_\tau a_{\sigma\tau} R\}_\sigma$ が locally, right semi-T-nilpotent である．$(\sum a_{\sigma\tau} R \subseteq J(R))$.

これで，所期の目的は完全に達成されたことになる．

以下，定理 1 の証明を与える．

Lemma 3．$\{M_\alpha\}_I$ を有限生成 R-加群の集合，$M = \sum_I \oplus M_\alpha$，$p_\alpha : M \rightarrow M_\alpha$ を projection とする；S が M の

中で small のとき，$S_\alpha = p_\alpha(S)$ とすれば $\{S_\alpha\}$ は locally, right semi-T-nilpotent である．

証明．本質的に変りがないから，I は可附番集合とする．$\{M_\alpha\}_I$ の部分集合 $\{M_{i_j}\}_j$ と $\{f_j : M_{i_j} \to S_{i_{j+1}}\}$ が与えられたとする．M_{i_j} の generator を $\{m_1^{(j)}, m_2^{(j)}, \cdots, m_{n_j}^{(j)}\}$ とする．$f_j(m_k^{(j)}) \in S_{i_{j+1}} = p_{i_{j+1}}(S)$ より

$$S \ni s_k^{(j)} = s_1^{(j,k)} + s_2^{(j,k)} + \cdots + f_j(m_k^{(j)}) + \cdots + s_{\ell(j,k)}^{(j,k)}$$

ここに $s_t^{(j,k)} \in S_t$．

$k = 1, 2, \cdots, n_j$ だから，$\ell_j = \max_k \ell(j,k) < \infty$．

1．Special case：$i_1 < i_2 \leq \ell_1 < i_3 \leq \ell_3 < i_4 \leq \cdots$ の場合．

$M'_{i_j} = \{m_j + f_j(m_j) \mid m_j \in M_{i_j}\} \subseteq M_{i_j} \oplus M_{i_{j+1}}$，$M' = \sum_{j=1}^{\infty} M'_{i_j} + \sum_{\alpha \notin \{i_j\}} M_\alpha + S$ とおく．いま，$M = M'$ を示す．M_{i_1} の元 $m_k^{(1)}$ について，

$$M' \supseteq M'_{i_1} + S \ni m_k^{(1)} + f_1(m_k^{(1)}) - s_k^{(1)}$$

$$= -s_1^{(1,k)} - \cdots - (m_k^{(1)} - s_{i_1}^{(1,k)}) - \cdots - \overset{i_2}{\breve{0}} - \cdots - s_{\ell_1}^{(1,k)}.$$

よって $m_k^{(1)} \equiv s_{i_1}^{(1,k)} \pmod{M'}$．$\{m_k^{(1)}\}$ が generator より $(M_{i_1} + M')/M' = (S_{i_1} + M')/M'$．$S_{i_1}$ が M_{i_1} の中で small だから，$(M_{i_1} + M')/M' \equiv 0$．よって $M_{i_1} \subseteq M'$．順次同様にして $M_{i_j} \subseteq M'$ を得る．すなわち $M = M'$．よって S が small より，$M = \sum_{j=1}^{\infty} \oplus M'_{i_j} \oplus \sum_{\alpha \in \{i_j\}} \oplus M_\alpha$（[1]，Lemma 9 を見よ）．

2. General case. 最初の式において，l_1 が有限で $\{M_{i_j}\}$ が無限集合だから，$i_1 < i_{k_1}$ で $i_{k_1} > l_1$ となるものがある．同様に，$i_{k_2} > i_{k_1}$ 且つ $i_{k_2} > i_{k_1}$ なる i_{k_2} がある．これをくり返して，$\{M_{i_j}\}$ の部分集合 $\{M_{i_{k_t}}\}_t$ が得られる．いま，$g_t = f_{i_{k_{t+1}}-1} f_{i_{k_{t+1}}-2} \cdots f_{i_{k_t}}$ とおけば，$\{M_{i_{k_t}}\}, \{g_t\}$ は special case の仮定をみたしている．ゆえに，M_{i_1} の元 m に対して $0 = g_m g_{m-1} \cdots g_1(m) = f_{i_{k_{m+1}}} \cdots f_1(m)$ となる．

