第9回環論グループセミナー

記　　　　録

1976年10月6日—7日

東 京 都 立 大 学

目　次

第9回環論グループセミナーは，1976年10月6日，7日の両日，東京都立大学理学部において，torsion theory を主題として開催された。

両日とも，70名以上の参加者があったが，種々お心遣いをして下さった遠藤静男教授をはじめとする東京都立大学数学教室ならびにその近傍の諸氏に対し心から御礼申し上げたい。また，科研総合班からの補助に対しても謝意を表明したい。

なお，次回からは，環論シンポジウムと名称を変更し，第10回シンポジウムを8月下旬に信州大学理学部で開催の予定である。

1977年1月

岡山大学理学部

富永　久雄

ON EXCHANGE PROPERTY

岡山大理 加戸 次郎

以下，Rは単位元をもつ環，加群はすべて右R-加群でunitaryとする。

1964年にCrawley and Jónnson ([1])が定義したExchange propertyと原田氏の定義による完全直既約加群の族のlocally semi-T-nilpotent性との関係を考察します。

（定義）$\aleph$をあるcardinal数とする時，
加群Mが$\aleph$-exchange propertyをもつ
$\Longleftrightarrow$ Mと同型な直和因子M'をもつ任意の加群Aと，Aの任意の直和分解$A=\oplus_{B\in\mathcal{B}} B$（ただし$|\mathcal{B}|\leq\aleph$）に対して，各Bの部分加群B'で，$A=M'\oplus(\oplus_{B\in\mathcal{B}} B')$となるものが存在する。

そして加群Mが(finite) exchange propertyをもつとは，（任意のfinite）任意のcardinal $\aleph$について，Mが$\aleph$-exchange propertyをもつことである。

[1]でexchange propertyに関する基本的な性質が述べられていますが，後で使用する2つの補題を述べておきます。

(i) 加群$M=M_1\oplus\cdots\oplus M_n$，$\aleph$はあるcardinal

M が $\aleph$-exchange property をもつ $\Longleftrightarrow$ 各 M_i $(i=1,\cdots,n)$ が $\aleph$-exchange property をもつ。

(ii) 直既約加群 M について M が 2-exchange property をもつ $\Longleftrightarrow$ M は exchange property をもつ。

example

(イ) 直既約加群 M について
M が exchange property をもつ $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{End}_R(M)$ が local ring ([1])

(ロ) injective module ([7]), quasi-injective module ([5]) は exchange property をもつ

(ハ) (i) で直和因子が exchange property をもっても無限直和の場合，加群 M も同じ性質をもつとは限らない。

p をある素数とすると，$\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ は完全直既約 $\mathbb{Z}$-加群。しかし $T=\bigoplus_{n=1}^{\infty}\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ は finite exchange property をもたない ([1]).

以下我々は完全直既約加群の無限直和は，どんな条件があれば (finite) exchange property をもつかという問題を考える。その前に少し準備が必要です。

$\mathfrak{N}$ を完全直既約加群の族 $\mathfrak{N}$ に属する加群と非同型な写像の列 $\{f_n: N_n \to N_{n+1}\}$ (ただし $i \neq j$ なら $N_i \neq N_j$) があった時，任意の N_1 の元 m に対してある番号 n (m に依存する) で $f_n \cdots f_1(m)=0$

を満たすものが存在する時に，$\{f_n : N_n \to N_{n+1}\}$ は locally T-nilpotent といい，$\mathfrak{N}$ に属する任意のこのような列が locally T-nilpotent である時に，$\mathfrak{N}$ は locally semi-T-nilpotent であるという。

M が完全直既約加群に関して exchange property をもつとは，M と同型な直和因子 M' をもつ任意の加群 A と，A の任意の完全直既約部分加群による分解 $A = \oplus_{B \in \mathfrak{B}} B$ とに対して，B の部分加群 B' で $A = M' \oplus (\oplus_{B \in \mathfrak{B}} B')$ となるものが存在することである。この場合 B は直既約であるから ある部分族 $\mathfrak{B}'$ で $A = M' \oplus (\oplus_{B \in \mathfrak{B}'} B)$ となることに注意する。

Proposition 1. ([3]). $\mathfrak{N}$ を完全直既約加群の族，$M = \oplus_{N \in \mathfrak{N}} N$ とある。次は同値。

(イ) $\mathfrak{N}$ は locally semi-T-nilpotent である。

(ロ) M は完全直既約加群に関して exinange property をもつ。

Proposition 2. ([8] と [9]).

Prop. 1 と同じ仮定のもとで次は同値。

(イ) $\mathfrak{N}$ は locally semi-T-nilpotent である。

(ロ) M は finite exchange property をもつ。

これらより，$\mathfrak{N}$ が locally semi-T-nilpotent であることと，M が exchange property をもつこととは同値ではないかと予想されるが，残念ながらまだ完全には解決されていません。これまでに次の２つの場合には肯定的に解決されています。

(イ) $\mathfrak{N}$ が移入的直既約加群からなる時．([8]).

(ロ) $\mathcal{N}$ の isomorphic class が有限の時。([2]).

そして 私は 次の 2つの結果を得ました。

Theorem 1. $\mathcal{N}$ を完全直既約加群の族、$\mathcal{N} = \cup_{f \in P} \mathcal{N}(f)$ は isomorphic class への分割とする $\mathcal{N}$ が locally semi-T-nilpotent で 各 f について $|\mathcal{N}(f)| < \aleph_0$ ならば、$M = \oplus_{N \in \mathcal{N}} N$ は $\aleph_0$-exchange property をもつ。

Theorem 2. $\mathcal{N}$ を完全直既約加群の族。$\mathcal{N}$ が locally semi-T-nilpotent で、$\mathcal{N}$ の各加群が有限生成である時には、$M = \oplus_{N \in \mathcal{N}} N$ は $\aleph_0$-exchange property をもつ。

Lemma ([2, Lemma 8]). 加群 M は finite exchange property をもつとする。そして $A = M \oplus L = \oplus_{i=1}^{\infty} A_i$, $K_i = \oplus_{l \geq i}^{\infty} A_l$, ならば A_i の直和因子 A_i' と K_{i+1} の直和因子 K_{i+1}' で、任意の n について $A = M \oplus (\oplus_{i=1}^{n} A_i') \oplus K_{n+1}'$ となるものが存在する。

Th. 1 の証明. $A = M \oplus M' = \oplus_{i=1}^{\infty} A_i$ とする時 A_i の部分加群 A_i' で $A = M \oplus (\oplus_{i=1}^{\infty} A_i')$ となるものが存在することを示す。Prop. 2 より M は finite exchange property をもつ、従って $K_i = \oplus_{l=i}^{\infty} A_l$ とおくと Lemma より A_i, K_{i+1} の分解 $A_i = A_i' \oplus A_i''$ $K_{i+1} = K_{i+1}' \oplus K_{i+1}''$ で 任意の n で $A = M \oplus (\oplus_{i=1}^{n} A_i') \oplus K_{n+1}'$ となるものが存在する。一方 $A = (\oplus_{i=1}^{n} A_i') \oplus (\oplus_{i=1}^{n} A_i'') \oplus K_{n+1}' \oplus K_{n+1}''$ だから 任意の n について $M \approx (\oplus_{i=1}^{n} A_i'') \oplus K_{n+1}''$ となる。ゆえに Kanbara Theorem

Krull-Schmidt-Azumaya Theorem によって各 A_i'' は完全直既約分解をもつ：

$$(*)\qquad A_i'' = \oplus_{\rho \in P} \oplus_{B \in \mathfrak{B}(i,\rho)} B$$

ただし 各 B は $\mathcal{H}(\rho)$ に属するある加群に同型で、$\sum_i |\mathfrak{B}(i,\rho)| \leq |\mathcal{H}(\rho)|$.

$M^* = M \oplus (\oplus_{i=1}^{\infty} A_i')$ とおく。 $M^* \neq A$ として矛盾を導く。$A = (\oplus_{i=1}^{\infty} A_i') \oplus (\oplus_{i=1}^{\infty} A_i'')$, $\oplus_{i=1}^{\infty} A_i' \subseteq M^*$ だから A_i'' の分解 $(*)$ を考えると，ある $\mathfrak{B}(i_1,\rho_1)$ には M^* に含まれない加群 B_1 が存在する。

$a_1 \in B_1 \setminus M^*$ とする。 $p: A \longrightarrow K'_{m+1}$ を $A = M \oplus (\oplus_{i=1}^{m} A_i') \oplus K'_{m+1}$ (ただし $m = i_1$) に関する射影とすると，$x_1 = p(a_1) \notin M^*$. この x_1 を $K_{m+1} = (\oplus_{i=m+1}^{\infty} A_i') \oplus (\oplus_{i=m+1}^{\infty} A_i'')$ で表わして $x_1 = \sum_i x_i' + \sum_i x_i''$ とする。 するとある $i_2 > i_1$ で $x_{i_2}'' \notin M^*$ となるものが存在する。再び $(*)$ を考えるとある $\mathfrak{B}(i_2,\rho_2)$ に属する B_2 で $q(x_1) \in B_2 \setminus M^*$ となるものが存在する。ただし $q: A \longrightarrow B_2$ は $A = (\oplus_{i=1}^{\infty} A_i') \oplus (\oplus_{\rho \in P} \oplus_{B \in \mathcal{H}(i,\rho)} B)$ に関する射影である。 $g_1 = qp|_{B_1}: B_1 \longrightarrow B_2$ とおくと $a_2 = g_1(a_1) \in B_2 \setminus M^*$ である。 a_1 に代えて a_2 について同様の考察を続けることによって，$g_k: B_k \longrightarrow B_{k+1}$ ($B_k \in \mathfrak{B}(i_k,\rho_k)$, $i_k < i_{k+1}$) で $g_k \cdots g_1(a_1) \notin M^*$ となるものがとれる。$\sum_i |\mathfrak{B}(i,\rho)| < \aleph_0$。だからある番号 k_1 で $f_1 = g_{k_1} \cdots g_1 : B_1 \longrightarrow B_{k_1+1}$ は非同型となるものがとれる。この方法を続けることによって $k_1 < k_2 < \cdots$ で $f_n = g_{k_n} \cdots g_{k_{n-1}+1}$ は非同型となるようにできる。そして作り方より，任意の n について $f_n \cdots f_1(a_1) \neq 0$ である。

これは $\mathfrak{N}$ が locally semi-T-nilpotent であることに反する。ゆえに $A = M \oplus (\oplus_{i=1}^{\infty} A_i')$ が示された。

Th. 2の証明. $A = M \oplus M' = \oplus_{i=1}^{\infty} A_i$ とおく。Th.1 の証明の様に、分解 $A_i = A_i' \oplus A_i''$ $\oplus_{l=i+1}^{\infty} A_l = K_{i+1} = K_{i+1}' \oplus K_{i+1}''$ が存在して $A = M \oplus (\oplus_{i=1}^{n} A_i') \oplus K_{n+1}'$ となる。$p : A \to \oplus_{i=1}^{\infty} A_i''$ を $A = (\oplus_{i=1}^{\infty} A_i') \oplus (\oplus_{i=1}^{\infty} A_i'')$ に関する射影とする。$\mathfrak{F}$ を $\mathfrak{N}$ の任意の有限部分集合とすると、$p(\oplus_{N \in \mathfrak{F}} N)$ は $\oplus_{i=1}^{\infty} A_i''$ の直和因子であることを示す。$M^{*} = \oplus_{N \in \mathfrak{F}} N$ は有限生成だから、ある m で $M^{*} \subseteq (\oplus_{i=1}^{m} A_i') \oplus (\oplus_{i=1}^{m} A_i'')$ となる。従って $q : A \longrightarrow (\oplus_{i=1}^{m} A_i'') \oplus K_{m+1}''$ を $A = (\oplus_{i=1}^{m} A_i') \oplus K_{m+1}' \oplus (\oplus_{i=1}^{m} A_i'') \oplus K_{m+1}''$ に関する射影とすれば、$p(M^{*}) = q(M^{*})$ となる。$q|M$ は同型写像だから、$q(M) = q(M^{*}) \oplus L = p(M^{*}) \oplus L$ と直和分解する。ゆえに $p(M^{*})$ は $\oplus_{i=1}^{m} A_i''$ の従って $\oplus_{i=1}^{\infty} A_i''$ の直和因子である。Th.1 の証明の中で示されたように、各々の A_i'' は、$\mathfrak{N}$ に属するものと同型な完全直既約部分加群の直和で表わされている。仮定より $\mathfrak{N}$ は locally semi-T-nilpotent であるから、原田 [4] の Th. 3.2.5 によって $p(M)$ は $\oplus_{i=1}^{\infty} A_i''$ の直和因子である。Prop. 1 によって $p(M)$ は完全直既約加群に関して exchange property をもつから A_i'' の部分加群 A_i''' で $\oplus_{i=1}^{\infty} A_i'' = p(M) \oplus (\oplus_{i=1}^{\infty} A_i''')$ となるものが存在する。$A = (\oplus_{i=1}^{\infty} A_i') \oplus p(M) \oplus (\oplus_{i=1}^{\infty} A_i''')$ で $p|M$ は1対1の同型だから、我々は、$A = M \oplus (\oplus_{i=1}^{\infty} (A_i' \oplus A_i'''))$ を得る。

Corollary 1. Sを semi-perfect 加群の直和とすると，次は同値。

(イ) S は semi-perfect である

(ロ) S は $\aleph_0$-exchange property をもつ。

証明. [4, Cor. 5.1.13] によって S は直既約 semi-perfect 加群の直和である。それを $S = \oplus_{T \in \mathfrak{T}} T$ とする。(イ)を仮定すると，T は一元生成，[4, Cor. 5.1.13] によって $\mathfrak{T}$ は locally semi-T-nilpotent，従って Th. 2 によって (ロ)がいえる。逆に (ロ)を仮定すると，Prop. 2 によって，$\mathfrak{T}$ は locally semi-T-nilpotent 従って [4, Cor. 2.2.2] によって S は semi-perfect である。

Corollary 2. 直既約分解をもつ環 R 上の射影的加群 S について次は同値.

(イ) S は semi-perfect である。

(ロ) S は $\aleph_0$-exchange property をもつ。

証明. 示すべきは (ロ) ⇒ (イ)

Kaplansky Theorem によって S は可算個で生成されるとして一般性を失わない。すると S は $F = \oplus_{i=1}^{\infty} F_i$, $F_i \approx R_R$ の直和因子である。S は $\aleph_0$-exchange property をもつのだから，$F_i = F_i' \oplus F_i''$ で $F = S \oplus (\oplus_{i=1}^{\infty} F_i')$ となるものが存在する。$S \approx \oplus_{i=1}^{\infty} F_i''$ だから最初に述べた補題によって各 F_i'' は $\aleph_0$-exchange property をもつ。従って容易にわかるように F_i'' は直既約分解をもつ。ゆえに S も直既約分解をもつ

から，それを $S = \oplus_{i \in I} S_i$ とする。各 S_i は $\aleph_0$-exchange property をもつから Warfield の結果より S_i は完全直既約である。[4, Th. 5.2.4'] によって S_i は semi-perfect，ゆえに Cor. 1 より S は semi-perfect である。

References

[1] P. Crawley and N. Jónnson: Refinements for infinite direct decompositions of algebraic systems, Pacific J. Math. 14 (1964) 797-855.

[2] M. Harada and T. Ishii: On perfect rings and the exchange property, Osaka J. Math. 12 (1975) 483-491.

[3] M. Harada: Supplementary remarks on categories of indecomposable modules, Osaka J. Math. 9 (1972) 49-55.

[4] M. Harada: Applications of factor categories to completely indecomposable modules, Publ. Dept. Lyon 11 (1974) 19-104.

[5] L. Fuchs: On quasi-injective modules, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 23 (1969) 541-546.

[6] R. B. Warfield, Jr.: A Krull-Schmidt theorem for infinite sums of modules, Proc. Amer. Math. Soc. 22 (1969) 460-465.

[7] R. B. Warfield, Jr.: Decompositions of injective modules, Pacific J. Math. 31 (1969) 263-276.