上の証明で，M_α の有限生成性は各 S_α が有限直和 $\sum_1^n \oplus M_{\alpha_t}$ と S の共通集合の射影で得られることのために必要であった．

系． $\{N_\alpha\}_I$ を R-加群の集合，$\{T_\alpha \subseteq N_\alpha\}_I$ を部分加群の集合とする．$\sum\oplus T_\alpha$ が $\sum\oplus N_\alpha$ の中で small とすれば，$\{T_\alpha\}$ は locally right semi-T-nilpotent である．

次に，定理1の 3.⇒1. を与える．

Lemma 4. $\{N_\alpha\}_I$, $\{T_\alpha\}_I$ は上の通りとし，$N = \sum_I \oplus N_\alpha$ とする．$J(S_N) \supseteq \mathrm{Hom}_R(N, \sum\oplus T_\alpha) \Leftrightarrow \{T_\alpha\}$ が locally right semi-T-nilpotent.

証明． $J(S_N) \supseteq \mathrm{Hom}_R(N, \sum\oplus T_\alpha)$ とする．$\{N_{\alpha_i}\}$，$\{f_i : N_{\alpha_i} \to T_{\alpha_{i+1}}\}$ が与えられたとする．番号をつけかえて $\alpha_j = j$ としてよい．

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ f_1 & 0 & & & \\ & f_2 & 0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & f_n & 0 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

は $J(S_N)$ の元であるから，擬正則性により

$$f_n f_{n-1} \cdots f_1(x) = 0.$$

逆に，$e_\alpha : N \to N_\alpha$ を射影とするとき，

$$J(S_{N_\alpha}) = e_\alpha J(S_N) e_\alpha \geq e_\alpha \mathrm{Hom}_R(N, \Sigma\oplus T_\tau) e_\alpha = \mathrm{Hom}_R(N_\alpha, T_\alpha).$$

これより，$\{\mathrm{Hom}_R(N_\alpha, T_\tau)\}_{\alpha,\tau}$ が [4], Lemma 5' の条件をみたすから，$J(S_N) \geq \mathrm{Hom}_R(N, \Sigma\oplus T_\alpha)$.

以上により，定理1は P_α が有限生成のときにすべて証明されたことになる。

いま，M を R-加群，$\{m\}_{M_0}$ をその generator とすれば，自然な全射 $\varphi : \sum_{M_0}\oplus u_m R \to M$ が存在する。$\{A_m\}_{M_0}$ が locally, right semi-T-nilpotent ならば，定理1の上記特別な場合により，$\Sigma\oplus u_m A_m$ は $\Sigma\oplus u_m R$ の中で small. 故に，M が projective であれば，$\varphi i = 1_M$ なる $i : M \to \Sigma\oplus u_m R$ があり，$i(S)$ が $\Sigma\oplus u_m R$ でも small であるから，$S \leq \Sigma\, u_m A_m$（系の証明）。

定理1の 1. ⇒ 2. の証明は，その特別の場合と上に証明した系を用いて，König Graph Theorem によって容易になされる。

文　　献

1. M. Harada and Y. Sai: On categories of indecomposable modules I, Osaka J. Math.7(1970), 323-344.
2. M. Harada: Perfect categories I, ibid., 10 (1973), 329-341.
3. M. Harada and T. Ishii: Perfect rings and the exchange property, to appear.