[8] K. Yamagata: The exchange property and direct sums of indecomposable injective modules, Pacific J. Math. 55 (1974) 301-317.

[9] K. Yamagata: On rings of finite representation type and modules with the finite exchange property, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sec. A 12 (1974) 39-48.

多項式環に関するSerreの問題
(D. Quillenの仕事の紹介)

慶大・工　中島晴久

代数的連接層に関する有名な論文[21]においてSerreは次の予想を与えた。

Serre conjecture

[$S_{n,r}$] kを体，A_nをk上のn変数多項式環とするとき，rank rの有限生成射影A_n−加群は自由A_n−加群である。

この予想に対してなされた研究の歴史を[7]に沿って紹介するとともに，先頃D. Quillenによって得られた肯定的解決[20]について報告する。

特に断わらない限り環は単位元を持つ可換環で，また射影加群は有限生成とする。$\mathbb{A}^n_R$, $\mathbb{P}^n_R$でそれぞれ環R上のaffine n-space, projective n-spaceを表わす。$\mathcal{O}_S$を構造層とするscheme $(S, \mathcal{O}_S)$上の，locally free sheafとvector bundleを同一視し，それらのなすcategoryを$\mathrm{Vect}(S)$，また環R上の射影加群のcategoryを$\mathrm{Proj}(R)$で表す。Sの開集合U及び$E \in \mathrm{Vect}(S)$について，$\Gamma(U, E)$はUにおけるEのsectionの作る加群を，一方$\tilde{P}$はPにassociateするvector bundleを意味する。affine variety上のvector bundleとその coordinate ring上の射影加群のcategoryとはequivalentになるから，Serreの問題は，$\mathbb{A}^n_k$上のvector bundleのtrivialityを決定することに他ならない。

§1. Serreの問題の歴史

[$S_{1,r}$] $(\forall r)$，[$S_{n,1}$] $(\forall n)$なる自明な場合に注意して，まず

(1.) Seshadri [24]　; [$S_{2,r}$] $(\forall r)$

Seshadriの定理は，[13]において拡張され，[9]，[2]，[3]にその変形をみられる。

<u>定　義 1.1</u>　環 R 上の加群 M が stably free であるとは，適当な rank の自由加群 F があって，M ⊕ F が自由 R－加群となるときにいう。

(2.) <u>Grothendieck</u> [22]　；任意の n について，体 k 上の n 変数多項式環を A_n で表わすと，射影 A_n－加群は stably free である。

(𝒞，⊥)を category with product (e.g. [3]) とすれば，この product から定まる Grothendieck group 及び Whitehead group をそれぞれ $K_i(\mathcal{C}, \perp)$ ($i = 0, 1$) (e.g. [3]) で表わし，特に環 R に対して，$K_i(R)$ は $K_i(\mathrm{Proj}(R), \oplus)$ ($i = 0, 1$) を意味する。(2.) によれば，$K_0(A_n) \cong \mathbb{Z}$ である。

(3.) <u>Serre</u> [22]　；$P \in \mathrm{Proj}(A_n)$ をとるときに，$Q \in \mathrm{Proj}(A_n)$ 及び自由 A_n－加群 L が存在して，$P \cong Q \oplus L$，$rg(Q) \leqq n$ をみたす。

(2.)，(3.) は，例えば [1]，[3] でみられるように非可換の場合にまで一般化された。いずれにせよ，Grothendieck の定理の結果，Serre の問題は，加群の cancellation に関する研究を促したわけである。

<u>定　義 1.2</u>　環 R で $a = (a_1, \cdots, a_{r+1}) \in R^{(r+1)}$ が unimodular であるとは，$Ra_1 + \cdots + Ra_{r+1} = R$ をみたすときにいう。$U_{r+1}(R)$ でこのような elements の全体を表わす。

<u>注　意 1.1</u>

(i) 環 R 上の size r+1 の一般線形群 $GL_{r+1}(R)$ は自然に $U_{r+1}(R)$ に作用し，この状況を，混同の恐れのない限り，R を略し $GL_{r+1} \longrightarrow U_{r+1}$ で示す。

(ii) $$\mathrm{Stab}_r(R) = \left\{ [P] \;\middle|\; \begin{array}{l} P \text{ は } R\text{－加群で } P \oplus R \cong R^{(r+1)}. \\ [P] \text{ は } P \text{ の同型類} \end{array} \right\}$$

$GL_{r+1} \backslash U_{r+1} = GL_{r+1} \to U_{r+1}$ による orbit の集合とするとき，これらの集合の cardinality は等し

い。従って exterior power を用いて、$GL_{r+1} \to U_{r+1}$ (transitive) ($\forall r \geq 2$) ならば、環 R 上の stably free な加群は自由 R－加群である。

<u>定義 1.3</u> elementary matrix によって生成される $GL_{r+1}(R)$ の部分群を $E_{r+1}(R)$ とする。

$$SR(R) = \inf \left\{ r_0 \;\middle|\; \begin{array}{l} E_{r+1} \to U_{r+1}\ (\text{transitive})\ (\forall r \geq r_0) \\ \text{作用は } GL_{r+1} \text{ の作用の制限} \end{array} \right\}$$

を環 R の stable range という。

<u>命題 1.1</u> (Bass [1], [6], [7]) R を Krull 次元 d の Noether 環とするとき $SR(R) \leq d+1$ が成り立つ。

この命題の証明の際、次の補題を用いる。

<u>補題 1.1</u> (e.g. [7]) 命題 1.1 の記法の下に R 上の一変数多項式環 $R[T]$ を、その monic 多項式の全体で局所化した環を $R(T)$ で表わす。このとき、$\mathrm{Krull\,dim}\, R(T) \leq d$ が成り立つ。

命題 1.1 は、Vaseršteinの例[27]から、ある意味で best possible である。環の stable range は加群の generating set に関する Forster－Swan の結果[14], [26]と深い関係にある。実際 Eisenbud－Evans [11]は、Swan [26]の方法を精密化して、Serre の定理や命題 1.1 を含む広範な結果を得ている。basic element が unimodular element に代わって著しく貢献した。これに伴って提出された3つの予想[12]は、Davis－Geramita [10]で特殊な場合について解かれている。

Bass の定理を Serre の問題に適用して

(4.) <u>Bass</u> [1] $\Rightarrow$ $[S_{n,r}]$ ($\forall r > n$)

環 R と一変数多項式環 $R[T]$ の stable range は、如何なる関係にあるか。

<u>命題 1.2</u> (Suslin [7]) R を Krull 次元 d の Noether 環、任意の $n \geq 1$ について、R 上の n 変数多項式環を R_n とするとき、

$$SR(R_n) \leq 1 + \max\left\{ d,\ \frac{SR(R_{n-1})}{2} \right\}.$$

これより
(5.) Suslin [25] ; $[S'_{n,r}]$ ($\forall r \geq 1+\frac{n}{2}$)
一方，例えば [4] にその一般論をみる2次形式の K-theory はこの種の cancellation の問題に応用される。

定義1.4 環 R に対し，category $\textcircled{P}(R)$ を次の如く定義する。$P \in Proj(R)$, $h: P \times P \to R$ を P 上の非退化交代形式とし，ordered pair (P, h) を $\textcircled{P}(R)$ の object とみなす。$(P_i, h_i) \in \textcircled{P}(R)$ 但し，$i = 1, 2$ について，$\alpha : P_1 \xrightarrow{\sim} P_2$ なる R-isomorphism が上の交代形式 h_i と compatible なとき，$\textcircled{P}(R)$ における morphism とする。

$(P_1, h_1) \perp (P_2, h_2) = (P_1 \oplus P_2, h_1 \oplus h_2)$ で定められる functor $\perp : \textcircled{P}(R) \times \textcircled{P}(R) \longrightarrow \textcircled{P}(R)$ は category $\textcircled{P}(R)$ に，category with product の構造を入れる。従って，$KSp_i(R) = K_i(\textcircled{P}(R), \perp)$ $(i = 0, 1)$ が定義できる。$F: \textcircled{P}(R) \longrightarrow Proj(R)$ を forgetful functor とすればそれぞれの product を保存するから；Grothendieck group の universality により $KSp_0(R) \longrightarrow K_0(R)$ は group homomorphism であり，この kernel を $W(R)$ で表わす。unitary K-theory を用いて容易に．-

命題1.3 (e.g. [4], [7]) R を Krull 次元1以下の Noether 環とすれば．$W(R)$ は trivial である。

Karoubi は命題1.3の適用範囲を拡大する。

命題1.4 (Karoubi [16]) 2 が unit である環 R については，$W(R) \cong W(R[T])$ が成り立つ。

環の stable range が小さい場合に，$W(R)$ は集合として次の関係をもつ。

命題1.5 (Suslin [7]) stable range が3以下である環 R に対し，2つの集合 $SL_3(R) \setminus U_3(R)$ と $W(R)$ の cardinality は等しい。但し $SL_3(R)$ の $U_3(R)$ への作用は，$GL_3(R)$ の作用を制限する。

従って特に $SR(R) \leq 3$ でしかも $W(R)$ が trivial な環 R 上の stably free な加群は自由 R-加群である。

有限体上のalgebraのstable rangeはcongruence subgroupに関する深い結果[8]を用いて．

<u>命　題1.6</u>（Vaseršteïn[7]）有限体k上可換なalgebra Rのk上超越次数をeとする。このとき$sR(R) \leq \max\{2, e\}$が成り立つ。

命題1.3，1.4，1.5，1.6の系として．

<u>系　1.1</u>　Noether環RのKrull次元が1以下で2がunitならば．R上のn変数多項式環R_nについて次のいずれかを仮定する。

(i) $n \leq 3$

(ii) $n = 4$でRはある有限体k上のalgebraとなり$\mathrm{trans}_k(R) \leq 1$。

しからばstably free R_n－加群は自由R_n－加群である。

Serreの問題に限ると

(6.) <u>Suslin－Vaseršteïn</u>；

(i) $[S_{3,r}]\ (\forall r)$

(ii) $[S_{4,r}(k)]\ (\forall r)$ $\mathrm{char}(k) \neq 2$とする。

(iii) $[S_{5,r}(k)]\ (\forall r)$ kは有限体で$\mathrm{char}(k) \neq 2$とする。

粗い表現が許されるならば．射影加群はある種の多様体のvector bundleと対応する故．様々な幾何学的問題と密接な関わりを持つ。従ってとりあげたこれらの結果だけでは不十分であり．例えば[5]，[17]に．ある程度他の問題に関係した事実をみることができる。

<u>§2．D. Quillenの証明</u>

<u>定　義2.1</u>　Rを環とするとき$\mathrm{Vect}(\mathbb{P}^1_R) \ni E$がextendedであるとは$\mathrm{Vect}(\mathbb{P}^1_R) \ni F$が存在して．$F$の$\mathbb{A}^1_R$への制限が$E$と一致するときにいう。

<u>定　義2.2</u>　$R[T]$－加群Mで適当なR－加群Nを選び$N \otimes_R R[T] \cong M$となるとき．Mはextended $R[T]$－加群であるという。

<u>定　義2.3</u>　多項式環$R[T]$をそのmonic多項式

の全体で局所化した環を，$R(T)$で表わす。

例えばRを単項ideal整域とすると補題1.1から$R(T)$も単項ideal整域である。

注　意2.1

(i) $\mathrm{Proj}(R[T])\ni P$について次は同値である。

① $\widetilde{P}$はextendedである。

② $P\otimes R[T,T^{-1}]\cong P'\otimes R[T,T^{-1}]$をみたすような$P'\in \mathrm{Proj}(R[T^{-1}])$が存在する。

(ii) Pがextendedな射影$R[T]$－加群ならば，$\widetilde{P}$は(i)よりextendedである。

(iii) $\mathrm{Proj}(R[T])\ni P$で$\widetilde{P}$がextendedならば，Rの任意の極大ideal $\mathfrak{m}$に対し$\widetilde{P}_{\mathfrak{m}}$はextendedである。

射影$R[T]$－加群Pとそれにassociateするvector bundle $\widetilde{P}$の，それぞれのextencyは如何なる関係にあるか。自由加群を直和すれば

命　題2.1 (e.g. [6]) $\mathrm{Proj}(R[T])\ni P$について次は同値である。

(i) あるnが存在して，
$$(P/TP\underset{R}{\otimes}R[T])\oplus R[T]^{(n)}\cong P\oplus R[T]^{(n)}$$

(ii) あるnが存在しvector bundle $(P\oplus R[T]^{(n)})^{\sim}$はextended。

しかし実に

Horrocksの問題

[Hor(R)] $R[T]$を環R上の一変数多項式環とするとき，$\mathrm{Proj}(R[T])\ni P$について次は同値である。

(i) Pはextended $R[T]$－加群である。

(ii) $\widetilde{P}$はextendedである。

Horrocksは局所的な場合について解いた。

命　題2.2 (Horrocks [15]) Noether局所環Rについて[Hor(R)]が成り立つ。

[Hor(R)]は次の意味で，[$S_{n,r}$]を導く。

命　題2.3 (Murthy, e.g.[5]) Rを体k上の一変数有理函数体，Aを可換なk－algebraとし次の条件を仮定する。

(i) [Hor(A)] が成り立つ。

(ii) 射影 $R \otimes A$ ー加群は自由 $R \otimes A$ ー加群である。

しからば射影 $A[T]$ー加群は自由 $A[T]$ー加群である。

もっと詳しくは

<u>命題2.4</u> Rを単項ideal整域，任意のnについてR_nをR上のn変数多項式環とする。任意の環Aに対し[Hor(A)]が成り立つときには、射影R_nー加群は自由R_nー加群である。

この証明の本質は次の補題に帰着する。

<u>補題2.1</u> Aを[Hor(A)]をみたす環とするとき、$\mathrm{Proj}(A[T]) \ni P$について次は同値である。

(i) Pは自由$A[T]$ー加群である。

(ii) $P \otimes A(T)$は自由$A(T)$ー加群である。

(証明) (ii)から(i)を導く。monic多項式fをとり、P_fを自由$A[T]_f$加群とできる。$\deg(f) = n$とおく。$g(T^{-1}) = T^{-n} \cdot f(T) \in A[T^{-1}]$について、2つのaffine scheme $V_1 = \mathrm{Spec}(A[T])$, $V_2 = \mathrm{Spec}(A[T^{-1}]_g)$をはり合わせて$\mathbb{P}^1_A$を得る。$\Gamma(V_1 \cap V_2, \tilde{P})$は自由加群であるから、$V_2$上trivialなvector bundleをつないで、結局、$E \in \mathrm{Vect}(\mathbb{P}^1_A)$で$\tilde{P}$のextensionをとれる。ここで$E$の作り方から、$P_T$は、自由$A[T]_T$ー加群であり、[Hor(A)]を使って、

$$P/(T-1)P \otimes_A A[T] \cong P/TP \otimes_A A[T] \cong P$$

すなわち(i)が得られた。

(命題2.4の証明) nにかんする帰納法で行なう。$n=0$ならば明らかだから$n \geqq 1$として、$L = R[T_1, \dots, T_{n-1}]$とおく。！からば$L(T_n)$は単項ideal整域$R(T_n)$上の$n-1$変数多項式環に同型である故に、$P \in \mathrm{Proj}(L[T_n])$をとると、帰納法の仮定から、$P \otimes L(T_n)$は自由$L(T_n)$ー加群である。補題2.1を用いれば命題2.3は明らか。

Quillenは Horrocksの問題を直接解いて、Serreの問題をはるかに一般化した形で解決した。

<u>定　理</u>（Quillen [20]）Rを環Mを有限表示を持つ$R[T]$-加群でしかもRの任意の極大ideal $\mathfrak{m}$で局所化するとextended $R_{\mathfrak{m}}[T]$-加群となるときに、Mはextended $R[T]$-加群である。

注意2.1及び命題2.2から、

<u>系　2.1</u>　Rを環、Pを射影$R[T]$-加群とするならば、次は同値である。

(i) P は extended $R[T]$-加群である。

(ii) $\widehat{P}$ は extended である。

命題2.4を用いて

<u>系　2.2</u>　Rを単項ideal整域，任意のnについてR_nをR上のn変数多項式環とすれば、射影R_n-加群は自由R_n-加群である。

<u>系　2.3</u>　RをDedekind整域，任意のnに対し、Pを射影$R[T_1, \dots, T_n]$-加群とする。しからばR-加群P_0が存在して

$$P_0 \otimes_R R[T_1, \dots, T_n] \cong P$$

系2.3に相当する命題は，$n=1$の場合に限り、Bass-Murthy [9]で得られている。

<u>定　義2.4</u>　Bを必らずしも可換とは限らぬ環とするときに、次の記号を用いる。

$$(1+TB[T])^* = \left\{ f \in B[T] \;\middle|\; \begin{array}{l} f \text{ は invertible で} \\ f \equiv 1 \bmod TB[T] \end{array} \right\}$$

Quillenの研究は殆ど次のひとつの補題にのみ依存している。

<u>補　題2.2</u>　Aを可換環、Bを必らずしも可換とは限らぬA-algebraとするとき、$x \in A$, $f(T) \in (1+TB_x[T])^*$ をとれば、$l \geq 0$なる整数があり、次の条件をみたす。

(*) $g_i \in A$ $(i=1, 2)$ で $g_1 \equiv g_2 \bmod x^l A$ ならば、$(1+TB[T])^* \ni \Theta(T)$ が存在して、

$\Theta_x(T) = f(g_1 T) \cdot f(g_2 T)^{-1}$ とできる。

（証　明）$f(T) = 1 + \sum_{i=1}^{m} a_i T^i$, $a_i \in B_x$, $f(T)^{-1} = 1 + \sum_{i=1}^{m} b_i T^i$, $b_i \in B_x$ とする。Y, Zを変数として、lを十分大にとると、Bに属

する elements c_{ij} がとれ、$(c_{ij})_x = x^k a_i b_j$ とできるから、$\phi(T) \in 1 + ZTB[Y, Z, T]$ が存在し $\phi_x(Y, Z, T) = f((Y + x^k Z)T) f(YT)^{-1}$ が成り立つ。同じく $\phi'(T) \in 1 + ZTB[Y, Z, T]$ があり、$\phi'_x(Y, Z, T) = f(YT) f((Y + x^k Z)T)^{-1}$ とできる。$\phi\phi' = 1 + ZTR_1$, $\phi'\phi = 1 + ZTR_2$ とおき、A を十分大にすれば、$\phi(Y, x^A Z, T)$ は invertible である。$l = k + A$ とし $g_1 = g_2 + x^l u$ なる u をとり、$\theta(T) = \phi(g_2, x^A u, T)$ が条件(*)における θ である。

<u>補題 2.3</u> A を環, x_1, x_2 を A における comaximal な elements の対とする。有限表示をもつ $A[T]$−加群 M について、$\phi_i: A_{x_i}[T] \otimes_A M/TM \xrightarrow{\sim} M_{x_i}$ $(i = 1, 2)$ でしかも T を法として canonical な isomorphism となる同型が存在すれば、

(i) $A_{x_i}[T] \otimes M/TM$ の自己同型 δ_i $(i = 1, 2)$ があり、$(\phi_1 \circ \delta_1)_{x_2} = (\phi_2 \circ \delta_2)_{x_1}$ をみたす。

(ii) M は extended $A[T]$−加群である。

(証明) (ii) は (i) から導かれるから (i) を示す。$B = \mathrm{End}_A(M/TM)$ とし、M/TM は有限表示 A−加群である故、任意の $x \in A$ について、

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_{A_x[T]}(A_x[T] \otimes M/TM, A_x[T] \otimes M/TM) & \xrightarrow{\sim} & B_x[T] \\ \cup\!\shortparallel & & \cup\!\shortparallel \\ \{\phi \mid \phi \text{ は自己同型}, \ \phi \equiv id_{M/TM} \bmod T\} & \xrightarrow[\Delta_x]{} & (1 + TB_x[T])^* \end{array}$$

ここに Δ_x は bijection であり、element による局所化の手続きと可換である。一方において、
$\Delta_{x_1 x_2}((\phi_1)_{x_2}^{-1} (\phi_2)_{x_1}) = f(T) \in (1 + TB_{x_1 x_2}[T])^*$
$Ax_1 + Ax_2 = A$ より任意の $l \geq 0$ に対し、A の element z があり、$z \in Ax_1^l$ かつ $1 - z \in Ax_2^l$ とでき、この l を十分大にとっておく。

$$f(T) = [f(T) f(zT)][f(zT) f(T)]^{-1}$$

第1因子及び第2因子のそれぞれに、補題 2.2 を適用すると、$(1 + TB_{x_i}[T])^* \ni \theta_i(T)$ $(i =$

1, 2)が存在して $(\theta_1)_{x_2} = f(T)f(aT)$ 及び $(\theta_2)_{x_1} = f(0T)f(aT)$ をみたす。$\delta_i = \Delta_{x_i}^{-1}(\theta_i)$ $(i = 1, 2)$ とおくとき、(ii) の結果は明らかである。

以上の準備の後に定理を証明する。

(定理の証明) $F = \{x \in R \mid M_x$ は extended$\}$ とおけば F の生成する ideal (F) は R に等しい。$x_i \in F$ $(i = 1, 2)$ で $x \in Ax_1 + Ax_2$ をとり、補題 2.3 から $x \in F$、従って $1 \in F$ が言え、定理は示された。

[Hor(R)] は、例えば [6] において $K_1(R[T, T^{-1}])$ と関連して述べられているように、ある意味で自然であるが、これ程まで容易に解決されたのは、奇妙な補題 2.2 の効果である。更に Quillen は次の予想を提出している。

Quillen conjecture

[Q(A)] A を正則 Noether 環とするときに、射影 $A[T]$ − 加群は extended である。

Horrocks [15], Murthy [18] を用いると、A の Krull 次元が 2 以下ならば、[Q(A)] は成り立つ。しかし A を非可換とするとき、[19] がその反例になっている。

References

[1] H. Bass, K-theory and stable algebra, Publ. Math. I.H.E.S., 22 (1964).

[2] H. Bass, Projective modules over free groups are free, J. Alg. 1 (1964).

[3] H. Bass, Algebraic K-theory, Benjamine (1968).

[4] H. Bass, Unitary algebraic K-theory, Lecture Notes in Math., 343 (Springer) (1973).

[5] H. Bass, Some problems in classical algebraic K-theory, Lecture Notes in Math., 342 (Springer) (1973).

[6] H. Bass, Introduction to some methods of algebraic K-theory, Reg. Conf. Ser. in Math., 20 (A.M.S.) (1974).

[7] H. Bass, Libération des modules projectifs sur certains anneaux de polynômes, Sem. Bourbaki (1973/74).

[8] H. Bass, J. Milnor - J. P. Serre, Solution of congruence subgroup problem for $SI_n(n \geq 3)$ and $Sp_{2n}(n \leq 2)$, Publ. Math. I.H.E.S., 33 (1967).

[9] H. Bass - M. P. Murthy, Grothendieck groups and Picard groups of abelian group rings, Ann. of Math. 86 (1967).

[10] E. D. Davis - A. V. Geramita, Efficient generation of maximal ideals in polynomial rings, Queen's Univ. (1974).

[11] D. Eisenbud - G. Evans, Generating modules efficiently: theorems from algebraic K-theory, J. Alg. (1974).

[12] D. Eisenbud - G. Evans, Three conjectures about modules over polynomials rings, Lecture Notes in Math. 311 (Springer) (1973).

[13] S. Endo, Projective modules over polynomial rings, J. Math. Soc. Japan 15 (1963).

[14] O. Forster, Über die Anzahl der Erzeugenden eines Ideals in einem Noetherschen Ring, Math. Z. 84 (1964).

[15] G. Horrocks, Projective modules over an extended local ring, Proc. London Math. Soc., 14 (1964).

[16] M. Karoubi, Périodicité de la K-théorie hermitienne, Lecture Notes in Math. 343 (Springer) (1973).

[17] M. Miyanishi, Zariski の問題について,(1974).

[18] M. P. Murthy, Projective A[X]-modules, J. London Math. Soc., 41 (1966).

[19] M. Ojanguren - R. Sridharan, Cancellation of Azumaya algebras, J. Alg., 18 (1971).

[20] D. Quillen , Projective modules over polynomial rings, Inv. Math., 36 (1976).

[21] J. P. Serre, Faisceaux algébrique cohérents, Ann. of Math., 61 (1955).

[22] J. P. Serre, Modules projectifs et espaces fibrés à fibre vectorielle, Sém. Dubreil Pisot, 11 (1957/58).

[23] J. P. Serre, Sur les modules projectifs, ibid. (1960/61).

[24] C. S. Seshadri, Triviality of vector bundles over the affine space K^2, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 44 (1958).

[25] A. A. Suslin - L. Vaserštein, Le problème de Serre sur les modules projectifs sur les anneaux de polynômes, et la K-théorie algebrique, J. Analyse Functionnelle, 8 (1974).

[26] R. G. Swan, The number of generators of a module, Math. Z., 102 (1967).

[27] L. Vaserštein, J. Analyse Functionnelle, (1972).

加群の圏におけるtorsion theoriesについて

山口大文理　倉田吉喜

加群の圏におけるtorsion theoryから2つの話題をひろってみたい。1つはNoether環の素idealによってきまるtorsion theory，もう1つはWedderburn-Artinの構造定理の一般化をtorsion theoryの立場から特徴付けてみることである。術語や定義等はGoldman [2], Stenström [13] 等を参照されたい。

1. $R(\ni 1)$ を環，R-右加群Qをとり，任意のM_Rに対して

$$k_Q(M)=\bigcap\{\mathrm{Ker}(f) \mid f\in \mathrm{Hom}_R(M,Q)\}$$

とおけば，k_Q は $k_Q(Q)=0$ をみたす mod-R の radical であり，しかも $r(Q)=0$ なる mod-R の preradical r の中で最大なものである。特にQが入射的ならば，k_Q は $r(Q)=0$ なる mod-R の左完全な radical の中で最大なものである。mod-R の任意の左完全な radical は適当な入射加群Qによって k_Q とかかれるという意味で，この k_Q は基本的なものといえる。

1.1. 以下$R(\ni 1)$を断わらないかぎり右Noether環，$\mathfrak{p}$をRの素idealとする。$\mathfrak{p}$に対応していくつかのtorsion theoryが考えられる。

(1) $R/\mathfrak{p}$をR-右加群とみてのinjective hull $E(R/\mathfrak{p})$による$k_{E(R/\mathfrak{p})}$は左完全なradicalで，これからmod-Rのhereditary torsion theoryが定まる。

(2) Rは右Noether故

$$E(R/\mathfrak{p}) \cong \sum_1^n \oplus E,\quad E\text{は直既約入射的}$$

とかける。Eは$\mathfrak{p}$により同型を除いて一意的に

まり，k_E から mod-R の hereditary torsion theory がきまる。

(3) $C(\mathfrak{p})=\{c\in R \mid a\notin\mathfrak{p} \Rightarrow ca\notin\mathfrak{p}\}$ は R の単位元1を含み乗法に関して閉じた R の部分集合。従って $\{\mathfrak{a}_R\leqq R \mid (\mathfrak{a}:a)\cap C(\mathfrak{p})\neq\phi \text{ for all } a\in R\}$ は R の右Gabriel位相で，mod-R の hereditary torsion theory が対応する。

(4) $\mathfrak{a}$ を R の $\mathfrak{p}$-critical 右ideal，すなわち $\mathfrak{a}\neq R$，$\mathfrak{a}$ は $C(\mathfrak{p})$ と交わらない右 ideal の中で極大であるとする。直既約入射的R-右加群は適当な $\mathfrak{p}$-critical 右 ideal $\mathfrak{a}$ に対して $E(R/\mathfrak{a})$ と同型であり，しかも $\mathfrak{a},\mathfrak{b}$ 共に $\mathfrak{p}$-critical ならば $E(R/\mathfrak{a})\cong E(R/\mathfrak{b})$ が成立つ (Lambek-Michler [6])。従って $\mathfrak{p}$-critical な $\mathfrak{a}$ を任意に1つとってきめれば，$k_{E(R/\mathfrak{a})}$ に対応して mod-R の hereditary torsion theory がきまる。

実は(1)-(4)の torsion theory はすべて一致する。これを以下簡単に $\mathfrak{p}$-torsion theory とよび，対応する左完全な radical をいつも τ とかくことにする。

(5) S を R の m-system，すなわち S は R の部分集合で，$s,s'\in S \Rightarrow \exists a\in R$ s.t. $sas'\in S$ とする。R-右加群 M に対して
$$\sigma_S(M)=\{x\in M \mid xRs=0 \quad \exists s\in S\}$$
とおけば，σ_S は mod-R の左完全な preradical で対応する R の右線型位相は
$$\{\mathfrak{a}_R\leqq R \mid \mathfrak{a}\supset(s) \quad \exists s\in S\}。$$
ここで (s) は s から生成された R の両側ideal。この様に両側 ideal から成る基をもった R の右線型位相を有界(又は対称的)とよぶ。

Murdoch-Oystaeyen [7] によると

R の有界右線型位相 L に対して

L が Gabriel $\rightleftarrows$ ($\mathfrak{a},\mathfrak{b}\in L \Rightarrow \mathfrak{a}\mathfrak{b}\in L$)

であるが，これを用いると σ_S が左完全な radical となり，mod-R の hereditary torsion theory がきまる。特に m−system S を $R-\mathfrak{p}$ としたときの $\sigma_{R-\mathfrak{p}}$ と $\mathfrak{p}$−torsion theory との関係をみてみよう。

例えば R が可換環のときは $\tau = \sigma_{R-\mathfrak{p}}$ であるが、一般の場合には $\tau^{\circ} = \sigma_{R-\mathfrak{p}}$ が成立つ。ここで τ° は τ より大きくない有界左完全な radical の中で最大なものをあらわす。従ってこの場合 $\tau = \sigma_{R-\mathfrak{p}}$ が成立つことは τ が有界を意味するが、このことは Sim [10] によって次の様に拡張された。

左完全な radical σ が適当な素 ideal $\mathfrak{p}$ により $\sigma = \sigma_{R-\mathfrak{p}}$ とかける必要十分条件は

(i) σ が有界 (ii) $\mathfrak{p}$ は R の両側 ideal $\mathfrak{a}$ で $\mathfrak{a} \neq R$ かつ $R/\mathfrak{a} \in F(\sigma)$ となるものの中で最大

ここで $(T(\sigma), F(\sigma))$ で σ のきめる torsion theory をあらわすものとする。

1.2. $\mathfrak{p}$−torsion theory に対応する左完全な radical τ に対して $\tau(R)$ は R の両側 ideal で、$\tau(R) \subset \mathfrak{p}$ 故、$\bar{R} = R/\tau(R)$, $\bar{\mathfrak{p}} = \mathfrak{p}/\tau(R)$ とおけば、$\bar{R}$ は左 Noether な素環で $\bar{\mathfrak{p}}$ は $\bar{R}$ の素 ideal である。

$$T(\bar{\tau}) = \{ N_{\bar{R}} \mid N_R \in T(\tau) \}$$

によって mod−$\bar{R}$ の左完全 radical $\bar{\tau}$ をきめると、$F(\bar{\tau}) = \{ N_{\bar{R}} \mid N_R \in F(\tau) \}$ が成立ち、対応する $\bar{R}$ の左 Gabriel 位相は $\{ \bar{\mathfrak{a}}_{R} \leqq \bar{R} \mid (\mathfrak{a} : a) \cap C(\mathfrak{p}) \neq \phi \text{ for all } a \in R \}$ であることが分る（例えば Kurata [5]）。いいかえれば $\bar{\tau}$ は mod−$\bar{R}$ の $\bar{\mathfrak{p}}$−torsion theory に他ならぬ。しかも $\bar{\tau}(\bar{R}) = \tau(\bar{R}) = 0$ から R, $\bar{R}$ の τ, $\bar{\tau}$ に関する localization を夫々 R_τ, $\bar{R}_{\bar{\tau}}$ とおけば

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\eta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \bar{R} \arrow[r, "\bar{\pi}"] & \bar{R}_{\bar{\tau}} \arrow[dll, dashed, "\exists_1\ \text{環同型}"] \\
R_\tau & &
\end{tikzcd}$$

ここで $\pi : R \to \bar{R}$ は自然準同型，η，$\bar{\eta}$ は localization への標準的写像をあらわす。

1.3. Heinicke[3] は τ が perfect (Goldman[2] の言葉では条件(T)をみたす) となるための条件として

(1) 単純な R_τ-右加群はすべて同型

(2) $soc_{R_\tau}((R/\mathfrak{p})_\tau) \neq 0$

の2つが必要十分であることを示した。しかし Sim[11] はこの結果を chain condition なしに次の様に拡張できることを示した。

R は一般の環，mod-R の左完全 radical σ に対して次は同値：

(1) σ は prime かつ perfect

(2) 単純な R_σ-右加群はすべて同型 $\sigma = k_{E(M)}$ なる R-右加群 M に対して $soc_{R_\sigma}(M_\sigma) \neq 0$

(3) 単純な R_σ-右加群はすべて同型であり，$\sigma = k_{E(M)}$ かつ $soc_{R_\sigma}(M_\sigma) \neq 0$ なる R-右加群 M が存在する。

(4) 単純な R_σ-右加群はすべて同型で，R-右加群として σ に関して torsion-free.