4. M. Harada and H. Kanbara: On categories of projective modules, Osaka J. Math. 8 (1971), 471-483.
5. N. Jacobson: Structure of Rings, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 37, 1956.
6. W. Liebert: Radical of some endomorphism rings, J. Reine Angew. Math. 261/263 (1973), 166-170.
7. E. Mares: Semi-perfect modules, Math. Z. 83 (1963), 347-360.
8. E. M. Patterson: On radical of rings of row-finite matrices, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Ser. A, 66 (1962), 24-46.
9. N. E. Sexauer and J. E. Warnock: The radical of the row-finite matrices over an arbitrary ring, Trans. Amer. Math. Soc. 139 (1965), 286-295.
10. R. Slover: The Jacobson radical of row-finite matrices, J. Algebra 12 (1969), 345-359.
11. R. Slover: A note on the radical of row-finite matrices, Glasgow Math. J. 23 (1972), 80-81.
12. R. Ware and J. Zelmanowitz: The radical of the endomorphism ring of a projective module, Proc. Amer. Math. Soc. 26 (1970), 15-20.

Infinite direct sum of finitely generated modules

Indiana Univ. 東屋 五郎

Mを環R上の左加群，Λをその準同型環とする。Λの元の system $\{a_\alpha\}$ が各 $x \in M$ に対して有限個の α を除いて $xa_\alpha = 0$ という条件を満すとき，(Mに関して) summable であるという。このとき x に対して(有限和) $\sum xa_\alpha$ を対応させることによってMの自己準同型すなわちΛの元が定義されるが，これを $\{a_\alpha\}$ の(Mに関する)和と呼び，$\sum a_\alpha$ で表わす。明らかにこれは左右分配律を満足する：$b\sum a_\alpha = \sum ba_\alpha$, $(\sum a_\alpha)b = \sum a_\alpha b$. さて，$\{e_\alpha\}$ が summable な直交巾等元の system ならば，$\sum e_\alpha = e$ も巾等元であり，しかも直和分解 $\sum_\oplus Me_\alpha = Me$ が成立つ。逆に e を巾等元とし，Me の直和分解 $Me = \sum_\oplus M_\alpha$ が与えられたとき，各 $x \in M$ に対し xe の M_α-成分を対応させることによりΛの元 e_α が定義されるが，system $\{e_\alpha\}$ が summable な直交巾等元の system でしかも $\sum e_\alpha = e$ であることも容易に知られる。次に任意の $a \in \Lambda$ および巾等元 $e \in \Lambda$ をとるとき，$Ma \subset Me$ なるための必十条件は $\Lambda a \subset \Lambda e$ である。何となれば，前者はすべての $x \in M$ に対し $xa = xae$ なること，すなわち $a = ae$ なることを意味するからである。このことから特に $Me \longleftrightarrow \Lambda e$ なる対応がMの直和因子とΛの左直和因子との間の1-1対応を与えることが分る。更に N, N' をMの直和因子，L, L' を対応するΛの左直和因子とすれば $N \oplus N' = M$ であるのは $L \oplus L' = \Lambda$ であるとき且つこのときに限る。何となれば，$N \oplus N' = M$ は，$N = Me$, $N' = Me'$, $e + e' = 1$ なるような巾等元 e, e' の存在と同値だからである。

いま M が $M = \sum_\oplus M_i$ のように直和分解され，しかも各 M_i が有限生成であると仮定する。しかるとき射影：$M \to M_i$ を e_i とおけばΛの summable な直交巾等元の system $\{e_i\}$ を