1.4. $C(\mathfrak{p}) = \{c \in R \mid a \notin \mathfrak{p} \Rightarrow ca \notin \mathfrak{p}\}$ は R の単位元 1 を含み乗法に関して閉じた R の部分集合であった。R がこれに関して右Ore であることは $c \in C(\mathfrak{p}) \Rightarrow cR \in G(\tau)$，但し $G(\tau)$ は τ に対応する R の右 Gabriel 位相，といいかえることができる。すなわち $\{cR \mid c \in C(\mathfrak{p})\}$ が $G(\tau)$ の基をなすこと，$G(\tau)$ がいわゆる 1-topology になることを意味している。

R が $C(\mathfrak{p})$ に関して右Ore と仮定しよう。R が右 Noether 故 $C(\mathfrak{p}) = \{c \in R \mid c$ は mod $\mathfrak{p}$ で正則$\}$ となり，$ca = 0$，$c \in C(\mathfrak{p}) \Rightarrow \exists c' \in C(\mathfrak{p})$ s.t. $ac' = 0$ が成立つ。従って $C(\mathfrak{p})$ は

右 denominator set となり, ring of fractions $R[C(\mathfrak{g})^{-1}]$ が存在する。すなわち

∃環準同型 $\varphi : R \to R[C(\mathfrak{g})^{-1}]$

s.t. (1) $\varphi(c)$ は単元 for all $c \in C(\mathfrak{g})$

(2) $R[C(\mathfrak{g})^{-1}]$ の元は $\varphi(a)\varphi(c)^{-1}$ の形

(3) $\mathrm{Ker}(\varphi) = \tau(R)$

その上 $\mathrm{Coker}(\varphi) \in \mathcal{T}(\tau)$ 故

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\eta"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & R[C(\mathfrak{g})^{-1}] \arrow[dl, dashed, "\exists_1 \psi \text{ 環準同型}"] \\ R_\tau & \end{tikzcd}$$

$\mathrm{Ker}(\psi) = \tau(R[C(\mathfrak{g})^{-1}]) = 0$, しかも $R[C(\mathfrak{g})^{-1}]$ が τ-injective に注意すれば, ψ は実は同型 (例えば Kurata [5])。

扨いかなる場合に R が $C(\mathfrak{g})$ に関して右 Ore になるかということに関しては, $M = \mathfrak{J}R_\tau$ とおいたとき Lambek-Michler [6] は

(1) R が $C(\mathfrak{g})$ に関して右 Ore

(2) $R_\tau M$ が R_τ の Jacobson 根基でかつ τ は perfect

(3) M は R_τ の Jacobson 根基で $R_\tau / M \cong Q_{cl}(\bar{R})$

(4) M は R_τ の Jacobson 根基で R_τ / M は単純な Artin 環

が同値を, Heinicke [3] は

(1) R は $C(\mathfrak{g})$ に関して右 Ore

(2) τ は perfect でかつ $R_\tau M \neq R_\tau$

(3) $R_\tau M \neq R_\tau$, M は R_τ の有限個の極大右 ideal の共通分, かつ単純な R_τ-右加群はすべて同型

が同値を示した。Oystaeyen [8] は

(1) τ が有界でかつ R は $C(\mathfrak{g})$ に関して右 Ore

(2) $\sigma_{R-\mathfrak{g}}$ は perfect で, 標準的準同型 $R \to R_{\sigma_{R-\mathfrak{g}}}$ による $C(\mathfrak{g})$ 元の像は単元

の同値を示した。

1.5. この節では特にRが右Noetherかつfully right bounded環の場合についてみてみよう。まず一般的な定義をのべる。素環がright boundedとはすべてのessential右idealがある両側ideal(≠0)を含むときめる。環Rがfully right boundedとは、すべての素ideal $\mathfrak{p}$に対して$R/\mathfrak{p}$がright boundedときめる。一般の環Rの右加群Mに対してRの両側ideal $\mathfrak{a}$がassociated to Mとは

$\exists$ submodule $M'(\neq 0)$ of M

s.t. $\mathfrak{a} = (0 : M'')$ for all submodule $M''(\neq 0)$ of M'

ときめる。実はこのとき$\mathfrak{a}$はRの素idealであり、特にMが直既約入射的のときはassociated to Mなる素idealは唯一つで、それをass(M)とかくことにする。

可換なNoether環Rではよく知られた様に直既約入射的R-加群の同型類と素idealとは$\mathfrak{p} \to E(R/\mathfrak{p})$によって1対1, ontoに対応する。

以下Rは右Noether環としよう。このとき直既約入射的R-右加群の同型類と素idealの全体とは $E \to \mathrm{ass}(E)$ なる対応でontoには対応しているが、1対1は一般には保証できない。

Krause[4]によれば、これが1対1になることはRがfully right boundedと同値であり、Cauchon [1] によればそれはまたRがいわゆるGabrielの条件(H):

任意の右ideal $\mathfrak{a}$に対して $\exists b_1, \ldots, b_n \in R$

s.t. $(\mathfrak{a} : R) = \bigcap_1^n (\mathfrak{a} : b_i)$

又は任意の有限生成R-右加群Mに対して

$\exists x_1, \ldots, x_n \in M$

s.t. $(0 : M) = \bigcap_1^n (0 : x_i)$

をみたすことと同値である。Sim [12] はまた次の様な特徴付けを与えた。

(1) Rがfully right bounded

(2) mod-Rのprimeな左完全radicalは

すべて有界

(3) mod-R の prime な左完全 radical は適当な素 ideal $\mathfrak{p}$ により $\sigma_{R-\mathfrak{p}}$ とかける。

が同値。

1.4 の議論に関連して Oystaeyen [9] は R が fully right bounded のときには

(1) R が $C(\mathfrak{p})$ に関して左 Ore

(2) $\mathfrak{a} \in C'(\sigma_{R-\mathfrak{p}}) \Rightarrow \mathfrak{p} \subset \mathfrak{a}$

(3) $\sigma_{R-\mathfrak{p}}$ は perfect でかつ $\mathfrak{p}_{\sigma_{R-\mathfrak{p}}}$ は $R_{\sigma_{R-\mathfrak{p}}}$ の Jacobson 根基

の同値を示した。ここで $C'(\sigma_{R-\mathfrak{p}})$ とは $\sigma_{R-\mathfrak{p}}$ の右 Gabriel 位相に属さない右 ideal の中で極大なものの全体とする。

最後に右 Noether 環の素 ideal によってきまる torsion theory の議論は，最近半素 ideal の場合にひろげて論じられている。それについては文献 [14]–[20] をみられたい。

2. Wedderburn-Artin の構造定理によれば，環 R が半単純であることと，R が division ring の上の有限次元ベクトル空間の線型変換全体の作る環の有限個の直積であることとは同値である。ここで有限という条件を取り除いた環の特徴付けを Goldman [21] に従ってのべる。

2.1. 環 R の上の射影的な完全可約加群の全体は部分加群，商加群，直和に関して閉じる。従ってこれに対して mod-R の左完全 preradical, R の右線型位相がきまる。この位相を intrinsic 位相とよぶ。この位相に関して R の右 ideal $\mathfrak{a}$ が open とは (1) $\exists\, e = e^2 \in R$ s.t. $\mathfrak{a} = eR$ かつ $(1-e)R$ が完全可約，又は (2) $\mathfrak{a} + soc(R_R) = R$，又は (3) $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \cap \mathfrak{a}_2 \cap \cdots \cap \mathfrak{a}_m$，各 $\mathfrak{a}_i$ は R の極大右 ideal で

$\exists\, e_i = e_i^2 \in R$ s.t. $\mathfrak{a}_i = e_i R$ とのべることができる。

一般にはRはこの位相に関してHausdorffとはかぎらないが、

R が Hausdorff $\rightleftarrows$ $soc(R_R)$ が忠実

が成立つ。しかもこのとき $soc(R_R)$ 自身射影的かつ完全可約である。

上の(3)を用いると

Rの閉両側ideal $\mathfrak{b}\,(\neq R)$ に対してRのintrinsic位相からひきおこされる位相は環$R/\mathfrak{b}$のintrinsic位相であり、
$\{R_\lambda\}$を夫々intrinsic位相をもった環の族とすれば、$\prod R_\lambda$の積位相はそのintrinsic位相と一致する

ことが分る。

2.2. VをR-右加群とする。Vによってきまる Rのannihilator位相(Jacobsonの言葉では有限位相)とは、Vの有限部分集合Fのannihilator $(0:F)$を0の近傍の基とするものときめる。従ってある$(0:F)$を含むRの右idealの全体をGとかけば、Rの右線型位相が一意的にきまり、Gはそれに関してopenな右idealの全体と一致する。$\bigcap\{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{a}\in G\} = (0:V)$ からこの位相に関して

R が Hausdorff $\rightleftarrows$ V が忠実

である。一般に忠実なVに対してRのintrinsic位相はVによってきまるRのannihilator位相より弱いが、一致するための必要十分条件は

V が射影的かつ完全可約

である。このことからRがintrinsic位相でHausdorffであればこの位相は任意の忠実射影的完全可約なR-右加群(例えば $soc(R_R)$)によってきまるRのannihilator位相と一致する。

事実，単純なVに対しては次は同値：

(1) V は射影的

(2) $\mathrm{soc}(R_R) \neq 0$

(3) R の intrinsic 位相は Hausdorff

(4) V によってきまる annihilator 位相は intrinsic 位相と一致する。

この特別な場合として

V を division ring R 上のベクトル空間，$S = \mathrm{End}_R(V)$ とおけば，S の intrinsic 位相は V によってきまる annihilator 位相と一致する。

ところで一般に

R-右加群 V に対して $S = \mathrm{End}_R(V)$ は V によってきまる annihilator 位相で完備

であるので，次の定理をうる。

定理. $\{R_\lambda\}$ は division ring の族，各 λ に対して V_λ を R_λ 上のベクトル空間，$S_\lambda = \mathrm{End}_R(V_\lambda)$ とおけば，$\prod S_\lambda$ はその intrinsic 位相で完備である。

2.3. 以下 R は環でその intrinsic 位相で完備であると仮定する。$\mathfrak{a}$ が R の閉両側 ideal ならば，(1) $\mathfrak{a}$ は中心的巾等元で生成され，(2) R の位相からひきおこされた位相で $R/\mathfrak{a}$ は完備であり，(3) $R/\mathfrak{a}$ のこの位相は環 $R/\mathfrak{a}$ の intrinsic 位相に他ならぬことをうる。

扨 $\mathfrak{m}$ を R の閉極大右 ideal，$V = R/\mathfrak{m}$ とおくと，$(0:V)$ は閉両側 ideal で，上の注意から特に $R/(0:V)$ はその intrinsic 位相で Hausdorff，従って前に注意した様に，この位相は事実，単純な V によってきまる $R/(0:V)$ の annihilator 位相と一致する。$S = \mathrm{End}_R(V)$ とおけば，Jacobson の density theorem から，この位相に関して $R/(0:V)$ は $\mathrm{End}_S(V)$ の中で dense。$R/(0:V)$ の完備性から

$R/(0:V) = \mathrm{End}_S(V)$ となる。

そこで R の両極大な ideal の集合 $\{\mathfrak{m}_\lambda\}$ で (1) $\lambda \neq \mu \Rightarrow R/\mathfrak{m}_\lambda \not\cong R/\mathfrak{m}_\mu$, (2) $\mathfrak{m}$ が両極大な ideal ならば，ある λ に対して $R/\mathfrak{m} \cong R/\mathfrak{m}_\lambda$ となるものをとる。このとき $V_\lambda = R/\mathfrak{m}_\lambda$ とおけば $\bigcap(0:V_\lambda) = 0$ が成立ち，従って $\varphi: R \to \prod R/(0:V_\lambda)$ を自然につくれば，φ は連続な環としての単射。しかも実は全射でもある。但し各 $R/(0:V_\lambda)$ にはその intrinsic 位相を考え，$\prod R/(0:V_\lambda)$ には積位相を考える。しかしそれは $\prod R/(0:V_\lambda)$ 自身の intrinsic 位相になっている。すなわち

定理. R が full linear ring の直積である必要十分条件は，R がその intrinsic 位相で完備なことである。

最後に (1) 直積の個数が有限であるための必要十分条件は R の中心が discrete, (2) 各ベクトル空間が有限次元であるための必要十分条件は考えている intrinsic 位相が，右 ideal のかわりに左 ideal を用いてできる R の intrinsic 位相と一致することである の2つを注意しておこう。Mogami [22] に

(1) R は division ring の直積

(2) R は単位元をもった reduced ring で，その intrinsic 位相で完備

(3) R は orthogonally complete かつ hyperatomic な reduced ring.

の同値が注意してあることをつけ加えて終る。

References

[1] G. Cauchon: Les T-anneaux et la condition de Gabriel, C.R.Acad.Sc.Paris 227(1973),1153-56.

[2] O. Goldman: Rings and modules of quotients, J.Algebra 13(1969),10-47.

[3] A.G. Heinicke: On the ring of quotients at a prime ideal of a right Noetherian ring, Can. J.Math. 24(1972),703-712.

[4] G. Krause: On fully left bounded left Noetherian rings, J.Algebra 23(1972),88-99.

[5] Y. Kurata: 第8回環論グループ・セミナー・東屋教授を囲む環論研究集会記録(1975)
[6] J. Lambek & G. Michler: The torsion theory at a prime ideal of a right Noetherian ring, J.Algebra 25(1973),364-389.
[7] D.C. Murdoch & F.Van Oystaeyen: Noncommutative localization and sheaves, J.Algebra 35(1975), 500-515.
[8] F.Van Oystaeyen: Note on the torsion thoery at a prime ideal of a left Noetherian ring, J. pure and appl. Algebra 6(1975),297-304.
[9] ---: Localization of fully left bounded rings, Comm. in Algebra 4(1976),271-284.
[10] S.K. Sim: Prime ideals and symmetric idempotent kernel functors (Preprint)
[11] ---: Localizing prime idempotent kernel functors, Proc. AMS 47(1975),335-337.
[12] ---: On rings of which every prime kernel functor is symmetric (Preprint)
[13] B. Stenstroem: Rings of Quotients. Springer 1975.
[14] J. Beachy & W.D. Blair: Localization at semi-prime ideals, J. Algebra 38(1976),309-314.
[15] A.V. Jategaonkar: Injective modules and classical localization in Noetherian rings, Bull. AMS 79(1973),152-157.
[16] ---: Injective modules and localization in noncommutative Noetherian rings, Trans. AMS 190(1974), 109-123.
[17] J. Lambek & G. Michler: Completions and classical localizations of right Noetherian rings, Pacific J. Math. 48(1973),133-140.
[18] ---: Localization of right Noetherian rings at semiprime ideals, Can. J. Math. 26(1974), 1069-1086.
[19] G. Michler: Quotient rings of right Noetherian rings at semiprime ideals, Publ. Dep. Math. Lyon 10(1973), 85-92.
[20] B.J. Mueller: Localization of noncommutative Noetherian rings at semiprime ideals, Lecture Notes, McMaster University 1974.
[21] O. Goldman: A Wedderburn-Artin-Jacobson structure theorem, J. Algebra 34(1975),64-73.
[22] I. Mogami: On two theorems of A. Abian, Math. J. Okayama Univ. 17(1975), 165-170.