得るが，$\sum e_i = 1$ である．そこで $P = \sum \oplus \Lambda e_i$ とおく．P は Λ の左イデアルであるが，$a \in P$ であるための必十条件は Ma が M の適当な有限生成（R-）部分加群 N に含まれることである．何となれば，$a \in P$ ならば適当な有限個の $e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_n}$ に対して $a \in \Lambda e_{i_1} \oplus \Lambda e_{i_2} \oplus \cdots \oplus \Lambda e_{i_n}$ 従って $\Lambda a \subset \Lambda(e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_n})$ であるが，$e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_n}$ は中等元だから，$Ma \subset M(e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_n}) = Me_{i_1} \oplus Me_{i_2} \oplus \cdots \oplus Me_{i_n} = M_{i_1} \oplus M_{i_2} \oplus \cdots \oplus M_{i_n}$ で右辺は明らかに有限生成である．逆に $Ma \subset N$ が有限生成とすれば適当な *index* をとって $Ma \subset N \subset M_{i_1} \oplus M_{i_2} \oplus \cdots \oplus M_{i_n} = M(e_{i_1} + e_{i_2} + \cdots + e_{i_n})$ 従って $\Lambda a \subset \Lambda e_{i_1} \oplus \Lambda e_{i_2} \oplus \cdots \oplus \Lambda e_{i_n} \subset P$ を得る．このことから P は両側イデアルであることが分る．何となれば $Ma \subset N$ が有限生成ならば，任意の $b \in \Lambda$ に対して $Mab \subset Nb$ も有限生成だからである．しかし我々は更に

(i) Λ は Λ-左加群 P の準同型環と考えられる．

(ii) Λ の元の *system* $\{a_\alpha\}$ が M に関して *summable* であるのはそれが P に関して *summable* であるとき且つそのときに限り，この場合 M に関する和 $\sum a_\alpha$ はまた P に関する和に一致する．

ということを証明できる（[2, Theorem 18]）．

今度は M が

$$(1) \qquad M = \sum_{i \in I} \oplus M_i$$

のように（必ずしも有限生成ではない）完全直既約部分加群 M_i の直和に分解されると仮定する．ここに M_i が完全直既約であるとはその準同型環が局所環になることである．しかるとき，一般化された Krull-Schmidt の定理により M の如何なる直既約部分加群への直和分解も上の分解(1)に M の適当な自己同型を施すことによって得られる（[3, Theorem 1]）．さて N を M の直和因子とする．若し I の適当な部分集合 I' をとり

$$M = N \oplus \sum_{i \in I'} \oplus M_i$$

なる直和分解が得られるなら，Anderson-Fuller [1] に従って
(1) は N を補充するということにする．他方，I の任意の可算部分集合 $\{i_1, i_2, \cdots\}$ に対し，同型でない準同型の列 $f_1 : M_{i_1} \to M_{i_2}$，$f_2 : M_{i_2} \to M_{i_3}$，…… をとれば，必ず各 $x \in M_{i_1}$ に対して

$$x f_1 f_2 \cdots f_n = 0$$

となるような自然数 n が存在するとき，Harada [6] に従って (1) は semi-T-nilpotent であるということにする．ここで若し M_{i_1} が有限生成ならば上の条件は

$$(2) \qquad f_1 f_2 \cdots f_n = 0$$

なる条件に他ならないことを注意しておく．

さて，Harada-Sai [5, Lemma 9] で実質的に証明されているように

(1) がすべての M の直和因子を補充するならば，(1) は semi-T-nilpotent である

という事実が成立つ．

今，射影：$M \to M_i$ を e_i とおけば，$e_i \Lambda e_i$ は M_i の準同型環に同型であるから，局所環，したがって e_i は局所巾等元である．それ故，Λ の (Jacobson) 根基を J とおけば Je_i は Λe_i の最大部分左イデアルで，$e_i J$ は $e_i \Lambda$ の最大部分右イデアルである．さて任意の i, j に対してよく知られたように $e_i \Lambda e_j$ は $\mathrm{Hom}_R(M_i, M_j)$ と見られる．即ち $a \in e_i \Lambda e_j$ とそれが M_i でひき起す準同型 $f : M_i \to M_j$ とを同一視するのである．しからば $a \notin e_i J e_j$ なることが f が同型であるための必十条件である．何となれば，若し $a \notin e_i J e_j = J \cap e_i \Lambda e_j$ ならば $a \notin J$ 従って $a \notin Je_j$ であるが，Je_j は Λe_j の最大部分左イデアルだから $\Lambda a = \Lambda e_j$ が，従って $ba = e_j$ なる $b \in \Lambda$ が存在するが，このとき $e_j b e_i a = e_j b a = e_j^2 = e_j$ だから（b の代りに $e_j b e_i$ を考えることによって）

$b \in e_j \Lambda e_i$ と仮定してよい．同様に $ac = e_i$ なる $c \in e_j \Lambda e_i$ の存在が云えるが，$b = be_i = bac = e_j c = c$ である．これに対応する $\mathrm{Hom}_R(M_j, M_i)$ の元を g とおけば明らかに $g = f^{-1}$ であり $f : M_i \to M_j$ は同型である．逆に f を同型とする．しからば $f^{-1} : M_j \to M_i$ があるが，対応する $e_j \Lambda e_i$ の元を b とすれば ab は M_i において $ff^{-1} = 1$（恒等写像）をひき起す．これは $ab = e_i$ を意味するが，若し $a \in Je_j (\subset J)$ なら $e_i = ab \in J \cap \Lambda e_i = Je_i$ となり矛盾である．かくて $a \notin Je_j$ 従って $a \notin e_i J e_j$ である．以上のことから任意の index $i_1, i_2, \cdots, i_{n+1}$ に対し，$a_1 \in e_{i_1} \Lambda e_{i_2}$，$a_2 \in e_{i_2} \Lambda e_{i_3}$，$\cdots$，$a_n \in e_{i_n} \Lambda e_{i_{n+1}}$ をとり $f_1 : M_{i_1} \to M_{i_2}$，$f_2 : M_{i_2} \to M_{i_3}$，$\cdots$，$f_n : M_{i_n} \to M_{i_{n+1}}$ を対応する準同型とすれば，$f_1, f_2, \cdots, f_n$ がすべて同型でないことは $a_1 \in e_{i_1} J e_{i_2}$，$a_2 \in e_{i_2} J e_{i_3}$，$\cdots$，$a_n \in e_{i_n} J e_{i_{n+1}}$ と同値であり，しかも $f_1, f_2, \cdots, f_n$ が上の (2) を満すことは

$$a_1 a_2 \cdots a_n = 0 \tag{3}$$

と同値であることが知られる．

次に $a \in \Lambda$ をとり，ae_j が M_i でひき起す準同型 $M_i \to M_j$（あるいは $e_i a e_j$ に対応する準同型といってもよい）を a_{ij} と書くことにする．すべての i, j に対して a_{ij} が同型でないような（即ち $e_i a e_j \in e_i J e_j$ であるような）a のすべてよりなる Λ の部分集合を C とすれば，C は筆者の [2] 又は [3] における意味での根基である（[3, Theorem 3 i)]），即ち C は Λ の両側イデアルで巾等元（$\neq 0$）を有せず，逆に巾等元を持たない左又は右イデアルは C に含まれる．特に，J は巾等元を持たないから $J \subset C$ である．更に各 e_i に対し，

$Je_i \subset Ce_i \subset \Lambda e_i$ であるが $e_i \notin C$ 従って $e_i \notin Ce_i$ であり, Je_i が Λe_i の極大部分左イデアルだから $Je_i = Ce_i$ である.

そこで以下各 M_i は有限生成であるとする. しからば $P = \sum_{\oplus} \Lambda e_i$ は上に見たように Λ の両側イデアルであり, しかも Λ は(右作用環として) Λ-左加群 P の準同型環になる. しかして各 e_i は局所巾等元だから各 Λe_i は局所 Λ-左加群, あるいは射影的完全直既約 Λ-左加群である. それ故 Harada [6, Theorem 7] により, 次の条件は同値である (P は Λ-左加群とみて):

(a) P が semi-perfect.

(b) $C = J$.

(c) $P = \sum_{\oplus} \Lambda e_i$ なる直和分解は semi-T-nilpotent.

(d) $P = \sum_{\oplus} \Lambda e_i$ は P のすべての直和因子を補完する.