On QF-3′ modules

山口大 教養 片山寿男

単位元1をもつ環R上のunitary 左R-加群の全体のなすcategoryを $_R\mathcal{M}$ で表わす。以下断らない限り、加群は左R-加群を意味し、それを $_RQ$ のように書く。r を $_R\mathcal{M}$ のpreradicalとするとき

$$T(r)=\{_RM \mid r(M)=M\},\quad F(r)=\{_RM \mid r(M)=0\}$$

とおく。二つのpreradicals r と s の大小関係を $r(M)\leq s(M)$ $\forall M\in {_R\mathcal{M}}$ のとき、$r\leq s$ として定義する。r より小さいidempotent preradicalsのうち、最大のものを $\hat{r}$ で、r より大きいradicalsのうち、最小のものを $\bar{r}$ で表わす。$_RQ$ のinjective hullを $E(Q)$ で、projective coverを $P(Q)$ で表わす。$_RM \hookrightarrow \prod Q$ なるとき、Mは Q-cogenerated（又は Q は M を cogenerate する）といい、$\oplus Q \longrightarrow {_RM} \rightarrow 0$ なる完全系列があるとき、Mは Q-generated（又は Q は M を generate する）という。Torsion theoryについては、Stenström [11] を参照されたい。

§1 で QF-3′ 加群の定義をのべ、その構造を [2, 7, 14] から概観する。すべての加群が QF-3′ となるような環も考察するが、完全には分らない。最後に bicommutator と quotient ring の関係を [4] から引用する。

§2 では、§1 の dual について若干のべる。CQF-3′ 加群の研究は今後に残される。

§1 QF-3′ 加群

$_RQ$ を固定して k_Q を

$$k_Q(M)=\bigcap_{f\in \mathrm{Hom}_R(M,Q)} \mathrm{Ker}\, f,\quad \forall M\in {_R\mathcal{M}}$$

として定義すると、k_Q は $_R\mathcal{M}$ のradicalになる。特に

${}_RQ$ が injective ならば，k_Q は left exact radical になる。逆に任意の left exact radical は，このように表わされる。${}_RQ' \leq {}_RQ$ ならば $k_Q \leq k_{Q'}$ だから，任意の ${}_RQ$ について

$$k_{E(Q)} \leq \hat{k}_Q \leq k_Q$$

がなりたつ。また

$$T(k_Q) = \{ {}_RM \mid \mathrm{Hom}_R(M, Q) = 0 \}$$
$$F(k_Q) = \{ {}_RM \mid M \text{ は } Q\text{-cogenerated} \}$$

であり，$T(k_Q)$ は torsion class をなす。

(1.1) ${}_RQ$ について次は同値である。
(a) $F(k_Q)$ は extensions で閉じる。
(b) $F(k_Q)$ は torsionfree class をなす。
(c) $k_Q = \hat{k}_Q$, i.e. k_Q は idempotent である。

(1.2) ${}_RQ$ について次は同値である。
(a) $T(k_Q)$ は submodules で閉じる。
(b) $T(k_Q)$ は hereditary torsion class をなす。
(c) $\hat{k}_Q = k_{E(Q)}$.
(d) $\hat{k}_Q$ は left exact である。

上の二つの命題が同時になりたつような ${}_RQ$ について次に考察する。

(1.3) <u>定理</u> ${}_RQ$ について次は同値である。
(a) $(T(k_Q), F(k_Q))$ は hereditary torsion theory をなす。
(b) $T(k_Q)$ は submodules で閉じ，$F(k_Q)$ は extensions で閉じる。
(c) $k_Q = k_{E(Q)}$
(d) k_Q は left exact である。
(e) $F(k_Q)$ は injective hulls で閉じる。
(f) ある injective ${}_RM$ があって，M と Q は互いに他を cogenerate する。
(g) $E(Q) \in F(k_Q)$
(h) $T(k_Q) = T(k_{E(Q)})$, $F(k_Q) = F(k_{E(Q)})$

(i) (Tsukerman [14]) $\forall$完全系列 $0 \to {}_RA' \xrightarrow{i} {}_RA$ と $\forall f(\neq 0): A' \longrightarrow Q$ に対して

$$\exists p: Q \longrightarrow Q,\ \exists \bar{f}: A \longrightarrow Q \ \text{s.t.}\ 0 \neq pf = \bar{f}i.$$

(j) (同上) $\forall {}_RC \ni \forall c$ s.t. $\mathrm{Hom}_R(Rc, Q) \neq 0$ に対して

$$\exists f \in \mathrm{Hom}_R(C, Q) \ \text{s.t.}\ f(c) \neq 0.$$

$Q = {}_RR$ のとき (g) は $E({}_RR)$ が torsionless を意味するので、(1.3) の条件をみたす ${}_RQ$ を <u>QF-3′ 加群</u>という。特に injective module は QF-3′ である。次の二つの命題はいずれも injective でない QF-3′ 加群の存在を示す。

(1.4) $\{Q_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が QF-3′ 加群の族ならば、$\bigoplus_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda$, $\prod_{\lambda\in\Lambda} Q_\lambda$ は共に QF-3′ である。特に injective modules の直和は QF-3′ である。

(1.5) ([14]) ${}_RB$ が injective でないならば、$E({}_RB) \oplus B$ は QF-3′ である。

(1.6) 拡大 ${}_RQ' \leq {}_RQ$ が essential で、Q' が QF-3′ ならば Q は QF-3′ である。

特に $Q' = {}_RR$ で Q が R の rational な拡大環のとき、Tachikawa [13] で知られている。

(1.7) ${}_RQ$ の $\forall$cyclic submodule が QF-3′ ならば Q は QF-3′ である。

(1.8) <u>定理</u> ${}_RQ$ について次は同値である。
(a) Q は ${}_R\mathcal{M}$ の cogenerator である。
(b) Q は QF-3′ で $\forall$simple module を同型に含む。
(c) $\mathcal{S}$ を simple modules の非同型類の完全代表系とするとき、$\bigoplus_{S\in\mathcal{S}} E(S) \in F(k_Q)$ である。

(d) ${}_R\mathcal{M}$ の cogenerator ${}_RA$ で $A \in F(k_Q)$ となるものが存在する。

(e) $k_M(Q) = 0$ をみたす ${}_RM$ は ${}_R\mathcal{M}$ の cogenerator である。

(f) Q は faithful QF-3′ で，$F(k_Q)$ は quotients で閉じる。

特に $Q = {}_RR$ のとき，(a)〜(d) の同値は Kato [6] で，(a) ⇔ (e) は Sugano [12] で知られている。

(1.9) (Bican [2]) ${}_RM$ は $End({}_RM) = S$ とおくと M_S が flat であるとする。

$${}_RN : QF\text{-}3' \Longrightarrow {}_SHom({}_RM, {}_RN) : QF\text{-}3'$$

これに関連して Morita equivalent rings における QF-3′ 加群についてのべる。

(1.10) <u>定理</u> R と S が $G : {}_R\mathcal{M} \to {}_S\mathcal{M}$ を equivalence とする Morita equivalent rings とする。このとき ${}_RQ$ について

(1) $F(k_Q)$ は extensions で閉じる

⇔ $F(k_{G(Q)})$ は extensions で閉じる。

(2) $T(k_Q)$ は submodules で閉じる

⇔ $T(k_{G(Q)})$ は submodules で閉じる。

(3) ([2]) ${}_RQ$ は QF-3′ である

⇔ ${}_SG(Q)$ は QF-3′ である。

${}_RM$ の <u>singular submodule</u> を $Z(M)$ で表わす。Z は ${}_R\mathcal{M}$ の left exact preradical で $\overline{Z}$ は Goldie torsion functor である。${}_RM$ は $Z(M) = 0$ なるとき non-singular という。このときの QF-3′ 加群は，次の命題のように簡単に判別される。

(1.11) ${}_RQ$ が non-singular のとき

Q は QF-3′ である ⇔ $T(k_Q)$ は submodules で閉じる。

特に $Q = {}_RR$ のとき，Vinsonhaler [15] にある。

(1.12) ${}_RQ$ について次がなりたつ。

(1) Q は non-singular である $\Leftrightarrow$ $Z \leq k_Q$
(2) Q は faithful である $\Leftrightarrow$ $k_Q \leq k_R$
(3) Q は torsionless である $\Leftrightarrow$ $k_Q \geq k_R$

(1.13) R が左 QF-3′ 環 (i.e. ${}_RR$ が QF-3′) である
$\Leftrightarrow$ QF-3′ 加群 ${}_RQ$ で faithful かつ torsionless であるものが存在する。

(1.14) <u>定理</u> ${}_RQ$ が faithful のとき、次は同値である。
(a) Q は QF-3′ かつ non-singular である。
(b) $T(k_Q) = T(Z)$
(c) $F(k_Q) = F(Z)$
(d) $k_Q = Z$
(e) Q は $F(Z)$ の cogenerator である。

(1.15) <u>定理</u> ${}_RQ$ が non-singular のとき、次は同値である。
(a) Q は faithful かつ QF-3′ である。
(b) Q は injective submodule ($\neq 0$) を含み、$Q^* = \Sigma\{M \leq Q \mid M$ は injective$\}$ とおくと、Q^* は faithful である。
(c) Q は faithful submodule Q_0 で、Q_0 の $\forall$ f.g. submodule M に対して $E(M) \leq Q_0$ となるものを含む。
このとき、$k_Q = k_{Q^*} = k_{Q_0}$ がなりたつ。

(1.16) <u>注意</u> (1.15) において、一般に $Q^* \geq Q_0$ である。
Q_0 は同型を除いても一意的ではない: 例えば K を体とし、$R = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$ とする。${}_RQ = \begin{pmatrix} K & K \\ K & K \end{pmatrix}$ とすると、Q は faithful, non-singular かつ QF-3′ である。このとき $Q^* = Q$ であるが Q_0 として $\begin{pmatrix} K & 0 \\ K & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$ 又は Q などがとれる。

(1.17) 環 R について 次は同値である。
(a) $\forall$ non-singular module は QF-3′ である
(b) $\forall$ non-singular module ($\neq 0$) は injective submodule ($\neq 0$) を含む。

Bland [3] によると, $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ が ${}_R\mathcal{M}$ の hereditary torsion theory で t が対応する torsion functor のとき
$\forall M \in \mathcal{B}$ は injective である $\Leftrightarrow$ $R/t(R)$ は semi-simple artinian である

から、これを Goldie torsion theory に適用すると

(1.18) 環 R について次は同値である。
(c) ∀non-singular module は injective である。
(d) $R/Z(R)$ は semi-simple artinian である。

さて、non-singular injective modules の直和が injective (例えば $_RR$ が Goldie の意味で finite dimensional ; 記号で $\dim {}_RR < \infty$ とかく) ならば、上記の (b) ⇔ (c) が云えるので、

(1.19) 系 $Z({}_RR) = 0$ かつ $\dim_R R < \infty$ のとき、次は同値である。
(a) ∀non-singular module は QF-3′ である。
(b) ∀module は QF-3′ である。
(c) R は semi-simple artinian である。

(1.3) の (i) から simple module は QF-3′ であることと、injective であることが同値になる。(1.6) から次の系の (b) ⇒ (a) を、Popescu-Vraciu [10] から left-right のおきかえを得る。なお次の系は [14, Theorem 2] を拡張している。

(1.20) 系 R が left または right semi-artinian のとき、次は同値である。
(a) ∀left R-module は QF-3′ である。
(b) R は left V-ring である。
(c) ∀right R-module は QF-3′ である。
(d) R は right V-ring である。

次に bicommutator と quotient ring の関係を Kashu [4] から引用する。σ を $_RM$ の left exact radical とし、R の σ に関する localization $Q_\sigma(R)$ は $_R\overline{R} = R/\sigma(R)$ の σ-injective hull $D_\sigma(\overline{R})$ として定義される。$Q_\sigma(R)$ は ring structure をもつ。$\gamma : R \to \overline{R} \to Q_\sigma(R)$ を canonical ring homomorphism とする。$_RM$ が QF-3′ のとき、k_Ω は left exact radical なので、同型対応 $Bic({}_RM) \simeq Q_{k_M}(R)$ が存在する M の条件は何か? が問題になる。特に $_RM$ が injective のとき、次が知られている。

(1.21) 例 1. $M = E({}_R R)$ のとき，R の localization は maximal left quotient ring であり，かつある同型対応があることはよく知られている。もっと一般に

2. ${}_R M$ が finitely cogenerating かつ injective のとき，かつある同型対応が存在する (Morita [8]).

3. ${}_R M$ が injective のとき，かつある同型対応が存在するための必要十分条件は，M が F_R-condition をみたすことである (Morita [9]).

さて σ に関する R の localization を特徴づけるものとして

(1.22) 補助定理 $\varphi: R \to S$ が ring homomorphism のとき，同型写像 $\theta: S \to Q_\sigma(R)$ で $\theta\varphi = \gamma$ をみたすものが存在する必要十分条件は

(1) $\operatorname{Ker}\varphi \in T(\sigma)$ (2) ${}_R S \in F(\sigma)$

(3) $\operatorname{Cok}\varphi \in T(\sigma)$ (4) ${}_R S$ は σ-injective である

がなりたつことである。

特に ${}_R M$ が QF-3′ のとき，$\varphi: R \to S = Bic({}_R M)$ を canonical ring homomorphism とし，$\sigma = k_M$ とおくと，(1.22) の (1), (2) はつねになりたつ。(3), (4) の条件はそれぞれ次のようにおきかえられる。

(3) $\Leftrightarrow$ ${}_R M$ は F_R-condition をみたす。

$\Leftrightarrow$ (A): $\forall f \in \operatorname{Hom}({}_R S, {}_R M)$ に対して $\exists x \in M$ s.t. $f(s) = sx$ $(\forall s \in S)$ である。

(4) $\Leftrightarrow$ $E({}_R S)/{}_R S \in F(k_M)$

$\Leftrightarrow$ (B): $\forall {}_R K \leq {}_R R$ s.t. $R/K \in T(k_M)$, $\forall g \in \operatorname{Hom}({}_R K, {}_R S)$, $\forall x \in M$ に対して，$g_x \in \operatorname{Hom}({}_R K, {}_R M)$ を $g_x(k) = g(k)x$, $k \in K$ によって定義すると，g_x の extension $\overline{g_x} \in \operatorname{Hom}({}_R R, {}_R M)$ が存在する。

(1.23) 定理 ${}_R M$ が QF-3′ のとき，同型対応 $Bic({}_R M) \simeq Q_{k_M}(R)$ が存在するための必要十分条件は，上の (A), (B) がなりたつことである。

とくに ${}_R M$ が injective のとき，(B) はなりたつので，例 3 が出るし，${}_R M$ が finite cogenerating かつ injective のとき

は (A) が示されて 例1.2 が出てくる。

§2 CQF-3' 加群

今までの議論の dual について若干のべよう。t が ${}_R\mathcal{M}$ の idempotent preradical のとき，t が <u>cotorsion radical</u> であるとは，t が epi-preserving のことである。言いかえると，t は radical でかつ $F(t)$ は quotients で閉じることである。このとき t は idempotent radical なので，$F(t)$ は TTF-class になる。

さて ${}_RQ$ を固定して t_Q を

$$t_Q(M) = \sum_{f \in \mathrm{Hom}_R(Q,M)} \mathrm{Im}\, f \ , \quad \forall M \in {}_R\mathcal{M}$$

として定義すると，t_Q は idempotent preradical になる。特に ${}_RQ$ が projective ならば，t_Q は cotorsion radical になる。逆に任意の cotorsion radical t は，ある torsionless module ${}_RQ$ を用いて $t = t_Q$ のように表わされる。特に R が left perfect ならば，Q は projective にとれる (Beachy [1])。

完全系列 ${}_RQ \to {}_RQ'' \to 0$ に対して $t_{Q''} \leq t_Q$ であるから Q が projective cover $P(Q) \to Q$ をもつとき

$$t_Q \leq \bar{t}_Q \leq t_{P(Q)}$$

がなりたつ。任意の ${}_RQ$ に対して

$$T(t_Q) = \{ {}_RM \mid M \text{ は } Q\text{-generated} \}$$
$$F(t_Q) = \{ {}_RM \mid \mathrm{Hom}_R(Q, M) = 0 \}$$

であり，$F(t_Q)$ は torsionfree class をなす。

(2.1) ${}_RQ$ について次は同値である。

(a) $T(t_Q)$ は extensions で閉じる。

(b) $T(t_Q)$ は torsion class をなす。

(c) $t_Q = \bar{t}_Q$, i.e. t_Q は radical である。

(2.2) ${}_RQ$ が projective cover をもつとき次は同値である。

(a) $F(t_Q)$ は quotients で閉じる。

(b) $F(t_Q)$ は TTF-class である。

(c) $\bar{t}_Q = t_{P(Q)}$

(d) $\bar{t}_Q$ は cotorsion radical である。

(2.3) <u>定理</u> $_RQ$ が projective cover をもつとき、次は同値である。

(a) $(T(t_Q), F(t_Q))$ は cohereditary torsion theory を成す。即ち torsion theory で $F(t_Q)$ は quotients で閉じる。

(b) $T(t_Q)$ は extensions で閉じ, $F(t_Q)$ は quotients で閉じる。

(c) $t_Q = t_{P(Q)}$

(d) t_Q は cotorsion radical である。

(e) ある projective module $_RP$ が存在して, P と Q は互いに他を generate する。

(f) $P(Q) \in T(t_Q)$

(g) $T(t_Q) = T(t_{P(Q)})$

(h) $\forall$ 完全系列 ${}_RA \xrightarrow{\pi} {}_RA'' \to 0$ と $\forall f(\neq 0): Q \to A''$ に対して $\exists p: Q \to Q$, $\exists \bar{f}: Q \to A$ s.t. $0 \neq fp = \pi\bar{f}$.