原田氏の証明はしかし少々難解である. ここで (a)$\Leftrightarrow$(c) は筆者 [4, Theorem 9] からも出ることに注意したい. それは上に述べた (2) と (3) の同値性によって明らかであろう. また (a) $\Rightarrow$ (b) は Mares [7] の結果を使えば次のようにも証明出来る: 先ず [3, Theorem 3 ii)] によって $\bar{\Lambda} = \Lambda/C$ は $\sum_{\oplus} \bar{\Lambda}\bar{e}_i$ の準同型環と見られるが, $\bar{\Lambda}\bar{e}_i \cong \Lambda e_i/Ce_i = \Lambda e_i/Je_i$ であるから $\sum_{\oplus} \bar{\Lambda}\bar{e}_i \cong P/JP$ である. それ故特に $a \in C$ なる必十条件は $Pa \subset JP$ である. しかるに P を semi-perfect と仮定すれば, [7, Theorem 5.1] によって JP は P において small であるが, P は射影的だからよく知られたように JP は P のすべての small な部分加群の和である. かくて $Pa \subset JP$ とは Pa が P において small であることを意味し, 従って [7, Theorem 2.4] によって $C = J$ となる. 更に (a) $\Rightarrow$ (d) は P が semi-perfect ならば P/JP の直和分解は P のそれへ lift 出来るという Mares の定理 [7, Theorem 4.3] から明らか

であろう。

さて P の直和因子 $Q = Pe$ $(e = e^2)$ と (P の準同型環) Λ の左直和因子 $L = \Lambda e$ とは 1-1 に対応する。それ故 P の直和因子 Q と M の直和因子 N とも $Q = Pe \longleftrightarrow N = Me$ $(e = e^2)$ なる対応で 1-1 に対応する。更に Q, Q' が P の直和因子で、N, N' が夫々に対応する M の直和因子とするとき、$Q \oplus Q' = P$ なるための必十条件は $N \oplus N' = M$ である。何となれば、前にも述べたように $Q \oplus Q' = P$ なるための条件は $e + e' = 1$, $Q = Pe$, $Q' = Pe'$ なる巾等元 e, e' の存在であり、これは ($N = Me$, $N' = Me'$ であるから) $N \oplus N' = M$ を意味するからである。このことからまた $M = \sum_{\oplus} M_i$ なる直和分解が M の直和因子 N を補充するための必十条件は $P = \sum_{\oplus} \Lambda e_i$ なる直和分解が N に対応する P の直和因子 Q を補充することであることが知られる。よって我々は次の定理を得る：

定理. $M = \sum_{\oplus} M_i$ を有限生成完全直既約部分加群への直和分解、$P = \sum_{\oplus} \Lambda e_i$ を対応する (M の準同型環) Λ の両側イデアルとする。しからば次の条件は同値である：

(1) $P = \sum_{\oplus} \Lambda e_i$ は (Λ-左加群として) semi-perfect.

(2) $C = J$

(3) M の直和分解は semi-T-nilpotent.

(4) M の直和分解は M のすべての直和因子を補充する.

References

[1] F. W. Anderson and K. R. Fuller: Modules with decompositions that complement direct summands, J. Algebra 22 (1972), 241-253.

[2] G. Azumaya: On generalized semi-primary rings and Krull-Remak-Schmidt's theorem, Jap. J. Math. 19 (1948), 525-547.

[3] G. Azumaya: Corrections and supplementaries to my paper concerning Krull-Remak-Schmidt's theorem, Nagoya Math. J. 1 (1950), 117-124.

[4] G. Azumaya: Characterizations of semi-perfect and perfect modules, Math. Z. 140 (1974), 95-103.

[5] M. Harada and Y. Sai: On categories of indecomposable modules I, Osaka J. Math. 7 (1970), 323-344.

[6] M. Harada: On categories of indecomposable modules II, Osaka J. Math. 8 (1971), 309-321.

[7] E. A. Mares: Semi-perfect modules, Math. Z. 82 (1963), 347-360.