(i) $\forall {}_RC \geq \forall {}_RC'$ s.t. $\mathrm{Hom}_R(Q, C/C') \neq 0$ に対して $\exists f \in \mathrm{Hom}_R(Q, C)$ s.t. $f(Q) \not\leq C'$.

(j) (Kurata) $t_Q(R) = t_{P(Q)}(R)$

(k) (同上) $t_Q(R)$ は idempotent かつ $T(t_Q) = \{{}_RM \mid t_Q(R)M = M\}$ である。

この同値な条件をみたす $_RQ$ は <u>CQF-3'</u> という。

(2.4) R は semiperfect とし, $P(Q) \to Q$ は Q の projective cover とするとき、次は同値である。

(a) Q は $_R\mathcal{M}$ の generator である。

(b) Q は CQF-3' であり; $\forall$simple module $_RS$ に対して $Q \to S$ なる epimorphism が存在する。

(c) $\mathcal{S}$ を simple modules の非同型類の完全代表系とするとき $\bigoplus_{S \in \mathcal{S}} P(S) \in T(t_Q)$ である。

(d) $_R\mathcal{M}$ の generator $_RB$ で $B \in T(t_Q)$ となるものが存在する。

(e) $t_M(Q) = Q$ をみたす $_RM$ は $_R\mathcal{M}$ の generator である。

(2.5) R と S が $G: {}_R\mathcal{M} \to {}_S\mathcal{M}$ を equivalence とする Morita equivalent rings とする。このとき $_RQ$ について

(1) $T(t_Q)$ が extensions で閉じる

$\Leftrightarrow$ $T(t_{G(Q)})$ が extensions で閉じる

(2) $F(t_Q)$ が quotients で閉じる

$\Leftrightarrow F(t_{G(Q)})$ が quotients で閉じる

(3) ${}_RQ$ が projective cover $P(Q)$ をもつ CQF-3′ である

$\Leftrightarrow$ ${}_SG(Q)$ が projective cover $G(P(Q))$ をもつ CQF-3′ である。

References

[1] J.A. Beachy : Cotorsion radicals and projective modules, Bull. Austr. Math. Soc. 5 (1971), 241-253.

[2] L. Bican : QF-3' modules and rings, Comment. Math. Univ. Carolinae 14 (1973), 295-303.

[3] P.E. Bland : Divisible and codivisible modules, Math. Scand. 34 (1974), 153-161.

[4] A.I. Kashu : Bicommutators and quotient rings, Math. Notes 18 (1975), 845-848.

[5] H. Katayama : On the cotorsion radicals, J. Fac. Lib. Arts Yamaguchi Univ. 8 (1974), 239-243.

[6] T. Kato : Torsionless modules, Tôhoku Math. J. 20 (1968), 233-242.

[7] Y. Kurata and H. Katayama : On a generalization of QF-3' rings, Osaka J. Math. 13 (1976), 407-418.

[8] K. Morita : Localizations in categories of modules. I, Math. Z. 114 (1970), 121-144.

[9] --------- : Flat modules, injective modules and quotient rings, Math. Z. 120 (1971), 25-40.

[10] N. Popescu and C. Vraciu : Some remarks about semi-artinian rings, Rev. Roum. Math. pures et appl. 18 (1973), 1413-22.

[11] B. Stenström : Rings and modules of quotients. Springer Lecture Notes in Math. 237 (1971).

[12] K. Sugano : A note on Azumaya's theorem, Osaka J. Math. 4 (1967), 157-160.

[13] H. Tachikawa : On left QF-3 rings, Pacific J. Math. 32 (1970), 255-268.

[14] G.M. Tsukerman : Pseudo-injective modules and self-pseudo-injective rings, Math. Notes 7 (1970), 220-226.

[15] C. Vinsonhaler : A note on two generalizations of QF-3, Pacific J. Math. 40 (1972), 229-233.

Divisible modules, codivisible modules, and quasi-divisible modules

北大理　西田憲司

環R上のtorsion theoryを$(\mathcal{T},\mathcal{F})$，そのradicalを$\sigma$とする。$(\mathcal{T},\mathcal{F})$がhereditaryの時はそのfilterを$\mathcal{D}$とする。

定義 1.（Lambek）　加群$_RM$はdivisible $\Leftrightarrow$ $0\to A\to B\to C\to 0$ (exact), $C\in\mathcal{T}$に対しすべての$f:A\to M$はBに拡張される。

定義 2.（Bland）　加群$_RM$はcodivisible $\Leftrightarrow$ $0\to A\to B\to C\to 0$ (exact), $A\in\mathcal{F}$に対しすべての$g:M\to C$は$M\to B\to C$に分解する。

以下我々はdivisible, codivisible加群に関するいくつかの性質を調べる。詳しくは[3]を参照されたい。

1. divisible 加群について.

$(\mathcal{T},\mathcal{F})$をhereditary torsion theoryとする。この時LambekはMの部分加群Nが，$m\in M$で，ある$D\in\mathcal{D}$に対して$Dm\subset N$ならばある$n\in N$かつ$D(m-n)=0$となっている時pure部分加群と定義した。

定義 1-1.　Mの部分加群Nはstrongly pure $\Leftrightarrow$ $A\in\mathcal{T}$, $f:A\to M/N$は$A\to M\to M/N$に分解する，ただし$M\to M/N$は標準的射影.

$M\supset N$とする。$\overline{N}=\cap\{K \mid N\subset K\subset M, M/K\in\mathcal{F}\}$とおき

NのMでのclosureと呼ぶ。

補題 1−2. NはMのstrongly pure部分加群 $\Leftrightarrow$ $N \lessdot\!\oplus\ \overline{N}$, ただし$\overline{N}$は$N$の$M$でのclosure.

証明) $\Rightarrow$. 次の可換な図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \overline{N} & \xrightarrow{q'} & \overline{N}/N & \longrightarrow & 0 \quad (\text{exact}) \\ & & & & {\scriptstyle j}\downarrow & & {\scriptstyle i}\downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M & \xrightarrow{q} & M/N & \longrightarrow & 0 \quad (\text{exact}) \end{array}$$

ただしi, jは標準的入射, q, q'は標準的射影とする。$\overline{N}/N \in \mathcal{T}$と仮定より, ある$h: \overline{N}/N \longrightarrow M$があり$hq = i$である。従って, $p: M \longrightarrow M/\overline{N}$を標準的射影とすれば$hp = 0$。これより$h(\overline{N}/N) \subset \overline{N}$, 即ち$h: \overline{N}/N \longrightarrow \overline{N}$である。この時$hq'i = hjq = hq = i$。故に$hq' = I_{\overline{N}/N}$, 即ち, q'はsplitし$N = \mathrm{Ker}\, q'$は$\overline{N}$の直和因子である。

$\Leftarrow$. ほとんど明らかである。

上の補題1-2より直ちに次が得られる。

命題 1−3. 加群Nに対し次は同値.

(1) Nはdivisible

(2) すべての$M \supset N$に対しNはMでstrongly pure

(3) すべての$M \supset N$に対し$N \lessdot\!\oplus\ \overline{N}$, ただし$\overline{N}$は$N$の$M$でのclosure

(4) ある入射加群Eがあり, NはEでstrongly pure

(5) $N \lessdot\!\oplus\ \overline{N}$, ただし$\overline{N}$は$N$の$E(N)$でのclosure

(6) Nはあるdivisible加群の直和因子

命題 1−4. $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$はhereditaryとする。この時strongly pure部分加群は(Lambekの意味で) pure部分加群である。

2. codivisible 加群について.

この節では torsion theory はすべて hereditary とする。A, M を加群とする。すべての $M \to A/B$ が $M \to A \to A/B$ に分解するとき M は A-射影的という. ただし $A \to A/B$ は標準的射影。

命題 2-1. M は codivisible 加群 $\Leftrightarrow$ M はすべての $A \in \mathcal{F}$ に対し A-射影的。

証明) $\Rightarrow$. 定義からほとんど明らかである。
$\Leftarrow$. M が codivisible $\Leftrightarrow$ すべての $A \in \mathcal{F}$ に対し $\mathrm{Ext}^1(M, A) = 0$ (例えば [4] P. 476 参照) である。$A \in \mathcal{F}$ とすると $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ は hereditary より $E(A) \in \mathcal{F}$。次の完全系列を考える,

$$\mathrm{Hom}(M, E(A)) \xrightarrow{\alpha} \mathrm{Hom}(M, E(A)/A) \to \mathrm{Ext}^1(M, A) \to 0.$$

M が $E(A)$-射影的より, α は全射. 従って $\mathrm{Ext}^1(M, A) = 0$. 故に M は codivisible。

定義 2-2 (Golan) 加群 M は σ-射影的 $\Leftrightarrow$

$A \to B \to 0$ (exact), A は torsionfree divisible, B は torsionfree に対し, すべての $M \to B$ は $M \to A \to B$ に分解する。
σ-射影性の概念は最初 Goldman により導入され, 彼は次の定理を与えた [2]。

定理 2-3 ([2] 定理 4.5) 次は同値である。
(1) すべての左イデアル $D \in \mathcal{D}$ は σ-射影的。
(2) torsionfree divisible 加群の torsionfree 商加群は divisible.
(3) σ に対応する localization functor は exact.

定理 2-3 を満たす torsion theory は exact torsion theory と呼ばれている。一方定義より直ちに，codivisible 加群は $\mathcal{T}$-射影的である。そこで我々は exact torsion theories の class のある subclass の特徴付けを得た。

定理 2-4. 次は同値である。

(1) すべての左イデアル $D \in \mathcal{D}$ は codivisible.

(2) P は射影加群，P′ は P の部分加群で $P/P' \in \mathcal{T}$ ならば P′ は codivisible.

(3) M は divisible 加群，N は M の torsionfree 部分加群とすると M/N は divisible.

注意 1. 定理 2-4 を満たす torsion theory は exact であるが，逆は成立しない。反例については [3] を参照されたい。

注意 2. 定理 2-4 と同様の結果が片山氏によって "Flat and projective properties in a torsion theory, Res. Rep. of Ube Tech. Coll., NO. 15 (1972)" において得られている。

3. quasi-divisible 加群について

M, A を加群とする。M が A-入射的とは A の任意の部分加群 B から M への準同型射像が A へ拡張されることとする。命題 2-1 の codivisible 加群の特徴付けを双対化して次の定義を得る。

定義 3-1. M は quasi-divisible 加群（以下 q-divisible と略記する）$\Leftrightarrow$ M はすべての $A \in \mathcal{T}$ に対し A-入射的。

divisible 加群，(($\mathcal{T}, \mathcal{F}$) hereditary なら) torsionfree 加群は q-divisible である。

補題3-2. Mはq-divisible, NはMの部分加群で$N \supset \sigma(M)$ならばNはq-divisible。

系. q-divisible加群のstrongly pure部分加群はq-divisible。

次に我々はq-divisible hullを構成する。そのために次の定理が必要である。

定理3-3. ([1], 定理15)
MがA-入射的 $\Leftrightarrow$ すべての$h \in \mathrm{Hom}(A, E(M))$に対し$h(A) \subset M$

$$E_A(M) = \Sigma\{h(A) + M \mid h \in \mathrm{Hom}(A, E(M))\}$$ とおく。

この時次の命題は定理3-3より明らかである。

命題3-4. 次が成立する。

(1) $E_A(M)$はA-入射的
(2) $E(M) \supset N \supset M$, NはA-入射的ならば$N \supset E_A(M)$
(3) MがA-入射的 $\Leftrightarrow$ $E_A(M) = M$

このことから$E_{\mathcal{T}}(M) = \sum_{A \in \mathcal{T}} E_A(M)$とおけば, "$M = E_{\mathcal{T}}(M)$ $\Leftrightarrow$ Mはq-divisible"が成り立つ。我々は$QD(M) = E_{\mathcal{T}}(M)$とおきMの$q$-divisible hullと呼ぶ。

補題3-5. $QD(M) = M + \sigma(E(M))$。

系1. $QD(M) \subset D(M)$, ただし$D(M)$はMのdivisible hull。
系2. Mはq-divisible $\Leftrightarrow$ $\sigma(E(M)) \subset M$。
系3. $M \in \mathcal{T}$とする。Mはq-divisible $\Leftrightarrow$ Mはdivisible
系4. $M \in \mathcal{F}$とする。Mはq-divisible $\Leftrightarrow$ $\sigma(E(M)) = 0$

最後に $\mathcal{J}$-divisible 加群が divisible になる torsion theory について考察する。

定理 3-6. 次の条件を考える。

(1) $\mathcal{F}$ は商加群の構成について閉じている。

(2) $M \supset N$, $M/N \in \mathcal{T} \Rightarrow M = N + \sigma(M)$.

(3) $\mathcal{J}$-divisible 加群は divisible.

このとき, (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3)。 更に $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ hereditary ならば (1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3)。

References

[1] G. Azumaya, M-projective and M-injective modules, unpublished.

[2] O. Goldman, Rings and modules of quotients, J. Algebra 13 (1969), 10-47.

[3] K. Nishida, Divisible modules, codivisible modules, and quasi-divisible modules, to appear in Comm. in Algebra.

[4] K. M. Rangaswamy, Codivisible modules, Comm. in Algebra 2 (6) (1974), 475-489.

Torsion theories and Colocalization

東京教育大　大竹公一郎

Rは単位元を持った環, $\mathfrak{M}_R$ は unital な右R-加群の為す圏とする。今 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ を $\mathfrak{M}_R$ における torsion theory とするとき, M_R が divisible であるとは, $X''\in\mathcal{T}$ であるような任意の完全列 $0\to X'\to X\to X''\to 0$ に関して, $\mathrm{Hom}_R(-,M)$ が完全であるときをいう。また任意の M_R に対して準同型写像 $g: M\to \ell(M)$ が M_R の localization であるとは, $\mathrm{Ker}\, g$, $\mathrm{Cok}\, g\in\mathcal{T}$, $\ell(M)\in\mathcal{F}$ 且つ $\ell(M)$ が divisible なるときをいう。然らば, $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ が hereditary ならば, 任意の M_R が localization を持つことは知られている。しかし一般に, localization が任意の M_R に対して存在すれば, 果して $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ が hereditary になるかどうかは知られていないようである。我々はこのことについて考えるが, その前に localization の dual な概念である colocalization というものを考えてみようと思う。まず $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ はやはり任意の torsion theory とする。M_R が codivisible であるとは, $X'\in\mathcal{F}$ であるような任意の完全列 $0\to X'\to X\to X''\to 0$ に関して, $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ が完全であるときをいう。また, 任意の M_R に対して準同型写像 $f: C(M)\to M$ が M_R の colocalization であるとは, $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Cok}\, f\in\mathcal{F}$, $C(M)\in\mathcal{T}$ 且つ $C(M)$ が codivisible であるときをいう。

一般に hereditary torsion theory は injective module によって cogenerate されることが知られている。即ち, $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ を hereditary torsion theory とすると, $\mathcal{T}=\{M_R \mid \mathrm{Hom}_R(M,V)=0\}$ となる injective module V_R が存在する。逆に injective module によって cogenerate され

た torsión theory が hereditary であることも知られている。そこで McMaster [3] は $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ が射影的加群によって生成されている場合を考え、その ときに任意の加群が colocalización をもち且つそれが同型を除いて一意であることを証明した。即ち、P_R を射影的加群として、$(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ を P_R によって生成された torsión theory とする。然らば、任意の M_R に対して $\varepsilon_M : \mathrm{Hom}_R(P, M)\otimes_S P \to M$ は M_R の colocalización を与えているというのである。ここに、$S = \mathrm{End}(P_R)$ であり、ε_M は $f \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$ 及び $p \in P$ に対して $\varepsilon_M(f\otimes p) = f(p)$ で与えられる。そこで我々は、一般に colocalización が一意であることを示し、次に任意の M_R が colocalization を持つための必要十分条件として次の定理を証明する。

定理A. $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ を $\mathfrak{M}_R$ における torsión theory とするとき、任意の M_R が colocalización を持つための必要十分条件は、$\mathcal{F}$ が剰余加群の下で閉じていることである(即ち $\mathcal{F}$ が TTF-class である)。

最後に我々は定理Aの証明の方法を dual にすることによって、次の定理を得る。

定理B. $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ を $\mathfrak{M}_R$ における torsión theory とするとき、任意の M_R が localización を持つための必要十分条件は、$(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ が hereditary であることである。

§1. Colocalización

$(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ は $\mathfrak{M}_R$ における torsión theory とし、codivisible 或は colocalización という言葉はすべて $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ に関するものとする。

命題1. $f_1 : C(M_1) \to M_1$, $f_2 : C(M_2) \to M_2$ をそれぞれ M_1 及び M_2 の colocalización とする。今準同型写像 $g : M_1 \to M_2$ が与えられたとすると、$g f_1 = f_2 h$ となる準同型写像 $h : C(M_1) \to C(M_2)$ が一意に存在

する。

証明．　完全列 $0 \to \mathrm{Im}\, f_1 \to M_1 \to \mathrm{Cok}\, f_1 \to 0$ を考えると，$\mathrm{Im}\, f_1 \in \mathcal{T}$，$\mathrm{Cok}\, f_1 \in \mathcal{F}$ であるから，$\mathrm{Im}\, f_1 = t(M_1)$ であることがわかる。ここに t は $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ に対応する torsion functor である。よって次の図式が得られる。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{Ker}\, f_1 & \to & C(M_1) & \longrightarrow & t(M_1) & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \vdots & & \downarrow {\scriptstyle t(g)} & & \\ 0 & \to & \mathrm{Ker}\, f_2 & \to & C(M_2) & \longrightarrow & t(M_2) & \longrightarrow & 0 \end{array}.$$

$\mathrm{Ker}\, f_2 \in \mathcal{F}$ 且つ $C(M_1)$ は codivisible であるから，上の図式を可換にする準同型写像 $h : C(M_1) \to C(M_2)$ が存在する。今上の図式を可換にする別な準同型写像 $h' : C(M_1) \to C(M_2)$ があったとすると，$\mathrm{Im}\,(h - h') \in \mathrm{Ker}\, f_2$ であるから，$h - h'$ は $C(M_1) \to \mathrm{Ker}\, f_2$ を導く。一方 $C(M_1) \in \mathcal{T}$ 且 $\mathrm{Ker}\, f_2 \in \mathcal{F}$ であるから，$h - h' = 0$ でなければならない。故に h は一意である。$t(g)$ は g の制限であるから，h が求める準同型写像である。

系1．（Colocalization の一意性）　$f_1 : L_1 \to M$，$f_2 : L_2 \to M$ を M_R の二つの colocalization とすると，$L_1 \cong L_2$ である。

系2．任意の加群 M_R が colocalization $\varphi_M : C(M) \to M$ を持つとすると，C は functor となり，φ は C と $1_{\mathcal{M}_R}$ との natural transformation を与える。

補題1．　M_R が codivisible で N が M の任意の torsion 部分加群ならば M/N も codivisible である。

証明．　$0 \to X' \to X \to X'' \to 0$ を完全で $X' \in \mathcal{F}$ とする。今準同型写

像 $f: M/N \to X''$ が与えられたとすると，次の図式を可換にする準同型写像 $g: M \to X$ が存在する。

$$\begin{tikzcd} & & M \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "g"] & M/N \arrow[d, "f"] & \\ 0 \arrow[r] & X' \arrow[r] & X \arrow[r] & X'' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

ここに π は自然な写像である。このとき $g(N) \subset X'$ であるから，仮定より $g(N)=0$ でなければならない，よって g は上の図式を可換にする準同型写像 $M/N \to X$ を導く。

補題2. $\mathfrak{F}$ は剰余加群の下で閉じているとする，上への準同型写像 $f: X \to M$ に対して

(1) $M \in \mathfrak{T}$ ならば $f|t(X): t(X) \to M$ も上への写像である。

(2) $X \in \mathfrak{T}$ 且つ $\mathrm{Ker}\, f \in \mathfrak{F}$ ならば f は *minimal epimorphism* である。

ここに t は $(\mathfrak{T}, \mathfrak{F})$ に関する *torsion functor* とする。

証明. (1) $M \in \mathfrak{T}$ とする。$f(t(X)) = N$ とおくと，f は上への写像 $\bar{f}: X/t(X) \to M/N$ を導く。仮定より，$X/t(X) \in \mathfrak{F}$ から $M/N \in \mathfrak{F}$ である。一方 $M \in \mathfrak{T}$ であるから，$M/N \in \mathfrak{T}$ である。故に $M = N = f(t(X))$ である。

(2) $X \in \mathfrak{T}$ 且つ $\mathrm{Ker}\, f \in \mathfrak{F}$ とする。Y を $Y + \mathrm{Ker}\, f = X$ となるような X の部分加群とする。然らば明らかに $X/Y \cong \mathrm{Ker}\, f / Y \cap \mathrm{Ker}\, f$. また明らかに $X/Y \in \mathfrak{T}$ で $\mathrm{Ker}\, f / Y \cap \mathrm{Ker}\, f \in \mathfrak{F}$ である。故に $X = Y$ である。

以上二つの補題によって定理Aを証明することができる。

定理Aの証明. t は $(\mathfrak{T}, \mathfrak{F})$ に関する *torsion functor* とする。すべての加群が *colocalization* をもっているとする。$M \in \mathfrak{F}$ で K を M の任意の部分加群とする。$t(M/K) = L/K$ とおき，$\varphi: C(L/K) \to L/K$ を *colocalization* とする。然らば $L/K \in \mathfrak{T}$ であるから φ は上への写像である。$C(L/K)$ が *codivisible* で $K \in \mathfrak{F}$ であるから，次の図式を可換にする準同型写像 $f: C(L/K) \to L$ が

存在する。

$$\begin{tikzcd} & & & C(L/K) \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, "\varphi"] & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r] & L \arrow[r] & L/K \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

一方 $L\in\mathcal{F}$ で $C(L/K)\in\mathcal{T}$ であるから $f=0$ でなければならない。故に $\varphi=0$ である。φ は上への写像であるから $L/K=0$ である。故に $\mathcal{F}$ は剰余加群の下で閉じている。

逆に $\mathcal{F}$ は TTF-class であるとする。M_R を任意の加群とし、P_R を射影的で $0\to K\to P\to t(M)\to 0$ を完全列とする。然らばこれはさらに完全列 $0\to K/t(K)\to P/t(K)\xrightarrow{f} t(M)\to 0$ を導く。補題1と2によって次の図式を可換にする準同型写像 $g: P/t(K)\to t(P/t(K))$ が存在する。

$$\begin{tikzcd} & & & P/t(K) \arrow[dl, "g"'] \arrow[d, "f"] & \\ 0 \arrow[r] & (K/t(K))\cap t(P/t(K)) \arrow[r] & t(P/t(K)) \arrow[r, "f|t(P/t(K))"'] & t(M) \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

このとき $g|t(P/t(K))=id$ が成り立つ。実際 $h=g|t(P/t(K))$ とおくと、$Im(h-id)\subset(K/t(K))\cap t(P/t(K))$ であるが、$t(P/t(K))\in\mathcal{T}$ で $(K/t(K))\cap t(P/t(K))\in\mathcal{F}$ であるから $Im(h-id)=0$ でなければならない。故に $g|t(P/t(K))=id$ である。従って g は split するから $t(P/t(K))$ は $P/t(K)$ の直和因子である。補題1より $P/t(K)$ は codivisible であるからその直和因子である $t(P/t(K))$ も codivisible である。故に合成写像

$$t(P/t(K))\to t(M)\hookrightarrow M$$

が M の colocalization である。

torsion theory $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ で $\mathcal{F}$ が TTF-class のとき $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ を co-hereditary と呼ぶことにする。任意の $M\in\mathfrak{M}_R$ に対して $C(M)\to M$ を co-localization とすると、C は系2によって functor となる。C を colocalization functor と呼ぶことにする。以下 $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ は cohereditary とし、C を co-localization functor とする。

系3. $M\in\mathcal{T}$ ならば colocalization $C(M)\to M$ は minimal epimorphism である。

証明. 補題2, (2) より明らかである。

$C(R)=\Lambda$ とおく。R は左 R-加群でもあるから. Λ は自然に両側加群となる。$\mu:\Lambda\longrightarrow R$ を colocalization とすると. $\lambda\in\Lambda$, $r\in R$ に対して $r\lambda=C(r)\lambda$ であるから. 可換な図式

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \xrightarrow{\mu} & R \\ {\scriptstyle C(r)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle r} \\ \Lambda & \xrightarrow{\mu} & R \end{array}$$

から. $\mu(r\lambda)=r\mu(\lambda)$ が成り立つ。即ち. μ は両側加群の準同型写像である。

補題3. $C(R)=\Lambda$ とおくと. 任意の $\lambda,\lambda'\in\Lambda$ に対して $\mu(\lambda)\lambda'=\lambda\mu(\lambda')$ が成り立つ。また $\lambda\lambda'=\lambda\mu(\lambda')$ と定義すれば Λ は環になる。

証明. $\lambda\in\Lambda$ を固定し. $g:\Lambda\to\Lambda$ を $g(\lambda')=\mu(\lambda)\lambda'-\lambda\mu(\lambda')$ で定義する。g は明らかに右 R-加群としての準同型写像である。また上に注意したことより. $\operatorname{Im} g\subset\operatorname{Ker}\mu$ であるから $g=0$ である。故に任意の $\lambda,\lambda'\in\Lambda$ に対して. $\lambda\mu(\lambda')=\mu(\lambda)\lambda'$ が成り立つ。Λ が環になることは明らかである。

定理1. 任意の $M\in\mathfrak{M}_R$ に対して $\varphi:M\otimes_R\Lambda\to M$ ($\varphi(\Sigma m\otimes\lambda)=\Sigma m\mu(\lambda)$) は M の colocalization を与える。

証明. $\mathcal{T}$ は TTF-class であるから. $\mathcal{T}=\{M_R\mid MI=M\}$, $\mathcal{F}=\{M_R\mid MI=0\}$ となるべき等 ideal I が存在する。然らば $\operatorname{Im}\mu=I$ となることは容易にわかる。任意の $M\in\mathfrak{M}_R$ に対して. $\varphi:M\otimes_R\Lambda\to M$ を $\varphi(\Sigma m\otimes\lambda)=\Sigma m\mu(\lambda)$ とすると. $\operatorname{Im}\varphi=MI$ より. $\operatorname{Cok}\varphi\in\mathcal{F}$ である。

$\sum m\otimes\lambda \in \mathrm{Ker}\,\varphi$ とすると．任意の $\lambda'\in\Lambda$ に対して．$(\sum m\otimes\lambda)u(\lambda') = \sum m\otimes\lambda u(\lambda') = \sum m\otimes u(\lambda)\lambda' = \sum m u(\lambda)\otimes\lambda' = 0$。故に $\mathrm{Ker}\,\varphi\in\mathcal{F}$ である。また $\Lambda\in\mathcal{T}$ であるから．$M\otimes_R\Lambda\in\mathcal{T}$ は明らかである。よって示すべきことは $M\otimes_R\Lambda$ が codivisible なることである。$0\to X'\to X\to X''\to 0$ を完全で $X'\in\mathcal{F}$ とする。然らば Λ_R は codivisible で $\Lambda\in\mathcal{T}$ であるから．$\mathrm{Hom}_R(\Lambda,X)\cong\mathrm{Hom}_R(\Lambda,X'')$ である。故に可換な図式

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_R(M,\mathrm{Hom}_R(\Lambda,X)) & \cong & \mathrm{Hom}_R(M,\mathrm{Hom}_R(\Lambda,X'')) \\
\wr\Vert & & \wr\Vert \\
\mathrm{Hom}_R(M\otimes_R\Lambda,X) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_R(M\otimes_R\Lambda,X'')
\end{array}$$

から．$M\otimes_R\Lambda$ は codivisible である。

§2 Localization

再び $(\mathcal{T},\mathcal{F})$ は $\mathfrak{M}_R$ における任意の torsion theory とし．t は torsion functor とする。

命題2. $g_1: M_1\to N_1$ と $g_2: M_2\to N_2$ をそれぞれ M_1, M_2 の localization とする。今準同型写像 $f: M_1\to M_2$ が与えられたとすると．$hg_1 = g_2 f$ となる準同型写像 $h: N_1\to N_2$ が一意に存在する。

証明. 次の図式が得られる.

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & M_1/\mathrm{Ker}\,g_1 & \to & N_1 & \to & \mathrm{Cok}\,g_1 & \to & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \bar{f}} & & & & & & \\
0 & \to & M_2/\mathrm{Ker}\,g_2 & \to & N_2 & \to & \mathrm{Cok}\,g_2 & \to & 0 .
\end{array}$$

N_2 が divisible で $\mathrm{Cok}\,g_1\in\mathcal{T}$ であるから．上の図式を可換にする準同型写像 $h: N_1\to N_2$ が存在する。然らばこの h が求める準同型写像であることは容易にわかる。

系4. (Localizationの一意性) $g_1: M\to N_1$ と $g_2: M\to N_2$ を M の二つの localization とする。然らば $N_1\cong N_2$ である。

系5. 任意の加群 M_R が localization $\varphi_M: M \to \ell(M)$ を持つとすると, ℓ は functor となり, φ は $1_{\mathcal{M}_R}$ と ℓ との natural transformation を与える。

補題4. M_R が divisible で N が $M/N \in \mathcal{F}$ となる M の部分加群ならば N も divisible である。

証明. $0 \to X' \xrightarrow{f} X \to X'' \to 0$ を完全で, $X'' \in \mathcal{T}$ また $g: X' \to N$ を任意の準同型写像とする。然らば $hf = ig$ となる準同型写像 $h: X \to M$ が存在する。ここに i は埋蔵写像 $N \hookrightarrow M$ である。$\mathrm{Im}\, h \subset N$ を示せばよい。列 $X \xrightarrow{h} M \to M/N$ は $X \to X/f(X') \to M/N$ に分解される。ここに $M \to M/N$ と $X \to X/f(X')$ は自然な写像であり, $X/f(X') \to M/N$ は h から自然に導かれたものである。一方仮定より $X/f(X') \in \mathcal{T}$ で $M/N \in \mathcal{F}$ であるから $X/f(X') \to M/N$ は零写像である。故に $\mathrm{Im}\, h \subset N$。よって N は divisible である。

補題5. $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ は hereditary とする。$f: M \to X$ を準同型写像とし, $M \in \mathcal{F}$ とする。f が単射的ならば $M \xrightarrow{f} X \to X/t(X)$ も単射である。ここに $X \to X/t(X)$ は自然な写像である。

また $M \in \mathcal{F}$ で K が $M/K \in \mathcal{T}$ となる M の部分加群ならば M は K の本質的拡大である。

証明. 最初の部分は明らかである。$M \in \mathcal{F}$ で K を $M/K \in \mathcal{T}$ となる M の部分加群とする。X を $X \cap K = 0$ となる M の部分加群とする。然らば, $(X+K)/K \cong X$ であるから $X \in \mathcal{T} \cap \mathcal{F} = \{0\}$。故に M は K の本質的拡大である。

定理Bの証明. すべての加群が localization を持っているとする。$M \in \mathcal{T}$ で K を M の任意の部分加群とする。

$g: K/t(K) \to \ell(K/t(K))$ を localization とする。然らば $K/t(K) \in \mathcal{F}$ であるから g は単射である。また $\ell(K/t(K))$ が divisible で $M/K \in \mathcal{T}$ であるから図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K/t(K) \arrow[r] \arrow[d, "g"] & M/t(K) \arrow[r] \arrow[dl, dashed] & M/K \arrow[r] & 0 \\ & \ell(K/t(K)) & & & \end{tikzcd}$$

を可換にする準同型写像 $f: M/t(K) \to \ell(K/t(K))$ が存在する。一方 $M/t(K) \in \mathcal{T}$ であるから $f=0$ である。故に $g=0$ である。g は単射であるから $K/t(K)=0$ である。よって $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ は hereditary である。

逆に $(\mathcal{T}, \mathcal{F})$ は hereditary であるとする。$M \in \mathcal{M}_R$ で E_R を injective module とし、$0 \to M/t(M) \xrightarrow{f} E \xrightarrow{g} N \to 0$ を完全列とする。$g^{-1}(t(N)) = E'$ とおくと、$E/E' \cong N/t(N) \in \mathcal{F}$ である。故に補題4によって E' は divisible である。我々はさらに完全列

$$(*) \quad 0 \to M/t(M) \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{g'} t(N) \to 0$$

を得る。然らば補題5によって $M/t(M) \xrightarrow{f'} E' \xrightarrow{\pi} E'/t(E')$ は単射である。ここに π は自然な写像である。故に $(*)$ は可換な図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M/t(M) \arrow[r, "f'"] \arrow[d, equal] & E' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "\pi"] & t(N) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & M/t(M) \arrow[r, "\pi f'"] & E'/t(E') \arrow[r, "\bar{g}"] & t(N)/g'(t(E')) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

を導く。故に図式

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M/t(M) \arrow[r, "\pi f'"] \arrow[d, "f'"] & E'/t(E') \arrow[r, "\bar{g}"] \arrow[dl, "h"] & t(N)/g'(t(E')) \arrow[r] & 0 \\ & E' \arrow[dl, "\pi"] & & & \\ E'/t(E') & & & & \end{tikzcd}$$

を可換にする準同型写像 $h: E'/t(E') \to E'$ が存在する。このとき、$\pi h = id$ であることは容易にわかる。故に $E/t(E')$ は E' の直和因

子に同型である。一方 E' は divisible であるから $E'/t(E')$ も divisible である。故に合成写像

$$M \longrightarrow M/t(M) \xrightarrow{\pi f'} E'/t(E')$$

が M の localization を与える。

系6. $M \in \mathfrak{F}$ で $M \to l(M)$ を localization とすると、これは M の本質的拡大である。

証明. これは補題5の系である。

References

[1] S. E. Dickson, A torsion theory for abelian categories, Trans. Amer. Math. Soc. 121 (1966), 223 - 235.

[2] J. P. Jans, Some aspects of torsion, Pacific J. Math. 15 (1965), 1249 - 1259.

[3] R. J. McMaster, Cotorsion theories and colocalization, Can. J. Math. Vol. 27 No. 3 (1975), 518 - 628.

[4] B. Stenstroem, Rings and modules of quotients, Lecture Notes in Math. 237 (Springer, Berlin, 1971).

Duality between colocalization and localization

筑波大学数学系　加藤　豊紀

R, S を rings with 1, ${}_R\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_R$, ${}_S\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_S$ をそれぞれ 左 R-, 右 R-, 左 S-, 右 S- 加群の categories, I を R の left ideal, J を S の right ideal とする.

函手 $\mathrm{Hom}({}_RC, -)$ が 左 R-加群の完全列

$$0 \longrightarrow X' \longrightarrow X \longrightarrow X'' \longrightarrow 0 \quad \text{with} \quad IX' = 0$$

の上で完全であるとき, ${}_RC$ を I-projective とよぶ (cf. Katayama [5], Bland [2]).

${}_R\mathcal{M}$ の fullsubcategory

$${}_I\mathcal{C} = \{ C \in {}_R\mathcal{M} \mid IC = C,\ {}_RC \text{ is } I\text{-projective} \}$$

と定め, 同様に $\mathcal{M}_S$ の fullsubcategory

$$\mathcal{C}_J = \{ C \in \mathcal{M}_S \mid CJ = C,\ C_S \text{ is } J\text{-projective} \}$$

と定める.

準同型 $\phi : {}_RC \longrightarrow {}_RM$ が

C1. $I\,\mathrm{Ker}\,\phi = I\,\mathrm{Cok}\,\phi = 0$,

C2. $C \in {}_I\mathcal{C}$

を満すとき, ϕ を M の I-colocalization とよぶ (cf. McMaster [8]).

これと双対的に函手 $\mathrm{Hom}(-, {}_S L)$ が左 S-加群の完全列

$$0 \longrightarrow Y' \longrightarrow Y \longrightarrow Y'' \longrightarrow 0 \quad \text{with} \quad JY'' = 0$$

の上で完全であるとき，${}_S L$ を J-injective とよぶ (cf. Lambek [7]).

${}_S\mathcal{M}$ の fullsubcategory

$${}_J\mathcal{L} = \{ L \in {}_S\mathcal{M} \mid \mathrm{Ann}_L(J) = 0,\ {}_S L \text{ is } J\text{-injective} \}$$

と定め，同様に $\mathcal{M}_R$ の fullsubcategory

$$\mathcal{L}_I = \{ L \in \mathcal{M}_R \mid \mathrm{Ann}_L(I) = 0,\ L_R \text{ is } I\text{-injective} \}$$

と定める．

準同型 $\psi : {}_S N \longrightarrow {}_S L$ が

L1. $J\,\mathrm{Ker}\,\psi = J\,\mathrm{Cok}\,\psi = 0$

L2. $L \in {}_J\mathcal{L}$

を満すとき，ψ を N の J-localization とよぶ (cf. Lambek [7]).

函手 $(U \otimes_S -)$ が左 S-加群の完全列

$$0 \longrightarrow Y' \longrightarrow Y \longrightarrow Y'' \longrightarrow 0 \quad \text{with} \quad JY'' = 0$$

の上で完全であるとき，U_S を J-flat とよぶ (cf. Katayama [5], Bland [3]).

さて，D を set とするとき，R-S-bimodule ${}_R U_S$ が

D0. D の元 d と U の元 u に対して，積 $(u, d) \in R$, $[d, u] \in S$ が定められている，

D1. $(u+u', d) = (u,d)+(u',d)$, $[d, u+u'] = [d,u] + [d,u']$,

D2. $(ru, d) = r(u,d)$, $[d, us] = [d,u]s$,

D3. $(u,d)u' = u[d,u']$, for $u, u' \in U$, $d \in D$, $r \in R$, $s \in S$

を満すとき，$_RU_S$ を D-context とよぶ (cf. Bass [1])．

D-context $_RU_S$ に対し

$$I = {}_RI = \left\{ \sum (u_i, d_i) \;\middle|\; u_i \in U,\ d_i \in D \right\},$$

$$J = J_S = \left\{ \sum [d_i, u_i] \;\middle|\; u_i \in U,\ d_i \in D \right\}$$

を D-context $_RU_S$ の trace ideals とよぶ．I は R の left ideal，J は S の right ideal である．

R-S-bimodule $_RU_S$ に対し，函手

$$H = {}_S\mathrm{Hom}({}_RU, -) \;:\; {}_R\mathcal{M} \longrightarrow {}_S\mathcal{M},$$

$$H' = \mathrm{Hom}(U_S, -)_R \;:\; \mathcal{M}_S \longrightarrow \mathcal{M}_R,$$

$$T = {}_R(U \otimes_S -) \;:\; {}_S\mathcal{M} \longrightarrow {}_R\mathcal{M},$$

$$T' = (- \otimes_R U)_S \;:\; \mathcal{M}_R \longrightarrow \mathcal{M}_S,$$

と定め，各 $_RM$ に対し自然準同型 $\Phi_M : TH(M) \longrightarrow M$ を

$$(u \otimes f)\Phi_M = uf \quad \text{for } u \in U,\ f \in \mathrm{Hom}({}_RU, {}_RM)$$

と定め，同様に各 M_S に対し自然準同型

$\Phi'_M : T'H'(M) \longrightarrow M$ を定め，各 $_SN$ に対し自然準同型

$\Psi_N : N \longrightarrow HT(N)$ を

$$u(n\Psi_N) = u \otimes n \quad \text{for } u \in U,\ n \in N$$

と定め，同様に各 N_R に対し自然準同型

$\Psi'_N : N \longrightarrow H'T'(N)$ を定める．

$$\mathrm{Im}\, H = \left\{ L \in {}_S\mathcal{M} \;\middle|\; L \approx H(M) \text{ for some } M \in {}_R\mathcal{M} \right\}$$

と定め，同様に $\mathrm{Im}\, H'$，$\mathrm{Im}\, T$，$\mathrm{Im}\, T'$ を定める．

次は加群の局所化と余局所化との双対定理である．

証明は [6] を参照せられたい.

定理 (Kato [6]). ${}_RU_S$ を D-context, その trace ideals を ${}_RI$, J_S とする. 次の条件は同値である.

(1) $IU=U$ であり, ${}_RU$ は I-projective である.

(2) $\mathrm{Im}\, T \subseteq {}_I\mathscr{C}$.

(3) $\mathrm{Im}\, T = {}_I\mathscr{C}$.

(4) 函手 H と T は category equivalence

$${}_I\mathscr{C} \sim \mathrm{Im}\, H$$

を引き起す.

(5) 任意の ${}_RM$ について, $\Phi_M : TH(M) \longrightarrow M$ は M の I-colocalization である.

(6) $UJ=U$ であり, U_S は J-flat である.

(7) $\mathrm{Im}\, H \subseteq {}_J\mathscr{L}$.

(8) $\mathrm{Im}\, H = {}_J\mathscr{L}$.

(9) 函手 H と T は category equivalence

$$\mathrm{Im}\, T \sim {}_J\mathscr{L}$$

を引き起す.

(10) 任意の ${}_SN$ について, $\Psi_N : N \longrightarrow HT(N)$ は N の J-localization である.

(11) $IU=U$ であり, ${}_RU$ は I-flat である.

(12) $\mathrm{Im}\, H' \subseteq \mathscr{L}_I$.

(13) $\mathrm{Im}\, H' = \mathscr{L}_I$.

(14) 函手 H′ と T′ は category equivalence

$$\mathrm{Im}\, T' \sim \mathscr{L}_I$$

を引き起す.

(15) 任意の N_R について, $\Psi'_N : N \longrightarrow H'T'(N)$ は N の I-localization である.

(16) $UJ = U$ であり, U_S は J-projective である.

(17) $\mathrm{Im}\, T' \subseteq \mathscr{C}_J$.

(18) $\mathrm{Im}\, T' = \mathscr{C}_J$.

(19) 函手 H' と T' は category equivalence

$$\mathscr{C}_J \sim \mathrm{Im}\, H'$$

を引き起す.

(20) 任意の M_S について, $\Phi'_M : T'H'(M) \longrightarrow M$ は M の J-colocalization である.

従ってとくに, 上の同値な条件が満たされれば, 函手 H と T は category equivalence

$${}_I\mathscr{C} \sim {}_J\mathscr{L}$$

を引き起し, 函手 H' と T' は category equivalence

$$\mathscr{C}_J \sim \mathscr{L}_I$$

を引き起す.

注. 上の定理において, (1) $\Longrightarrow$ (11), (16) $\Longrightarrow$ (6) は Bland [3, Theorem 2.3] による.

最後に, 上の定理の条件を満す D-context ${}_RU_S$ の例を挙げよう. $I = R$ あるいは $J = S$ なら, 定理の条件は自明的に満たされ, とくに $I = R$ かつ $J = S$ の場合, 定理における category equivalences は, いわゆる Morita-equivalence (cf. Morita [9], Bass [1]) に

なる訳である。

例1 (cf. Cunningham, Rutter, Turnidge [4], McMaster [8]). U_S を projective, $R = \mathrm{End}(U_S)$, $D = \mathrm{Hom}(U_S, S_S)$, $[d, u] = du$, $(u, d)u' = u(du')$ for $d \in D$, $u, u' \in U$ とする。${}_RU_S$ は D-context で、定理の条件 (6), (16) を満す。

例2. ${}_RU_S$ を D-context とし、その trace ideals を ${}_RI$, J_S とする。$IU = U$ のとき、${}_R\tilde{U}_S = {}_R(U \otimes_S SJ)_S$, $(\sum u\otimes j, d) = \sum (uj, d)$, $[d, \sum u\otimes j] = \sum [d, uj]$ for $\sum u\otimes j \in \tilde{U}$, $d \in D$ と定めると、${}_R\tilde{U}_S$ は D-context with the trace ideals ${}_RI$ and J_S で定理の条件 (1) を満す。

例3 (cf. Ohtake [10], Sato [11]). I を R の両側イデアルとする。$(a, r) = ar$, $[r, a] = ra$ for $a \in I$, $r \in R$ により ${}_RI_R$ は R-context になりその trace ideals は共に I である。$II = I$ だから例2より ${}_R\tilde{I}_R = {}_R(I \otimes_R I)_R$ は R-context でその trace ideals は共に I となり定理の条件を満す。

References

[1] H. Bass, The Morita theorems, Lecture Notes, Univ. of Oregon, 1962.

[2] P. E. Bland, Perfect torsion theories, Proc. Amer. Math. Soc. 41 (1973), 349-355.

[3] P. E. Bland, Relatively flat modules, Bull. Austral. Math. Soc. 13 (1975), 375-387.

[4] R. S. Cunninghum, E. A. Rutter, Jr., and D. R. Turnidge, Rings of quotients of endomorphism rings of projective modules, Pacific J. Math. 41 (1972), 647-668.

[5] H. Katayama, Flat and projective properties in a torsion theory, Res. Rep. of Ube Tech. Coll. 15 (1972), 1-4.

[6] T. Kato, Duality between colocalization and localization, preprint, 1976.

[7] J. Lambek, "Torsion theories, additive semantics, and rings of quotients," Lecture Notes in Mathematics 177, Springer-Verlag, Berlin, 1971.

[8] R. J. McMaster, Cotorsion theories and colocalization, Can. J. Math. 27 (1975), 618-628.

[9] K. Morita, Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sect. A 6, No. 150 (1958), 83-142.

[10] K. Ohtake, Colocalization and localization, preprint, 1976.

[11] M. Sato, The concrete description of the colocalization, preprint, 1976.